Неисправна монета

Повод за оваа работа е следната добро позната задача:

Во купче со n наизглед еднакви монети точно една е со различна тежина од другите, полесна или потешка, што не ни е познато. Одредете го минималниот број на мерења со вага со тегови и постапката со која се констатите која монета се разликува пот ежина и дали е потешка или полесна од останатите монети.

Во множеството од три монети, од кои две се со иста тежина, со три мерења можеме да констатираме која монета се разликува по тежина и дали е полесна или е потешка од останатите две. Тоа може да се постигне со мерење на секоја монета поединечно. Во секое множество со повеќе од три монети истото може да се постигне со три мерења.

Ќе покажеме дека за $3 < n \leq 7$, каде со n е означен бројот на монетите, проблемот може да се реши со помош на четири мерења. Ова доволно е да се докаже за $n = 7$, $7 = 1 + 2 + 2^2$.

Да ги поделиме монетите на четири подмножества со по $2, 2, 2, 1$ монети. Во првите три мерења да ги измериме подмножествата со по две монети. Ако добиените просечни тежини не се еднакви, тогаш со овие мерења се констатира во кое подмножество од по две монети се наоѓа монетата која се разликува по тежина и дали таа е полесна или е потешка од остабатите монети, а со следното мерење на една од монетите на тоа купче се наоѓа која монета е со различна тежина. Ако добиените просечни тежини во првите три подмножества се еднакви, тогаш последната монета се разликува по тежина и со нејзино мерење се констатира дали таа е полесна или потешка од останатите монети.

Да го разгледаме истиот проблем во множество од осум монети, меѓу кои седум се со иста тежина. Разгледувајќи ги сите начини на кои може да се извршат четири мерења на монетите од тоа множество заклучуваме дека не можеме со сигурност да констатираме која монета се разликува пот ежина од останатите и дали таа е полесна или потешка од останатите монети. Ако четири мерења не се доволни проблемот да се реши во множество од осум монети, тогаш тие сигурно не се доволни проблемот да се реши ни во множеството од повеќе од осум монети.

Ќе покажеме дека за $7 < n \leq 15$ проблемот може да се реши со помош на пет мерења. Последното доволно е да се докаже за $n = 15$, $15 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3$.

Да ги поделиме 15-те монети на четири подмножества со по $4, 4, 4, 3$ монети, соодветно. Со првите три мерења да ги измериме првите три купчиња. Ако просечните тежини на монетите од овие подмножества се разликуваат, тогаш со овие мерења констатираме во кое подмножество од четири монети се наоѓа монетата која се разликува пот ежина и дали е полесна или е потешка од останатите монети. Во четвртото мерење шеземеме две монети од тоа купче, а во петтото една и така ќе констатираме која од тие монети се разликува пот ежина од останатите. Ако просечните тежини на монетите во првите три мерења се еднакви, тогаш во четвртото мерење земаме две монети од четвртото подмножество, а во петтото една, и на тој начин констатираме која монета се разликува по тежина и дали е полесна или потешка од останатите монети.

Од досега изнесеното може да се наслути дека за $2^{k-2} - 1 < n \leq 2^{k-1} - 1$, $k = 3, 4, ...$ проблемот може да се реши со помош на k-мерења. Последното доволно е да се докаже за $n = 2^{k-1} - 1$, $k = 3, 4, 5, ...$.

Тврдењето е точно за $k = 3$ и $k = 4$. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за k и да докажеме дека тогаш тоа е точно и за $k + 1$. Да ги поделиме дадените

$2^k - 1$ монети на четири подмножества со $2^{k-2}, 2^{k-2}, 2^{k-2}, 2^{k-2} - 1$ монети и да ги измериме поединечно првите три групи монети. Ако просечните тежини на монетите од овие групи не се еднакви, тогаш со првите три мерења констатитраме во кое од првите три подмножества се наоѓа монетата која се разликува по тежина и дали е полесна или потешка од останатите. После четвртото мерење во кое учествуваат 2^{k-3} монети од тоа подмножество настанува истата состојба како и во случајот $n = 2^{k-1} - 1$ послед третото мерење ако просечните тежини на монетите не се еднакви, па затоа со следните $k-3$ мерења, по претпоставка , може да се констатира која монета се разликува од останатите. Ако се просечните тежини на монетите во првите три мерења еднакви, тогаш мериме 2^{k-3} монети од четвртото подмножество. Ако просечните тежини на овие монети не се еднакви со просечните тежини на монетите од претходните мерења, тогаш се констатира дека меѓу овие 2^{k-3} монети се наоѓа монета која се разликува по тежина и дали истата е полесна или потешка од останатите монети и со следните $k-3$, при што во секое мерење бројот на монетите е двапати помал отколку во претходното, може да се констатира и која монета е во прашање. Ако просечните тежини на монетите од првите четири мерења се еднакви, тогаш настанува состојба како во случајот $n = 2^{k-1} - 1$ после третото мерење ако просечните тежини на монетите се еднакви, па со следните $k-3$ мерења, по претпоставка, може да се најде која монета се разликува и дали е полесна или потешка.

А.Малчески, Скопје