XXXIV олимпијада

1. Нека $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, каде $n>1$ е природен број. Докажи дека $f(x)$ не може да се претстави како производ на два полиноми со целобројни коефициенти со степен поголем или еднаков на 1.

Решение. Да претпоставиме дека $f(x)=g(x)h(x)$, каде $g(x)$ и $h(x)$ се полиноми со ненулти степени и со целобројни коефициенти. Од $f(0)=3$ следува дека еден од броевите $|g(0)|$, $|h(0)|$ е еднаков на 1. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$|g(0)|=1 \text{ и } g(x)=x^k+a_1x^{k-1}+...+a_k .$$

Ќе докажеме дека $k>1$. Навистина, ако $k=1$, тогаш $g(x)=x+a$ и како $|g(0)|=1$, имаме $a=\pm 1$, $g(x)=x\pm 1$ и $f(\mp 1)=0$ што не е можно.

Нека $\alpha_i, i=1,2,...,k$ се корените на полиномот $g(x)$. Тогаш,

$$g(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)$$

и $|g(0)|=|\alpha_1\alpha_2...\alpha_k|=1$. Во равенката $f(x)=0$ ставаме $x=\alpha_i$ и добиваме

$$\alpha_i^{n-1}(\alpha_i+5)=-3, \text{ за } i=1,,...,k .$$

Ако ги помножиме овие равенства добиваме

$$|(\alpha_1+5)(\alpha_2+5)...(\alpha_k+5)|=3^k \quad (1)$$

Од равенствата

$$|g(-5)|=|\alpha_1+5|\cdot|\alpha_2+5|\cdot...\cdot|\cdot\alpha_k+5| \text{ и } 3=f(-5)=g(-5)h(-5) ,$$

бидејќи коефициентите на $g(x)$ и $h(x)$ се целобројни добиваме

$$|(\alpha_1+5)(\alpha_2+5)...(\alpha_k+5)|=3 \text{ или } 1 .$$

Но, ова противречи на (1), бидејќи $k>1$, па затоа $f(x)$ не може да се запише во облик $g(x)h(x)$.

2. Нека D е внатрешна точка во остроаголниот ΔABC таква што

$$\measuredangle ADB=\measuredangle ACB+90^\circ \text{ и } \overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AD}\cdot\overline{BC} .$$

а) Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}$.

б) Докажи дека тангентите во точката C повлечени на кружниците опишани околу триаголниците ACD и BCD се заемно нормални.

Решение. б) Нека $DE\perp DB$, $\overline{DE}=\overline{DB}$ и CT и CU се тангентите во точката C на кружниците опишани околу триаголниците ACD и BCD, соодветно.

Лема. Ако во точката M на $\triangle KLM$ е повлечена тангента MT на опишаната кружница околу триаголникот, тогаш $\measuredangle TML=\measuredangle MKL$.

Доказ. Низ точката M повлекуваме дијаметар MK_1. Тогаш, $\measuredangle MKL = \measuredangle MK_1L$, како агли над ист лак во кружница. Понатаму, аглите MK_1L и TML се агли со нормални краци, па затоа $\measuredangle TML = \measuredangle MK_1L$. Сега тврдењето на лемата следува од претходните две равенства. ■

Од претходната лема следува $\measuredangle TCD = \measuredangle CAD$ и $\measuredangle DCU = \measuredangle DBC$. Според тоа

$$\measuredangle EDA + \measuredangle DAB + \measuredangle ABD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

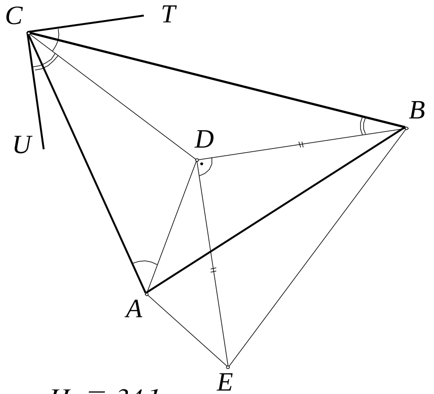
Од условот на задачата следува

$$\measuredangle EDA + 90^\circ = \measuredangle BCA + 90^\circ \text{, т.е. } \measuredangle EDA = \measuredangle BCA.$$

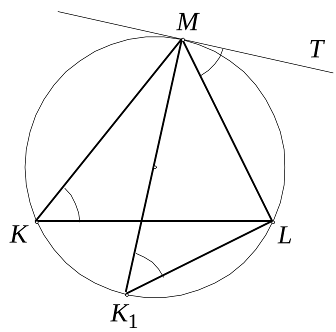
Според тоа,

$$\begin{aligned}\measuredangle CAD + \measuredangle DBC &= 180^\circ - (\measuredangle BCA + \measuredangle DAB + \measuredangle ABD) \\ &= 180^\circ - (\measuredangle EDA + \measuredangle DAB + \measuredangle ABD) = 90^\circ\end{aligned}$$

Сега од $\measuredangle TCD + \measuredangle DCU = \measuredangle CAD + \measuredangle DBC = 90^\circ$ следува дека тангентите CT и CU се заемно нормални.



Црт. 34.1.



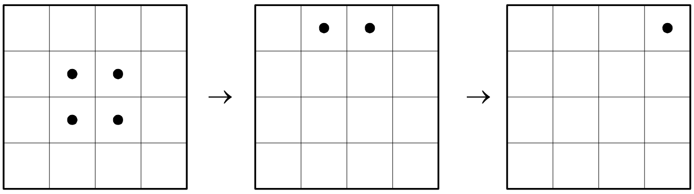
Црт. 34.2.

а) Од условите на задачата следува дека $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$. Од б) имаме $\measuredangle EDA = \measuredangle BCA$, па затоа $\triangle EDA \sim \triangle BCA$, (должините на страните кај еднаквиот агол се пропорционални). Затоа, $\measuredangle CAB = \measuredangle DAE$ и $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$, од што следува $\measuredangle CAD = \measuredangle CAB - \measuredangle DAB = \measuredangle DAE - \measuredangle DAB = \measuredangle BAE$. Од исти причини и триаголниците CAD и BAE се слични, па затоа $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{CD}}{\sqrt{2}\cdot\overline{BD}}$, бидејќи триаголникот BDE е рамнокрак правоаголен. Конечно, бараниот однос е $\sqrt{2}$.

3. На бесконечна шаховска табла се игра следната игра. На почеток, n^2 жетони се поставени на полиња на $n \times n$ квадрат и тоа по еден жетон на секое поле. Во оваа игра, „потез“ е скок во хоризонтална или вертикална насока преку зафатено на слободно поле кое е непосредно до него. Жетонот преку кој се скока се отстранува.

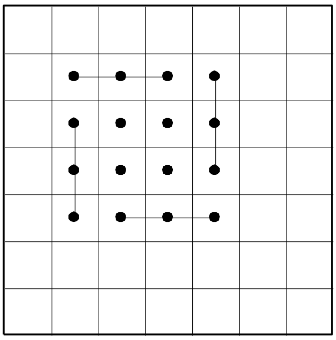
Најди ги сите вредности n за кои играта може да се заврши само со еден жетон на таблата.

Решение. а) Ако $n=2$, тогаш играта може да заврши со еден жетон на таблата, како што е прикажано на црт. 34.3.

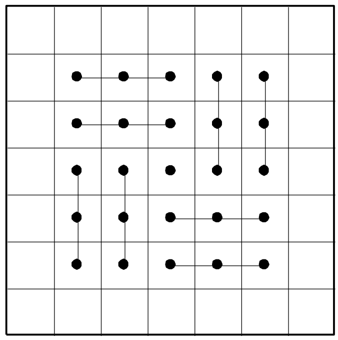


Црт. 34.3.

b) Ако $n=4$ или $n=5$, тогаш исто така играта може да заврши само со еден жетон на таблата, како што е прикажано на црт. 34.4 и црт. 34.5.

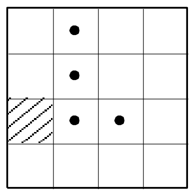


Црт. 34.4.

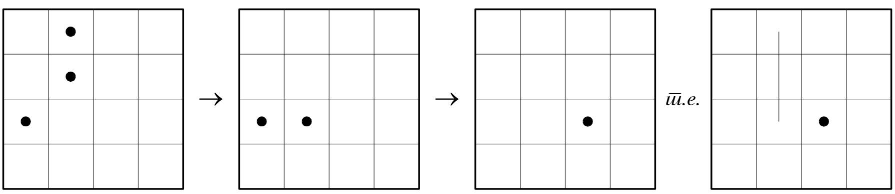


Црт. 34.5.

Имено, секои четири жетони распоредени како на цртеж 34.6, каде штрафираното поле е слободно можеме да ги сведеме на поедноставен облик прикажан на црт. 34.7, каде со цртата се обележени полињата од кои се отстранети жетоните.



Црт. 34.6.

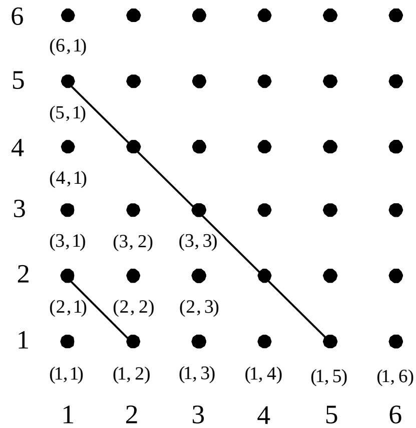


Црт. 34.7.

c) Нека $n \geq 7$ и $3 \nmid n$. Сега, со примена на постапките од црт. 34.4 и црт. 34.5 или со трикратна примена на постапката од црт. 34.4, можеме да ги отстраниме сите жетони кои се наоѓаат надвор од квадратот $(n-6)\times(n-6)$ и постапката ја повторуваме онолку пати колку што тоа е потребно. На крајот проблемот се сведува на еден од случаите $n = 1, 2, 4$ или 5 и во секој случај играта може да заврши со само еден жетон на таблата.

d) Сега да го разгледаме случајот $n = 3p$. Да ги нумерираме редовите и колоните како што е прикажано на црт. 34.8. На секој жетон кој се наоѓа на полето (i, j) му го придружуваме бројот $i + j$ и сите жетено да ги поделиме на три групи S_0, S_1, S_2 така да во групата S_k за кои важи

$$i + j \equiv k (\mathrm{mod}\, 3), k = 0,1,2 .$$



Црт. 34.8.

Ако еден жетон го прескокне соседниот и премине на ново поле, тогаш во две групи бројот на жетоните се намалува за еден, а во третата се зголемува за еден, што значи дека парноста на бројот на жетоните во секој чекор се менува во секоја група. Да определиме колку жетонин има на почетокот во секоја група.

$$\begin{aligned} |S_0| &= 2+5+...+(n-1)+(n-2)+(n-5)+...+4+1 \\ &= (1+2+...+n) - 3(1+2+...+\tfrac{n}{3}) \\ &= \tfrac{3p(3p+1)}{2} - \tfrac{3p(p+1)}{2} = 3p^2 \\ |S_1| &= 3+6+...+(n-3)+n+(n-3)+...+6+3 \\ &= 3(1+2+...+p) + 3(1+2+...+(p-1)) \\ &= \tfrac{3p(p+1)}{2} + \tfrac{3p(p-1)}{2} = 3p^2 \\ |S_2| &= (3p)^2 - |S_0| - |S_1| = 3p^2 \end{aligned}$$

Броевите $|S_0|, |S_1|, |S_2|$ на почетокот се со иста парност и парноста ја задржуваат по секој чекор, па затоа не е можно на крајот два од нив да се еднакви на 0, а еден да е еднаков на 1.

4. За три точки P, Q и R бројот $m(PQR)$ е еднаков на најмалата должина од висините на триаголникот PQR (при што $m(PQR) = 0$ ако P, Q и R се колинеарни). Нека A, B и C се дадени точки во рамнината π.

Докажи дека за секоја точка $X \in \pi$ важи:

$$m(ABC) \le m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

Решение. Ќе разгледаме три случаи.

а) Точката X лежи во внатрешноста или на страните на $\triangle ABC$. При ознаки $\overline{AB} = c,\ \overline{BC} = a$ и $\overline{CA} = b$ важи $\overline{CX} \le \max\{a,b\}$.

Заради симетрија можеме да земеме дека точката X' лежи меѓу подножната точка H_c на висината повлечена од темето C и темето A. Понатаму,

$$\overline{CX} \le \overline{CX'} \le \overline{CA} \text{ и } \overline{CX} \le \max\{a,b,c\}.$$

Според тоа, во секој од триаголниците ABX, BCX и ACX најголемата страна е помала или еднаква на $\max\{a,b,c\}$.

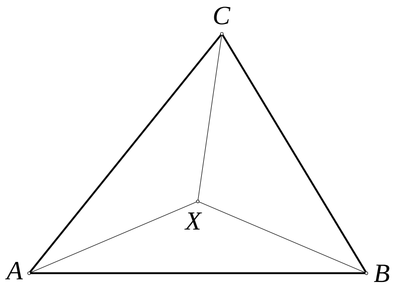
Од $h_c c = h_a a = h_b b = 2P = 2P_{\triangle ABC}$ следува $m(ABC) = \frac{2P}{\max\{a,b,c\}}$. Сега

$$P_{\triangle ABX} + P_{\triangle ACX} + P_{\triangle BCX} = P_{\triangle ABC},$$

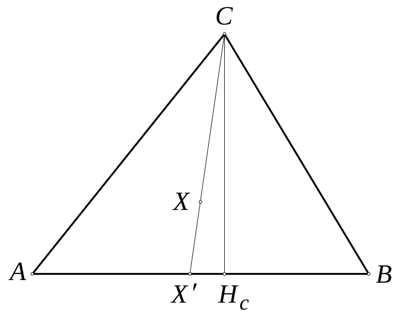
па затоа

$$m(ABX) + m(ACX) + m(BCX) \ge \frac{2P_{\triangle ABX}}{\max\{a,b,c\}} + \frac{2P_{\triangle ACX}}{\max\{a,b,c\}} + \frac{2P_{\triangle BCX}}{\max\{a,b,c\}}$$

$$= \frac{2P_{\triangle ABC}}{\max\{a,b,c\}} = m(ABC)$$



Црт. 34.9.



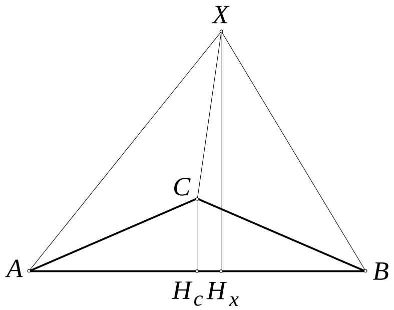
Црт. 34.10.

b) X е надвор од $\triangle ABC$ и ниедна од полуправите AX, BX и CX не сече ниедна од страните на $\triangle ABC$. Еден од триаголниците ABX, ACX, BCX го содржи $\triangle ABC$ и најмалата висина во $\triangle ABC$ е помала или еднаква на најмалата висина во тој триаголник. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека темето C е внатрешна точка за $\triangle ABX$ или лежи на неговите страни. Ако $m(ABX)$ е висината над страната AB, тогаш

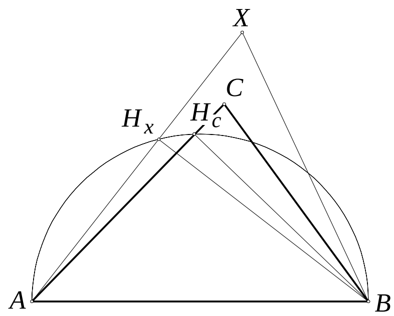
$$m(ABX) \ge \overline{XH}_X \ge \overline{CH}_C \ge m(ABC).$$

Ако $m(ABX)$ е висина на страната AX, тогаш $\measuredangle ABX \ge \measuredangle XAB$, бидејќи $2\measuredangle XAB \le \measuredangle XAB + \measuredangle ABX < 180^\circ$ и $\measuredangle XAB$ е остар. Бидејќи C е внатрешна точка за $\triangle ABX$ или лежи на неговите страни и $\measuredangle XAB \ge \measuredangle CAB$ добиваме

$\overline{BH}_X \geq \overline{BH}_C$, ($\measuredangle BH_X A = \measuredangle BH_C A = 90^\circ$ и $\overline{BH}_X$ е тетива над поголем периферен агол). Според тоа,



Црт. 34.11.



Црт. 34.12.

$$m(ABX) = \overline{BH}_X \geq \overline{BH}_C \geq m(ABC)$$

и ако земеме предвид дека $m(ACX) \geq 0$ и $m(BCX) \geq 0$ добиваме:

$$m(ABX) + m(ACX) + m(BCX) \geq m(ABC),$$

c) Една од полуправите AX, BX и CX сече некоја од страните на $\triangle ABC$. Од b) следува дека

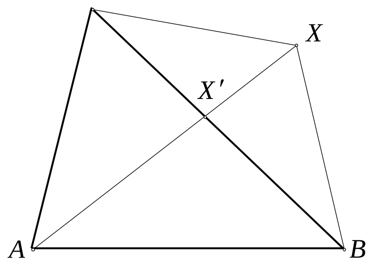
$m(ABX) \geq m(ABX')$ и $m(ACX) \geq m(ACX')$.

Понатаму, од a) следува дека

$m(ABX') + m(ACX') + m(BCX') \geq m(ABC)$.

Од $m(BCX') \geq 0$ добиваме

$$m(BCX) \geq m(BCX').$$



Црт. 34.13.

Од досега изнесеното следува дека

$$m(ABX) + m(ACX) + m(BCX) \geq m(ABX') + m(ACX') + m(BCX') \geq m(ABC).$$

5. Дали постои функција $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таква што

(*i*) $f(1) = 2$

(*ii*) $f(f(n)) = f(n) + n$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и

(*iii*) $f(n) < f(n+1)$, за секое $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Нека $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ е едно од решенијата на квадратната равенка $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$. За функцијата $g(x) = \alpha x$, важи

$$g(g(n)) - g(n) - n = 0, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}.$$

Ќе докажеме дека функцијата $f(n) = [g(n) + \frac{1}{2}]$ ги задоволува условите на задачата.

Од $\alpha > 1$ и $g(n+1) > g(n)+1$ следува дека функцијата f строго расте. Понатаму, од $2 < \alpha + \frac{1}{2} < 3$ следува $f(1) = 2$. Од дефинициите на функциите f и g следува $| f(n) - g(n) | < \frac{1}{2}$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Равенството $f(f(n)) = f(n) + n$ следува од фактот дека f е целобројна функција и оценката

$$\begin{aligned}
| f(f(n)) - f(n) - n | &= | g(g(n)) - g(n) - n - g(g(n)) + f(f(n)) - f(n) + g(n) | \\
&= | g(g(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n) | \\
&= | g(g(n)) - g(f(n)) + g(f(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n) | \\
&= | (\alpha - 1)(g(n) - f(n)) + g(f(n)) - f(f(n)) | \\
&\leq | \alpha - 1 | \cdot | g(n) - f(n) | + | g(f(n)) - f(f(n)) | \\
&= \tfrac{\alpha - 1}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{\alpha}{2} < 1
\end{aligned}$$

6. Нека $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. На кружница поставени се n светилки $L_0, L_1, ..., L_{n-1}$. Секоја светилка е запалена или изгасната. На почетокот сите светилки се запалени. Се прават чекори $S_0, S_1, ..., S_j, ...$. Во чекорот S_j ако светилката L_{j-1} е запалена, тогаш се менува состојбата на L_j и тоа од запалена во изгасната и обратно, а ако светилката L_{j-1} е изгасната тогаш состојбата на светилката L_j не се менува. Во чекорот S_j состојбата на останатите светилки не се менува. Светилките се означени по $\bmod n$, т.е. $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_o = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$ итн.

   Докажи дека

   (a) Постои природен број $M(n)$ таков што после $M(n)$ чекори сите светилки ќе бидат запалени.

   (b) Ако n е од облик 2^k тогаш сите светилки ќе бидат запалени по $n^2 - 1$ чекори.

   (c) Ако n е од облик $2^k + 1$ сите светилки ќе бидат запалени по $n^2 - n + 1$ чекори.

   Решение. а) Чекорите ќе ги поделиме во групи и тоа така што првите n чекори во првата група, вторите n во втората група итн.

   По секој чекор можеме да ја констатираме состојбата пред него: ако по $i-$от чекор светилката на местото $i-1$ била запалена, тогаш $i-$та светилка ја променила својата состојба, а ако светилката на местото $i-1$ била изгасена, тогаш состојбата на $i-$та светилка не се променила. На ваков начин можеме да ја констатираме состојбата пред произволно многу чекори.

   Бидејќи имаме конечно многу комбинации за состојбите на светилките, по конечно многу чекори мора да се појави периода. Да земеме дека состојбата по k чекори е еднаква на состојбата после m чекори, $k > m$. Состојбите по k и m чекори се еднакви, па затоа и состојбите после $k-1$ и $m-1$ чекори се еднакви. Исто така и состојбите по $k-2$ и $m-2$ чекори се еднакви итн, за на крајот да се еднакви состојбите по $m-m=0$ и $k-m$ чекори. Според тоа, по $k-m$ чекори ја добиваме почетната состојба во која сите светилки се запалени.

б) Бројот 1 нека означува запалена, а 0 изгасната светилка. Чекорите ги запишуваме во табела со помош на низа од нули и единици. Кога ќе стасаме до првата светилка продолжуваме да запишуваме во следниот ред. Со (x,y) да ја означиме состојбата на светилката на местото y во $x-$от ред. Низата $(x,i),...,(x,j)$ ги означува состојбите на светилките од $i-$то до $j-$то место во $x-$от, а низата $(i,y),...,(j,y)$ состојбната на светилките од $i-$то до $j-$то место во колоната y. Конечно,

$$\begin{matrix} (i,x) & (i,y) \\ (j,x) & (j,y) \end{matrix}$$

ја означува состојбата од $i-$от до $j-$от ред и од $x-$та до $y-$та колона. На пример:

Почетна состојба	1	1	1	1
1. ред	0	1	0	1
2. ред	1	0	0	1
3. ред	0	0	0	1
4. ред	1	1	1	

Ќе докажеме дека за $n=2^k$ сите табели се од овој облик. Навистина:

- полињата $(n,1),...,(n,n-1)$ имаат вредност 1 (последниот ред),
- полињата $(n-1,1),...,(n-1,n-1)$ имаат вредност 0 (претпоследниот ред),
- полињата $(1,n),...,(n-1,n)$ имаат вредност 1 (последната колона), и
- полињата $(1,n-1),...,(n-1,n-1)$ имаат вредност 0 (претпоследната колона).

Ако сите табели се од овој облик, тогаш сите светилки ќе бидат запалени по n^2-1 чекори. Последното тврдење може да се докаже со индукција. Деталите ги оставаме на читателот.

с) Аналогно се докажува дека тврдењето за $n=2^k+1$. Во овој случај сите табели се од обликот

Почетна состојба	1	1	1	1	1
1. ред	0	1	0	1	0
2. ред	0	1	1	0	0
3. ред	0	1	0	0	0
4. ред	0	1	1	1	1
5. ред	1				

- полињата $(1,1),...,(n-1,1)$ имаат вредност 0 (прва колона),
- полињата $(1,2),...,(n-1,2)$ имаат вредност 1 (втора колона),
- полињата $(n-1,2),...,(n-1,n)$ имаат вредност 1 (претпоследен ред),
- полињата $(n-2,3),...,(n-2,n)$ имаат вредност 0 (претпретпоследен ред),
- полињата $(1,n),...,(n-2,n)$ имаат вредност 0 (последна колона), и
- полето $(n,1)$ има вредност 1.

Јасно, ако сите табели имаат ваков облик, тогаш сите светилки ќе бидат запалени по n^2-n+1 чекори.