

МЕЃУНАРОДЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР КЕНГУР
26 МАРТ 2009
3 И 4 ГОДИНА ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА

Тестот се работи за време од 1 час и 15 минути.

За неточен одговор се одзема една четвртина од бројот на поени со кои прашањето се вреднува. За да се избегне негативен вкупен резултат на крајот се додаваат 30 поени, така што вкупниот можен број на освоени поени е 150. Калкулатори не се дозволени.

Секоја од задачите со реден број од 1 до 10 се вреднува со 3 поени

1. Во еден аквариум имало 200 риби, при што 1% од нив биле плави, а останатите биле жолти риби. Колку жолти риби треба да се отстранат од аквариумот, за да од рибите што останале во базенот плавите риби се 2%.

- (A) 2 (B) 4 (C) 20 (D) 50 (E) 100

2. Кој е најголем од следните броеви?

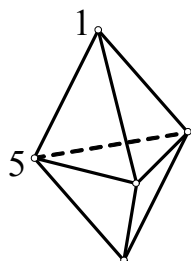
- (A) $\sqrt{2} - \sqrt{1}$ (B) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (C) $\sqrt{4} - \sqrt{3}$ (D) $\sqrt{5} - \sqrt{4}$ (E) $\sqrt{6} - \sqrt{5}$

3. За колку природни броеви n , бројот $n^2 + n$ е прост број?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) конечно многу повеќе од 2 (E) бесконечно многу

4. Ана, Анета и Александра отишле на кафе. Секоја од нив платила три сока, два сладоледи и пет колачиња. Која од следните суми е вкупната заедничка сметка?

- (A) 39,20 (B) 38,20 (C) 37,20 (D) 36,20 (E) 35,20



5. Едно тело е формирано од 6 триаголници. Во секое негово теме е запишан по еден број. За секоја страна е пресметан збирот на броевите во нејзините темиња, и сите пресметани зборови се еднакви. Два од запишаните броеви се 1 и 5 како на цртежот. Колку е збирот на сите запишани броеви во темињата на телото?

- (A) 9 (B) 12 (C) 17 (D) 18 (E) 24

6. Кружниците $k(F,13)$ и $k(G,15)$ се сечат во точките P и Q . Должината на отсечката PQ е 24. Колку е должината на отсечката FG ?

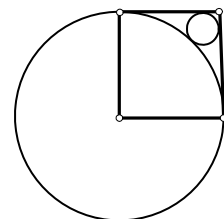
- (A) 2 (B) 5 (C) 9 (D) 14 (E) 18

7. Во една кутија се наоѓаат 2 бели, 3 црвени и 4 плави чорапи. Анета знае дека три од нив се скинати, но не знае од која боја се тие. Колку чорапи треба да земе Анета од кутијата за да во нив има еден пар здрави чорапи од иста боја?

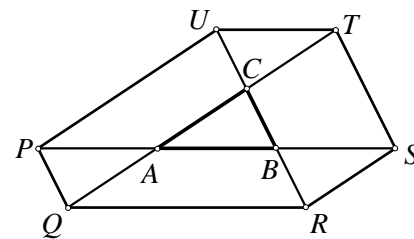
- (A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 7 (E) 8

8. Квадратот даден на цртежот има страна еднаква на 1. Колку е радиусот на малата кружница?

- (A) $\sqrt{2} - 1$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (D) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (E) $(1 - \sqrt{2})^2$



9. Страните на триаголникот ABC се продолжени преку нивните крајни точки до точките P, Q, R, S, T, U така што $PA = AB = BS$, $QA = AC = CT$, $UC = CB = BR$ (види цртеж). Колку е плоштината на шестаголникот $PQRSTU$.



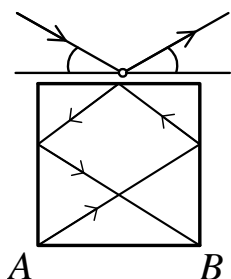
- (A) 10 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) не може да се определи

10. Квадратчињата на квадратна шема со димензии 5×5 треба да се обојат со боите A, B, C и D . Секое квадратче да се обои во една боја и две соседни квадратчиња треба да се обоени во различни бои. Две квадратчиња се соседни ако имаат заедничко теме. Некои од квадратчињата се веќе обоени, како што е прикажано на цртежот. Во кои бои може да биде обоено затемнетото квадратче?

A	B			
C	D			
		B		
B				

- (A) некоја од боите A или B (B) само C (C) само D
 (D) некоја од боите C или D (E) секоја од боите A, B, C, D

Задачите под реден број од 11 до 20 се вреднуваат со 4 поени

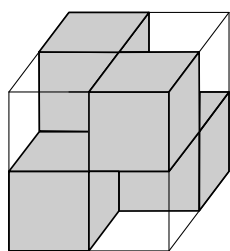


11. Маса за билјард има форма на квадрат со страна 2 m , и од темето A е исфрлена една топка (види цртеж). По удирањето на исфрлената топка во трите страни, како што е прикажано, таа се вратила во темето B (топката од секоја страна се одбива под ист агол под кој што удира). Колку метри се тркалала топката?

- (A) 7 (B) $2\sqrt{13}$ (C) 8 (D) $4\sqrt{3}$ (E) $2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

12. Во една група од 2009 кенгури, некои се бели а некои црни. При тоа, еден бел кенгур е повисок од точно 8 црни кенгури, еден бел кенгур е повисок од точно 9 црни кенгури, еден бел кенгур е повисок од точно 10 црни кенгури, и така натаму, точно еден бел кенгур е повисок од сите црни кенгури. Колку кенгури во групата биле бели?

- (A) 1000 (B) 1001 (C) 1002 (D) 1003 (E) таква ситуација не е можна



13. Коцка со раб 2 е составена од 8 коцки со раб 1, четири црни-непроѕирни и четири проѕирни. Тие се поставени така што коцката со раб 2 е непроѕирна кога гледаме од било која страна на коцката (види цртеж). Кој е најмалиот број на црни непроѕирни коцки кои треба да се употребат за да се направи коцка со раб 3, така што коцката да биде непроѕирна кога гледаме од било која нејзина страна?

- (A) 6 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 18

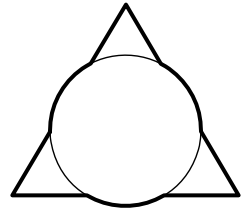
14. На еден остров некои од жителите се лажговци. Лажговците секогаш лажат, а другите жители на островот секогаш ја зборуваат вистината. Во една редица биле наредени 25 жители од островот. Секој од нив, освен првиот, рекол дека тој што е пред него во редот е лажго. Првиот рекол дека сите останати членови на редот се лажговци. Колку лажговци има во редот?

- (A) 0 (B) 12 (C) 13 (D) 24 (E) не е можно да се определи

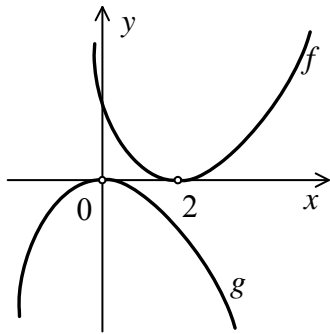
15. Која е последната цифра на бројот $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - 2008^2 + 2009^2$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

16. Центарот на кружница со радиус 1 cm е во центарот на рамностран триаголник со страна 3 cm. Колку е должината на задебелената линија?



- (A) $3 + 2\pi$ (B) $6 + \pi$ (C) $9 + \frac{\pi}{3}$ (D) 3π (E) $9 + \pi$



17. Графиците на реалните функции се дадени на цртежот. Која е зависноста меѓу f и g ?

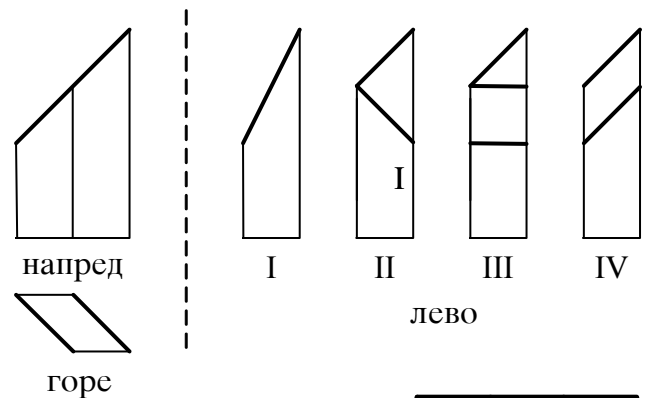
- (A) $g(x) = f(x+2)$
 (B) $g(x-2) = -f(x)$
 (C) $g(x) = f(-x+2)$
 (D) $g(-x) = -f(-x+2)$
 (E) $g(2-x) = -f(x)$

18. На една математичка олимпијада учествувале 100 ученици, кои решавале тест кој имал 4 задачи. Првата задача ја решиле 90 натпреварувачи, втората задача ја решиле 85 натпреварувачи, третата задача ја решиле 80 натпреварувачи, а четвртата задача ја решиле 75 натпреварувачи. Кој е најмалиот можен број на натпреварувачи кои ги решиле сите четири задачи?

- (A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 30

19. На цртежот е прикажан поглед од напред и поглед од горе на една геометриска фигура. Која од цртежите од I до IV е поглед на фигурата од лево.

- (A) I (B) II (C) III
 (D) IV (E) ниту еден од нив



20. Квадратна шема 3×3 треба да се дополни до магичен квадрат (збирот на броевите во секоја редица, секоја колона и дијагонала е ист). Ако два од броевите се дадени (види цртеж), колку е означениот број a ?

- (A) 16 (B) 51 (C) 54 (D) 55 (E) 110

a		
		47
	63	

Задачите под реден број од 21 до 30 се вреднуваат со 5 поени

21. Определи го бројот на десетцифрени броеви запишани со цифрите 1, 2 и 3, во кој било кои две соседни цифри се разликуваат за 1.

- (A) 16 (B) 32 (C) 64 (D) 80 (E) 100

22. Двајца атлетичари A и B трчале околу стадион. Секој од нив трчал со постојана брзина. A е побрз од B и трча еден круг за 3 min. A и B почнале да трчаат во исто време и по 8 min, A го стигнал B за прв пат. За колку време атлетичарот B трча еден круг?

- (A) 6 min (B) 8 min (C) 4 min 30 sec (D) 4 min 48 sec (E) 4 min 20 sec

23. Нека Z е бројот на 8-цифрени броеви со осум различни цифри, различни од нула. Колку од нив се деливи со 9?

- (A) $\frac{Z}{8}$ (B) $\frac{Z}{3}$ (C) $\frac{Z}{9}$ (D) $\frac{8Z}{9}$ (E) $\frac{7Z}{8}$

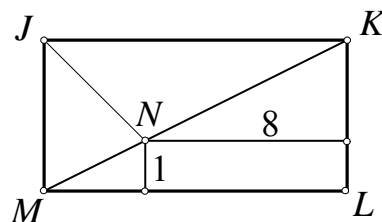
24. Даден е бројот $A = \underbrace{999\dots999}_{81\text{-пати } 9}$. Колку е збирот на цифрите на бројот A^2 .

- (A) 1458 (B) 1108 (C) 999 (D) 729 (E) 369

25. На една математичка олимпијада учествувале 55 натпреварувачи. Кога ги вреднувале задачите, комисијата нив ги оценувала со + за точно решена задача, со - за неточно решена задача и со 0 за задача која не е воопшто решавана. По оценувањето на писмените работи, немало две тетратки со ист број на плусеви и ист број на минуси. Кој е најмалиот можен број на задачи на олимпијадата?

- (A) 6 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

26. Во четириаголникот $JKLM$, симетралата на аголот $\angle KJM$ ја сече дијагоналата KM во точката N . Растојанијата од точката N до страните LM и KL се еднакви на 1 и 8 соодветно. Колку е \overline{LM} ?



- (A) $8 + 2\sqrt{2}$ (B) $11 - \sqrt{2}$ (C) 10 (D) $8 + 3\sqrt{2}$ (E) $11 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

27. Нека $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$. Определи го бројот на можни вредности на k ?

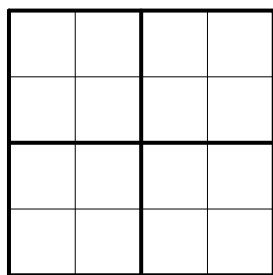
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

28. Броевите $1, 2, 3, 4, \dots, 99$ се распоредени во n групи, при што се исполнети следните услови:

- (a) секој број се наоѓа во една група
 (b) секоја група има најмалку два броја
 (c) ако два броеви се наоѓаат во иста група, нивниот збир не е делив со 3.

Најмалиот број n со ова својство е:

- (A) 3 (B) 9 (C) 33 (D) 34 (E) 66



29. Квадратна шема 4×4 е подлена на четири квадрати, како на цртежот. Во секое квадратче на квадратната шема е запишана една од буквите A, B, C, D . Колку пополнети квадратни шеми има, за кои во секоја колона, секоја редица и секој од четирите делбени квадрати секоја од четирите буквите се појавува еднаш?

- (A) 24 (B) 72 (C) 144 (D) 288 (E) 576

30. Низата на природни броеви е зададена со $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 5, \dots, a_{n+2} = a_n + (a_{n+1})^2$, за $n \geq 1$. Остатокот при делење на a_{2009} со 7 е:

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 5 (E) 6