СЕДМИ МАКЕДОНСКИ

СИМПОЗИУМ

ПО ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

ЗБОРНИК НА ТРУДОВИ

26 - 29 септември 2002 година
ОХРИД, РЕПУБЛИКА МАКЕДОНИЈА

Организатор на 7 МСДР: Електротехнички факултет - Скопје

Организациски одбор:
Боро Пиперевски - претседател
Илија Шапкарев
Елена Хаџиева - секретар

издавач: Електротехнички факултет - Скопје

Редакциски одбор :
Боро Пиперевски - претседател
Елена Хаџиева - секретар

техничко уредување: Елена Хаџиева
компјутерска обработка: Боро Пиперевски

CIP - Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека
“ Св. Климент Охридски “ , Скопје

51(063)
007 : 004(063)

Седми Македонски Симпозиум по диференцијални равенки (1;2002;Охрид) Зборник на трудови / Седми Македонски симпозиум по диференцијални равенки, 26-29 септември 2002 година; [Редакциски одбор: Боро Пиперевски , Елена Хаџиева] . - Електротехнички факултет - Скопје, 2002. - 112 стр. граф. прикази : 24 см.
Текст и на англиски и германски јазик. - Библиографија кон трудовите.

ISBN 9989 - 630 - 37 - 2

1. Боро Пиперевски 2. Елена Хаџиева

Тираж 150 примероци. Ракописот е даден во печат во октомври 2003.
Печати “ АЛФА ‘94 “ - Скопје

СОДРЖИНА

A Proof of SWSE Method

Jovan Stefanovski and Kostadin Trenčevski

Abstract

In the recent paper [3] is given a method for calculation of the solutions of the analytical system of differential equations

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \ , \quad x(t) \in \mathbf{R}^n \ , \quad x(0) = x^0$$

with the unknown variable $x(t)$, called SWSE (Summing Weighted Sequential Errors) method. The solutions are presented as functional series. In this paper we give another proof of the convergence of that functional series.

Keywords and phrases: System of ordinary differential equations, SWSE method, functional series.

1 Main results

In [1], a functional expansion is applied to obtain the flow of the nonstationary analytic vector field $X_t(x)$, i.e. the solution of

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{t_0,t}(x) = X_t(\Phi_{t_0,t}(x)) \tag{1.1}$$

satisfying $\Phi_{t_0,t_0} = \mathrm{Id}$, where Id is the identity operator. The equation (1.1), is solved by the following "chronological" formal series

$$\Phi_{t_0,t} = \mathrm{Id} + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} \mathrm{d}\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{m-1}} \mathrm{d}\tau_m \cdot X_{\tau_m} \circ \cdots \circ X_{\tau_1} \tag{1.2}$$

where by $\circ$ we denote the composition of mappings.

Consider the system of ordinary differential equation (ODE)

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \ , \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{1.3}$$

where the elements f_s of the function f have a Laurent's expansion for all t in a neighborhood U of $t = t_0$

$$f_s(t, z) = \sum_{i_1,\ldots,i_n \in \mathbf{Z}} f_{s i_1 \ldots i_n}(t) \cdot z_1^{i_1} \cdot z_2^{i_2} \cdots z_n^{i_n} \ , \quad s = 1, \ldots n \ , \quad z \in W \subseteq \mathbf{R}^n \ . \tag{1.4}$$

In general, it is possible $0 \notin W$. (If $0 \in W$ then the Laurent's series reduces to the Taylor's series.) We suppose that all functions $f_{si_1\ldots i_n}(t)$ are regular in U, and that the convergence in (1.4) is uniform in each closed subset of $U \times W$. The Laurent's series (1.4) is introduced for proving the main results only. In the main results, contained in Sections 2, 3 and 4, the Laurent's series does not appear.

The initial conditions $x_i(t_0) = C_i,\ i = 1, \ldots, n$ are such that $(C_1, \ldots, C_n)$ belongs to the domain W of the convergence of the Laurent's series (1.4).

To solve (1.3), let us introduce the following functions

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_n} = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n} \quad (i_1, \ldots, i_n \in \mathbf{Z}) \tag{1.5}$$

so that $x_1 = x_{10\ldots0}\ , \ldots,\ x_n = x_{0\ldots01}$. We have

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{i_1 i_2 \ldots i_n} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}) = \\
&= i_1 x_{(i_1-1) i_2 \ldots i_n} \dot{x}_1 + \cdots + i_n x_{i_1 i_2 \ldots (i_n-1)} \dot{x}_n = \\
&= i_1 x_{(i_1-1) i_2 \ldots i_n} \sum_{p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{Z}} f_{1 p_1 \ldots p_n} x_{p_1 p_2 \ldots p_n} + \cdots \\
&\quad + i_n x_{i_1 i_2 \ldots (i_n-1)} \sum_{p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{Z}} f_{n p_1 \ldots p_n} x_{p_1 p_2 \ldots p_n} = \\
&= i_1 \sum_{p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{Z}} f_{1 p_1 \ldots p_n} x_{(i_1+p_1-1)(i_2+p_2)\ldots(i_n+p_n)} + \cdots \\
&\quad + i_n \sum_{p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{Z}} f_{n p_1 \ldots p_n} x_{(i_1+p_1)(i_2+p_2)\ldots(i_n+p_n-1)} = \\
&= \sum_{s=1}^{n} i_s \sum_{p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{Z}} f_{s p_1 \ldots p_n} x_{(i_1+p_1)\ldots(i_s+p_s-1)\ldots(i_n+p_n)} = \\
&= \sum_{s=1}^{n} i_s \sum_{j_1, \ldots, j_n \in \mathbf{Z}} f_{s (j_1-i_1)\ldots(j_s-i_s+1)\ldots(j_n-i_n)} x_{j_1 \ldots j_n}\ ,
\end{aligned}$$

i.e.

$$\dot{x}_{i_1 \ldots i_n} = \sum_{j_1, \ldots, j_n \in \mathbf{Z}} h_{i_1 \ldots i_n j_1 \ldots j_n} \cdot x_{j_1 \ldots j_n} \tag{1.6}$$

for $i_1, \ldots, i_n \in \mathbf{Z}$, and where

$$h_{i_1 \ldots i_n j_1 \ldots j_n} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=1}^{n} i_s f_{s (j_1-i_1)\ldots(j_s-i_s+1)\ldots(j_n-i_n)}\ . \tag{1.7}$$

We have obtained the system (1.6), which is a linear system of differential equations with infinitely unknown functions $x_{i_1 \dots i_n}$, $i_1, \dots, i_n \in \mathbf{Z}$. In [3] we obtain its solution by SWSE method. At first, in [3], we introduce the functions

$$P^{<k>}_{i_1 i_2 \dots i_n j_1 j_2 \dots j_n}(t) \quad (k \in \mathbf{N}_0,\ i_1, \cdots, i_n,\ j_1, \cdots, j_n \in \mathbf{Z})$$

as follows

$$P^{<0>}_{i_1 i_2 \dots i_n j_1 j_2 \dots j_n} = \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} \cdots \delta_{i_n j_n},$$

$$P^{<k+1>}_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P^{<k>}_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n} - \sum_{p_1, \dots, p_n \in \mathbf{Z}} h_{i_1 \dots i_n p_1 \dots p_n} \cdot P^{<k>}_{p_1 \dots p_n j_1 \dots j_n} . \qquad (1.8)$$

where δ_{ij} is the Kronecker delta function. In [3] is proved that the functions $P^{<k>}_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n}$, $k = 0, 1, \dots$ are well defined.

Now we give another proof of the following theorem.

Theorem 1.1. *The solution of the system (1.3) of non-linear differential equations with the initial conditions $x_i(t_0) = C_i$ $(1 \le i \le n)$ in a neighborhood of $t = t_0$ is given by*

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t_0 - t)^k}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_n \in \mathbf{Z}} P^{<k>}_{10 \dots 0 j_1 \dots j_n}(t) C_1^{j_1} C_2^{j_2} \cdots C_n^{j_n}$$

$$x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t_0 - t)^k}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_n \in \mathbf{Z}} P^{<k>}_{01 \dots 0 j_1 \dots j_n}(t) C_1^{j_1} C_2^{j_2} \cdots C_n^{j_n} \qquad (1.9)$$

$$\vdots$$

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t_0 - t)^k}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_n \in \mathbf{Z}} P^{<k>}_{0 \dots 01 j_1 \dots j_n}(t) C_1^{j_1} C_2^{j_2} \cdots C_n^{j_n}$$

where the functions $P^{<k>}_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n}(t)$ are defined by (1.8) and (1.7).

Proof. A proof is given in [3]. In the following text we present a simpler proof. We prove that a solution of (1.6), with the initial conditions $x_{i_1 \dots i_n}(t_0) = C_1^{i_1} \cdots C_n^{i_n}$, is given by summing weighted sequential errors (SWSE) of the linear system (1.6) with infinitely many unknowns, i.e.

$$x_{i_1 \dots i_n}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t_0 - t)^k}{k!} \sum_{j_1, \dots, j_n \in \mathbf{Z}} P^{<k>}_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n}(t) C_1^{j_1} \cdots C_n^{j_n} \qquad (1.10)$$

where the functions $P^{<k>}_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n}(t)$ are given by (1.8) and (1.7). Specially, if

$$(i_1, \dots, i_n) \in \{(1, 0, \dots, 0),\ (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$$

we obtain the required solution (1.9).

For $i_1,\dots,i_n,j_1,\dots,j_n\in\mathbf{Z}$, let $\Phi_{i_1\dots i_n j_1\dots j_n}(t,t_0)$ be a function that satisfies

$$\Phi_{i_1\dots i_n j_1\dots j_n}(t_0,t_0)=\delta_{i_1 j_1}\cdots\delta_{i_n j_n} \tag{1.11}$$

and

$$\frac{\partial\Phi_{i_1\dots i_n j_1\dots j_n}(t,t_0)}{\partial t}=\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbf{Z}} h_{i_1\dots i_n\alpha_1\dots\alpha_n}(t)\cdot\Phi_{\alpha_1\dots\alpha_n j_1\dots j_n}(t,t_0) \tag{1.12}$$

where the functions $h_{i_1\dots i_n\alpha_1\dots\alpha_n}(t)$ are defined in (1.7).

Let us introduce the following functions

$$p^{<k>}_{i_1\dots i_n}(t,z)=\sum_{j_1,\dots,j_n\in\mathbf{Z}} P^{<k>}_{i_1\dots i_n j_1\dots j_n}(t)\cdot z_1^{j_1}\cdots z_n^{j_n}$$

The functions $p^{<k>}_{i_1\dots i_n}(t,z)$ satisfy

$$\frac{\partial p^{<k>}_{i_1\dots i_n}(t,z)}{\partial t}=\sum_{j_1,\dots,j_n\in\mathbf{Z}}\frac{\mathrm{d}P^{<k>}_{i_1\dots i_n j_1\dots j_n}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot z_1^{j_1}\cdots z_n^{j_n}=$$

$$=\sum_{j_1,\dots,j_n\in\mathbf{Z}} P^{<k+1>}_{i_1\dots i_n j_1\dots j_n}(t)\cdot z_1^{j_1}\cdots z_n^{j_n}+$$

$$+\sum_{j_1,\dots,j_n\in\mathbf{Z}}\ \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbf{Z}} h_{i_1\dots i_n\alpha_1\dots\alpha_n}\cdot P^{<k>}_{\alpha_1\dots\alpha_n j_1\dots j_n}\cdot z_1^{j_1}\cdots z_n^{j_n}=$$

$$=p^{<k+1>}_{i_1\dots i_n}+\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbf{Z}} h_{i_1\dots i_n\alpha_1\dots\alpha_n}\sum_{j_1,\dots,j_n\in\mathbf{Z}} P^{<k>}_{\alpha_1\dots\alpha_n j_1\dots j_n}\cdot z_1^{j_1}\cdots z_n^{j_n}=$$

$$=p^{<k+1>}_{i_1\dots i_n}+\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbf{Z}} h_{i_1\dots i_n\alpha_1\dots\alpha_n}\cdot p^{<k>}_{\alpha_1\dots\alpha_n}$$

Therefore

$$p^{<k+1>}_{i_1\dots i_n}(t,z)=\frac{\partial p^{<k>}_{i_1\dots i_n}(t,z)}{\partial t}-\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbf{Z}} h_{i_1\dots i_n\alpha_1\dots\alpha_n}(t)\cdot p^{<k>}_{\alpha_1\dots\alpha_n}(t,z) \tag{1.13}$$

Let us introduce the following functions

$$q^{<k>}_{i_1\dots i_n}(\tau,\tau_0,z)=\sum_{j_1,\dots,j_n\in\mathbf{Z}}\Phi_{i_1\dots i_n j_1\dots j_n}(\tau_0,\tau)\cdot p^{<k>}_{j_1\dots j_n}(\tau,z) \tag{1.14}$$

Using (1.13), we obtain

$$\frac{\partial q^{<k>}_{i_1\dots i_n}(\tau,\tau_0,z)}{\partial\tau}=\sum_{j_1,\dots,j_n\in\mathbf{Z}}\frac{\partial\Phi_{i_1\dots i_n j_1\dots j_n}(\tau_0,\tau)}{\partial t_0}\cdot p^{<k>}_{j_1\dots j_n}(\tau,z)+$$

$$+\sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}}\Phi_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_n}(\tau_0,\tau)\cdot\frac{\partial p^{<k>}_{j_1\ldots j_n}(\tau,z)}{\partial\tau}=$$

$$=\sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}}\frac{\partial\Phi_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_n}(\tau_0,\tau)}{\partial t_0}\cdot p^{<k>}_{j_1\ldots j_n}(\tau,z)+$$

$$+\sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}}\Phi_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_n}(\tau_0,\tau)\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbf{Z}}h_{j_1\ldots j_n\alpha_1\ldots\alpha_n}(\tau)\cdot p^{<k>}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\tau,z)+$$

$$+\sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}}\Phi_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_n}(\tau_0,\tau)\cdot p^{<k+1>}_{j_1\ldots j_n}(\tau,z)=$$

$$=\sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}}\Phi_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_n}(\tau_0,\tau)\cdot p^{<k+1>}_{j_1\ldots j_n}(\tau,z)=q^{<k+1>}_{i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0,z)\qquad(1.15)$$

because of the following lemma.

Lemma 1.1.

$$\frac{\partial\Phi_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_n}(\tau_0,\tau)}{\partial t_0}=-\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbf{Z}}\Phi_{i_1\ldots i_n\alpha_1\ldots\alpha_n}(\tau_0,\tau)\cdot h_{\alpha_1\ldots\alpha_n j_1\ldots j_n}(\tau)$$

Proof of Lemma 1.1. We start from the following identity

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}}\Phi_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_n}(\tau_0,\tau)\cdot\Phi_{j_1\ldots j_n\alpha_1\ldots\alpha_n}(\tau,\tau_0)=\delta_{i_1\alpha_1}\cdots\delta_{i_n\alpha_n}\qquad(1.16)$$

which is a consequence of (1.11) and (1.12). By differentiation of the above identity in respect to τ, we obtain

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}}\frac{\partial\Phi_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_n}(\tau_0,\tau)}{\partial t_0}\cdot\Phi_{j_1\ldots j_n\alpha_1\ldots\alpha_n}(\tau,\tau_0)+$$

$$+\sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}}\Phi_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_n}(\tau_0,\tau)\cdot\frac{\partial\Phi_{j_1\ldots j_n\alpha_1\ldots\alpha_n}(\tau,\tau_0)}{\partial\tau}=0$$

i.e. having in mind the identity (1.12),

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}}\frac{\partial\Phi_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_n}(\tau_0,\tau)}{\partial t_0}\cdot\Phi_{j_1\ldots j_n\alpha_1\ldots\alpha_n}(\tau,\tau_0)=$$

$$=-\sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}}\Phi_{j_1\ldots j_n\alpha_1\ldots\alpha_n}(\tau,\tau_0)\sum_{\beta_1,\ldots,\beta_n\in\mathbf{Z}}\Phi_{i_1\ldots i_n\beta_1\ldots\beta_n}(\tau_0,\tau)\cdot h_{\beta_1\ldots\beta_n j_1\ldots j_n}(\tau)$$

The proof of Lemma 1.1 is completed by the following lemma.

Lemma 1.2. *If*

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}} a_{j_1\ldots j_n}(\tau,\tau_0)\cdot\Phi_{j_1\ldots j_n\alpha_1\ldots\alpha_n}(\tau,\tau_0)=0 \quad \forall\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbf{Z} \tag{1.17}$$

for τ in a neighborhood of τ_0, then

$$\forall j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z} \quad a_{j_1\ldots j_n}(\tau,\tau_0)=0 \tag{1.18}$$

Proof. Multiplying the identity (1.17) with $\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n i_1\ldots i_n}(\tau_0,\tau)$ and summing up in respect to $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbf{Z}$, we obtain

$$\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbf{Z}}\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n i_1\ldots i_n}(\tau_0,\tau)\sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}} a_{j_1\ldots j_n}(\tau,\tau_0)\cdot\Phi_{j_1\ldots j_n\alpha_1\ldots\alpha_n}(\tau,\tau_0)=0$$

i.e.

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}} a_{j_1\ldots j_n}(\tau,\tau_0)\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbf{Z}}\Phi_{j_1\ldots j_n\alpha_1\ldots\alpha_n}(\tau,\tau_0)\cdot\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n i_1\ldots i_n}(\tau_0,\tau)=0$$

i.e., using (1.16),

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}} a_{j_1\ldots j_n}(\tau,\tau_0)\cdot\delta_{j_1 i_1}\cdots\delta_{j_n i_n}=a_{i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0)=0 \quad \blacksquare$$

Using (1.15), we obtain

$$q^{<k+1>}_{i_1\ldots i_n}(t,t_0,z)=\frac{\partial}{\partial t}q^{<k>}_{i_1\ldots i_n}(t,t_0,z)$$

and, by induction,

$$q^{<k>}_{i_1\ldots i_n}(t,t_0,z)=\frac{\partial^k}{\partial t^k}q^{<0>}_{i_1\ldots i_n}(t,t_0,z)\ , \quad k=0,1,\ldots \tag{1.19}$$

We shall prove the following lemma.

Lemma 1.3.

$$\left|p^{<k>}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\tau,z)\right|\le\frac{k!}{\rho^k}\sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbf{Z}}\left|\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0)\right|\cdot q_{i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0,z) \tag{1.20}$$

where

$$q_{i_1\ldots i_n}(t,t_0,z)=\sup_{t\in D_t}\left|q^{<0>}_{i_1\ldots i_n}(t,t_0,z)\right|\ , \quad D_t=\{\zeta\in\mathbf{C}:\ |\zeta-t|=\rho\} \tag{1.21}$$

Proof. The identity (1.14) is invertible. Namely, we shall prove that

$$p^{<k>}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\tau,z)=\sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbf{Z}}\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0)\cdot q^{<k>}_{i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0,z)$$

Multiplying the identity (1.14) with $\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0)$ and summing up in respect to $i_1,\ldots,i_n \in \mathbf{Z}$, we obtain

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbf{Z}} \Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0)\cdot q^{<k>}_{i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0,z) =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbf{Z}} \Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0) \sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}} \Phi_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_n}(\tau_0,\tau)\cdot p^{<k>}_{j_1\ldots j_n}(\tau,z) =$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}} p^{<k>}_{j_1\ldots j_n}(\tau,z) \sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbf{Z}} \Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0)\cdot \Phi_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_n}(\tau_0,\tau) =$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}} p^{<k>}_{j_1\ldots j_n}(\tau,z)\delta_{\alpha_1 j_1}\cdots\delta_{\alpha_n j_n} = p^{<k>}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\tau,z)$$

according to (1.16).

By (1.19) and the Cauchy integral formula [2], we have

$$\left|q^{<k>}_{i_1\ldots i_n}(t,t_0,z)\right| \le \frac{k!}{\rho^k}\cdot q_{i_1\ldots i_n}(t,t_0,z)$$

where $q_{i_1\ldots i_n}(z)$ is given by (1.21). Further we have

$$\left|p^{<k>}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(\tau,z)\right| = \left|\sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbf{Z}} \Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0)\cdot q^{<k>}_{i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0,z)\right| \le$$

$$\le \sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbf{Z}} \left|\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0)\right|\cdot\left|q^{<k>}_{i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0,z)\right| \le$$

$$\le \sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbf{Z}} \left|\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0)\right|\cdot\frac{k!}{\rho^k}\cdot q_{i_1\ldots i_n}(\tau,\tau_0,z) \quad \blacksquare$$

Having in mind Lemma 1.3, we have

$$|x_{i_1\ldots i_n}| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t_0-t)^k}{k!}p^{<k>}_{i_1\ldots i_n}\right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t_0-t|^k}{\rho^k}\sum_{j_1,\ldots,j_n\in\mathbf{Z}} \left|\Phi_{i_1\ldots i_n j_1\ldots j_n}(t,t_0)\right| q_{j_1\ldots j_n}(t,t_0,z)$$

Hence we have absolute and uniform convergence in (1.10) for t in a neighborhood of t_0. According to the Weierstrass theorem [2], the series $x_{i_1\ldots i_n}$ is a regular function in a neighborhood of t_0 and it is allowed to be differentiated by terms. By differentiation, in [3] we obtain the result (1.9). $\blacksquare$

Remark. Unlike the proof in [3], which is mostly theoretical, the above proof can be used for analysis of the error made by taking a finite number of terms in (1.9).

Conclusions

In this paper a functional series solution of the system of nonlinear ODE (1.3), is presented. A further research could be to specify this series to a system with a control variable explicitly appearing in the system equations. Also, in this paper, an alternative proof of Theorem 1.1 is presented, besides the proof in [3], which contains a closer estimation of the error made by taking a finite number of terms in the functional series solution. A further research is oriented on developing a numerical algorithm for solving systems of ODE, based on the paper result.

References

[1] Agrachev A.A., Gamkrelidze R.V., Exponential flow presentation and chronological calculation, *Mat. sb.*, 107 (4) 467-532, 1978 (in Russian).

[2] Mitrinović D.S., *Complex Analysis*, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1973 (In Serbian).

[3] Stefanovski J., Trenčevski K., Analytic solutions of systems, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol.8 No.4, (2002), 463-486.

Jovan Stefanovski
JP Streževo, 7000 Bitola, Macedonia
e-mail: jovanstef@mt.net.mk

Kostadin Trenčevski
Institute of Mathematics, St. Cyril and Methodius Univ.,
P.O.Box 162, 1000 Skopje, Macedonia
e-mail: kostatre@iunona.pmf.ukim.edu.mk

ONE EXAMPLE OF INTERPOLATION IN M SPACES USING BLASCHKE PRODUCTS

N. Pandeski, Lj. Nastovski

Abstract

We give a solution of interpolation problem in M spaces.

Let D be the unit disk. We denote by M the space of holomorphic function in D such that

$$\int_0^{2\pi} \log^+ Mf(\theta)d\theta < \infty$$

where

$$Mf(\theta) = \sup_{0\leq r<1} |f(re^{i\theta})|$$

and

$$\log^+ a = \begin{cases} 0, & 0 < a \leq 1 \\ \log a, & a \geq 1 \end{cases}$$

(see [1]).

The next statements are valid: $\bigcup\limits_{p>0} H^p \subseteq M \subseteq N^+ \subseteq N$ (see [1]). All the inclusions are proper. For the first inclusion in [1] is given an example of the function which is in M and it is not in $\bigcup\limits_{p>0} H^p$. This function is defined with

$$f(z) = \exp(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log\psi(t)\frac{dt}{2\pi}) \qquad (1)$$

where

$$\psi(t) = \begin{cases} \exp\frac{1}{|\theta|}, & |\theta| \leq 1 \\ e, & 1 \leq |\theta| \leq \pi \end{cases}$$

Here we solve the next interpolation problem. Let $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ be a sequence in D and $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ be a given number sequence. We look for conditions for these sequences $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ and $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ such that exists a function $f \in M$ so that $f(\lambda_k) = c_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

We will show that this condition

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|)<\infty \qquad (2)$$

is necessary.

Let the condition is not satisfied by the sequence $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ i.e $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\lambda_k|)=\infty$, and c_k are the values of some function of the class M in λ_k. It is known that the zeros of every function from the N class must satisfy (2)(see [4],p 333). So there is $c_p\neq 0$. Let $c_p'=c_pe^{i\varphi}$ where $\varphi\in(0,2\pi)$ is fixed. Then there is not function g of the class M such that

$$g(\lambda_k)=\begin{cases} c_k, & k\neq p\\ c_k', & k=p\end{cases}$$

because if this is not so, the function $h(z)=f(z)-g(z)$ is in the M class and theirs zeros will not satisfy the condition (2).

We denote by $b(z)$ the Blaschke product

$$b(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j-z}{1-\overline{\lambda_j}z}\frac{|\lambda_j|}{\lambda_j},\quad \sum_{j=1}^{\infty}(1-|\lambda_j|)<\infty,\ z\in D$$

and

$$b_k(z)=\prod_{j\neq k}\frac{\lambda_j-z}{1-\overline{\lambda_j}z}\frac{|\lambda_j|}{\lambda_j}.$$

We will use the next theorem.

Theorem A [5]p. 69: *The sum of a uniformly convergent series of holomorphic functions is a holomorphic function in every inner point on the set where the series uniformly converges.*

Theorem 1: *Let $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ is a sequence in D such that $\sum_{j=1}^{\infty}(1-|\lambda_j|)<\infty$ and $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ is a sequence such that $\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{c_j}{b_j(\lambda_j)}\right|<\infty$. Then the interpolation problem $f(\lambda_j)=c_j$ has a solution in M.*

Proof: We define the function

$$f(z)=g(z)\sum_{k=1}^{\infty}c_k\frac{b_k(z)}{b_k(\lambda_k)}\frac{1}{g(\lambda_k)}$$

where $g(z)$ is the function (1). It is clear that $f(\lambda_k)=c_k$, $k=1,2,\dots$. We will show that $f\in M$. First of all we will show that f is holomorphic. It is true that $|g(\lambda_k)|\geq 1$.

$$|g(\lambda_k)|=\exp\left(Re\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+\lambda_k}{e^{it}-\lambda_k}\log\psi(t)dt\right).$$

Because $Re\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2} > 0$, where $z = re^{i\theta} \in D$ and $\log(\psi(\theta))$ is nonnegative it follows that $|g(\lambda_k)| \geq 1$. In the following we will use the next property of Blachke products: If $b(z)$ is Blachke product in D then for every $z \in D$ it is true $|b(z)| \leq 1$ ([3] p. 86).

It is true that

$$|f(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{c_k}{b_k(\lambda_k)}\right| \frac{|b_k(z)|}{g(\lambda_k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{c_k}{b_k(\lambda_k)}\right| = K < \infty.$$

Because of the criteria of Weierstrass, for uniform convergence follows that the functional series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \frac{b_k(z)}{b_k(\lambda_k)} \frac{1}{g(\lambda_k)}$ converges uniformly on D, and by Theorem A, the sum of the series is holomorphic function $h(z)$ so that $|h(z)| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{c_k}{b_k(\lambda_k)}\right| = K$ for all $z \in D$ holds, then $h \in H^\infty$ and $\|h\|_\infty \leq K$. We will show that $f \in M$. It is true

$$\log^+ ab \leq \log^+ a + \log^+ b.$$

Now

$$Mf(\theta) = \sup_{0\leq r\leq 1} |f(re^{i\theta})| = \sup_{0\leq r\leq 1} \leq$$

$$\leq K \sup_{0\leq r\leq 1} |g(re^{i\theta})| = KMg(\theta).$$

So $\log^+ Mf(\theta) \leq (KMg(\theta)) \leq \log^+ K + \log^+ Mg(\theta)$. Finally

$$\int_0^{2\pi} \log^+ Mf(\theta)d\theta \leq 2\pi \log^+ K + \int_0^{2\pi} \log^+ Mg(\theta)d\theta < \infty$$

i.e $f \in M$.

References:

[1] Hong Oh Kim, *On an $F-$algebra of holomorphic functions*
Can.Math. Vol.15 No.3 1988 pp.718-741

[2] В. Кабаила, *Об интерполации функции в классе* H
Успехи математических наук, том13, вип.1(79),1958 г. стр.181-188

[3] П. Кусис, *Введение в теорио пространств* H^p
Москва, Мир 1984

[4] У. Рудин, *Реален и комплексен анализ*
Наука и Изкуство, 1984

[5] М. А. Евграфов, *Аналитические Функции*
Наука, 1991

РЕЗИМЕ

Во овој труд е даден доволен услов за интерполација во единичниот диск со функции од класата M.

Nikola Pandeski
St.Cyril and Methodius University, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Institut of Mathematics
Skopje, Macedonia e-mail: pandeski@iunona.pmf.ukim.edu.mk

Ljupco Nastovski
St.Cyril and Methodius University, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Institut of Mathematics
Skopje, Macedonia
e-mail: ljupcona@iunona.pmf.ukim.edu.mk

GLOBAL AND ASYMPTOTIC STABILITY OF ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS AND OPERATOR-DIFFERENCE SCHEMES

Boško S. Jovanović

University of Belgrade, Faculty of Mathematics,
Studentski trg 16, 11000 Belgrade, Yugoslavia
E-mail: bosko@matf.bg.ac.yu

and

Peter P. Matus

Institute of Mathematics, NAS Belarus,
Surganova str. 11, 220072 Minsk, Belarus
E-mail: matus@im.bas-net.by

Abstract: *A priory estimates of global and asymptotical stability for Cauchy problems for abstract first and second order linear differential equations in Hilbert space are considered. A few scales of such type estimates are constructed in various energy norms. Analogous results are obtained for two- and three-level operator-difference schemes.*

Key words: *global and asymptotic stability, abstract differential equation, operator-difference scheme.*

1. INTRODUCTION

The notion of stability is a component of the correctness of a mathematical problem and in the general case it points to a continuous dependence of its solution u on input data of the problem φ, i.e., there exists such a constant $\rho > 0$, independent of the solution and input data, that for all $\varphi, \tilde{\varphi}$ from a certain allowable admissible set the following estimate holds:

$$\|\tilde{u} - u\|_1 \le \rho \|\tilde{\varphi} - \varphi\|_2, \tag{1}$$

where $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ are certain norms and $\tilde{u}$ is the solution of the same problem with perturbed input data $\tilde{\varphi}$. The problem of stability becomes particularly urgent in the mathematical modelling of applied problems where input data can be given roughly (as a result of experimental measurements, observations etc.). For linear operator equations, estimate (1) is equivalent to the a priori estimate:

$$\|u\|_1 \le \rho \|\varphi\|_2 .$$

In the case of differential equations ρ most commonly take the following magnitudes:

$$\rho = e^{-Ct}, \quad \rho = C, \quad \rho = e^{Ct}; \quad C = const > 0,$$

where t is variable. The problem is called globally stable (or stable for a long time) if $\rho = \rho(t) \to const$ when $t \to +\infty$, and asymptotically stable if $\rho(t) \to 0$ when $t \to +\infty$.

Extensive literature is devoted to the construction of a priori estimates for linear evolutionary differential-operator equations (see e.g. [8-12]). In the present note we give a brief review of results obtained in [1-7].

2. ABSTRACT FIRST ORDER LINEAR CAUCHY PROBLEM

Let H be a real separable Hilbert space with an inner product $(\cdot,\cdot)$ and a norm $\|\cdot\|$, and A — an unbounded self-adjoint positively defined linear operator with the domain $D(A)$ dense in H. The expression $(u,v)_A = (Au, v),\ u, v \in D(A),$ satisfies the axioms of the inner product. The closure of $D(A)$ in the norm $\|u\|_A = (u,u)_A^{1/2}$ is so-called energy space $H_A \subset H$. In an analogous way on obtains the space $H_{A^{-1}} \supset H$. Further, $H_{A^{-1}} = H_A^*$ is the adjoint space for H_A, inner product (u,v) can be continuously extended on $H_{A^{-1}} \times H_A$, and the operator A can be extended to the mapping $A: H_A \to H_{A^{-1}}$. Spaces H_A, H and $H_{A^{-1}}$ form a Gelfand triple: $H_A \subset H \subset H_{A^{-1}}$.

We also introduce Lebesgue space $L_2(0,T;H)$ of functions $u(t)$ that map the segment $(a,b) \subset R$ to H [10,12], with inner product and norm:

$$(u,v)_{L_2(a,b;H)} = \int_a^b (u(t), v(t))\, dt\,, \quad \|u\|_{L_2(a,b;H)} = (u,u)_{L_2(a,b;H)}^{1/2} \quad .$$

Consider the abstract Cauchy problem:

$$Bu'(t) + Au(t) = f(t), \ \ t > 0; \ \ u(0) = u_0; \qquad (\cdot)' = \frac{d}{dt}(\cdot)\,, \qquad (2)$$

where B is self-adjoint positively defined linear operator in H and A is an unbounded self-adjoint positively defined linear operator in H_B.

2.1. Global Stability

Taking inner product of (2) with $2u$ we obtain:

$$2\,(Bu',u)+2\,(Au,u)=2\,(f,u)\,.$$

From here, using Cauchy-Schwarz inequality follows:

$$\left(\|u(t)\|_B^2\right)'+2\,\|u(t)\|_A^2=2\left(f(t),u(t)\right)\le\|u(t)\|_A^2+\|f(t)\|_{A^{-1}}^2\,. \qquad (2)$$

Integrating (2) we finally obtain well known energy estimate:

$$\|u(t)\|_B^2+\int_0^t\|u(s)\|_A^2\,ds\le\|u_0\|_B^2+\int_0^t\|f(s)\|_{A^{-1}}^2\,ds\,. \qquad (3)$$

Using obvious relations

$$\left(\|u(t)\|_B^2\right)'=2\,\|u(t)\|_B\left(\|u(t)\|_B\right)', \qquad \|u(t)\|_A^2\ge\|u(t)\|_A\,\|u(t)\|_B$$

and Cauchy-Schwarz inequality

$$\left(f(t),u(t)\right)\le\|u(t)\|_B\,\|f(t)\|_{B^{-1}}\,.$$

from (2) also follows:

$$\|u(t)\|_B+\int_0^t\|u(s)\|_A\,ds\le\|u_0\|_B+\int_0^t\|f(s)\|_{B^{-1}}\,ds\,. \qquad (4)$$

By Fourier methods one obtains a priori estimates (see [4,7]):

$$\int_0^t\int_0^t\frac{\|u(s)-u(s')\|_B^2}{|s-s'|^2}ds\,ds'\le4\pi\left(\|u_0\|_B^2+\int_0^t\|f(s)\|_{A^{-1}}^2ds\right). \qquad (5)$$

From (3) and (5) one easily obtains the following scale of a priori estimates (see [4,7]):

$$\max_{s\in[0,t]}\|Bu(s)\|_{A^{-1}}^2+\int_0^t\|u(s)\|_B^2ds\le2\left(\|Bu_0\|_{A^{-1}}^2+\int_0^t\left\|A^{-1}f(s)\right\|_B^2ds\right),$$

$$\max_{s\in[0,t]}\|u(s)\|_B^2+\int_0^t\|u(s)\|_A^2ds+\int_0^t\int_0^t\frac{\|u(s)-u(s')\|_B^2}{|s-s'|^2}ds\,ds'\le(4\pi+2)\left(\|u_0\|_B^2+\int_0^t\|f(s)\|_{A^{-1}}^2ds\right)$$

$$\max_{s\in[0,t]}\|u(s)\|_A^2+\int_0^t\|Au(s)\|_{B^{-1}}^2ds+\int_0^t\|u'(s)\|_B^2ds\le3\left(\|u_0\|_A^2+\int_0^t\|f(s)\|_{B^{-1}}^2ds\right), \qquad (6)$$

$$\max_{s\in[0,t]}\|Au(s)\|_{B^{-1}}^2+\int_0^t\left\|B^{-1}Au(s)\right\|_A^2ds+\int_0^t\int_0^t\frac{\|u'(s)-u'(s')\|_B^2}{|s-s'|^2}ds\,ds'\le$$

$$\leq (8\pi+2)\left(\|Au_0\|^2_{B^{-1}} + \int_0^t \|B^{-1}f(s)\|^2_A ds + \int_0^t \int_0^t \frac{\|f(s)-f(s')\|^2_{B^{-1}}}{|s-s'|^2} ds\, ds' \right),$$

etc.

Analogously, from (4) one obtains [7]:

$$\|u(t)\|_A + \int_0^t \|Au(s)\|_{B^{-1}} ds \leq \|u_0\|_A + \int_0^t \|B^{-1}f(s)\|_A ds \,,$$

$$\|Au(t)\|_{B^{-1}} + \int_0^t \|B^{-1}Au(s)\|_A ds \leq \|Au_0\|_{B^{-1}} + \int_0^t \|AB^{-1}f(s)\|_{B^{-1}} ds \,, \qquad (7)$$

$$\|B^{-1}Au(t)\|_A + \int_0^t \|AB^{-1}Au(s)\|_{B^{-1}} ds \leq \|B^{-1}Au_0\|_A + \int_0^t \|B^{-1}AB^{-1}f(s)\|_A ds \,,$$

etc.

2.2. Asymptotic Stability

Using inequality

$$\|u\|^2_A \geq \lambda_1 \|u\|^2_B \,, \qquad (8)$$

where λ_1 is the minimal eigenvalue of the spectral problem $Au = \lambda Bu$, from (2) follows:

$$\left(\|u(t)\|^2_B\right)' + \lambda_1 \|u(t)\|^2_B \leq \|f(t)\|^2_{A^{-1}} \qquad (9)$$

and

$$\left(\|u(t)\|_B\right)' + \lambda_1 \|u(t)\|_B \leq \|f(t)\|_{B^{-1}} \,. \qquad (10)$$

From (9), similarly as in the previous case one obtains (see [7]):

$$\|Bu(t)\|^2_{A^{-1}} \leq e^{-\lambda_1 t}\left(\|Bu_0\|^2_{A^{-1}} + \int_0^t e^{\lambda_1 s} \|A^{-1}f(s)\|^2_B ds \right),$$

$$\|u(t)\|^2_B \leq e^{-\lambda_1 t}\left(\|u_0\|^2_B + \int_0^t e^{\lambda_1 s} \|f(s)\|^2_{A^{-1}} ds \right),$$

$$\|u(t)\|^2_A \leq e^{-\lambda_1 t}\left(\|u_0\|^2_A + \int_0^t e^{\lambda_1 s} \|f(s)\|^2_{B^{-1}} ds \right), \qquad (11)$$

$$\|Au(t)\|^2_{B^{-1}} \leq e^{-\lambda_1 t}\left(\|Au_0\|^2_{B^{-1}} + \int_0^t e^{\lambda_1 s} \|B^{-1}f(s)\|^2_A ds \right),$$

etc.

From (10) one obtains (see [7]):

$$\|u(t)\|_B \le e^{-\lambda_1 t}\left(\|u_0\|_B + \int_0^t e^{\lambda_1 s}\,\|f(s)\|_{B^{-1}} ds\right),$$

$$\|u(t)\|_A \le e^{-\lambda_1 t}\left(\|u_0\|_A + \int_0^t e^{\lambda_1 s}\,\left\|B^{-1} f(s)\right\|_A ds\right),$$

$$\|Au(t)\|_{B^{-1}} \le e^{-\lambda_1 t}\left(\|Au_0\|_{B^{-1}} + \int_0^t e^{\lambda_1 s}\,\left\|AB^{-1} f(s)\right\|_{B^{-1}} ds\right), \tag{12}$$

$$\left\|B^{-1}Au(t)\right\|_A \le e^{-\lambda_1 t}\left(\left\|B^{-1}Au_0\right\|_A + \int_0^t e^{\lambda_1 s}\,\left\|B^{-1}AB^{-1} f(s)\right\|_A ds\right),$$

etc.

3. ABSTRACT SECOND ORDER LINEAR CAUCHY PROBLEM

Consider the abstract Cauchy problem:

$$Du''(t) + Bu'(t) + Au(t) = f(t),\ \ t > 0; \qquad u(0) = u_0; \qquad u'(0) = u_1\ , \tag{13}$$

where D is self-adjoint positively defined linear operator in H, A is unbounded self-adjoint positively defined linear operator in H_D and B is nonnegative linear operator in H. Using energy method and Gronwall lemma one obtains the following standard a priori estimate [12]:

$$\|u(t)\|_D^2 + \|u'(t)\|_A^2 \le e^t\left(\|u_1\|_D^2 + \|u_0\|_A^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{D^{-1}}^2 ds\right).$$

3.1. Global Stability

Taking inner product of (13) with 2u' and using Cauchy-Schwarz inequality we obtain:

$$\left(\|u'\|_D^2 + \|u\|_A^2\right)' + 2\,\|u'\|_B^2 = 2\,(f,u) \le 2\,\|u'\|_D\,\|f\|_{D^{-1}} \le \left(\|u'\|_D^2 + \|u\|_A^2\right)^{1/2}\,\|f\|_{D^{-1}}$$

.

After integration one obtains [2,7]:

$$\left(\|u(t)\|_D^2 + \|u'(t)\|_A^2\right)^{1/2} \le \left(\|u_1\|_D^2 + \|u_0\|_A^2\right)^{1/2} + \int_0^t \|f(s)\|_{D^{-1}} ds\,. \tag{14}$$

If $B = 0$ from (14) one obtains the following scale of a priori estimates [7]:

$$\max_{s\in[0,t]}\|u(s)\|_D \le \|u_0\|_D + \|Du_1\|_{A^{-1}} + \int_0^t \|f(s)\|_{A^{-1}}\,ds\,,$$

$$\max_{s\in[0,t]}\left(\|u'(s)\|_D + \|u(s)\|_A\right) \le \sqrt{2}\left(\|u_1\|_D + \|u_0\|_A + \int_0^t \|f(s)\|_{D^{-1}}ds\right),$$

$$\max_{s\in[0,t]}\left(\|u''(s)\|_D + \|u'(s)\|_A + \|Au(s)\|_{D^{-1}}\right) \le$$

$$\le \left(\sqrt{2}+1\right)\left(\|u_1\|_A + \|Au_0\|_{D^{-1}} + \|f(0)\|_{D^{-1}} + \int_0^t \|f'(s)\|_{D^{-1}}ds + \int_0^t \left\|D^{-1}f(s)\right\|_A ds\right), \quad (15)$$

$$\max_{s\in[0,t]}\left(\|u'''(s)\|_D + \|u''(s)\|_A + \|Au'(s)\|_{D^{-1}} + \left\|D^{-1}Au(s)\right\|_A\right) \le$$

$$\le 2\sqrt{2}\left(\|Au_1\|_{D^{-1}} + \left\|D^{-1}Au_0\right\|_A + \|f'(0)\|_{D^{-1}} + \left\|D^{-1}f(0)\right\|_A + \int_0^t \|f''(s)\|_{D^{-1}}ds + \int_0^t \left\|AD^{-1}f(s)\right\|_{D^{-1}}ds\right)$$

etc.

3.2. Asymptotic Stability

Consider the homogeneous Cauchy problem:

$$u''(t) + Bu'(t) + Au(t) = 0, \;\; t > 0; \;\; u(0) = u_0; \quad u'(0) = u_1 \;\;, \qquad (16)$$

where A and B are unbounded linear positive self-adjoint operators in H. Assume also that $AB = BA$ where this product is defined.

Let the operator inequality $A - 0.25B^2 \ge c_0 A, \quad 0 < c_0 < 1$, is satisfied. Taking inner product of (16) with 2u' one obtains:

$$\left(\|u'\|^2 + \|u\|_A^2\right)' + 2\|u'\|_B^2 = 0\,. \qquad (17)$$

Identity (17) can be rearranged in the following manner

$$\left(\left\|u' + \frac{1}{2}Bu\right\|^2 + \|u\|^2_{A-\frac{1}{4}B^2}\right)' + \left\|u' + \frac{1}{2}Bu\right\|_B^2 + \|u\|^2_{B(A-\frac{1}{4}B^2)} = 0 \;. \qquad (18)$$

Using inequality

$$\|u\|_B^2 \ge \lambda_1 \|u\|^2,$$

where λ_1 is the minimal eigenvalue of the spectral problem $Bu = \lambda u$, and integrating (18) we obtain a priori estimate:

$$\left\|u'(t) + \frac{1}{2}Bu(t)\right\|^2 + \|u(t)\|^2_{A-\frac{1}{4}B^2} \le e^{-\lambda_1 t}\left(\left\|u_1 + \frac{1}{2}Bu_0\right\|^2 + \|u_0\|^2_{A-\frac{1}{4}B^2}\right). \qquad (19)$$

Similarly, from (17) follows

$$\left(\left\| Au + \frac{1}{2} Bu' \right\|^2_{(A-\frac{1}{4}B^2)^{-1}} + \|u'\|^2 \right)' + \left\| Au + \frac{1}{2} Bu' \right\|^2_{B(A-\frac{1}{4}B^2)^{-1}} + \|u'\|^2_B = 0 \,,$$

and after integration:

$$\left\| Au(t) + \frac{1}{2} Bu'(t) \right\|^2_{(A-\frac{1}{4}B^2)^{-1}} + \|u'(t)\|^2 \le e^{-\lambda_1 t} \left(\left\| Au_0 + \frac{1}{2} Bu_1 \right\|^2_{(A-\frac{1}{4}B^2)^{-1}} + \|u_1\|^2 \right) \tag{20}$$

From (19) and (20) one obtains the following estimate of the asymptotic stability [7,2]:

$$\|u'(t)\|^2 + \|u(t)\|^2_A \le \frac{4}{c_0} e^{-\mu_1 t} \left(\|u_1\|^2 + \|u_0\|^2_A \right). \tag{21}$$

In the case when the operator inequality $0.25B^2 - A \ge c_1 B^2, \quad 0 < c_1 < 0.25$, is fulfilled an analogous a priori estimate holds [7,2]:

$$\|u'(t)\|^2 + \|Bu(t)\|^2 \le \frac{2}{c_1} e^{-\nu_1 t} \left(\|u_1\|^2 + \|Bu_0\|^2 \right). \tag{22}$$

Here $\nu_1 > 0$ is the first eigenvalue of the operator $B - (B^2 - 4A)^{1/2}$.

4. OPERATOR-DIFFERENCE SCHEMES

Analogous results hold for two- and three-level operator-difference schemes in a Hilbert space H (see [1-4]).

REFERENCES

[1] Б.С. Йованович, С.В. Лемешевский, П.П. Матус: *Глобальная устойчивость дифференциально-операторных уравнений второго порядка и трехслойных операторно-разностных схем*. Доклады НАН Беларуси. 2002. Т. 46. No 4 (2002), 30-34.

[2] B.S. Jovanović, S.V. Lemeshevsky, P.P. Matus: *On the stability of differential-operator equations and operator-difference schemes as* $t \to \infty$. Comput. Methods Appl. Math. 2, No 2 (2002), 153-170.

[3] B.S. Jovanović, P.P. Matus: *On the strong stability of operator-difference schemes in time-integral norms*. Comput. Methods Appl. Math. 1 (2001), 72-85.

[4] Б.С. Йованович, П.П. Матус: *Сильная устойчивость дифференциально-опера-торных уравнений и операторно-разностных схем в интегральных по времени нормах*. Дифференциальные уравнения 37, No 7 (2001), 950-958.

[5] Б.С. Йованович, П.П. Матус: *Сильная устойчивость дифференциальных урав-нений второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами*. Доклады НАН Беларуси. 2002. Т. 46. No 1 (2002), 16-19.

[6] Б.С. Йованович, П.П. Матус: *Сильная устойчивость дифференциально-опера-торных уравнений второго порядка*. Дифференциальные уравнения 38, No 10 (2002), 1371-1377.

[7] Б.С. Йованович, П.П. Матус: *Об асимптотической устойчивости дифференци-ально-операторных уравнений первого и второго порядка*. Дифференциальные уравнения 39, No 2 (2003) (to appear).

[8] О.А. Ладыженская: *Краевые задачи математической физики*. Наука, Москва, 1973.

[9] О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева: *Линейные и квазилиней-ные уравнения параболического типа*. Наука, Москва, 1967.

[10] J.L. Lions, E. Magenes: *Problèmes aux limites non homogènes et aplications*. Dunod, Paris, 1968.

[11] F. Riesz, B. Sz.-Nagy: *Leçons d'analyse fonctionelle*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.

[12] J. Wloka: *Partial differential equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

ЗА КОМПЛЕКСНИТЕ ПОЛИНОМИ ОРТОГОНАЛНИ НА КРУЖЕН ЛАК

Боро Пиперевски
Електротехнички факултет, Скопје, e_mail: borom@etf.ukim.edu.mk ,

Апстракт:
Се покажува дека некои поткласи комплексни полиноми ортогонални на кружен лак во однос на скаларен производ кој не е позитивно дефинитен, дефинирани и проучувани од W. Gautschi., G.V.Milovanovic и M.G. de Bruin , се решенија на линеарна диференцијална равенка од втор ред со полиномни коефициенти која може да се сведе на систем линеарни диференцијални равенки од прв ред. При тоа е добиена формула за тие полиноми и се добиваат некои релации меѓу тие полиноми и класичните ортогонални полиноми.

Нека е дадена диференцијална равенка од вид:

$$(z^2+Qz+R)(Sz+T)w'' + (\beta_2 z^2+\beta_1 z+\beta_0)w' + (\gamma_1 z+\gamma_0)w = 0. \qquad (1)$$

За равенката (1) е покажано 1983 година [1]дека има едно полиномно решение од степен n ако се задоволени релациите

$$\begin{gathered} n^2S + (\beta_2 - S)n + \gamma_1 = 0, \\ S^2(\beta_0 + SR - QT) + T^2(S + \beta_2) - T\beta_1 S = 0, \\ S^2(\gamma_0\beta_1 + \gamma_0^2 - \gamma_1\beta_0) + T(\gamma_1 + \beta_2)(T\gamma_1 - 2S\gamma_0) = 0 \end{gathered} \qquad (2)$$

каде n е помалиот, ако се два, природен број кој ја задоволува првата релација. При тоа е добиена и формулата за полиномното решение

$$w = e^{-F}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(z+K)(z^2+Qz+R)^{n-1}e^F] , \qquad (3)$$

каде $F = \int \frac{Mz+N}{z^2+Qz+R}dz$, $M = \frac{\beta_2 - S}{S}, N = \frac{\beta_1 - T}{S} - \frac{T\beta_2}{S^2}$,

$$K = \frac{T\gamma_1 - n(S\beta_1 - 2T\beta_2 - T\gamma_1 + S\gamma_0)}{S\gamma_1}.$$

Во истиот труд се покажува дека равенката (1), која ги задоволува условите (2), може да се сведе на систем диференцијални равенки од прв ред од вид:

$$(a_1z+a_2)y' + (b_1z+b_2)w' + Ay = 0,$$

$$(c_1z+c_2)y' + (d_1z+d_2)w' + Bw = 0, \qquad (4)$$

каде $w=w(z)$, $y=y(z)$, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, A, B$ се константи и важи $b_1=0$, $nd_1+B=0$, $ra_1+A\neq 0$ за $r\in N$, $0\leq r<n$. При тоа системот ќе има едно решение $w=P_n(z)$, $y=Q_{n-1}(z)$, каде $P_n(z)$ е полином од n ти степен и $Q_{n-1}(z)$ полином од n-1 ви степен.

Во трудот на G.Milovanovic, W.Gautschi, H.Landau, објавен 1987 година [2], се дефинирани комплексни полиноми ортогонални на полукружница $\Gamma = \{z\in C \mid |z|=1, \operatorname{Im} z > 0\}$ во однос на скаларен производ дефиниран со (f, g) = $\int_\Gamma f(z)g(z)w(z)(iz)^{-1}dz$, каде тежинска функција е $w(z) = (1-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$,$\lambda > -\frac{1}{2}$ и се покажани повеќе нивни својства. Во истиот труд е покажано дека една поткласа комплексни полиноми , дефинирани со класичните монични ортогонални полиноми на Gegenbauer, ортогонални во однос на тежинската функција $p(z) = (1-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, $\lambda > -\frac{1}{2}$, задоволува линеарна диференцијална равенка од втор ред од вид (1), каде:

$$S = 2(2n+2\lambda-1)(n+\lambda-1)i\theta_{n-1} , \; T = 4(n+\lambda-1)^2\,\theta_{n-1}^2 - n(n+2\lambda-1),$$
$$R= -1,\; Q = 0,\; \beta_2 =2\lambda S,\; \beta_1 = (2\lambda+1)T,\; \beta_0 = S,\; \gamma_1 = -n(n+2\lambda-1)S,$$
$$\gamma_0 = (n+2\lambda-1)[n(2n+2\lambda-1) - (n-1)T],$$

и каде θ_n е дадена со рекуретната врска:

$$\theta_n = \frac{n(n+2\lambda-1)}{4(n+\lambda)(n+\lambda-1)\theta_{n-1}} \text{ , } n\in N, \text{ и } \theta_0 = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\;\Gamma(\lambda+1)},$$

$\Gamma(x)$ е Гама функција.

Може да се покаже дека оваа диференцијална равенка ги задоволува релациите (2) и според тоа , во согласност со формулата

(3), комплексните ортогонални полиноми можат да се добијат со формулата:

$$w_n^{\lambda}(z) = (n+2\lambda-1)^2 (z^2-1)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\left(z - \frac{2(n+\lambda-1)\theta_{n-1}}{(n+2\lambda-1)} i\right)\left(z^2-1\right)^{n+\lambda-\frac{3}{2}}\right] \qquad (5)$$

Исто така оваа диференцијална равенка, во согласност со системот (4), може да се сведе на системот:

$$\left(z - \frac{2\theta_{n-1}(n+\lambda-1)}{n} i\right) y' - \frac{1}{n(n+2\lambda-1)} w' + (n+2\lambda-1) y = 0,$$

$$(Sz+T)y' + \left(z - \frac{2\theta_{n-1}(n+\lambda-1)}{(n+2\lambda-1)} i\right) w' - nw = 0. \qquad (6)$$

При тоа системот има едно решение дадено со формулата (5) и со формулата:

$$y(z) \equiv P_{n-1}^{\lambda} = (z^2-1)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\left(z^2-1\right)^{n+\lambda-\frac{3}{2}}\right].$$

со која се дадени полиномите на Gegenbauer од n-1 –ви степен. Соодветната диференцијална равенка во однос на y е диференцијалната равенка на Gegenbauer

$$(z^2-1)y'' + (2\lambda+1)zy' - (n-1)(n-1+2\lambda)y = 0,$$

чии решенија се полиномите на Gegenbauer, ортогонални на сегментот [-1, 1] во однос на тежинската функција p(z) = $(1-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$,$\lambda > -\frac{1}{2}$ и според дефиницијата важи $w_n^{\lambda}(z) = P_n^{\lambda}(z) - i\theta_{n-1} P_{n-1}^{\lambda}(z)$.

Во трудот на G.Milovanovic и P.Rajkovic, објавен 1992 година [3], се разгледани комплексни полиноми, ортогонални на кружен лак

$\Gamma_R = \{z \in C \mid z = -iR + e^{i\theta}\sqrt{R^2+1}, \varphi \le \theta \le \pi - \varphi, tg\varphi = R\}$ во однос на скаларен производ дефиниран со (f, g) = $\int\limits_{\Gamma_R} f(z)g(z)w(z)(iz-R)^{-1}dz$,

каде тежинска функција е w(z) $=(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$, дефинирани од M.G.de Bruin 1990 година. Во истиот труд е покажано дека една таква поткласа комплексни полиноми, дефинирани со класичните монични ортогонални полиноми на Jacobi ,ортогонални во однос на тежинската функција p(z) $=(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}$,$\alpha > -1$, $\beta > -1$, задоволува исто така диференцијална равенка од вид (1) со релациите (2), каде

$$S = (2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)i\,\theta_{n-1},$$

$$T = -\frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)^2} - i(\beta^2-\alpha^2)\frac{2n+\alpha+\beta-1}{2n+\alpha+\beta}\theta_{n-1} +$$

$$+(2n+\alpha+\beta-1)^2\theta_{n-1}^2$$

$$Q=0,\ R=-1,\ \beta_2=(\alpha+\beta+1)S,\ \beta_1=-(\beta-\alpha)S+(\alpha+\beta+2)T,$$

$$\beta_0 = -(\beta-\alpha)T + S,\ \ \gamma_1 = -n(n+\alpha+\beta)S,$$

$$\gamma_0 = -n(n+\alpha+\beta+1)T + \frac{n(\beta-\alpha)}{2n+\alpha+\beta}S - \frac{1}{2n+\alpha+\beta}S^2, \qquad (7)$$

и каде θ_n е дадена со $\theta_{n-1} = \frac{1}{i}\frac{\rho_n(-iR)}{\rho_{n-1}(-iR)}$, $n\in N$,

$$\rho_n(z) = \int_{-1}^{1}\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{z-x}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx,$$

а $P_n^{(\alpha,\beta)}$ (x) е полином на Jacobi од n –ти степен.

Во тој случај, во согласност со формулата (3), комплексните ортогонални полиноми можат да се добијат со формулата

$$w_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{n+\alpha+\beta}{2n+\alpha+\beta}(z-1)^{-\alpha}(z+1)^{-\beta}\ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{[(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta)z -$$

$$- (\beta-\alpha)(n+\alpha+\beta) - S](z-1)^{n+\alpha-1}(z+1)^{n+\beta-1}\}\,, \qquad (8)$$

каде S е даден со една од релациите (7) .

Во согласност со системот (4) соодветниот систем на кој оваа диференцијална равенка може да се сведе е

$$\left(z+\frac{n(\beta-\alpha)-S}{n(2n+\alpha+\beta)}\right)y' - \frac{1}{n(n+\alpha+\beta)}w' + (n+\alpha+\beta)y = 0\,,$$

$$(Sz+T)y' + \left(z-\frac{(\beta-\alpha)(n+\alpha+\beta)+S}{(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta)}\right)w' - nw = 0\,. \qquad (9)$$

Соодветната диференцијална равенка која се добива од овој систем во однос на y е диференцијалната равенка на Jacobi

$$(z^2-1)y'' + [(\alpha+\beta+2)z - (\beta-\alpha)]\,y' - (n-1)(n+\alpha+\beta)y = 0.$$

чии решенија се полиномите на Jacobi од степен n-1 дадени со формулата

$$y(z) = P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(z) = (z-1)^{-\alpha}(z+1)^{-\beta}\ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-1)^{n+\alpha-1}(z+1)^{n+\beta-1}]\,,$$

ортогонални на сегментот [-1, 1] во однос на тежинската функција $p(z) = (1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}$,$\alpha > -1$, $\beta > -1$. При тоа важи

$$w_n^{(\alpha,\beta)}(z) = P_n^{(\alpha,\beta)}(z) - i\theta_{n-1}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(z)\,.$$

За $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$, $\lambda > -\frac{1}{2}$, со ортогоналност дефинирана на полукружница, се добива првиот случај.

Од соодветните системи (9) односно (6) можат да се добијат и соодветни релации меѓу комплексните ортогонални полиноми и класичните монични ортогонални полиноми на Jacobi односно Gegenbauer. Исто така може да се покаже дека соодветните диференцијални равенки чии решенија се комплексните ортогонални полиноми немаат второ партикуларно решение полином бидејќи потребниот услов степенот на второто полиномно решение да е корен на карактеристичната равенка не е задоволен. Имено вториот корен на карактеристичната равенка е $-(n+2\lambda-1)<0$ ($\notin N$) во првиот случај, и е $-(n+\alpha+\beta)<0$ ($\notin N$) во вториот случај.

ON COMPLEX POLYNOMIALS ORTHOGONAL TO CIRCLE ARC

Boro Piperevski

Abstract
It is shown that some subclasses of complex polynomials, orthogonal to circle arc are solutions of linear differential equation of second order which can be reduced to a system of linear differential equations of first order. A formula for this polynomials is also obtained,

ЛИТЕРАТУРА

1. Пиперевски Боро М. : За една формула на полиномно решение на една класа линеарни диференцијални равенки од втор ред ; СДМ на СРМ, Математички билтен, книга 7-8 , стр. 10-15. Скопје 1983-84.
2. Walter Gautschi, Henry J. Landau, and Gradimir V. Milovanović : Polynomials Orthogonal on the Semicircle, II ; Constructive Approximation (1987) 3: 389-404, Springer-Verlag New York Inc.
3. Gradimir V. Milovanović , Predrag M. Rajković : On polynomials orthogonal on a circular arc ; Journal of Computational and Applied Mathematics 51 (1994) 1 – 13, Elsevier Science B.V. , Amsterdam, Netherlands.

Седми Македонски Симпозиум по диференцијални равенки,
Охрид, 26-29.09.2002, Зборник на трудови

ЕГЗИСТЕНЦИЈА И КОНСТРУКЦИЈА НА ОПШТО РЕШЕНИЕ НА ЕДНА КЛАСА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР РЕД СО ПОЛИНОМНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Боро Пиперевски[1] , Невена Серафимова[2]
[1]Електротехнички факултет - Скопје
[2]Воена Академија”Генерал Михајло Апостолски” - Скопје

Апстракт:

Во овој труд се разгледува една класа линеарни диференцијални равенки од втор ред со полиномни коефициенти. Со смена на функцијата и со користење на егзистенцијален услов за полиномно решение се добиени егзистенцијални услови за интеграбилност во кои е содржан природен број. При тоа е добиена и формула за општо решение на равенката и на крај се дадени повеќе примери.

1. Нека е дадена диференцијална равенка од вид

$$(a_2x^2 + a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' + c_0y = 0, \qquad (1)$$

односно од вид

$$Ay'' + By' + Cy = 0,$$

каде $A = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $B = b_1x + b_0, C = c_0$.

Нека диференцијалната равенка (1) има полиномно решение од степен n и нема друго полиномно решение од степен помал од n. Тогаш n е корен на карактеристичната равенка:

$$\frac{n(n-1)}{2}A'' + nB' + C = 0. \qquad (2)$$

Диференцијалната равенка:

$$Av'' + (B+nA')v' = 0, \qquad (3)$$

има две линеарно независни партикуларни решенија

$$v_1 = 1, \quad v_2 = \int A^{-n} e^{-\int \frac{B}{A}dx} dx.$$

Со смената

$$v = A^{1-n} e^{-\int \frac{B}{A}dx} w,$$

равенката (3) се трансформира во равенката:

$$Aw'' - [(n-2)A' + B]w' - [(n-1)A'' + B']w = 0, \qquad (4)$$

која, согласно смената има две линеарно независни партикуларни решенија:

$$w_1 = A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx}, \quad w_2 = A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx} \int A^{-n} e^{-\int \frac{B}{A}dx} dx.$$

По n последователни диференцирања на равенката (4) се добива равенката:

$$Aw^{(n+2)} + (2A' - B)w^{(n+1)} + [A'' - B' - (\frac{n(n-1)}{2} A'' + nB')]w^{(n)} = 0,$$

или , во согласност со условот (2), равенката:

$$Aw^{(n+2)} + (2A' - B)w^{(n+1)} + (A'' - B' + C)w^{(n)} = 0,$$

Во согласност со соодветната смена последната равенка има две партикуларни решенија w_1 и w_2 за кои важи

$$w_1^{(n)} = (A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx})^{(n)}, \quad w_2^{(n)} = (A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx} \int A^{-n} e^{-\int \frac{B}{A}dx} dx)^{(n)},$$

а, очигледно, останатите n партикуларни решенија со кои заедно се формира еден фундаментален систем, се степенските функции 1, x, x^2, ..., x^{n-1} .

Ако во последната диференцијална равенка се стави $w^{(n)} = z$, ќе се добие равенката:

$$Az'' + (2A' - B)z' + (A'' - B' + C)z = 0,$$

која има општо решение

$$z = C_1\,(A^{n-1}e^{\int \frac{B}{A}dx})^{(n)} + C_2\,(A^{n-1}e^{\int \frac{B}{A}dx} \int A^{-n}e^{-\int \frac{B}{A}dx}dx)^{(n)} .$$

Со смената

$$z = A^{-1}e^{\int \frac{B}{A}dx}y$$

дефинитивно се добива равенката (1) и нејзиното општо решение ќе биде дадено со формулата

$$y = C_1\, Ae^{-\int \frac{B}{A}dx}\,(A^{n-1}e^{\int \frac{B}{A}dx})^{(n)} +$$
$$+C_2\, Ae^{-\int \frac{B}{A}dx}(A^{n-1}e^{\int \frac{B}{A}dx} \int A^{-n}e^{-\int \frac{B}{A}dx}dx)^{(n)}, \qquad (5)$$

каде C_1, C_2 се произволни константи.

Полиномното решение од степен n е дадено со формула

$$P_n = Ae^{-\int \frac{B}{A}dx}\,(A^{n-1}e^{\int \frac{B}{A}dx})^{(n)},$$

наречена формула на Родригез.

Со стандардна процедура кога е познато едно партикуларно решение y = F(x) за општото решение на диференцијалната равенка (1) се добива друга, различна од формулата (5), формула:

$$y = C_2F + C_1F\int \frac{1}{F^2}e^{-\int \frac{B}{A}} . \qquad (5^*)$$

2. Нека е дадена диференцијална равенка од вид (1) и нека x_1, x_2 се реални различни корени на квадратната равенка $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, при што $a_2 \neq 0$. Нека диференцијалната равенка (1) ја запишеме во вид:

$$y'' + \left(\frac{p}{x-x_1} + \frac{q}{x-x_2} \right) y' + \frac{r}{(x-x_1)(x-x_2)}\, y = 0, \qquad (6)$$

каде $p = \dfrac{b_1x_1 + b_0}{x_1 - x_2}$, $q = \dfrac{b_1x_2 + b_0}{x_2 - x_1}$, $r = c_0$.

Со трансформациите

$$y = (x-x_1)^{1-p}\, z_1\,,$$
$$y = (x-x_2)^{1-q}\, z_2\,, \qquad (7)$$
$$y = (x-x_1)^{1-p}\,(x-x_2)^{1-q}\, z_3\,,$$

равенката (6) се трансформира во најмногу три други равенки од иста форма [1,2], дадени со

$$z_1'' + \left(\frac{2-p}{x-x_1} + \frac{q}{x-x_2}\right) z_1' + \frac{r-pq+q}{(x-x_1)(x-x_2)}\, z_1 = 0\,,$$
$$z_2'' + \left(\frac{p}{x-x_1} + \frac{2-q}{x-x_2}\right) z_2' + \frac{r-pq+p}{(x-x_1)(x-x_2)}\, z_2 = 0\,, \qquad (8)$$
$$z_3'' + \left(\frac{2-p}{x-x_1} + \frac{2-q}{x-x_2}\right) z_3' + \frac{r-p-q+2}{(x-x_1)(x-x_2)}\, z_3 = 0\,.$$

Условот карактеристичната равенка $t^2 + (p+q-1)t + r = 0$ да има корен природен број n ,помалиот ако и двата корена се природни броеви, е потребен и доволен услов диференцијалната равенка (6) да има едно полиномно решение од степен n и да нема друго полиномно решение од степен помал од n. Овој услов применет на равенката (6) и равенките (8), ќе биде даден соодветно со релациите

$$n^2 + (p+q-1)n + r = 0,$$
$$n^2 + (q-p+1)n + r-pq + q = 0, \qquad (9)$$
$$n^2 + (p-q+1)n + r-pq + p = 0,$$
$$n^2 + (3-p-q)n + r-p-q+2 = 0,$$

каде во секоја од релациите n е природен број (помалиот ако соодветната карактеристична равенка има корени два природни броја).

Ако диференцијалната равенка од вид (6) има едно полиномно решение од степен n и нема друго полиномно решение од степен помал од n, тогаш во согласност со формулата (5), нејзиното општо решение ќе биде дадено со формулата:

$$y = (x-x_1)^{1-p}(x-x_2)^{1-q}\Big\{(x-x_1)^{n+p-1}(x-x_2)^{n+q-1}\Big[C_1 + C_2\int (x-x_1)^{-n-p}(x-x_2)^{-n-q}\,dx\ \Big]\Big\}^{(n)}$$

, C_1, C_2 - константи.

ТЕОРЕМА: Нека е дадена диференцијална равенка (6). Нека t=**a** е корен на карактеристичната равенка $t^2 + (p+q-1)t + r = 0$. Ако коренот **a** задоволува еден од условите:

1^0 **a** $\in$ N , помалиот корен ако се двата природни броеви,

2^0 **a** + p-1$\in$ N или –(**a**+q) $\in$ N , помалиот корен ако се двата природни броеви,

3^0 **a** + q-1$\in$ N или –(**a**+p) $\in$ N , помалиот корен ако се двата природни броеви,

4^0 **a** + p+q-2$\in$ N или –(**a**+1) $\in$ N , помалиот корен ако се двата природни броеви,

тогаш равенката (6) е интеграбилна во затворен вид и при тоа во согласност со формулата (5) има општо решение , соодветно за секој случај, дадено со формулата:

1^0 $y = (x-x_1)^{1-p}(x-x_2)^{1-q}\Big\{(x-x_1)^{n+p-1}(x-x_2)^{n+q-1}\Big[C_1 +$
$+ C_2\int (x-x_1)^{-n-p}(x-x_2)^{-n-q}\,dx\ \Big]\Big\}^{(n)}$, каде n = **a**.

2^0 $y = (x-x_2)^{1-q}\Big\{(x-x_1)^{n-p+1}(x-x_2)^{n+q-1}\Big[C_1 +$
$+ C_2\int (x-x_1)^{-n+p-2}(x-x_2)^{-n-q}\,dx\ \Big]\Big\}^{(n)}$, каде n = **a** + p-1 или n = –(**a**+q),

3^0 $y = (x-x_1)^{1-p}\Big\{(x-x_1)^{n+p-1}(x-x_2)^{n-q+1}\Big[C_1 +$
$+ C_2\int (x-x_1)^{-n-p}(x-x_2)^{-n+q-2}\,dx\ \Big]\Big\}^{(n)}$, каде n = **a** + q-1 или n= –(**a**+p).

4^0 $y = \Big\{(x-x_1)^{n-p+1}(x-x_2)^{n-q+1}\Big[C_1 +$
$+ C_2\int (x-x_1)^{-n+p-2}(x-x_2)^{-n+q-2}\,dx\ \Big]\Big\}^{(n)}$, каде n=**a** + p+q-2 или n = –(**a**+1) ,

при што C_1, C_2 се произволни константи.

Условите 1^0 , 2^0, 3^0 и 4^0 се добиени од релациите (9) во согласност со условот (2) применет на диференцијалните равенки (6) и (8) соодветно. Формулите 1^0, 2^0, 3^0 и 4^0 за општо решение се добиени врз основа на формулата (5) и соодветните трансформации (7).

Во случајот 1^0 диференцијалната равенка (6) има едно полиномно решение дадено со формулата на Родригес. Во согласност со дадените формули диференцијалната равенка (6) ќе има едно рационално решение ако барем еден од броевите p и q е цел број.

Пример 1:

Нека е дадена диференцијалната равенка од втор ред

$$.(x^2+3x+2)\,y''+(3x+4)y'-8y=0 \qquad (1.1)$$

Корените на полиномот од втор ред се $x_1=-1$ и $x_2=-2$.

Земајќи $p=1,\ q=2$ и $r=-8$, равенката (1.1) може да се запише во обликот

$$y''+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)y'-\frac{8}{(x+1)(x+2)}y=0 \quad , \qquad (1.1')$$

а нејзината карактеристична равенка гласи $t(t-1)+3t-8=0.$

Бидејќи последната равенка има еден единствен природен корен $a=2$, според случајот 1^0, равенката (1.1) ќе има полиномно решение од степен 2. Нејзиното општо решение според формулата 1^0 е дадено со:

$$y = (x+2)^{-1}\ \{(x+1)^2(x+2)^3\ [C_1 + C_2\int(x+1)^{-3}(x+2)^{-4}dx]\}'' =$$
$$= C_1(20x^2+56x+38) +$$
$$C_2\left[\frac{-x^2+x+3}{(x+1)^2(x+2)^3}+(20x^2+56x+38)\int\frac{dx}{(x+1)^3(x+2)^4}\right].$$

Во согласност со формулата (5*) општото решение е дадено и со

$$y=C_1F+C_2F\int\frac{1}{F^2}\cdot\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}dx \quad ,$$

каде $F=10x^2+28x+19$.

Со смените $y=(x+2)^{1-1}z_1$, $y=(x+2)^{-1}z_2$, $y=(x+2)^{-1}z_3$,

$z_i=z_i(x)$,i=1,2,3 во (1) , се добиваат равенките:

$$(x^2+3x+2)\,z_1''+(3x+4)z_1'-8z_1=0\,,$$
$$(x^2+3x+2)z_2''+(x+2)z_2'-9z_2=0\,,$$
$$(x^2+3x+2)z_3''+(x+2)z_3'-9z_3=0\,,$$

односно равенките

$$z_1''+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)z_1'-\frac{8}{(x+1)(x+2)}z_1=0\,,$$
$$z_2''+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{0}{x+2}\right)z_2'-\frac{9}{(x+1)(x+2)}z_2=0\,,$$
$$z_3''+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{0}{x+2}\right)z_3'-\frac{9}{(x+1)(x+2)}z_3=0\,,$$

кои во согласност со смените имаат општи решенија:

$$z_1 = y = C_1(20x^2+56x+38) +$$
$$C_2\left[\frac{-x^2+x+3}{(x+1)^2(x+2)^3}+(20x^2+56x+38)\int\frac{dx}{(x+1)^3(x+2)^4}\right],$$

$$z_2 = z_3 = C_1(x+2)(20x^2+56x+38) +$$
$$C_2(x+2)\left[\frac{-x^2+x+3}{(x+1)^2(x+2)^3}+(20x^2+56x+38)\int\frac{dx}{(x+1)^3(x+2)^4}\right].$$

Пример 2:

Нека е дадена диференцијалната равенка од втор ред:

$$(4x^2-4x-8)y''+(8x+2)y'-3y=0\,. \tag{2.1}$$

Нулите на полиномот пред y'' се $x_1=-1$ и $x_2=2$, и таа може да се запише во обликот:

$$y''+\left(\frac{1}{2(x+1)}+\frac{3}{2(x-2)}\right)y'-\frac{3}{4(x+1)(x-2)}y=0\,. \tag{2.1'}$$

Оттука, ги добиваме вредностите $p=\frac{1}{2},\ q=\frac{3}{2}$ и $r=-\frac{3}{4}$.

Карактеристичната равенка на (2.1) гласи $t(t-1)+2t-\frac{3}{4}=0$, и има корени $a_1=-\frac{3}{2}$ и $a_2=\frac{1}{2}$. Јасно е дека (2.1) нема да има полиномни решенија. За $a_2=\frac{1}{2}$ се добива $a+q-1=1 \quad \in \mathrm{N}$, случај 3^0, и со смената $y=(x-2)^{-\frac{1}{2}} z_2$, $z_2=z_2(x)$, се добива единствената трансформирана равенка:

$$(2x^2-2x-4)z_2''+(2x-1)z_2'-2z_2=0\,, \tag{2.2}$$

односно

$$z_2''+\left(\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-2)}\right)z_2'-\frac{1}{(x+1)(x-2)}z_2=0\,,$$

која има полиномно решение.

Според формулата 3^0 општото решение на равенката (2.1) е

$$y=(x+1)^{\frac{1}{2}}\left\{(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}[C_1+C_2\int(x+1)^{-\frac{3}{2}}(x-2)^{-\frac{3}{2}}dx]\right\}'=$$

$$=C_1\frac{1}{2}\left[(x-2)^{\frac{1}{2}}+(x+1)(x-2)^{-\frac{1}{2}}\right]+$$

$$C_2\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{-1}+\frac{1}{2}[(x-2)^{\frac{1}{2}}+(x+1)(x-2)^{-\frac{1}{2}}]\int(x+1)^{-\frac{3}{2}}(x-2)^{-\frac{3}{2}}dx\right]$$

Во согласност со смената општото решение на равенката (2.2) ќе биде дадено со формулата

$$z_2=(x-2)^{\frac{1}{2}}y=C_1\frac{1}{2}(2x-1)+$$

$$+C_2\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(2x-1)\int(x+1)^{-\frac{3}{2}}(x-2)^{-\frac{3}{2}}dx\right].$$

Со смените $y=(x+1)^{\frac{1}{2}}\, z_1$ и $y=(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{-\frac{1}{2}}\, z_3$, се добиваат содветно равенките:

$$(2x^2-2x-4)\, z_1''+(6x-3)\, z_1' =0,$$
$$(4x^2-4x-8)\, z_3''+(8x-10)\, z_3'-3z_3=0\ ,$$

односно

$$z_1''+\left(\frac{3}{2(x+1)}+\frac{3}{2(x-2)}\right)z_1' =0,$$
$$z_3''+\left(\frac{3}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-2)}\right)z_3'-\frac{3}{4(x+1)(x-2)}z_3=0,$$

чии општи решенија може да се добијат користејќи ги соодветните смени на трансформација.

Пример 3:

Нека е дадена диференцијалната равенка од втор ред:

$$(x^2+3x+2)\,y''+(7x+10)y'-7y=0\,. \tag{3.1}$$

Корените на полиномот x^2+3x+2 се $x_1=1$ и $x_2=2$, и таа може да се запише во обликот:

$$y''+\left(\frac{3}{x+1}+\frac{4}{x+2}\right)y' \ -\frac{7}{(x+1)(x+2)}y=0\,. \tag{3.1'}$$

Карактеристичната равенка на (3.1) е $t(t-1)+7t-7=0$, со решенија $a=1\in \mathrm{N}$ и $a_1=-7$. Од (3.1') ги добиваме $p=3,\quad q=4$ и $r=-7$, од каде следи $a+p-1=3\in \mathrm{N}$, $a+q-1=4\in \mathrm{N}$, $a+p+q-2=6\in \mathrm{N}$. Според тоа заклучуваме дека (3.1), заедно со трансформираните равенки:

$$(x^2+3x+2)z_1''+(3x+2)z_1'-15z_1=0\ , \tag{3.2}$$

$$(x^2+3x+2)z_2''+(x+4)z_2'-16z_2=0, \qquad (3.3)$$

$$(x^2+3x+2)z_3''-(3x+4)z_3'-12z_3=0, \qquad (3.4)$$

кои се добиени со соодветните смени

$$y=(x+1)^{-2}\, z_1\ ,\ y=(x+2)^{-3}\, z_2,\ y=(x+1)^{-2}(x+2)^{-3}z_3,$$

ќе имаат полиномни решенија.

Со користење на формулата 1^0 се добива општото решение на равенката (3.1):

$y = (x+1)^{-2} (x+2)^{-3} \{C_1[(x+1)^3(x+2)^4]' + C_2[(x+1)^3(x+2)^4\int(x+1)^{-4}(x+2)^{-5}dx]'\} =$

$$=C_1(7x+10)+C_2\left[(x+1)^{-3}(x+2)^{-4}+(7x+10)\int(x+1)^{-4}(x+2)^{-5}dx\ \right].$$

Општите решенија на (3.2), (3.3) и (3.4) , може да се добијат користејќи ги соодветните смени на трансформација:

$$z_1=C_1(x+1)^2(7x+10)+$$
$$+C_2\left[(x+1)^{-1}(x+2)^{-4}+(x+1)^2(7x+10)\int(x+1)^{-4}(x+2)^{-5}dx\right],$$
$$z_2=C_1(x+2)^3(7x+10)+$$
$$+C_2\left[(x+1)^{-3}(x+2)^{-1}+(x+2)^3(7x+10)\int(x+1)^{-4}(x+2)^{-5}dx\right],$$
$$z_3=\ C_1(x+1)^2(x+2)^3(7x+10)+C_2\left[(x+1)^{-1}(x+2)^{-1}+\right.$$
$$\left.+(x+1)^2(x+2)^3(7x+10)\int(x+1)^{-4}(x+2)^{-5}dx\ \right].$$

Општото решение на равенката (3.1), според формулата (5*), може да биде дадено и со формулата :

$$y=C_1(7x+10)+C_2(7x+10)\int\frac{1}{(7x+10)^2}e^{-\int\frac{7x+10}{(x+1)(x+2)}dx}dx\ .$$

Пример 4:

Нека е дадена диференцијалната равенка од втор ред

$$y'' + \left(-\frac{3}{x-1} + \frac{4}{x-2} \right) y' - \frac{4}{(x-1)(x-2)} = 0 \qquad (4.1)$$

Нејзината карактеристична равенка е дадена со $t(t-1)+t-4=0$, чие единствено позитивно целобројно решение е $a=2$. Оттука, равенката (4.1) има полиномно решение од степен 2.
Бидејќи $p=-3,\quad q=4,\quad r=-4,$ добиваме

$$a+q-1=5\in \mathrm{N},\ a+p+q-2=1\in \mathrm{N}$$

од каде заклучуваме дека и равенките:

$$z_2'' + \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{-2}{x-2} \right) z_2' + \frac{5}{(x-1)(x-2)}\, z_2 = 0\ , \qquad (4.2)$$

$$z_3'' + \left(\frac{5}{x-1} + \frac{-2}{x-2} \right) z_3' - \frac{3}{(x-1)(x-2)}\, z_3 = 0\,, \qquad (4.3)$$

добиени од (4.1) со смените $y=(x-2)^{-3}z_2$, $y=(x-1)^4(x-2)^{-3}z_3$, имаат полиномни решенија.

Во согласност со формулата 1^0 општото решение на равенката (4.1) е дадено со формулата:

$$y = (x-1)^4 (x-2)^{-3} \{C_1[(x-1)^{-2}(x-2)^5]'' + C_2[(x-1)^{-2}(x-2)^5\smallint(x-1)\,(x-2)^{-6}dx]''\}=$$

$$= C_1(6x^2-4x+4) + C_2\frac{-5x+8}{10(x-2)^3}\,.$$

Во согласност со смените општите решенија на равенките (4.2) и (4.3) се дадени со формулите

$$z_2 = (x-2)^3 y = C_1(x-2)^3(6x^2-4x+4) + C_2\frac{-5x+8}{10}\,,$$

$$z_3 = (x-1)^{-4}(x-2)^3 y = C_1\frac{(x-2)^3(6x^2-4x+4)}{(x-1)^4} + C_2\frac{-5x+8}{10(x-1)^4}\,.$$

Очигледно од општото решение на равенката (4.3) непосредно не се согледува дека таа има едно партикуларно решение полином од прв степен. Сепак со линеарната комбинација од двете партикуларни решенија кои го формираат општото решение, се добива и полиномното решение т.е.

$$\frac{(x-2)^3(3x^2-2x+2)}{(x-1)^4}+\frac{-5x+8}{(x-1)^4}=3x-8\,.$$

Равенката

$$z_1''+\left(\frac{5}{x-1}+\frac{4}{x-2}\right)z_1'+\frac{12}{(x-1)(x-2)}\,z_1=0\,, \tag{4.4}$$

која ја добиваме од (4.1) со смената $y=(x-1)^4 z_1$, за општо решение има рационална функција, дадена со:

$$z_1=C_1\frac{(3x^2-2x+2)}{(x-1)^4}+C_2\frac{3x-8}{(x-2)^3}\quad .$$

Формулата на општото решение на равенката (4.1), според (5*) , е дадена и со

$$y=C_1(3x^2-2x+2)+C_2\frac{(3x-8)(x-1)^4}{(x-2)^3}\,.$$

EXISTENCE AND CONSTRUCTION OF THE GENERAL SOLUTION OF A CLASS OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POLYNOMIAL COEFFICIENTS

Boro Piperevski, Nevena Serafimova

Abstract:

In this work we observe a class of linear differential equations of second order with polynomial coefficients. Some substitutions for the given equation are introduced using the coefficient in front of y”, and with their help the existential conditions for the integrability of the new equations are obtained, containing natural number. In addition, the formula of the general solution is obtained, and at the end some examples are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boro M.Piperevski: One transformation of a class of linear differential equations, of the second order ; Department of Electrical Engineering , Proceeding 6-7 , 27-34, Skopje, 1990.
2. Boro M.Piperevski: On the existence and construction of a rational solutions of a class of linear differential equation of the second order with polynomial coefficients; СМИМ, Математички билтен , 21, 21-26, 1997, Скопје.

Седми Македонски Симпозиум по диференцијални равенки,
Охрид, 26-29.09.2002, Зборник на трудови

ЗА ЕДНА КЛАСА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР РЕД ЧИЕ ОПШТО РЕШЕНИЕ Е ПОЛИНОМ

Илија Шапкарев[1], Боро Пиперевски[2], Елена Хаџиева[3], Невена Серафимова[4], Катерина Митковска - Трендова[5]

Апстракт: Во овој труд се разгледува една класа линеарни диференцијални равенки од втор ред чие општо решение е полином и се покажува дека таа е редуктибилна на систем диференцијални равенки од прв ред. При тоа е добиен системот диференцијални равенки и формулата за општо решение полином.

1. Нека е дадена диференцијална равенка од вид

$$(a_2x^2 + a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' + c_0y = 0, \qquad (1)$$

односно од вид

$$Ay'' + By' + Cy = 0,$$

каде $A = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $B = b_1x + b_0$, $C = c_0$, $y=y(x)$ и a_2 , a_1 , a_0 , b_1, b_0 , c_0 се константи.

Нека $\Phi=\Phi(x)$ е било кое партикуларно решение на диференцијалната равенка (1). Тогаш важи

$$\begin{aligned} A\Phi y'' + B\Phi y' + C\Phi y &= 0 \\ A\Phi'' y + B\Phi' y + C\Phi y &= 0 \end{aligned}.$$

[1] редовен професор на Електротехничкиот факултет во Скопје ,
[2] редовен професор на Електротехничкиот факултет во Скопје ,
[3] помлад асистент на Електротехничкиот факултет во Скопје
[4] стручен соработник на Воената Академија"Генерал Михајло Апостолски" во Скопје
[5] стручен соработник на Воената Академија "Генерал Михајло Апостолски" во Скопје

Од двете последни равенки се добива равенката

$$A(y''\Phi + \Phi' y' - \Phi' y' - \Phi'' y) + By'\Phi - B\Phi' y + C\Phi y - C\Phi y = 0 \quad ,$$

односно равенката

$$A(y'\Phi - \Phi' y)' + B(y'\Phi - y\Phi') = 0 \ .$$

Ако ставиме $z = y'\Phi - \Phi' y$, можеме да заклучиме дека равенката (1) може да се сведе на системот

$$\begin{aligned} y'\Phi - \Phi' y &= z \\ Az' + Bz &= 0 \end{aligned} \quad . \qquad (2)$$

Нека сега разгледаме систем од вид (2) каде A и B се полиноми од втор односно прв степен и Ф=Ф(x) . Со елиминација на z од системот (2) се добива равенката

$$A\Phi y'' + B\Phi y' - (A\Phi'' + B\Phi')y = 0.$$

Ако ставиме

$$C\Phi = -(A\Phi'' + B\Phi'), \qquad (*)$$

каде C е полином од нулти степен, се добива равенката (1) при што од (*) можеме да заклучиме дека Ф е едно нејзино партикуларно решение .

Нека Ф е партикуларно решение на равенката (1). Во тој случај со решавање на системот (2) се добива

$$\Phi y' - \Phi y = C_2 e^{-\int \frac{B}{A} dx} ,$$

и конечно општото решение на диференцијалната равенка (1) ќе биде дадено со формулата

$$y = C_1\Phi + C_2\Phi \int \frac{1}{\Phi^2} e^{-\int \frac{B}{A}} \ . \qquad (3)$$

Формулата (3) се добива и со класичниот метод за решавање линеарна хомогена диференцијална равенка од вид (1), кога е познато едно нејзино партикуларно решение.

2. Нека диференцијалната равенка (1) има полиномно решение од степен n и нема друго полиномно решение од степен помал од n. Тогаш n е корен на карактеристичната равенка

$$\frac{n(n-1)}{2}A'' + nB' + C = 0\,. \tag{4}$$

Диференцијалната равенка

$$Av'' + (B+nA')v' = 0, \tag{5}$$

има две линеарно независни партикуларни решенија

$$v_1 = 1, \quad v_2 = \int A^{-n} e^{-\int \frac{B}{A}dx} dx$$

Со смената v = $A^{1-n} e^{-\int \frac{B}{A}dx} w$, равенката (5) се трансформира во равенката

$$Aw'' - [(n-2)A'+B]w' - [(n-1)A'' + B']w = 0,$$

која, согласно смената има две линеарно независни партикуларни решенија

$$w_1 = A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx}, \; w_2 = A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx} \int A^{-n} e^{-\int \frac{B}{A}dx} dx\,.$$

По n последователни диференцирања на последната равенка се добива равенката

$$Aw^{(n+2)} + (2A'-B)w^{(n+1)} + [A'' - B' - (\frac{n(n-1)}{2}A'' + nB')]w^{(n)} = 0,$$

или , во согласност со условот (4), равенката

$$Aw^{(n+2)} + (2A'-B)w^{(n+1)} + (A'' - B' + C)w^{(n)} = 0.$$

Во согласност со соодветната смена последната равенка има две партикуларни решенија w_1 и w_2, за кои важи

$$w_1^{(n)} = (A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx})^{(n)}, \; w_2^{(n)} = (A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx} \int A^{-n} e^{-\int \frac{B}{A}dx} dx)^{(n)},$$

а, очигледно, останатите n партикуларни решенија со кои заедно се формира еден фундаментален систем, се степенските функции 1, x, x^2, ..., x^{n-1} .

Ако во последната диференцијална равенка се стави $w^{(n)} = z$, ќе се добие равенката

$$Az'' + (2A'-B)z' + (A'' - B' + C)z = 0,$$

која има општо решение

$$z = C_1 \left(A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A} dx} \right)^{(n)} + C_2 \left(A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A} dx} \int A^{-n} e^{-\int \frac{B}{A} dx} dx \right)^{(n)},$$

C_1, C_2 - константи.

Со смената $z = A^{-1} e^{\int \frac{B}{A} dx} y$, дефинитивно се добива равенката (1) и во тој случај нејзиното општо решение ќе биде дадено со формулата

$$y = C_1 A e^{-\int \frac{B}{A} dx} \left(A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A} dx} \right)^{(n)} + C_2 A e^{-\int \frac{B}{A} dx} \left(A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A} dx} \int A^{-n} e^{-\int \frac{B}{A} dx} dx \right)^{(n)} \qquad (6)$$

C_1, C_2 - константи.

При тоа полиномното решение е дадено со формула наречена формула на Родригез.

Во тој случај равенката (1) е и редуктибилна и може да се сведе на системот:

$$\begin{aligned} &Fy' - F'y = z, \qquad (2^*) \\ &Az' + Bz = 0. \end{aligned}$$

каде F е полиномното решение дадено со формулата на Родригес:

$$F = A e^{-\int \frac{B}{A} dx} \left(A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A} dx} \right)^{(n)}.$$

Да забележиме дека во тој случај во согласност со формулата (3) за општото решение на равенката (1) се добива друга формула различна од формулата (6) од вид

$$y = C_2 F + C_1 F \int \frac{1}{F^2} e^{-\int \frac{B}{A}} \quad . \qquad (3^*)$$

3. Нека е дадена диференцијална равенка (1) и нека x_1 , x_2 се реални корени на квадратната равенка $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, при што $a_2 \neq 0$.

Во $[1,2]$ е покажано дека равенката (1) има општо решение полином ако и само ако постојат природни броеви n, m кои ги задоволуваат условите:

$$\begin{aligned} &n(n-1)a_2 + nb_1 + c_0 = 0,\\ &(2n+m-1)a_2 + b_1 = 0,\\ &[rx_2 + (m-r-1)x_1]a_2 - (na_1 + b_0) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

за некое $r \in \{0,1,...,m-1\}$.

Од првите две релации од условите (7) се добива $b_1 = -(2n + m-1)a_2$, $c_0 = n(n+m)a_2$. Бидејќи x_1 и x_2 се корени на равенката $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, од Виетовите формули се добива $x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$ и со замена во третата релација од условите (7) се добива $b_0 = [(n+r)x_2 + (n+m-r-1)x_1]a_2$.

Со замена на така добиените коефициенти b_1, b_0, c_0 во равенката (1), се добива класата равенки:

$$\begin{aligned} &(x-x_1)(x-x_2)y'' - [(2n+m-1)x - (n+r)x_2 -\\ &-(n+m-r-1)x_1]y' + n(n+m)y = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

од вид (1) кои имаат општо решение полином, каде $r \in \{0,1,...,m-1\}$.

Со примена на формулата (6) за класата диференцијални равенки (8), се добива формулата за нејзино општо решение:

$$y = C_1(x-x_1)^{n+r+1}(x-x_2)^{n+m-r}\,[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\,]^{(n)} +$$

$$+ C_2(x-x_1)^{n+r+1}(x-x_2)^{n+m-r}\,[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\int(x-x_1)^{r}(x-x_2)^{m-r-1}\,dx]^{(n)} \tag{9}$$

C_1, C_2 - константи.

Во согласност со системот (2) односно (2*), диференцијалната равенка (8) е редуктибилна и може да се сведе на системот

$$\begin{aligned} &Fy' - F'y = z,\\ &(x-x_1)(x-x_2)z' - [(2n+m-1)x - (n+r)x_2 -\\ &-(n+m-r-1)x_1]z = 0, \end{aligned} \tag{2**}$$

каде $F = (x-x_1)^{n+r+1}(x-x_2)^{n+m-r}\,[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\,]^{(n)}$.

Во тој случај за диференцијалната равенка (8) од формулата (3*) може да се добие и друга формула за општото решение, различна од формулата (9).

Ќе разгледаме неколку специјални случаи.

За $x_1 = x_2$, равенката (8) се сведува на равенката

$$(x-x_1)^2 y'' - [(2n+m-1)(x-x_1)]y' + n(n+m)y = 0, \qquad (8')$$

односно на равенката

$$(x-x_1)[(x-x_1)y' - (n+m)y]' - n[(x-x_1)y' - (n+m)y] = 0,$$

која е редуктибилна на системот

$$(x-x_1)y' - (n+m)y = z,$$
$$(x-x_1)z' - nz = 0.$$

Со елиминација на z се добива равенката

$$(x-x_1)y' - (n+m)y = C_1(x-x_1)^n,$$

чие решение се добива со формулата

$$y = (x-x_1)^{n+m}\left(C_2 + C_1\int \frac{(x-x_1)^n\,dx}{(x-x_1)^{n+m+1}}\right) =$$
$$= (x-x_1)^{n+m}\left(C_2 - C_1\frac{(x-x_1)^{-m}}{m}\right).$$

Значи во тој случај диференцијалната равенка (8’) има општо решение

$$y = A_1(x-x_1)^{n+m} + A_2(x-x_1)^n,$$

A_1, A_2 се произволни константи.

Пример 1:
Диференцијалната равенка:

$$(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 3y = 0,$$

каде што $x_1 = x_2 = 2, n = 1, m = 2$, е редуктибилна на системот

$$(x-2)y' - 3y = z,$$
$$(x-2)z' - z = 0,$$

и има општо решение:

$$y = A_1(x-2)^3 + A_2(x-2)\ ,$$

A_1,A_2 се произволни константи.

Ако направиме проверка користејќи ја формулата (9) ќе го добиеме истото општо решение:

За r = 0 диференцијалната равенка (8) се сведува на равенката

$$\begin{aligned}&(x-x_1)(x-x_2)y'' - [(n+m-1)(x-x_1) + \\ &+ n(x-x_2)]y' + n(n+m)y = 0,\end{aligned} \tag{8''}$$

односно на равенката

$$(x-x_1)[(x-x_2)y' - (n+m)y]' - n[(x-x_2)y' - (n+m)y] = 0,$$

која е редуктибилна на системот

$$(x-x_2)y' - (n+m)y = z,$$
$$(x-x_1)z' - nz = 0.$$

Од равенката

$$(x-x_2)y' - (n+m)y = C_1(x-x_1)^n,$$

се добива решението

$$y = (x-x_2)^{n+m}(C_2 + C_1\sum_{k=o}^{n}\binom{n}{k}\frac{(x_2-x_1)^k(x-x_2)^{-m-k}}{-m-k}).$$

Значи во тој случај диференцијалната равенка (8”) има општо решение дадено со формулата

$$y = A_1(x-x_2)^{n+m} + A_2\sum_{k=o}^{n}(\binom{n}{k}\frac{(x_2-x_1)^k(x-x_2)^{n-k}}{m+k}).$$

A_1, A_2 се произволни константи.

Пример 2:
Диференцијалната равенка:

$$(x^2 + x - 6)y'' - (3x + 4)y' + 3y = 0\,,$$

каде што $x_1 = -3, x_2 = 2, n = 1, m = 2, r = 0$, е редуктибилна на системот

$$(x-2)y' - 3y = z,$$
$$(x+3)z' - z = 0.$$

Општото решение на оваа диференцијална равенка според последната формула ќе биде:

$$y = A_1(x-2)^3 + A_2(3x+4)\ .$$

A_1, A_2 се произволни константи.

За r = m-1 диференцијалната равенка (8) се сведува на равенката

$$\begin{aligned}&(x-x_1)(x-x_2)y'' - [n(x-x_1) + (n+m-1)(x-x_2)]y' + \\ &+ n(n+m)y = 0,\end{aligned} \qquad (8''')$$

односно на равенката

$$(x-x_2)[(x-x_1)y' - (n+m)y]' - n[(x-x_1)y' - (n+m)y] = 0,$$

која е редуктибилна на системот

$$(x-x_1)y' - (n+m)y = z,$$
$$(x-x_2)z' - nz = 0.$$

По елиминацијата на z , равенката

$$(x-x_1)y' - (n+m)y = C_1(x-x_2)^n\,,$$

има решение дадено со формулата

$$y=(x-x_1)^{n+m}(C_2+C_1\int\frac{(x-x_2)^n\,dx}{(x-x_1)^{n+m+1}})$$
$$=(x-x_1)^{n+m}[C_2+C_1\sum_{k=o}^{n}\binom{n}{k}\frac{(x_1-x_2)^k(x-x_1)^{-m-k}}{-m-k}].$$

Значи во тој случај диференцијалната равенка (8''') има општо решение

$$y=A_1(x-x_1)^{n+m}+A_2\sum_{k=o}^{n}(\binom{n}{k}\frac{(x_1-x_2)^k(x-x_1)^{n-k}}{m+k}).$$

A_1,A_2 се произволни константи.

Пример 3:
Диференцијалната равенка:
$$(x^2-x-6)y''-(4x-7)y'+4y=0$$
каде што $x_1=-2, x_2=3, n=1, m=3, r=2$ е редуктибилна на системот

$$(x+2)y' - 4y = z,$$
$$(x-3)z' - z = 0.$$

Според последната формула нејзиното општо решение ќе биде:

$$y=A_1(x-2)^4+A_2(4x-7).$$

A_1,A_2 се произволни константи.

Во сите овие специјални случаи (8'), (8'') и (8''') се добиваат системи од вид (2) и општи решенија на равенката (8) кои се дадени и со формулата (9). Ова ќе го покажеме само кај првиот специјален случај, додека кај останатите се покажува со иста постапка.

Со директна замена кај овој случај можеме веднаш да констатираме дека општото решение добиено со (9) е исто со веќе добиеното. Понатаму, ако во системот (2) го замениме полиномното решение $\Phi=(x-x_1)^{n+m}$ и конкретните коефициенти A и B од равенката (8) , за $x_1 = x_2$ се добива системот

$$(x-x_1)^{n+m}y' - (n+m)(x-x_1)^{n+m-1}y = z,$$
$$(x-x_1)z' - (2n+m-1)z = 0.$$

Ставајќи $z_1 = (x-x_1)^{1-n-m} z$, ќе го добиеме системот

$$(x-x_1)y' - (n+m)y = z_1,$$
$$(x-x_1)z_1' - nz_1 = 0,$$

кој е еквивалентен со веќе добиениот.

Ако за Ф се земе полиномното решение $F = (x-x_1)^n$, тогаш се добива системот

$$(x-x_1)y' - y = z_1,$$
$$(x-x_1)z_1' - (n+m)z_1 = 0,$$

каде $z_1 = (x-x_1)^{1-n} z$.

Во [3] е покажано дека диференцијалната равенка (8) може да се сведе на системот

$$(x-x_1)y' - (n+r+1)y + Bz = 0$$
$$(x-x_2)z' + (1/B)(r+1)(m-r-1)y - (n+m-r-1)z = 0$$

каде $r \in \{0,1,...,m-2\}$, B-константа, $B \neq 0$.

Бидејќи постапката за сведување на равенката (8) на систем диференцијални равенки од вид

$$\begin{aligned}(x-x_1)y' + Ay + Bz = 0\\(x-x_2)z' + Cy + Dz = 0\end{aligned}, \qquad (**)$$

каде A,B,C и D се константи, всушност ги бара условите

$$\begin{aligned}&A + n + r + 1 = 0\\&D + n + m - r - 1 = 0\\&BC - (r+1)(m-r-1) = 0\end{aligned} \quad , \quad \text{каде } r \in \{0,1,...,m-2\},$$

случајот B = 0, C = 0 доведува до r = m-1 и до редуктибилност на равенката (8) на системи од вид (2), т.е. на системите

$$\begin{aligned}(x-x_1)y' - (n+m)y = 0\\(x-x_2)z' - nz = 0\end{aligned} \quad ,$$

односно

$$(x-x_1)y'-ny=0$$
$$(x-x_2)z'-(n+m)z=0 \quad .$$

Да забележиме дека случајот $x_1 = x_2$ е всушност подслучајот r = 0 на кој се сведува веќе разгледуваниот случај кога r = m-1 со едноставна замена на x_1 со x_2. Навистина, ако во добиената равенка (8) за r = m-1, x_1 и x_2 си ги сменат местата, ќе се добие точно равенката (8) за r = 0. Според тоа, за r = 0 равенката (8) е редуктибилна на системите

$$(x-x_2)y'-(n+m)y=0$$
$$(x-x_1)z'-nz=0 \quad ,$$

односно

$$(x-x_2)y'-ny=0$$
$$(x-x_1)z'-(n+m)z=0 \quad .$$

На крај, да забележиме дека случајот r = 0, за $B \neq 0$, имплицира диференцијалната равенка (8) да може да се сведе и на системот

$$(x-x_1)y'-(n+1)y+Bz=0$$
$$(x-x_2)z'+\frac{m-1}{B}\cdot y-(n+m-1)z=0 \quad ,$$

што значи дека сведувањето на равенката (8) на системи од вид (**) односно (2), не е единствено.

4. Постапката применета кај првиот специјален случај може да се обопшти и за системот (2**) односно за равенката (8). Притоа се добива систем во кој втората равенка ќе биде од вид $(x-x_1)(x-x_2)z_1'=0$, така што всушност решавањето на хомогената линеарна диференцијална равенка од втор ред (8) се сведува на решавање на нехомогена линеарна диференцијална равенка од прв ред.

Нека повторно го разгледаме случајот кога равенката (8) може да се сведе на систем од вид (2**), т.е. на системот

$$Fy' - F'y = z,$$
$$(x-x_1)(x-x_2)z' - \left[(2n+m-1)x-(n+r)x_2-(n+m-r-1)x_1\right]z = 0,$$

каде $F = (x-x_1)^{n+r+1}(x-x_2)^{n+m-r}\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n)}$.

Со директна замена на F и F' се добива системот

$$\begin{gathered}(x-x_1)^{n+r+1}(x-x_2)^{n+m-r}\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n)} y' \quad - \\ - (x-x_1)^{n+r}(x-x_2)^{n+m-r-1}\{ (n+r+1)(x-x_2)\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n)} + \\ +(n+m-r)(x-x_1)\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n)} + \\ +(x-x_1)(x-x_2)\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n+1)} \}y = z,\end{gathered}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)z' - \left[(2n+m-1)x-(n+r)x_2-(n+m-r-1)x_1\right]z = 0 \quad .$$

Ставајќи $z = (x-x_1)^{n+r}(x-x_2)^{n+m-r-1}z_1$ се добива системот

$$\begin{gathered}(x-x_1)(x-x_2)\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n)} y' \quad - \\ - \{ (n+r+1)(x-x_2)\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n)} + \\ + (n+m-r)(x-x_1)\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n)} + \\ + (x-x_1)(x-x_2)\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n+1} \}y = z_1 ,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(x-x_1)(x-x_2)[(n+r)(x-x_1)^{n+r-1}(x-x_2)^{n+m-r-1}z_1 + \\ +(n+m-r-1)(x-x_1)^{n+r}(x-x_2)^{n+m-r-2}z_1 + (x-x)^{n+r}(x-x_2)^{n+m-r-1}z_1'] - \\ -\left[(2n+m-1)x-(n+r)x_2-(n+m-r-1)x_1\right](x-x_1)^{n+r}(x-x_2)^{n+m-r-1}z_1 = 0 ,\end{gathered}$$

односно системот

$$\begin{gathered}(x-x_1)(x-x_2)\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n)} y' \quad - \\ - \{ (n+r+1)(x-x_2)\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n)} + \\ + (n+m-r)(x-x_1)\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n)} + \\ + (x-x_1)(x-x_2)\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n+1} \}y = z_1 ,\end{gathered}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)\ z_1'=0.$$

Од последниот систем се добива нехомогената линеарна диференцијална равенка од прв ред

$$\begin{aligned}&(x-x_1)(x-x_2)\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n)}y'-\\&-\Big\{(n+r+1)(x-x_2)\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n)}+\\&+\ (n+m-r)(x-x_1)\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n)}+\\&+(x-x_1)(x-x_2)\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n+1)}\Big\}y=C_2,\end{aligned}$$

и општото решение на равенката (8), освен со формулата (9), ќе биде дадено и со формулата

$$\begin{aligned}&y=(x-x_1)^{n+r+1}(x-x_2)^{n+m-r}\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n)}\Big\{C_1+\\&+C_2\int\left\{(x-x_1)^{-(n+r+1)}(x-x_2)^{-(n+m-r)}\left[\left[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}\right]^{(n)}\right]^{-1}\right\}dx\Big\}\end{aligned}$$

C_1,C_2 се произволни константи.

ABOUT A CLASS OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS, WHOSE GENERAL SOLUTION IS POLYNOMIAL

Ilija Sapkarev, Boro Piperevski, Elena Hadzieva, Nevena Serafimova, Katerina Mitkovska - Trendova

Abstract:

We observe a class of linear differential equations of second order, whose general solution is polynomial. We prove that it is reducible to a system of differential equations of first order. In addition, we obtain the system of differential equations and the formula for the general polynomial solution, and we observe some special cases of this type of equations.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Шапкарев И.А. : Егзистенција и конструкција на полиномни решенија на една класа линеарни диференцијални равенки од втор ред,
Математички билтен бр.11-12, стр.5-11, 1987-1988, Скопје

2. Пиперевски Б.М. : Sur des equations differentielles lineares du duxioeme ordre qui solution est polynome; Department of Electrical Engeneering, Proceedings No 4, year 9, 13-17, 1986, Skopje
3. Serafimova N., Mitkovska Trendova K., Piperevski B. : On a classs of second order differential euations' systems, whose general solution is polynomial. Зборник на трудови, Втор Конгрес на математичарите и информатичарите на Македонија, (101-104) 2000, Охрид.

ОПРЕДЕЛУВАЊЕ АНАЛИТИЧНОСТ НА ФУНКЦИИ СО ПОМОШ НА ДИСТРИБУЦИИ

Никола Речкоски, Васко Речкоски
Универзитет "Св. Климент Охридски", Битола, Факултет за туризам и угостителство, Охрид

Резиме

Во оваа работа покажуваме на примери како се определува областа на аналитичност на комплексна функција зададена во интегрален вид , со помош на дистрибуции.

I. Нека X е мерлив простор со комплексна мера μ, Ω е отворено множество во комплексната рамнина C. На $\Omega x X$ е дефинирана функција $\varphi(z,t)$ која е: ограничена , за секое $t \in X$ е аналитична на Ω и за секое $z \in X$ е мерлива на X, тогаш функцијата

$$f(z) = \int_X \varphi(z,t) d\mu(t) \tag{1}$$

е аналитична на Ω и $f'(z) = \int_X \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z,t) d\mu(t)$. [4.стр.220 зад15]

Во оваа работа се разгледуваат функции од видот (1) од аспект на аналитичната репрезентација на дистрибуциите

II. Ознаки и основни факти за дистрибуција

Буквата D е општо прифатена ознака за просторот од основните функции ,во овој случај определени на множеството од реалните броеви R. Во просторот D низата (φ_n) конвергира кон 0 , ако:

(i) носачот $\sup p\varphi_n$ на секоја функција се содржи во едно компактно множество K и

(ii) низата (φ_n) конвергира рамномерно за секој ненегативен цел број j .

Просторот од непрекинатите линеарни функционали или дистрибуции на Шварц е D'.

O_α, α реален број, е простор од сите бесконечно диференцијабилни функции на R со особината $\varphi^{(m)}(t) = O(|t|^\alpha)$.

Конвергенцијата во O_α се дефинира вака:
Низата функции (φ_n) конвергира кон 0 ако

(i) конвергира рамномерно на било кое компактно множество од било кој ред и

(ii) за секое j постои c_j>0 така што $\left|D^j \varphi_n(t)\right| \le c_j |t|^\alpha$ за сите t.

Просторот од сите линеарни непрекинати функционали на O_α е $O_\alpha^{'}$.

Очигледно, дека $D \subset O_\alpha$ и конвергентна низа во D е конвергентна и во O_α затоа $D^{'} \supset O_\alpha^{'}$. Во општ случај важи $O_\alpha \subset O_\beta , O_\alpha^{'} \supset O_\beta^{'}$ за $\alpha \le \beta$.

Носачот на дистрибуција $T \in D^{'}$ се обележува со $\sup pT$ и е затворено множество од R така што на $\Omega = R \setminus \sup pT$ дистрибуцијата се анулира. Просторот од сите дистрибуции со компактен носач се обележува со E'.

За секоја дистрибуција $T \in D'$ постои комплексна функција $f(z)$ која е аналитична на $\Omega = C \setminus \sup pT$ и важи

(2) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)] \varphi(x)dx = T(\varphi), \varphi \in D \quad .$$

Се вели уште дека регуларните дистрибуции $f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)$ конвергираат кон T во смисол на дистрибуции кога $\varepsilon \to 0^+$. Функцијата $f(z)$ се вика аналитична репрезентација за дистрибуцијата Т, при што ако и $g(z)$ е аналитична репрезентација , тогаш $f(z) - g(z)$ е цела функција. Секоја цела функција е аналитична репрезентација на нула дистрибуцијата.

Определувањето на аналитичката репрезентација за дадената дистрибуција T во општ случај , не е лесна работа, меѓутоа ако T' има компактен носач тогаш функцијата $\hat{T}(z) = \dfrac{1}{2\pi i} T\left(\dfrac{1}{t-z}\right)$ е нејзина аналитична репрезентација која уште се вика Кошиева репрезентација зашто се добива од јадрото на Коши $h_z(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \dfrac{1}{t-z}$.

Елементите од просторот O'_α за $\alpha \geq -1$ имаат Кошиева репрезентација [1 стр. 80] и всушност со таа цел се воведени просторите O_α.

III. Содржина на работата

Најнапред ја даваме следната лема.

Лема. Секоја комплексна барелова мера μ на R, определува непрекинат линеарен функционал на O_α за $\alpha < 0$.

Доказ. Дефинираме функционал T_μ со:

(3) $$T_\mu(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) d\mu(t), \varphi \in O_\alpha, \alpha < 0.$$

Од непрекинатоста на $\varphi(t)$ следи мерливоста , а од ограниченоста на $\varphi(t)$ заради условот $\alpha < 0$ следи интеграбилноста на функцијата. Според тоа функционалот (3) е добро дефиниран на O_α. Линеарноста на функционалот е очигледна , останува да ја докажеме уште непрекинатоста . Нека низата $(\varphi_n(t))$ конвергира во O_α.

$$T_\mu(\varphi_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) d\mu(t) = \int_{|t| \leq M} \varphi_n(t) d\mu(t) + \int_{|t| > M} \varphi_t(t) d\mu(t).$$

$$|T_\mu \varphi_n(t)| \leq \left| \int_{|t| \leq T} \varphi_n(t) d\mu(t) \right| + \left| \int_{|t| > M} \varphi_n(t) d\mu(t) \right| \leq \int_{|t| \leq M} |\varphi_n(t)| d|\mu|(t) + C_0 M^\alpha |\mu|(R)$$

каде $|\varphi_n(t)| \leq C_0 |t|^\alpha$ за секое n. За доволно големо М од $\alpha, < 0$ вториот собирок е помал од $\frac{\varepsilon}{2}$ за дадено $\varepsilon > 0$. Првиот собирок заради рамномерна конвергенција на низата на компактното множество $|t| \leq M$ за $n \geq n_0$ исто така може да се направи помал од $\frac{\varepsilon}{2}$ со тоа покажавме дека $|T_\mu(\varphi_n)| < \varepsilon$ за $n \geq n_0$, што значи функционалот е непрекинат.

Ако $-1 \leq \alpha < 0$ дистрибуцијата T_μ има Кошиева репрезентација

$$T_\mu(z)=\hat{\mu}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mu(t)}{t-z}, \operatorname{Im} z\neq 0$$

која е аналитичка на $\Omega = C \setminus \sup pT_\mu$.

Забелешка: Аналитичноста на $\hat{\mu}(z)$ следи и од I., бидејќи функцијата $h(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t-z}, \operatorname{Im} z\neq 0$ ги исполнува условите за(1).

Пример 1. Да се определи обласата на аналитичност за функцијата

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)dt}{t-z} \text{ , каде } \int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt<\infty .$$

Од условот имаме, дека функцијата $g(t)$ е Лебег интеграбилна, затоа $\mu(E)=\int_E g(t)dt$ е комплексна Борелова мера со $|\mu|(R)=\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt<\infty$.

Како $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)d\mu(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)g(t)dt$ следи , дека $T(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)g(t)dt$ е елемент од $O_\alpha^{'}$ според лемата аналитичката репрезентација е $\frac{f(z)}{2\pi i}$ што покажува дека $f(t)$ е аналитична на $\Omega = C / \sup g$.

Пример2. Да се испита аналитичноста на функцијата $f(z)=\int_0^{\infty}\frac{dt}{e^t-z}$.

Со смената $u=e^t$ добиваме $f(z)=\int_1^{\infty}\frac{\frac{1}{u}du}{u-z}$. Ја разгледуваме регуларната дистрибуција $T=\frac{1}{u}\chi_{[1,\infty]}^{(u)}$, $\chi_{[1,\infty)}(u)=\begin{matrix}0, u\notin[1,\infty)\\ 1, u\in[1,\infty)\end{matrix}$.

За дистрибуцијата Т асимптотска гранка е $|u|^{-1}$, затоа од условот $\alpha+1+(-1)<0$ имаме за $\alpha<0, T$ е функционал од O_α [1.стр82]. Следователно $\frac{f(z)}{2\pi i}$ е аналитичка репрезентација за Т тоа значи е аналитична на $\Omega = C\setminus[1,\infty)$.Скокот на $\frac{f(z)}{2\pi i}$ за $u\in(1,\infty)$е $\frac{1}{u}$,за $u<1$ е 0.

Со решавање на интегралот се добива репрезентацијата во експлицитен вид : $f(z) = -\frac{1}{z}\log(1-z)$, логаритамот е главна вредност .

Од добиениот израз за $f(z)$ лесно се покажува , дека

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{x+i\varepsilon}\log(1-x-i\varepsilon)+\frac{1}{x-i\varepsilon}\log(1-x+i\varepsilon)\right] = \begin{matrix} \frac{1}{x}, x\in(1,\infty) \\ \frac{1}{2}, x=1 \\ 0, x<1 \end{matrix} .$$

Последниот лимес не е еднаков со функцијата $\frac{1}{x}\chi_{[1,\infty)}(x)$, но во смисол на дистрибуции тие се еднакви .

Со пресметување на лимесот на $f(z)$ кога z се приближува кон x-оската од горната полурамнина се добива функцијата

$$h_+(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x+i\varepsilon}\log(1-x-i\varepsilon)\right) = \begin{matrix} -\frac{1}{x}\log(1-x), x<1 \\ -1, x=0 \\ -\frac{1}{x}[\log(x-1)-i\pi]x>1 \end{matrix} .$$

Бидејќи $h_+(x)$ е локално интеграбилна , лесно се проверува со теоремата на Лебег за доминантна конвергенција , дека

$$-\frac{1}{x+i\varepsilon}\log(1-x-i\varepsilon)\to h_+(x)$$

во смисол на дистрибуции, па според тоа $F(x) = \{ \begin{smallmatrix} -\frac{1}{z}\log(1-z), \operatorname{Im} z>0 \\ 0, \operatorname{Im} z<0 \end{smallmatrix}$ е аналитична репрезентација за регуларната дистрибуција h_+

На ист начин се добива

$$h_-(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{x-i\varepsilon}\log(1-x+i\varepsilon)\right) = \begin{matrix} -\frac{1}{x}\log(1-x), x<1 \\ -1, x=0 \\ -\frac{1}{x}[\log(x-1)+i\pi]x>1 \end{matrix} .$$

Следователно $H(z)=\{\begin{smallmatrix} 0, Iimz>0 \\ \frac{1}{z}\log(1-z), \operatorname{Im} z<0 \end{smallmatrix}$ е аналитична репрезентација за регуларната дистрибуција h_+.

Разгледуваната дистрибуција од примерот 2 е еднаква на $h_+ - h_-$, а репрезентацијата е $\hat{T}(z)=F(z)-H(z)$.

DETERMINING THE ANALYTICITY OF FUNCTIONS

Nikola Reckoski, Vasko Reckoski

Abstract
In this work, on examples, we show haw the area of analyticity of complex function given in integral form can be determined by means of analytic representation of distributions.

Литература

1. Бремерман, Распределенија,комплексне пермение и преобразованија Фурие,Издателство Мир москва 1968
2. B.Joseph, D.J.Newman , Complex analysis, Springer-Verlag1982
3. N.Reckoski, Une fonction analiytigne definie par une distribution,matematicki fakultet 1980
4. W.Rudin, Real and complex Analyisis,McGraw-Hill, New-York 1966

ЗА РЕШАВАЊЕТО НА ДВЕ КЛАСИ ЛИНАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР РЕД

Лазо Димов
Машински Факултет, Скопје

Апстракт:
Во трудот се добиваат услови при кои може да се решат наведените класи линеарни диференцијални равенки, а воедно се добиваат и нивните егзактни решенија.

За диференцијалните равенки:

$$y''+[Ae^{ax}+B]y'+e^{ax}[Ce^{ax}+D]y=0\,, \tag{1}$$

$$y''+[Ae^{-ax}+B]y'+e^{-ax}[Ce^{-ax}+D]y=0\,, \tag{2}$$

со функционални коефициенти, каде $a, A, B, C.D$,се реални константи, ќе примениме постапка за нивно сведување на диференцијални равенки со константни коефициенти, а со тоа и нивно решавање. Односно ќе ги добиеме условите што ги задоволуваат фигурирачките коефициенти за равенките (1) и (2) да може да се сведат на диференцијални равенки со константни коефициенти.

За диференцијалната равенка (1) математичка интуиција не води до воведување на нова функција $u(t)$ и нова независно променлива величина t со релацијата

$$y(x)=\frac{u(t)}{t}\,. \tag{1.1}$$

По воведување на смената на функцијата и променливата равенката (1) станува

$$a^2tu''+[aAt+aB-a^2]u'+[Ct-aA+D+\frac{a^2-aB}{t}]u=0\,. \tag{1.2}$$

Равенката (1.2) ќе биде диференцијалната равенка со константни коефициенти

$$a^2u''+aAu'+Cu=0\,, \tag{1.3}$$

ако се задоволени условите:

$$aB-a^2=0, D-aA=0\,. \tag{1.4}$$

Да забележиме дека равенката (1) ги содржи како потслучаи равенките

2.33: $y''+y'+ae^{-2x}y=0$,

2.34: $y''-y'+ae^{2x}y=0$,

2.37б: $y''+ay'+(be^{x}+c)y=0$,

дадени во [1] на страна 375.

За диференцијалната равенка (2) ако воведеме смена на независно променливата со релацијата

$$t = e^{-ax} \tag{2.1}$$

таа се трансформира во равенката

$$a^2 ty'' + [a^2 - aB - aAt]y' + [Ct + D]y = 0 . \tag{2.3}$$

Од равенката (2.3) е очигледно : ако важи

$$B = a, D = 0 \tag{2.4}$$

тогаш равенката (2.3) е заправо диференцијалната равенка

$$a^2 y'' - aAy' + Cy = 0 \tag{2.5}$$

со константни коефициенти.

Ако пак $B \neq a$ и ако постои реален број k кој е решение на системот равенки

$$a^2 k^2 - aAk + C = 0, \quad a(a - B)k + D = 0 , \tag{2.6}$$

тогаш равенката (2.3) има партикуларен интеграл од облик

$$y = e^{kt} , \tag{2.7}$$

па понатамошното решавање на диференцијалната равенка (2) е во согласност со познатата теорија на линеарните диверенцијални равенки.

Да забележиме дека равенката

$$2.90:\ a^2 y'' + a(a^2 - 2be^{-ax})y' + b^2 e^{-2ax} y = 0 ,$$

дадена во [1] на страна 385 е потслучај од равенката (2) и се добива за

$$A = -\frac{2b}{a}, B = a, C = \frac{b^2}{a^2}, D = 0 .$$

On solving two classes linear differential equations of second order

Lazo Dimov

Abstract

A sufficient conditions for solving given classes differential equations as well as their exact solutions are obtained in this work.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Э.Камке: Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ГИ Москва 1951 , (руски превод).

[2] АИНС: Обыкновенные дифференциальные уравнения ,ИЛ Москва 1953, (руски превод).

[3] Митриновић Д.С. : Зборник математичких проблема, Београд 1958.

МАТЕМАТИЧКИ ПРИОД ЗА БРЗО ПРОЦЕНУВАЊЕ НА КИНЕТИЧКИТЕ ПАРАМЕТРИ ВО ОСНОВНАТА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА

Лилјана Стефановска

Технолошко-металуршки факултет, Скопје
liljana@ereb1.mf.ukim.edu.mk

Драган Димитровски

Институт за математика, Природно-математички факултет, Скопје

Апстракт. За брза проценка на количеството на продукт, кој се формира за време на одвивањето на една хемиска реакција, се користи теоремата на Чаплигин за диференцијални нееднаквости.

1. ВОВЕД

Основниот закон на хемиската кинетика, кој е еден од основните закони во физичката хемија воопшто, е законот кој ја искажува брзината на одвивање на хемиската реакција:

$$v_{r-ja} = k \cdot C_A^m C_B^n \cdots C_C^p \tag{1}$$

каде што:

v - е брзина на хемиската реакција,

k - е константа на брзината,

$C_A, C_B, \ldots, C_C$ - се концентрации на реактантите $A, B, \ldots, C$ за време t,

$m, n, \ldots, p$ - се парцијални редови на хемиската реакција по компоненти.

Бидејќи

$$v_{r-ja} = \frac{dx}{dt} \tag{2}$$

т.е. брзината на хемиската реакција всушност претставува брзина со која се формира продуктот x за време t, равенката (1) може да се запише во облик на нелинеарна диференцијална равенка од I ред:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)^m (b-x)^n \ldots (c-x)^p \tag{3}$$

каде што a, b, …, c се почетни концентрации (количества) на реактантите A, B, …, C. Во пракса, во индустриските процеси, хемиските реакции течат со континуиран или дисконтинуиран дотур (додавање) на реактанти во текот на одвивањето на хемиската реакција. Во овој случај, равенката која ја опишува ваквата реакција се нарекува *хемиска* или *индустриска* диференцијална равенка и има облик:

$$\frac{dx}{dt} = k[a+\varphi_1(t)-x]^{\alpha}[b+\varphi_2(t)-x]^{\beta} \cdots [c+\varphi_n(t)-x]^{\gamma} \tag{4}$$

каде што $\varphi_i(t)$ се функции кои го изразуваат дотурот на реактантите. Тие се непрекинати функции, во случај кога дотурот на реактанти се врши континуирано во текот на одвивањето на реакцијата, или дискретни, кога дотурот на реактанти се врши во одредени временски интервали.

Во трудот [1] е покажано дека интеграцијата на равенката (3), која е со константни коефициенти, не претставува математички проблем, таа може да се реши при што се добива експлицитна зависност на времето t на одвивање на хемиската реакција од количеството на формираниот продукт x, т.е. $t = g(x)$. Од аспект на примената, од поголемо значење е експлицитното одредување на инверзната функција $x = g^{-1}(t)$ од решението на равенката (3), за да може во секое време t да се одреди количеството на формираниот продукт x. Исто така, бидејќи $a>x$, $b>x$, …, $c>x$ (формираниот продукт е помал од било кое количество на реактант), реакцијата ќе заврши кога реактантите ќе останат во мали количества (на пр. ако a е најмалото почетно количество од реактантот А) од редот на големина $a/10^n$, ($n \in \mathbf{N}$), односно $a - x = a/10^n$; $x = a(1 - 1/10^n)$. Од оваа равенка може да се пресмета времето на завршување на реакцијата. Бидејќи асимптотски $x \to a$, реакцијата може да се смета за завршена ако на пр. 95% од активната материја прореагирала.

Во овој труд предмет на разгледување ќе биде хемиска равенка (4) во интервалот на своето хемиско значење.

Мора да се напомене дека под поимот *ред на хемиска реакција* се подразбира збирот од парцијалните редови на сите реактанти кои учествуваат во хемиската реакција. Тоа е константа која најчесто е од редот на вредности од интервалот [0, 2]. Од друга страна, од аспект на хемиското значење, хемиската равенка има смисла ако во неа учествуваат до два реактанта и тогаш нејзината равенка е:

$$\frac{dx}{dt} = k[a + \varphi_1(t) - x]^{\alpha}[b + \varphi_2(t) - x]^{\beta}\,. \tag{5}$$

Равенката (5) се нарекува основна равенка, а нејзиното решение $x(t)$ е вкупното количествотo на продукт формиран за време t. За брза оценка на решението $x(t)$ на равенката (5) ќе примениме една квалитативна метода за оценка на сите решенија во интервалот на своето хемиско значење, а тоа е теоремата на Чаплигин за диференцијални нееднаквости.

Проблемот на решавање на диференцијалните равенки се сведува на изнаоѓање на постапка со која преку квадратури ќе се добие општото решение на равенката. Меѓутоа општото решение понекогаш не е елементарна функција, тоа често е сложено за интеграција, па како нов проблем се јавува неговото проучување. Во такви случаи квалитативната анализа се јавува како најпогоден начин за проучување на особините на решението врз основа на особините на функциите кои се јавуваат во самата равенка, при што не мора да се знае општиот интеграл, а се добива глобална слика за сите решенија на диферецијалната равенка, не навлегувајќи во детали. Една од методите во квалитативната анализа е искажана со Чаплигиновата теорема за диференцијални нееднаквости, со која формираме пар на оквирни криви кои го уоквируваат (врамуваат) решението на дадената диференцијална равенка. Оваа теорема се применува на диференцијални равенки од прв ред и на широки класи равенки од повисок ред, само што тогаш се поставува прашањето на границата на нејзината применливост. Така за оквирни криви избираме равенки кои се квадратурно решливи и полесни за проучување од дадената равенка, а нивните решенија го уоквируваат решението на дадената равенка. Во таа насока, во овој труд, се користи теоремата на Чаплигин за проучување на основната диференцијална равенка во хемиската кинетика.

Теорема на Чаплигин: Нека е зададена диференцијалната равенка

$$y' = f(x, y)$$

каде $f(x, y)$ е непрекината функција во некоја отворена област Ω и уште го задоволува условот на единственост на решението (Lipschitz-ов услов или друг услов). Нека $y(x)$ е решение на дадената диференцијална равенка кое го задоволува почетниот услов $y(x_0) = y_0$, каде $(x_0, y_0)\in\Omega$. Нека $v(x)$ е функција за која $v(x_0) = y_0$ и таква да важи

$$v' - f(x, v) > 0$$

во областа Ω. Тогаш за $x_0 \leq x < x^*$ важи нееднаквоста

$$v(x) > y(x).$$

Исто така од нееднаквоста

$$u' - f(x, u) < 0$$

во областа Ω и ако $u(x_0) = y_0$, следува дека

$$u(x) < y(x)$$

за $x_0 \leq x < x^*$.

Друг облик на оваа теорема, кој почесто се среќава во примената, е следниов:

Теорема: Нека се $f_1(x, y)$, $f(x, y)$, $f_2(x, y)$ три непрекинати функции во Ω такви да важи

$$f_1(x, y) < f(x, y) < f_2(x, y)$$

во Ω. Тогаш важи и

$$u(x) < y(x) < v(x)$$

во Ω, каде $u(x)$, $y(x)$, $v(x)$ се респективно решенијата на следните диференцијални равенки

$$u' = f_1(x, u)$$
$$y' = f(x, y)$$
$$v' = f_2(x, v)$$

со почетен услов $u(x_0) = y(x_0) = v(x_0)$.

2. ПРОЦЕНКИ НА КОЛИЧЕСТВОТО ФОРМИРАН ПРОДУКТ

Ќе ги разгледаме поединечно можните случаи на хемиска реакција во која учествуваат до два реактанта, изразени преку основната равенка (5).

2.1. Реакција од 0-ти ред

Реакцијата е од 0-ти ред ако нејзината реакција е од видот

$$\frac{dx}{dt} = kC^0 \tag{6}$$

каде C^0 е концентрација на реактантот која не се менува во текот на одвивање на реакцијата (или промената на концентрацијата е занемарлива). Решението на (6) е

$$x = k\, C^0 t\,, \tag{7}$$

а бидејќи тоа е експлицитно и во однос на количеството на формиран продукт x, во секој момент t може лесно да се определи количеството на формираниот продукт.

2.2. Реакција од I - ред

Хемиска реакција од прв ред настапува кога од еден реактант A се добива продукт B и се означува со: A $\to$ B. Брзината на ваквата хемиската реакција се изразува со диференцијалната равенка:

$$\frac{dx}{dt} = k[a + \varphi_1(t) - x]\,. \tag{8}$$

Равенката (8) е линеарна равенка по x и таа може квадратурно да се реши. Нејзиното општо решение е од обликот:

$$x = e^{-kt}\left[C + \int [ka + k\varphi_1(t)]e^{kt}\,dt\right].$$

Почетниот услов е: $t = 0$, $x = 0$, што означува дека на почеток на реакцијата нема формирано продукт. Оваа равенка го определува количеството на формираниот предукт и во неа се јавуваат квадратури кои често пати се нерешливи и затоа можеме да ги направиме и следниве проценки: за десната страна на равенката (8) важат неравенствата

$$k\,(a - x) \leq k\,[a + \varphi_1(\mathrm{t}) - x\,] \leq k\,a.$$

Функциите ka и $k(a - x)$ кои ги земаме како ограничувања на десната страна од равенката (8), согласно на теоремата на Чаплигин, ги земаме за десни страни на две диференцијални равенки:

$$\frac{dx}{dt} = ka$$

и

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)\ .$$

Првата диференцијална равенка на десната страна има функција која е добиена од (8) за $\varphi_1(t) = x$ (дотурот на реактантот е еднаков на количеството на формираниот продукт) и има решение $x = a(1 - e^{-kt})$. Втората диференцијална равенка за десна страна има функција која е добиена пак од (8), но за $\varphi_1(t) = 0$ (нема дотур на ново количество на реактант) и има решение $x = kat$. Двете решенија задоволуваат ист граничен услов за $t = 0$, $x = 0$. Овие два случаи се гранични случаи, а сите случаи кои може да настанат се меѓу нив. Според теоремата на Чаплигин, во интервалот на своето хемиско значење:

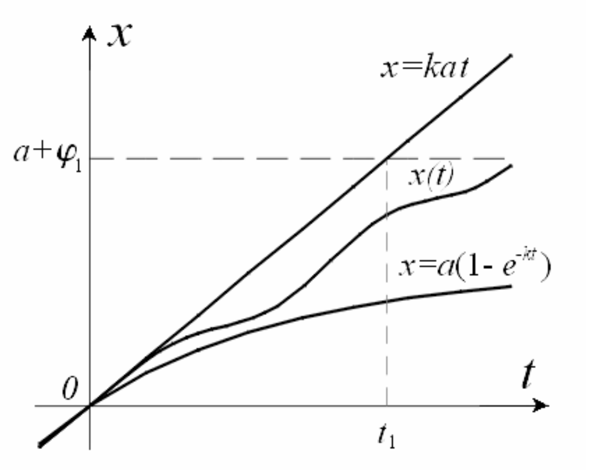
$$0 \leq x \leq a + \varphi_1(t), \tag{9}$$

за решението на равенката (8) ќе важат следниве проценки за количеството на формиран продукт:

$$a(1 - e^{-kt}) \leq x(t) \leq kat \tag{10}$$

во време $0 \leq t < t_1$. Времето t_1 се пресметува од равенката $kat_1 = a + \varphi_1(t)$.

Графичкиот приказ на оквирните неравенстава (10) е претставен на Сл.1. Гледаме дека секогаш може да се направи брза проценка на формираниот продукт во време t, $(0 \le t < t_1)$, при што количество продукт секогаш е помало од вредноста на линеарната функција $x = kat$, а поголемо од вредноста на нелинеарната функција $x = a(1 - e^{-kt})$.



Слика 1. Уоквирување на количеството формиран продукт за хемиска реакција од I ред (равенка (8))

2.3. Реакција од II- ред со два реактанта со еднакви почетни концентрации

Нека во равенката (5) почетните количества (концентрации) на реактанти a и b се еднакви и нека $\alpha = \beta = 1$, т.е. секој реактант има парцијален ред на реакција еднаков на 1. Во овој случај основната диференцијална равенка ќе биде од обликот:

$$\frac{dx}{dt} = k[a + \varphi_1(t) - x]^2 \qquad (11)$$

и претставува хемиска реакција од II ред. За десната страна на равенката (11) ги формираме следниве оквирни функции:

$$k\,(a - x)^2 \leq k\,[a + \varphi_1(\mathrm{t}) - x\,]^2 \leq k\,a^2 \qquad (12)$$

со истото гранично значење и почетни услови како кај реакцијата од I ред (точка 2.2). Тогаш за количеството на формиран продукт $x(t)$ во интервалот на своето хемиско значење (9), согласно на теоремата на Чаплигин, ќе важи следнава проценка:

$$\frac{ka^2 t}{1 + kat} \leq x(t) \leq ka^2 t\,. \qquad (13)$$

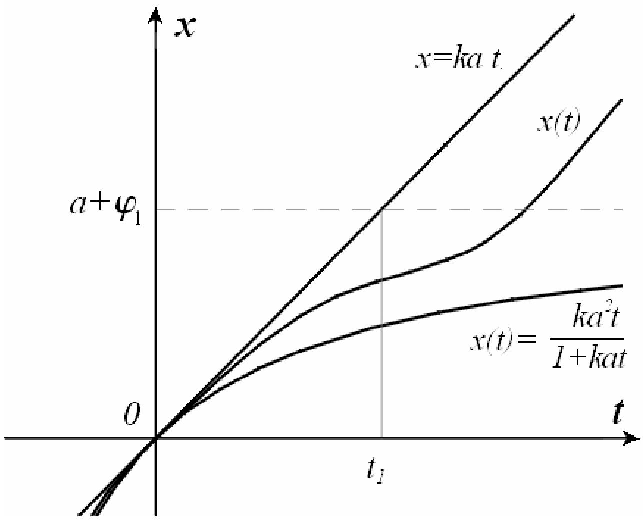
Оквирните функции во (13) се добиваат како решенија на диференцијални равенки и тоа: функцијата $x = ka^2t$ е решение на диференцијалната равенка

$$\frac{dx}{dt} = ka^2\,,$$

додека функцијата $x = \dfrac{ka^2 t}{1 + kat}$ е решение на диференцијалната равенка

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2\,.$$

Неравенствата (13) даваат можност за брзо проценување на формираниот продукт во произволно време $t \in [0,\ t_1)$, каде t_1 се одредува од равенката $a + \varphi_1 = ka^2 t_1$. Графичкиот приказ на оквирните неравенства (13) е претставен на Сл. 2.



Слика 2. Уоквирување на количеството формиран продукт за хемиска реакција од II ред (равенка (11))

2.4. Реакција од II- ред со два реактанта со различни почетни концентрации

Нека во хемиската реакција од II ред учествуваат два реактанта a и b, но со различни почетни концентрации ($a \neq b, a < b$) и нека се тие со ист парцијален ред еден: $\alpha = \beta = 1$. Ваквата хемиска реакција се претставува со диференцијалната равенка:

$$\frac{dx}{dt} = k[a + \varphi_1(t) - x][b + \varphi_2(t) - x] \qquad (14)$$

за чија десна страна може да се формираат граничните неравенства:

$$k\,(a - x)([b - x) \leq k\,[a + \varphi_1(\mathrm{t}) - x\,]\,[b + \varphi_2(\mathrm{t}) - x\,] \leq k\,ab. \qquad (15)$$

За решението на равенката (14) важат следните проценки:

$$\frac{ab[e^{(a-b)kt} - 1]}{ae^{(a-b)kt} - b} \leq x(t) \leq kabt \qquad (16)$$

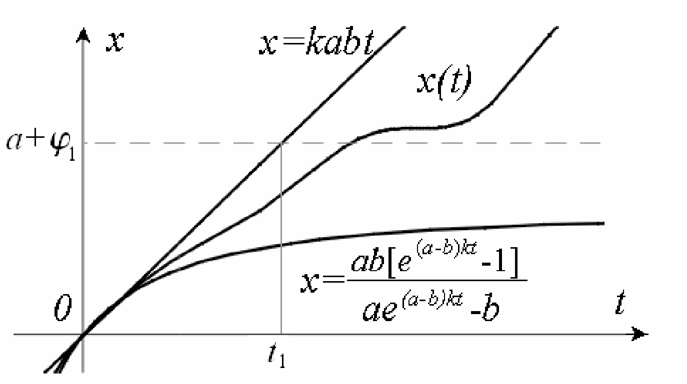
во интервалот на своето хемиско значење (9) и за време $t \in [0, t_1)$, каде t_1 се одредува од равенката $a+\varphi_1 = kabt_1$. И во овој случај, аналогно како во претходните случаи и со исто значење, левата и десната оквирна крива во (16) се решенија респективно на диференцијалните равенки

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = kab\,.$$

Графичкиот приказ на оквирните неравенства (16) е прикажан на Сл. 3.



Слика 3. Уоквирување на количеството формиран продукт за хемиска реакција од II ред (равенка (14))

2.5. Произволна реакција од ред помал од два

Нека во хемиската реакција од обликот (5) учествуваат два реактанта a и b со различни почетни концентрации ($a \neq b$, $a < b$) и нека се тие со различни парцијални редови $\alpha \neq \beta$ и уште нека $\alpha + \beta \leq 2$. Нека $\alpha > 1$, а $\beta < 1$. Ваквата хемиска реакција се претставува со диференцијалната равенка

$$\frac{dx}{dt} = k[a+\varphi_1(t)-x]^\alpha [b+\varphi_2(t)-x]^\beta , \tag{17}$$

за чија десна страна може да се формираат следниве неравенства:

$$k(a-x)^2 \leq k\,[a - x]^\alpha[b - x]^\beta \leq k\,[a + \varphi_1(\mathrm{t}) - x\,]^\alpha[b + \varphi_2(\mathrm{t}) - x\,]^\beta \leq$$

$$\leq k\,a^\alpha\,b^\beta. \tag{18}$$

Согласно на теоремата на Чаплигин, за решението на равенката (17) во интервалот на своето хемиско значење (9) и за време $t \in [0,\ t_1)$, каде t_1 се одредува од равенството $a+\varphi_1 = ka^\alpha b\beta t_1$, важи следната брза и груба проценка:

$$\frac{ka^2t}{1+kat} \leq x(t) \leq ka^\alpha b^\beta t\,. \tag{19}$$

Графичкиот приказ на оваа проценка е сличен како на Сл.2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бертолино М. *Методе примењене анализе* (*нумеричка анализа*), Београд, Математичка библиотека, књига 43

[2] Димитровски Д, Лазаревска Л. *Еден елементарен третман на хемиската диференцијална равенка*, Год. збор. Матем. фак. 29(121-129), 1978

[3] Стефановска Л. *Примена Чаплигинове теореме на диференцијалне једнацине биологије и хемије*, магистерски труд, Природно-математички факултет, Универзитет во Белград, 1981

ÜBER EINE REDUZIERBARE HOMOGENE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG DEREN ALLGEMEINES INTEGRAL EIN POLYNOM DARSTELLT

Ilija A. Šapkarev

Hier wollen wir die Differentialgleichung der Ordnung *n*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = 0 \tag{1}$$

betrachten, wo $a_i = a_i(x)$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ Polynome vom Grad *i*

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{i} A_{i\,j} x^j$$

darstehelen und deren Koeffizienten $A_{i\,,j}$ $(A_{nn} \neq 0)$ Konstanten sind.

Es sei *m* eine natürlichte Zahl. Dann gült die Formel

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}\Big)^{(m)} = \sum_{i=0}^{n} (a_i y^{(i)})^{(m)} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a_i^{(j)} y^{(m+i-j)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{m}{j} a_i^{(j)} y^{(m+i-j)} \tag{2}$$

Wenn wir jetzt die Differentialgleichung (1) *m* mal differenzieren, nach der Formel (2), erhalten wir die Differentialgleichung der Ordnung $m+n$

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{m}{j} a_i^{(j)} y^{(m+i-j)} = 0 \ . \tag{3}$$

Da

$$\sum_{j=0}^{0} \binom{m}{j} a_0^{(j)} y^{(m-j)} = \binom{m}{0} a_0 y^{(m)} \ ,$$

$$\sum_{j=0}^{1} \binom{m}{j} a_1^{(j)} y^{(m+1-j)} = \binom{m}{0} a_1 y^{(m+1)} + \binom{m}{1} a_1' y^{(m)} \ ,$$

$$\sum_{j=0}^{2} \binom{m}{j} a_2^{(j)} y^{(m+2-j)} = \binom{m}{0} a_2 y^{(m+2)} + \binom{m}{1} a_2' y^{(m+1)} + \binom{m}{2} a_2'' y^{(m)} \ ,$$

$$\sum_{j=0}^{i}\binom{m}{j}a_i^{(j)}y^{(m+i-j)}=\binom{m}{0}a_i y^{(m+i)}+\binom{m}{1}a_i' y^{(m+i-1)}+\ldots.+\binom{m}{j}a_i^{(j)}y^{(m+i-j)}+$$
$$+\ldots\ldots.+\binom{m}{i-1}a_i^{(i-1)}y^{(m+1)}+\binom{m}{i}a_i^{(i)}y^{(m)},$$
$$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{m}{j}a_{n-1}^{(j)}y^{(m+n-1-j)}=\binom{m}{0}a_{n-1}y^{(m+n-1)}+\binom{m}{1}a_{n-1}' y^{(m+n-2)}+\ldots.+$$
$$+\binom{m}{j}a_{n-1}^{(j)}y^{(m+n-1-j)}+\ldots.+\binom{m}{n-1}a_{n-1}^{(n-2)}y^{(m+1)}+\binom{m}{n}a_{n-1}^{(n-1)}y^{(m)}\ ,$$
$$\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{j}a_n^{(j)}y^{(m+n-j)}=\binom{m}{0}a_n y^{(m+n)}+\binom{m}{1}a_n' y^{(m+n-1)}+\ \ldots\ldots.+$$
$$+\binom{m}{j}a_n^{(j)}y^{(m+n-j)}+\ldots.+\binom{m}{n-1}a_n^{(n-1)}y^{(m+1)}+\binom{m}{n}a_n^{(n)}y^{(m)}$$

kann die Differentialgleichung (3) in der folgenden Geftalt [3,6,7]

$$\binom{m}{0}a_n y^{(m+n)}+\left[\binom{m}{0}a_{n-1}+\binom{m}{1}a_n'\right]y^{(m+n-1)}+$$
$$+\left[\binom{m}{0}a_{n-2}+\binom{m}{1}a'_{n-1}+\binom{m}{2}a''_n\right]y^{(m+n-2)}+\ldots+$$
$$+\left[\binom{m}{0}a_i+\binom{m}{1}a'_{i+1}+\ldots+\binom{m}{j}a_{i+j}^{(j)}+\ldots+\binom{m}{n-1}a_n^{(n-i)}\right]y^{(m+i)}+\ldots+$$
$$+\left[\binom{m}{0}a_2+\binom{m}{1}a'_3+\ldots+\binom{m}{j}a_{2+j}^{(j)}+\ldots+\binom{m}{n-2}a_n^{(n-2)}\right]y^{(m+2)}+$$
$$+\left[\binom{m}{0}a_1+\binom{m}{1}a'_2+\ldots+\binom{m}{j}a_{1+j}^{(j)}+\ldots+\binom{m}{n-1}a_n^{(n-1)}\right]y^{(m+1)}+$$
$$+\left[\binom{m}{0}a_0+\binom{m}{1}a'_1+\ldots+\binom{m}{j}a_j^{(j)}+\ldots+\binom{m}{n}a_n^{(n)}\right]y^{(m)}=0$$

bezeihungsweise

$$\sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{n-i}\binom{m}{j}a_{i+j}^{(j)}\right]y^{m+i}=0 \qquad (4)$$

aufgeschrieben werden.

Weiter machen wir die Voraussetzung, dass die Differentialgleichung (1) n Polynome der Grade $m, m+1, ..., m+n-1$ bezitzt.

Diesfalls ist es sehr leicht aus der Differentialgleichung (4) zu Konstatieren, dass die folgenden Relationen [3,6,7]

$$\sum_{j=0}^{n-i}\binom{m}{j}a_{i+j}^{(j)}=0\ ;\qquad i=0,1,..,n-1$$

das heist die Relationen

$$\begin{gathered}
\binom{m}{0}a_0+\binom{m}{1}a_1'+\ldots+\binom{m}{j}a_j^{(j)}+\ldots+\binom{m}{n}a_n^{(n)}=0,\\
\binom{m}{0}a_1+\binom{m}{1}a_2'+\ldots+\binom{m}{j}a_{j+1}^{(j)}+\ldots+\binom{m}{n-1}a_n^{(n-1)}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\binom{m}{0}a_i+\binom{m}{1}a_{i+1}'+\ldots+\binom{m}{j}a_{i+j}^{(j)}+\ldots+\binom{m}{n-i}a_n^{(n-i)}=0, \qquad (5)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\binom{m}{0}a_{n-2}+\binom{m}{1}a_{n-1}'+\binom{m}{2}a_n''=0,\\
\binom{m}{0}a_{n-1}+\binom{m}{1}a_n'=0,
\end{gathered}$$

ausgefüllt werden müssen.

Für $m=1$ von diesen Relationen folgen die Relationen die in der Arbeit [5] bekommen sind.

Von den letzten drei Gleichungen erhalten wir nacheinander

$$a_{n-1}=-\binom{m}{1}a_n'=\binom{-m}{1}a_n',$$

$$a_{n-2} = -\binom{m}{1}a_{n-1}' - \binom{m}{2}a_n' = \frac{m(m+1)}{2}a_n'' = \binom{-m}{2}a_n'' \quad ,$$

$$a_{n-3} = -\binom{m}{1}a_{n-2}' - \binom{m}{2}a_{n-1}'' - \binom{m}{3}a_n''' = \binom{-m}{3}a_n'''.$$

Wenn wir jetzt

$$a_{i+1} = \binom{-m}{n-i-1}a_n^{(n-i-1)}$$

setzen, erhalten wir für a_i der $i+1$- Gleichung von (5)

$$a_i = -(\binom{m}{1}a_{i+1}' + \binom{m}{2}a_{i+2}'' + \ldots + \binom{m}{j}a_{i+j}^{(j)} + \ldots +$$

$$+\binom{m}{n-i-1}a_{n-1}^{(n-i-1)} + \binom{m}{n-i}a_n^{(n-i)} \ ) =$$

$$= -(\binom{m}{1}\binom{-m}{n-i-1} + \binom{m}{2}\binom{-m}{n-i-2} + \ldots + \binom{m}{j}\binom{-m}{n-i-j} +$$

$$+ \ldots . + \binom{m}{n-i})a_n^{(n-i)} = -(-\binom{m}{0}\binom{-m}{n-i} - \binom{m}{n-i}\binom{-m}{0} + \binom{m}{n-i})a_n^{(n-i)} =$$

$$= \binom{-m}{n-i}a_n^{(n-i)}. \tag{6}$$

Diesfalls wird die Differentialgleichung (1) [1,4,6,7]

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{-m}{n-i}a_n^{(n-i)}y^{(i)} = 0. \tag{7}$$

Wenn wir mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die n Nullstellen des Polynoms $a_n(x)$ bezeichnen, können wir auffchreiben

$$a_n(n) = A_{nn}\prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = A_{nn}P_n(x), \tag{8}$$

wo

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

ist.

Wenn wir jetzt die Differrentialgleichung (7) mit A_{nn} diwidieren, erhalten wir, nach (8), die Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{-m}{n-i} P_n^{(n-i)}(x) y^{(i)} = 0. \tag{9}$$

Setzen wir weiter

$$P_n(x) = (x - x_n) P_{n-1}(x),$$
$$P_n^{(n-i)}(x) = (x - x_n) P_{n-1}^{(n-i)}(x) + (n-i) P_{n-1}^{(n-i-1)}(x)$$

wird die Differentialgleichung (9)

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{-m}{n-i} \left[(x - x_n) P_{n-1}^{(n-i)} + (n-i) P_{n-1}^{(n-i-1)} \right] y^{(i)} = 0. \tag{10}$$

Da

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{-m}{n-i} (x - x_n) P_{n-1}^{(n-i)} y^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \binom{-m}{n-i} (x - x_n) P_{n-1}^{(n-i)} y^{(i)} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{-m}{n-i-1} (x - x_n) P_{n-1}^{(n-i-1)} y^{(i+1)},$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{-m}{n-i} (n-i) P_{n-1}^{(n-i-1)} y^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{-m}{n-i} (n-i) P_{n-1}^{(n-i-1)} y^{(i)} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{-m}{n-i-1} (-m-n+i+1) P_{n-1}^{(n-i-1)} y^{(i)}$$

kann die Differentialgleichug (10) in der folgenden Gestalt

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{-m}{n-i-1} P_{n-1}^{(n-i-1)} \left[(x - x_n) y' - (m+n-1) y \right]^{(i)} = 0$$

aufgeschrieben werden.

Wenn wir jetzt in dieser Differentialgleichung

$$(x-x_n)y'-(m+n-1)y = y_1$$

setzen, erhalten wir die Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{-m}{n-i-1}P_{n-1}^{(n-i-1)}y_1^{(i)} =0. \tag{11}$$

Setzt man hier

$$P_{n-1}(x) = (x-x_{n-1})P_{n-2}(x),$$

$$P_{n-1}^{(n-i-1)} = (x-x_{n-1})P_{n-2}^{(n-i-1)} + (n-i-1)P_{n-2}^{(n-i-2)}$$

wird die Differentialgleichung (11)

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{-m}{n-i-1}\left[(x-x_{n-1})P_{n-2}^{(n-i-1)} + (n-i-1)P_{n-2}^{(n-i-2)}\right]y_1^{(i)} = 0. \tag{12}$$

Da

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{-m}{n-i-1}(x-x_{n-1})P_{n-2}^{(n-i-1)}y_1^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-2}\binom{-m}{n-i-2}(x-x_{n-1})P_{n-2}^{(n-i-2)}y_1^{(i+1)},$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{-m}{n-i-1}(n-i-1)P_{n-2}^{(n-i-2)}y_1^{(i)} =$$

$$=\sum_{i=0}^{n-2}\binom{-m}{n-i-2}(-m-n+i+2)P_{n-2}^{(n-i-2)}y_1^{(i)}$$

kann die letzte Differentialgleichung (12) in der folgenden Form

$$\sum_{i=0}^{n-2}\binom{-m}{n-i-2}P_{n-2}^{(n-i-2)}\left[(x-x_{n-1})y_1'+(m+n-2)y_1\right]^{(i)} = 0. \tag{13}$$

aufgeschrieben werden.

Setzt man jetzt

$$(x-x_{n-1})y_1'-(m+n-2)y_1 = y_2$$

wird die letzte Differentialgleichung (13)

$$\sum_{i=0}^{n-2}\binom{-m}{n-i-2}P_{n-2}^{(n-i-2)}y_2^{(i)} = 0. \tag{14}$$

Wenn wir weiter

$$(x - x_{m-k+1})y_{k-1}' - (m+n-k)y_{k-1} = y_k$$

setzen, machen wir eine Voraussetzung dass für y_k die folgende Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{-m}{n-i-k} P_{n-k}^{(n-i-k)} y_k^{(i)} = 0 \tag{15}$$

erhalten wind.

Setzt man noch hier

$$P_{n-k}(x) = (x - x_{n-k})P_{n-k-1}(x),$$

$$P_{n-k}^{(n-i-k)} = (x - x_{n-k})P_{n-k-1}^{(n-i-k)} + (n-i-k)P_{n-k-1}^{(n-i-k-1)},$$

wird die letzte Differentialgleichung (15)

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{-m}{n-i-k} \left[(x - x_{n-k})P_{n-k-1}^{(n-i-k)} + (n-i-k)P_{n-k-1}^{(n-i-k-1)}\right] y_k^{(i)} = 0. \tag{16}$$

Da

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{-m}{n-i-k} (x - x_{n-k}) P_{n-k-1}^{(n-i-k)} y_k^{(i)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-k-1} \binom{-m}{n-i-k-1} (x - x_{n-k}) P_{n-k-1}^{(n-i-k-1)} y_k^{(i+1)},$$

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{-m}{n-i-k} (n-i-k) P_{n-k-1}^{(n-i-k-1)} y_k^{(i)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-k-1} \binom{-m}{n-i-k-1} (-m-n+i+k+1) P_{n-k-1}^{(n-i-k-1)} y_k^{(i)},$$

kann die letzte Differentialgleichug (16) in der folgenden Form

$$\sum_{i=0}^{n-k-1} \binom{-m}{n-i-k-1} P_{n-k-1}^{(n-i-k-1)} \left[(x - x_{n-k})y_k' - (m+n-k-1)y_k\right]^{(i)} = 0 \tag{17}$$

aufgesehrieben werden.

Wenn wir jetzt

$$(x - x_{n-k})y_k' - (m+n-k-1)y_k = y_{k+1}$$

setzen, erhalten wir für y_{k+1} die Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n-k-1} \binom{-m}{n-i-k-1} P_{n-k-1}^{(n-i-k-1)} y_{k+1}^{(i)} = 0. \qquad (18)$$

Auf diese Weise, haben wir mit der Anwendung der matematische Induktion beweisen dass die Differentialgleichung (9) auf die lineare Differentialgleichungssystem der esten Ordnung

$$\begin{aligned}
(x-x_n)y' - (m+n-1)y &= y_1, \\
(x-x_{n-1})y_1' - (m+n-2)y_1 &= y_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(x-x_{n-k})y_k' - (m+n-k-1)y_k &= y_{k+1}, \qquad (19) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(x-x_2)y_{n-2}' - (m+1)y_{n-2} &= y_{n-1}, \\
(x-x_1)y_{n-1}' - my_{n-1} &= 0
\end{aligned}$$

sich reduziert.

Wenn wir diese Differentialgleichungen (19) nacheinander lösen, erhalten wir die allgemeine Polynomlösung der Differentialgleichung (9) in der folgende Gestalt.

$$y = A_n(x-x_n)^{m+n-1} + (x-x_n)^{m+n-1}\int (x-x_n)^{-m-n+2} y_1 dx =$$

$$= A_n(x-x_n)^{m+n-1} + A_{n-1}(x-x_n)^{m+n-1}\int \frac{(x-x_{n-1})^{m+n-2}}{(x-x_n)^{m+n}} dx +$$

$$+ (x-x_n)^{m+n-1}\int\left[\frac{(x-x_{n-1})^{m+n-2}}{(x-x_n)^{m+n}}\int \frac{y_2 dx}{(x-x_{n-1})^{m+n-1}}\right]dx =$$

$$= A_n(x-x_n)^{m+n-1} + A_{n-1}(x-x_n)^{m+n-1}\int \frac{(x-x_{n-1})^{m+n-2}}{(x-x_n)^{m+n}} dx +$$

$$+ A_{n-2}(x-x_n)^{m+n-1}\int\left[\frac{(x-x_{n-1})^{m+n-2}}{(x-x_n)^{m+n}}\int \frac{(x-x_{n-2})^{m+n-3}}{(x-x_{n-1})^{m+n-1}} dx\right]dx +$$

$$+\left(x-x_n\right)^{m+n-1}\int\left[\frac{\left(x-x_{n-1}\right)^{m+n-2}}{\left(x-x_n\right)^{m+n}}\int\left(\frac{\left(x-x_{n-2}\right)^{m+n-3}}{\left(x-x_{n-1}\right)^{m+n-1}}\int\frac{y_3dx}{\left(x-x_{n-2}\right)^{m+n-2}}\right)dx\right]dx=$$

$$=\ldots=A_n(x-x_n)^{m+n-1}+A_{n-1}(x-x_n)^{m+n-1}\int\frac{(x-x_{n-1})^{m+n-2}}{(x-x_n)^{m+n}}dx+$$

$$+\ldots+A_3\left(x-x_n\right)^{m+n-1}\times$$

$$\times\int\frac{\left(x-x_{n-1}\right)^{m+n-2}}{\left(x-x_n\right)^{m+n}}\int\frac{\left(x-x_{n-2}\right)^{m+n-3}}{\left(x-x_{n-1}\right)^{m+n-1}}\int\frac{\left(x-x_{n-3}\right)^{m+n-4}}{\left(x-x_{n-2}\right)^{m+n-2}}\int\ldots$$

$$\ldots\int\frac{\left(x-x_5\right)^{m+4}}{\left(x-x_6\right)^{m+6}}\int\frac{\left(x-x_4\right)^{m+3}}{\left(x-x_5\right)^{m+5}}\int\frac{\left(x-x_3\right)^{m+2}}{\left(x-x_4\right)^{m+4}}dx^{n-3}+\qquad(20)$$

$$+A_2\left(x-x_n\right)^{m+n-1}\times$$

$$\times\int\frac{\left(x-x_{n-1}\right)^{m+n-2}}{\left(x-x_n\right)^{m+n}}\int\frac{\left(x-x_{n-2}\right)^{m+n-3}}{\left(x-x_{n-1}\right)^{m+n-1}}\int\frac{\left(x-x_{n-3}\right)^{m+n-4}}{\left(x-x_{n-2}\right)^{m+n-2}}\int\ldots$$

$$\ldots\int\frac{\left(x-x_4\right)^{m+3}}{\left(x-x_5\right)^{m+5}}\int\frac{\left(x-x_3\right)^{m+2}}{\left(x-x_4\right)^{m+5}}\int\frac{\left(x-x_2\right)^{m+1}}{\left(x-x_3\right)^{m+3}}dx^{n-2}+$$

$$+A_1\left(x-x_n\right)^{m+n-1}\times$$

$$\times\int\frac{\left(x-x_{n1}\right)^{m+n-1}}{\left(x-x_n\right)^{m+n}}\int\frac{\left(x-x_{n-1}\right)^{m+n-2}}{\left(x-x_n\right)^{m+n}}\int\frac{\left(x-x_{n-2}\right)^{m+n-3}}{\left(x-x_{n-1}\right)^{m+n-1}}\int\frac{\left(x-x_{n-3}\right)^{m+n-4}}{\left(x-x_{n-2}\right)^{m+n-2}}\int\ldots$$

$$\ldots\int\frac{\left(x-x_3\right)^{m+2}}{\left(x-x_4\right)^{m+4}}\int\frac{\left(x-x_2\right)^{m+1}}{\left(x-x_3\right)^{m+32}}\int\frac{\left(x-x_1\right)^{m}}{\left(x-x_2\right)^{m+2}}dx^{n-1},$$

wo $A_i, i=1,2,\ldots,n$ beliebige Konstanten sind.

Beispiele: 1^{o} Die Differentialgleichungen

$$(x-x_1)(x-x_2)y''-m(2x-x_1-x_2)y'+m(m+1)y=0,$$
$$(x-x_1)^2y''-2m(x-x_1)y'+m(m+1)y=0$$

besitzen allgemeine Lösungen

$$y=C_1\left(x-x_1\right)^{m+1}+C_2\left(x-x_2\right)^{m+1},$$
$$y=C_1\left(x-x_1\right)^{m+1}+C_2\left(x-x_2\right)^{m}.$$

Für $m=1, x_1 = i, x_2 = -i$ und $x_1 = 1, x_2 = -1$ der ersten diesen Differentialgleichngen werden die zitirten Differentialgleichungen in [2] erhalten.

2° Die Differentialgleichungen

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)y'''-$$
$$-m[(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_2)(x-x_3)]y''+$$
$$+m(m+1)(3x-x_1-x_2-x_3)y'-m(m+1)(m+2)y=0,$$

$$(x-x_1)^2(x-x_2)y'''-$$
$$-m[(x-x_1)^2+2(x-x_1)(x-x_2)]y''+$$
$$+m(m+1)[2(x-x_1)+(x-x_2)]y'-m(m+1)(m+2)y=0,$$

$$(x-x_1)^3 y'''-3m(x-x_1)^2+$$
$$+3m(m+1)(x-x_1)y'-m(m+1)(m+2)y=0$$

besietzen allgemeine Lösungen

$$y=C_1(x-x_1)^{m+2}+C_2(x-x_2)^{m+2}+C_3(x-x_3)^{m+2},$$
$$y=C_1(x-x_1)^{m+2}+C_2(x-x_1)^{m+1}+C_3(x-x_2)^{m+2},$$
$$y=C_1(x-x_1)^{m+2}+C_2(x-x_1)^{m+1}+C_3(x-x_1)^{m}.$$

Für $m=1, x_1 = x_2 = 0, x_3 = -1$ der ersten diesen Differentialgleichungen wird die zitirten Differentialgleichung in [2] erhalten.

3° Die Differentialgleichungen

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)y^{IV}-$$
$$-m[(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+$$
$$+(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)]y'''+$$
$$+m(m+1)[(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_4)+$$
$$+(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_3)(x-x_4)]y''-$$

$$-m(m+1)(m+2)(4x-x_1-x_2-x_3-x_4)y'+$$
$$+m(m+1)(m+2)(m+3)y=0,$$

$$(x-x_1)^2(x-x_2)(x-x_3)y^{IV}-m\big[2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+$$
$$+(x-x_1)^2(x-x_2)+(x-x_1)^2(x-x_3)]y'''+m(m+1)[2(x-x_1)(x-x_2)+$$
$$+2(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_1)^2+(x-x_2)(x-x_3)\big]y''-$$
$$-m(m+1)(m+2)(4x-2x_1-x_2-x_3)y'+$$
$$+m(m+1)(m+2)(m+3)y=0,$$

$$(x-x_1)^2(x-x_2)^2y^{IV}-$$
$$-2m[(x-x_1)(x-x_2)^2+(x-x_1)^2(x-x_2)]y'''+$$
$$+m(m+1)[(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+4(x-x_1)(x-x_2)]y''-$$
$$-m(m+1)(m+2)[2(x-x_1)+2(x-x_2)]y'+$$
$$+m(m+1)(m+2)(m+3)y=0,$$

$$(x-x_1)^3(x-x_2)y^{IV}-$$
$$-m[(x-x_1)^3+3(x-x_1)^2(x-x_2)]y'''+$$
$$+m(m+1)[3(x-x_1)^2+3(x-x_1)(x-x_2)]y''-$$
$$-m(m+1)(m+2)[3(x-x_1)+(x-x_2)]y'+$$
$$+m(m+1)(m+2)(m+3)y=0,$$

$$(x-x_1)^4y^{IV}-4m(x-x_1)^3y'''+6m(m+1)(x-x_1)^2y''-$$
$$-4m(m+1)(m+2)(x-x_1)y'+m(m+1)(m+2)(m+3)y=0,$$

besiettzen allgemeine Lösungen

$$y=C_1(x-x_1)^{m+3}+C_2(x-x_2)^{m+3}+C_3(x-x_3)^{m+3}+C_4(x-x_4)^{m+3},$$
$$y=C_1(x-x_1)^{m+3}+C_2(x-x_1)^{m+2}+C_3(x-x_2)^{m+3}+C_4(x-x_3)^{m+3},$$
$$y=C_1(x-x_1)^{m+3}+C_2(x-x_1)^{m+2}+C_3(x-x_2)^{m+3}+C_4(x-x_2)^{m+2},$$
$$y=C_1(x-x_1)^{m+3}+C_2(x-x_1)^{m+2}+C_3(x-x_1)^{m+1}+C_4(x-x_2)^{m+3},$$
$$y=C_1(x-x_1)^{m+3}+C_2(x-x_1)^{m+2}+C_3(x-x_1)^{m+1}+C_4(x-x_1)^{m}.$$

L I T E R A T U R

[1] Angelesko M.: Sur certenes équations différentielles completement intégrables, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Paris 1921, t.172, pp. 40-41.
[2] Э Камке: Справочник по обыкновенным диффернциальным уравнениям, стр.466 урав. 2.227, стр.475 урав. 2.240а, стр. 545 урав. 3.71(1961) Москва.
[3] Пиперевски Боро М.: Полиномни решенија на една класа линеарни диференцијални равенки и нивна примена, докторска дисертација (1982) Скопје.
[4] Popov B.S.: O jednoj diferencijalnoj jednačini, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu,serija: Matematika i fizika, N°68 (1961)
[5] Šapkarev I. A. : Sur une équation différentielle linéaire d'ordre *n* dont la solution générale est une polynôme de n-ème degré, Matematički vesnik 1(16) 1964.
[6] Šapkarev Ilija A. : Polynome mit Grade sukzessiven natürlichen Zahlen als partikuläre Lösungen einer Klasse der linearen Differentialgleichungen, MANU, Contributions, XII, 2 - Section of Mathematical and Technical Sciences (1991) Skopje.
[7] Šapkarev Ilija A.: Eine Anwendung der Adjungierten linearen Differentialgleichung für die Konstruktion der Polynomlösungen, MANU, Contributions, VII 2-Section of Mathematical and Technical Sciences (1986) Skopje.

Илија А. Шапкарев

ЗА ЕДНА РЕДУКТИБИЛНА ХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ЧИЈ ОПШТ ИНТЕГРАЛ Е ПОЛИНОМ.

Резиме

Во трудот се разгледува линеарната диференцијална равенка (1) чии коефициенти се полиноми. Степенот на секој од овие полиномни коефициенти е еднаков со изводот на непознатата функција пред кој тој се наоѓа.

Со m последователни диференцирања од диференцијалната равенка (1) се добива диференцијалната равенка (3) од ред $m+n$ која треба да се напише во вид (4).

Потребни и доволни услови за диференцијалната равенка (1) да има n полиномни решенија од степени $m,m+1,\dots,m+n-1$ се релациите (5) кои се добиваат од диференцијалната равенка (4). Со помош на овие релации диференцијалната равенка (1) може да се напише во вид (7). Понатака се покажува дека диференцијалната равенка (7) се сведува на системот линеарни диференцијални равенки од прв ред (19).

Со последователното решавање на овој систем се добива општото полиномно решение на диференцијалната равенка (1) определено со формулата (20).

На крајот се дадени неколку примери.

HOMOGENEOUS SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS OF SYMMETRIC MATRIX

Ice B. Risteski[1] and Kostadin G. Trenčevski[2]

In this paper is solved one characteristic problem of system of differential equations with constant coefficients of symmetric matrix. Observed problem is appendix to the well-known books [1,2,3].

1. Formulation of the problem

Solve the system

$$\frac{dX}{dt} = AX \tag{1}$$

of differential equations, where

$$\frac{dX}{dt} = \left[\frac{dx_i}{dt}\right]_{n\times 1}, \qquad X = [x_i]_{n\times 1}, \qquad (1 \le i \le n)$$

and $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ is the symmetric matrix with elements

1. $a_{ij} = i(n+1-j), \qquad (i \le j) \qquad$ and $\qquad a_{ij} = a_{ji}$
2. $a_{ij} = \sum\limits_{r=j}^{n} r^{-1}, \qquad (i \le j)$ and $a_{ij} = a_{ji}$.

2. Solution of the problem

1. Since the inverse matrix $B = A^{-1}$ of the matrix A is a particular Jacobi matrix, the eigenvalues of the matrix $B = [b_{ij}]$ can easily be determined where

$$(n+1)b_{ij} = 2, \qquad (i = j)$$

$$(n+1)b_{ij} = -1, \qquad (i = j \pm 1)$$

$$(n+1)b_{ij} = 0, \qquad (|\, i - j\,| > 1).$$

Now let $P_n(\lambda) = 0$ be the characteristic polynomial of the matrix $(n+1)[b_{ij}]_{n\times n}$. From the characteristic polynomial of the matrix $(n+1)[b_{ij}]_{n\times n}$ we obtain the following recurrent formula

$$P_1(\lambda) = 2 - \lambda, \qquad P_2(\lambda) = 3 - 4\lambda + \lambda^2, \qquad P_k(\lambda) = (2-\lambda)P_{k-1}(\lambda) - P_{k-2}(\lambda).$$

By solving this difference equation, we obtain

$$P_n(\lambda) = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta},$$

1991 Mathematics Subject Classification: *34A30, 15A18*

Key words and phrases: *system of differential equations, eigenvalue, eigenvector.*

where α and β are the roots of the equation

$$x^2-(2-\lambda)x+1=0.$$

Hence $\epsilon=\frac{\alpha}{\beta}$, where $\epsilon^{n+1}=1$ and $\alpha\neq 1$, is a root of the equation $P_n(\lambda)=0$ and all different roots of P_n are

$$\lambda_k=\frac{4}{n+1}\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}, \qquad (1\le k\le n)$$

and the eigenvalues of the matrix A are $\mu_k=\lambda_k^{-1}$, i.e.

$$\mu_k=\frac{n+1}{4\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}}, \qquad (1\le k\le n)$$

which correspond to the following eigenvectors

$$X_k=\left[\sin\frac{k\pi}{n+1},\sin\frac{2k\pi}{n+1},\cdots,\sin\frac{nk\pi}{n+1}\right]^T, \qquad (1\le k\le n).$$

Now the general solution of (1) is given by

$$X=\sum_{k=1}^{n}C_kX_ke^{\mu_k},$$

where C_k, $(1\le k\le n)$ are arbitrary constants. It completes this case.

2. If from each column of the matrix $\lambda A-I$ is subtracted the next one, and then if from each row is subtracted the next one, we obtain

$$P_n(\lambda)=|\,\lambda A-I\,|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \frac{\lambda}{2}-2 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{\lambda}{3}-2 & \cdots & 0 & 0\\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\lambda}{n-1}-2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{\lambda}{n}-1\end{vmatrix}.$$

Let us denote

$$F_n(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \frac{\lambda}{2}-2 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{\lambda}{3}-2 & \cdots & 0 & 0\\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\lambda}{n-1}-2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{\lambda}{n}-2\end{vmatrix},$$

we obtain

$$P_n(\lambda)=F_n(\lambda)+F_{n-1}(\lambda),$$

$$F_n(\lambda)=(\frac{\lambda}{n}-2)F_{n-1}(\lambda)-F_{n-2}(\lambda).$$

By elimination of F, we obtain

$$nP_n(\lambda)=(\lambda-2n+1)P_{n-1}(\lambda)-(n-1)P_{n-2}(\lambda).$$

Since $P_0(\lambda) = 1 = L_0(\lambda)$ and $P_1(\lambda) = \lambda - 1 = -L_1(\lambda)$, then from the previous equation it follows

$$P_n(\lambda) = (-1)^n L_n(\lambda),$$

where $L_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{k!}$ is the Laguerre polynomial of n-th degree. Thus the eigenvalues $\lambda_k, (1 \leq k \leq n)$ of the matrix A are the zeros of the Laguerre polynomial $L_n(\lambda)$.

The coefficients a_{ij} satisfy

$$i(a_{ij} - a_{i+1,j}) = \begin{cases} 0, & (1 \leq i < j \leq n) \\ 1, & (1 \leq j \leq i \leq n-1) \end{cases},$$

$$n a_{nj} = 1, (1 \leq j \leq n).$$

On the other hand, for $1 \leq j \leq n$, it holds

$$(2i-1)a_{ij} - i a_{i+1,j} - (i-1)a_{i-1,j} = \delta_{ij}, \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{2}$$

where $a_{0j} = a_{n+1,j} = 0$. For $\lambda \neq 0$ it will exist eigenvector $X = x^T = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$.

Since $x_i = \mu \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, by putting $\mu = \lambda^{-1}$, from (2) we obtain

$$(2i-1)x_i - i x_{i+1} - (i-1)x_{i-1} = \mu x_i, \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{3}$$

where $x_0 = x_{n+1} = 0$.

If $x_1 = 0$, from the previous equationa we obtain recursively $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$, which is a contradiction because the eigenvector is a nonzero vector. Hence $x_1 \neq 0$. Since the eigenvector is determined up to a nonzero scalar, without loss of generality we assume that $x_1 = 1$. Let be $x_1 = 1$, then it will be $x_{i+1} = L_i(\mu)$, $(1 \leq i \leq n-1)$ such that for the Laguerre polynomial $L_r(z)$ it holds

$$L_0(z) = 1, \qquad L_1(z) = 1 - z,$$

$$r L_r(z) = (2r - 1 - z)L_{r-1}(z) - (r-1)L_{r-2}(z).$$

For the coordinates of the eigenvector X, which are determined from (3), it will hold $L_n(\mu) = 0$, which means that μ is a root of $L_n(\mu) = 0$. The polynomial equation $L_n(\mu) = 0$ has $\mu_k, (1 \leq k \leq n)$ positive roots. Hence, the eigenvalues of the matrix A are $\lambda_k = \mu_k^{-1}, (1 \leq k \leq n)$ which correspond to the eigenvectors

$$X_k = [L_0(\mu_k), L_1(\mu_k), \cdots, L_{n-1}(\mu_k)]^T, \qquad (1 \leq k \leq n).$$

At the end, the general solution of the matrix equation (1) is

$$X = \sum_{k=1}^{n} C_k X_k e^{\lambda_k},$$

where $C_k, (1 \leq k \leq n)$ are arbitrary constants, and that finishes this case.

R E F E R E N C E S

[1] E.Kamke, *Differentialgleichungen - Lösungsmethoden und Lösungen*, 6 Auflage, Leipzig 1959.

[2] D.S.Mitrinović, *Diferencijalne jednačine - zbornik zadataka i problema*, 3 izdanje, Naučna knjiga, Beograd 1986.

[3] F.R.Gantmacher, *The Theory of Matrices*, 4-th ed., Nauka, Moscow 1988, (in Russian).

[1]2 Milepost Place # 606,
Toronto, M4H 1C7, Canada
e-mail: iceristeski@hotmail.com

[2]Institute of Mathematics
St. Cyril and Methodius University
P.O.Box 162, 1000 Skopje, Macedonia
e-mail: kostatre@iunona.pmf.ukim.edu.mk