Виктор Јанекоски, Скопје

ЕДЕН ДИРЕКТЕН ДОКАЗ НА ШТАЈНЕРОВАТА ТЕОРЕМА ЗА РАМНОКРАК ТРИАГОЛНИК

Во литературата постојат повеке планиметриски, воглавно индиректни докази на Штајнеровата теорама: *Ако симеШралиШе на дваШа аГли на ШриаГолникоШ се еднакви, ШоГаш ШриаГолникоШ е рамнокрак.* Овде ке биде изложен еден директен доказ на горната теорема.

Нека е

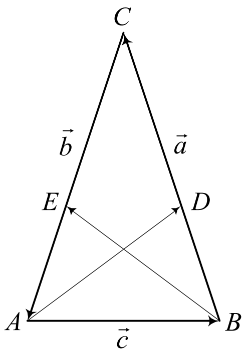
$$\overrightarrow{AB}=\vec{c},\ \overrightarrow{BC}=\vec{a},\ \overrightarrow{CA}=\vec{b},$$

каде

$$AB=c,\ BC=a,\ CA=b$$

при што (црт. 1)

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0. \tag{1}$$



ЦрШ. 1

Треба да се покаже дека од еднаквоста на симетралата AD на внатрешниот агол A со симетралата BE на внатрешниот агол B на дадениот триаголник ABC

$$AD=BE \tag{2}$$

следува дека $a=b$.

Симетралите на внатрешните агли A и B се определени со векторите:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}&=\lambda'(\overrightarrow{c_0}-\overrightarrow{b_0})=\lambda(b\vec{c}-c\vec{b}) \qquad (\lambda=\lambda'/bc),\\ \overrightarrow{BE}&=\mu'(\overrightarrow{a_0}-\overrightarrow{c_0})=\mu(c\vec{a}-a\vec{c}) \qquad (\mu=\mu'/ca),\end{aligned} \tag{3}$$

при што засега λ,μ се неопределени скалари, а $\overrightarrow{a_0},\overrightarrow{b_0},\overrightarrow{c_0}$ се единечни вектори во насока со дадените вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ соодветно. Од друга страна

$$\overrightarrow{AD}=\vec{c}+m\vec{a},\quad \overrightarrow{BE}=\vec{a}+n\vec{b} \tag{4}$$

при што m,n се исто така неопределени скалари засега.

Со изедначување на изразите (3) и (4) кои го одредуваат векторот $\overrightarrow{AD}$, од релацијата (1), добиваме

$$(\lambda c-m)\vec{b}+(1-m-\lambda b)\vec{c}=0$$

од каде заради нелинеарната зависност на векторите $\vec{b}$ и $\vec{c}$, добиваме

$$\lambda=\frac{1}{b+c},\quad m=\frac{c}{b+c}. \tag{5}$$

Со вредноста на λ од (5) и од (3) имаме,

$$\overrightarrow{AD}=\frac{b\vec{c}-c\vec{b}}{b+c} \tag{6}$$

од каде што со циклична замена $\vec{b}\to\vec{c}\to\vec{a},\ b\to c\to a$ добиваме

$$\overrightarrow{BE}=\frac{c\vec{a}+a\vec{c}}{c+a}. \tag{7}$$

Бидејќи според (1),

$$2\vec{b}\cdot\vec{c}=a^2-(b^2+c^2),\quad 2\vec{c}\cdot\vec{a}=b^2-(c^2+a^2),$$

за квадратите на интензитетите на векторите дадени со (6) и (7) добиваме:

$$AD^2 = bc\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}, \qquad (8)$$

$$BE^2 = ca\frac{(c+a+b)(c+a-b)}{(c+a)^2}. \qquad (9)$$

Сега условот (2), со помош на изразите (8) и (9) гласи

$$b(c+a)^2(b+c) - ab(c+a)^2 = a(b+c)^2(c+a) - ab(b+c)^2$$

што напишано како

$$ab\left[a(b+c)^2 - (c+a)^2\right] + (b+c)(c+a)\left[b(c+a) - a(b+c)\right] = 0,$$

или

$$ab(a+b+2c)(b-a) + (b+c)(c+a)(b-a)c = 0,$$

конечно добиваме

$$(b-a)\left[ab(a+b+2c) + c(b+c)(c+a)\right] = 0. \qquad (10)$$

Бидејќи сите изрази во средната заграда од релацијата (10), добоваме дека $b-a=0$, што и требаше да се докаже.

Ристо Малчески, Скопје

ПРОБЛЕМ НА БОИ

1. ВОВЕД

Во оваа статија ќе го рзгледаме проблемот на правилно боење на области во рамнина. Пред да преминиме на разгледување на поставениот проблем ќе воведеме неколку нови поими.

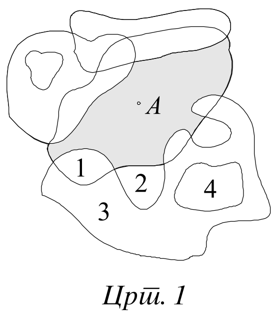
Дефиниција 1. Нека во рамнината се дадени точките A и B. Секоја крива линија која нема точки на самопресекување и ги поврзува точките A и B ја нарекуваме *тополошка отсечка*.

Затворената крива линија без точки на самопресекување ја нарекуваме *тополошка кружница*.

Познато е дека кружницата ја дели рамнината на два дела, а интуитивно е јасно дека тоа е точно и за тополошката кружница. Доказот на ова тврдење, кое во математиката е познато како Жорданова теорема, е доста сложен па затоа истиот нема да го презентираме.

Жордановата теорема уште тврди дека секои две точки кои припаѓаат на ист дел можат да се поврзат со тополошка отсечка која не ја сече тополошката кружница, а додека за две точки од различни делови тоа не е можно. Во натамошните разгледувања повеќекратно ќе ја користиме Жордановата теорема.

Дефиниција 2. Нека во рамнината се дадени конечно многу тополошки кружници и нека A е точка од рамнината која не припаѓа ниту на една тополошка кружница. Множеството точки кои со тополошки отсечки, кои не се сечат со ниедна од тополошките кружници, можеме да ги поврземе со точката A го нарекуваме *област*, (цртеж 1).



Црт. 1

За две области ќе велиме дека се соседни ако нивната заедничка граница е тополошка отсечка или тополошка кружница.

Множеството тополошки кружници и областите определени со нив го нарекуваме *карта* определена со овие тополошки кружници.

Пример 1. Областите 1 и 2 дадени на цртеж 1 не се соседни, а додека областа 3 е соседна со областите 1, 2 и 4. Притоа, заедничката граница меѓу областа 3 и областите 1 и 2 се тополошки отсечки, а меѓу областа 3 и областа 4 е тополошка кружница. ♦

2. ПРОБЛЕМ НА ДВЕ БОИ

Дефиниција 3. За една карта R ќе велиме дека е правилно обоена ако секои две соседни области се обоени со различни бои.

Теорема 1. Секоја карта R определена со конечно многу тополошки кружници може правилно да се обои во две бои.

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со математичка индукција по бројот n на тополошките кружници.

Ако $n=1$, тогаш според теоремата на Жордан картата определена со оваа тополошка кружница има две области, па едната ќе ја обоиме со бела, а другата со црна боја. Значи, за $n=1$ тврдењето на теоремата е точно.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за картата определена со n тополошки кружници.

Да разгледаме карта определена со $n+1$ тополошка кружница. Ако "избришеме" една тополошка кружница, добиваме карта со n тополошки кружници која според претпоставката можеме правилно да ја обоиме во две бои. Сега секоја област која се наоѓа внатре во "избришаната" тополошка кружница ја боиме со спротивната боја, а областите што се наоѓаат надвор од неа ги оставаме такви какви што се. Така добиваме едно боење на картата определена со $n+1$ тополошка кружница. Ќе докажеме дека ова боење е правилно. Навистина, две произволни соседни области сигурно се спротивно обоени ако и двете се наоѓаат внатре или надвор од "избришаната" тополошка кружница. Исто така, ако соседните области се наоѓаат едната надвор а другата внатре во "избришаната" тополошка кружница, тогаш тие се различно обоени бидејќи се добиваат со делење на една област од картата со n тополошки кружници, а во внатрешноста на "избришаната" тополошка кружница областите ги обоивме во спротивни бои. ♦

Дефиниција 4. *Мрежа* на некоја површина е конечно множество точки (темиња) и тополошки отсечки (рабови) со следните својства:

а) од секое теме излегува барем еден раб,

б) двата краја на секој раб се темиња, и

в) секои два раба или немаат заедничка точка или имаат една или две заеднички точки, кои се нивни краеви.

Бројот на рабовите кои излегуваат од едно теме го нарекуваме *кратност* на тоа теме.

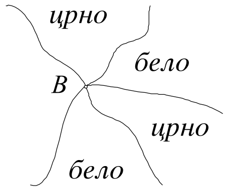
Забелешка 1. Секоја мрежа определува една карта, на потполно аналоген начин како што се определува карта со множество тополошки кружници.

Теорема 2. Нека кратноста на секое теме во мрежата M е поголема од 1. Тогаш, картата определена со оваа мрежа може правилно да се обои во две бои ако и само ако кратноста на секое теме е парен број.

Доказ. Да претпоставиме дека кратноста на секое теме е парна. Ќе се движиме по мрежата, и тоа така што, кога ќе поминеме по некој раб тргнувајќи од теме, никогаш не се враќаме назад, туку продолжуваме по друг раб, кој излегува од тоа теме. Ова е можно бидејќи нема темиња со кратност 1. така ќе продолжиме додека не дојдеме во некое теме A во кое веќе сме биле. Делот од мрежата меѓу првото и второто поминување низ точката A формира крива затворена линија без точки на самопресекување, т.е. тополошка кружница. Ако ја отстраниме оваа тополошка кружница од мрежата ни останува мрежа во која кратноста на секое теме повторно е парна. Постапката ја повторуваме се додека од првобитната мрежа не остане ништо.

Според тоа, првобитната мрежа ја опишуваме како множество тополошки кружници кои опишуваат иста карта како и самата мрежа. Сега тврдењето следува од теорема 1.

Обратно, нека претпоставиме дека во мрежата постои теме B со непарна кратност. Тогаш, делот од мрежата кој се наоѓа во близина на темето B има непарен број области (види цртеж 2) и истиот не може правилно да се обои во две бои (Зошто?) ♦



Црт. 2

3. ТЕОРЕМА НА ОЈЛЕР ЗА ПОЛИЕДРИ

Во овој дел ќе ги разгледаме Ојлеровите карактеристики за рамнина и сфера и теоремата на Ојлер за полиедри. Претходно ќе го воведеме поимот за сврзана мрежа, кој ни е потребен за натамошните разгледувања.

Дефиниција 5. За една мрежа ќе велиме дека е сврзана ако секои две темиња на мрежата можеме да ги поврземе со пат кој е составен од рабови и темиња на мрежата.

Теорема 3. (Ојлерова карактеристика на рамнина). Нека во рамнината е дадена сврзана мрежа M. Ако со t, r и o го означиме бројот на темињата, рабовите и областите на картата определена со оваа мрежа, соодветно, тогаш

$$t - r + o = 2. \tag{1}$$

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по бројот на рабовите r на мрежата. Заради поедноставно означување за бројот на темињата, рабовите и областите на мрежа со i рабови ќе ги користиме ознаките t_i, r_i и o_i, соодветно.

Ако мрежата има еден раб, тогаш $t_1 = 2$, $r_1 = 1$ и $o_1 = 1$, па затоа

$$t_1 - r_1 + o_1 = 2,$$

т.е. формулата (1) важи.

Нека претпоставиме дека формулата (1) важи за мрежа со i рабови, т.е. дека

$$t_i - r_i + o_i = 2. \tag{2}$$

Да разгледаме мрежа со $i+1$ рабови. Ако отстраниме еден раб од мрежата, тогаш добиваме мрежа со i рабови за која формулата (2) е точна. За отстранетиот раб можни се два случаи:

а) Двете темиња на отстранетиот раб припаѓаат на мрежата и тогаш за бројот на темињата, рабовите и областите имаме $t_{i+1} = t_i$, $r_{i+1} = r_i + 1$ и $o_{i+1} = o_i + 1$, соодветно. Сега од (2) следува

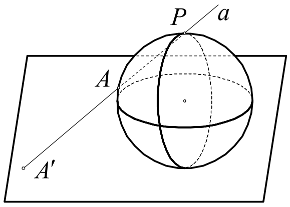
$$t_{i+1} - r_{i+1} + o_{i+1} = t_i - (r_i + 1) + o_i + 1 = t_i - r_i + o_i = 2.$$

б) Едното теме на отстранетиот раб припаѓа на новодобиената мрежа и тогаш за бројот на темињата, рабовите и областите имаме $t_{i+1} = t_i + 1$, $r_{i+1} = r_i + 1$ и $o_{i+1} = o_i$, соодветно. Сега од (2) добиваме

$$t_{i+1} - r_{i+1} + o_{i+1} = t_i + 1 - (r_i + 1) + o_i = t_i - r_i + o_i = 2.$$

Според тоа, формулата (1) е точна и за мрежа со $i+1$ рабови, па сега тврдењето следува од принципот на математичката индукција. ♦

Последица 1. (Ојлерова карактеристика на сфера). За секоја сврзана мрежа M на сферата важи формулата (1), каде со t, r и o се означени броевите на темињата, рабовите и областите на картата определена со мрежата M.



Црт. 3

Доказ. Нека на сферата е дадена сврзана мрежа M. Во една од областите определена со оваа мрежа земаме точка P. Сферата да ја поставиме на рамнина, така што точката P е дијаметрално спротивна на допирната точка меѓу сферата и рамнината (цртеж 3).

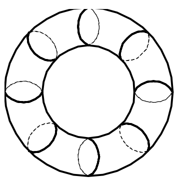
Низ точката P повлекуваме права a која не е паралелна со рамнината. Оваа права ги сече сферата и рамнината во точки A и A'. Јасно, ова пресликување $a: A \to A'$ е биекција меѓу сферата без точката P и рамнината. Притоа мрежата од сферата преминува во мрежа на рамнината, за која броевите t, r и o остануваат непроменети. Сега тврдењето следува од теорема 3. ♦

Последица 2. (Теорема на Ојлер за конвексни полиедри). Нека е даден конвексен полиедар. Со t, r и o да ги означиме броевите на темињата, рабовите и страните на полиедарот. Тогаш, важи формулата (1).

Доказ. Мрежата формирана од темињата и рабовите на полиедарот е сврзана мрежа. Во внатрешноста на полиедарот земаме произволна точка O и околу неа опишуваме сфера со произволен радиус. Аналогно како во доказот на последица 1, со помош на прави низ центарот O, конвексниот полиедар го пресликуваме на сферата. Притоа ова пресликување е биекција, мрежата на полиедарот се пресликува во мрежа на сферата и броевите t, r и o остануваат непроменети. Сега тврдењето следува од последица 1. ♦

Забелешка 2. Формулата $t - r + o = 2$ прв ја докажал Леонард Ојлер, но само за конвексни полиедри. Подоцна оваа формула е повеќе пати воопштувана, се додека францускиот математичар Анри Поенкаре, кон крајот на XIX век, не докажал дека за секоја површина бројот $t - r + o$ е константен. Така, на пример, за торусот, (цртеж 4) важи

$$t - r + o = 0.$$


Црт. 4

Во чест на Леонард Ојлер константата $t - r + o$ е наречена Ојлерова карактеристика за дадена површина.

Пример 1. Фудбалската топка е сошиена од петаголни и шестаголни парчиња кожа и од секое теме излегуваат три раба. Докажете дека бројот на петаголниците е 12 без разлика колкав е бројот на шестаголниците.

Решение. Со p_5 и p_6 да го означиме бројот на петаголниците и шестаголниците, соодветно. Притоа имаме: $o = p_5 + p_6$, $2r = 5p_5 + 6p_6$ и $2r = 3t$. Од овие три равенства добиваме $o = p_5 + p_6$, $r = \frac{1}{2}(5p_5 + 6p_6)$ и $t = \frac{1}{3}(5p_5 + 6p_6)$. Ако замениме во формулата (1) добиваме

$$p_5 + p_6 - \tfrac{1}{2}(5p_5 + 6p_6) + \tfrac{1}{3}(5p_5 + 6p_6) = 2$$

т.е. $p_5 = 12$, што и требаше да се докаже. ♦

Пример 2. Докажете дека за секој конвексен полиедар збирот на триедрите и триаголните страни е поголем или еднаков на 8.

Решение. Со $p_3, p_4, \dots$ да го означиме бројот на страните на полиедарот кои имаат $3, 4, \dots$ рабови, соодветно, а со $t_3, t_4, \dots$ да го означиме бројот на темињата од кои излегуваат $3, 4, \dots$ рабови, соодветно. Притоа важат равенствата

$$o = p_3 + p_4 + p_5 + \dots$$
$$t = t_3 + t_4 + t_5 + \dots$$
$$2r = 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + \dots$$
$$2r = 3t_3 + 4t_4 + 5t_5 + \dots$$

Ако ги собереме последните две равенства добиваме

$$4r = (3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + \dots) + (3t_3 + 4t_4 + 5t_5 + \dots) \tag{3}$$

Ојлеровата формула можеме да ја запишеме во обликот $4r = 4o + 4t - 8$ односно

$$4r = 4(3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + \dots) + 4(3t_3 + 4t_4 + 5t_5 + \dots) - 8. \tag{4}$$

Ако од равенството (3) го одземеме равенството (4) добиваме

$$o = -p_3 + p_5 + 2p_6 + \dots - t_3 + t_5 + 2t_6 + \dots + 8$$

т.е.

$$p_3 + t_3 = 8 + p_5 + 2p_6 + \dots + t_5 + 2t_6 + \dots \geq 8,$$

што и требаше да се докаже. ♦

Пример 3. Во рамнината се дадени 5 точки. Дали овие точки можат да се поврзат, секоја со секоја, со тополошки отсечки кои меѓусебно не се сечат?

Решение. Нека претпоставиме дека петте точки можат да се поврзат на саканиот начин. Тогаш имаме сврзана мрежа од 5 темиња и $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ рабови. Картата определена со оваа мрежа има $o = r - t + 2 = 7$ области. Бидејќи секои две темиња од мрежата се поврзани со раб секоја област на картата е ограничена со 3 раба. Според тоа, за бројот од која следува дека точките не може да се поврзат на саканиот начин. ♦

4. ПРОБЛЕМ НА ПЕТ БОИ

Во овој дел ќе го разгледаме проблемот на пет бои. Претходно ќе ја докажеме следната лема.

Лема 1. Не постои карта во рамнината која содржи пет области така што секои две од нив се соседни.

Доказ. Нека претпоставиме дека постои карта која има пет области такви што секои две од нив се соседни. Во секоја област да избереме по една точка

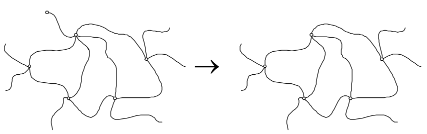
K_1, K_2, K_3, K_4 и K_5. На работ кој е граница меѓу областите во кои се наоѓаат точките K_1 и K_2 избираме произволна точка M и повлекуваме тополошка отсечка која ги поврзува точките K_1 и K_2 и минува низ точката M. Постапката ја повторуваме со останатите девет парови точки и притоа конструкцијата ја реализираме така што деловите од четирите тополошки отсечки во секоја област меѓусебно не се сечат. На тој начин повлекуваме тополошки отсечки со кои секои две од точките K_1, K_2, K_3, K_4 и K_5 се поврзани меѓу себе и отсечките не се сечат. Последното противречи на пример 3, што значи дека не постои карта на која има пет области такви што секои две од нив се соседни. ♦

Забелешка 3. Во следната теорема ќе докажеме дека секоја карта во рамнината, определена со некоја сврзана мрежа може правилно да се обои со пет бои. Претходно да забележиме дека доволно е тврдењето да го докажиме за карта определена со мрежа во која кратноста на секое теме е поголема од 2. Навистина, ако мрежата M со која е определена картата има темиња со кратност 1 или 2, тогаш истата карта ќе биде определена со мрежата M_1 која се добива од мрежата M со следните постапки:

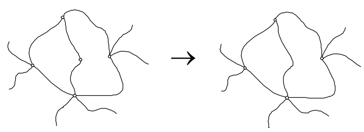
а) се отфрла секое теме со кратност 1, заедно со работ кој излегува од тоа теме (цртеж 5), и

б) наместо два раба кои имаат заедничко теме со кратност 2 се зема еден раб кој се добива со продолжување на разгледуваните два раба и бришење на темето, (цртеж 6),

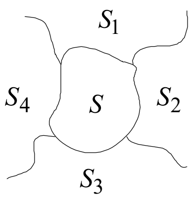
и во која кратноста на секое теме е поголема од 2.



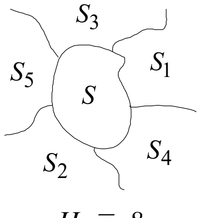
Црт. 5



Црт. 6



Црт. 7



Црт. 8

Теорема 4. Секоја карта во рамнината може правилно да се обои со пет бои.

Доказ. Според забелешка 3 доволно е тврдењето да го докажеме за случај кога кратноста на секое теме е поголема од 2. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по бројот на областите n.

За карти кои имаат 5 или помалку области тврдењето е очигледно.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за карти кои имаат n или помалку области.

Нека R е карта со $n+1$ области. Според задача 3 картата R содржи област S која има помалку од 6 соседни области. Можни се два случаи:

а) областа S има 4 или помалку соседни области, и

б) областа S има 5 соседни области.

Нека областа S има точно 4 соседни области S_1, S_2, S_3 и S_4 (цртеж 7). Ако ја отстраниме границата меѓу областите S и S_1 добиваме карта R' со n области. Според претпоставката картата R' може правилно да се обои со пет бои, при што областите $S \cup S_1$, S_2, S_3 и S_4 на картата R' се обоени со боите 1, 2, 3 и 4, соодветно. Сега картата R ќе биде правилно обоена ако сите области освен S и S_1 ја задржат бојата со која е обоена картата R', областа S_1 остане обоена во бојата 1 и областа S се обои во бојата 5. Аналогно се докажуваат случаите кога S има помалку од 4 соседни области.

Нека областа S има точно 5 соседни области S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5 (цртеж 8). Од лема 1 следува дека барем две од нив не се соседни, на пример S_1 и S_2. Да разгледаме нова карта R' во која областите S, S_1 и S_2 се обединети. Оваа карта има $n-1$ област и истата може правилно да се обои со 5 бои. Сега картата R може правилно да се обои со 5 бои така што секоја област ја задржува својата стара боја, областите S_1 и S_2 ја задржуваат бојата на областа $S_1 \cup S_2 \cup S_3$, што е можно бидејќи S_1 и S_2 не се соседни. Областа S има 5 соседни области од кои две се обоени со иста боја, што значи дека соседните области на S се обоени најмногу со 4 бои. Според тоа, S може да се обои со петтата боја.

Забелешка 4. Во претходната теорема докажавме дека секоја карта на рамнината може правилно да се обои во 5 бои. Доста потежок проблем е: дали 4 бои се доволни за правилно боење на произволна карта во рамнината, поставен од германскиот математичар Мебијус, во 1840 година. Четириесет години подоцна англискиот математичар Кемпе во статијата "Како да се обои карта во четири бои", објавил "решение" на овој проблем, за кое после десет години англискиот математичар Хивуд констатирал дека не е точно.

Меѓутоа Хивуд ја искористил идејата на Кемпе да докаже дека произволна карта во рамнина може правилно да се обои со 5 бои. Проблемот на Мебијус останал отворен се до 1976 година, кога двајца американски математичари во списанието "Bulletin of AMS" објавиле соопштение дека проблемот на 4 бои позитивно го решиле.

5. ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

Задача 1. Во еден двор има три куќи K_1, K_2, K_3 и три бунари B_1, B_2, B_3. Дали може секоја куќа да се поврзе со патека со секој бунар, но така што ниедни две патеки да не се сечат?

Упатство. Постапете слично како во пример 3.

Задача 2. Докажете дека секој полиедар има барем една страна со помалку од 6 рабови.

Упатство. Претпоставете го спротивното, па докажете ги неравенствата $2r \geq 6o$ и $2r \geq 3t$. Потоа докажете дека од последните две неравенства се добива противречност.

Задача 3. Нека во рамнината картата R е определена со сврзана мрежа во која кратноста на секое теме е поголема од 2. Докажете дека оваа карта содржи област која има помалку од 6 соседни области.

Упатство. Постапете слично како во задача 2.