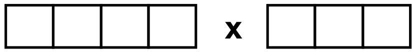
Краткие решения задач олимпиады 5 класса 27 января 2019

Часть А

К каждой задаче необходимо указать ответ.
Решения приводить не требуется.

1. Расположите цифры 2, 7, 1, 2, 0, 1, 9 в клетки так, чтобы произведение получилось максимально возможным:

(*Е.Иванова*)



Ответ. 7210x921 или 9210x721

2. Ростик тренируется играть на барабанах – каждые 10 секунд он ударяет в бочку, каждые 4 секунды – в тарелку, а каждые 7 секунд – в малый барабан. Он начал, ударив в бочку и тарелку, затем, через 3 сек добавил барабан. Он играл 4 минуты. Сколько раз за это время он одновременно ударил в бочку, тарелку и барабан? (*Е.Иванова*)

Ответ. 2 раза.

Решение. Первый раз он ударит во все 3 предмета на 80 с и будет повторять каждые 140 с. Всего в 4 минутах 240 секунды, то есть он ударит второй раз на 80 + 140 = 220 с. Всего 2 раза.

3. Никита заменил в верном примере на сложение одинаковые цифры на одинаковые буквы, а разные цифры на разные буквы и получил ребус: М + А + Т + Е + М + А + Т + И + К + А = ЕЕ. Какую наибольшую цифру может заменять буква Е? (*Н.Михайловский*)

Ответ. 6

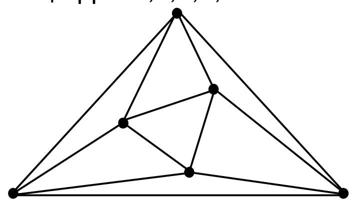
Решение. Сократим Е единиц из обеих частей ребуса. Получим: М + А + Т + М + А + Т + И + К + А = Е0. Наибольшее значение левой части будет, если присваивать чаще встречающимся буквам бо́льшие значения. То есть будет максимально, когда А = 9, М = 8(7), Т = 7(8), И = 6(5), К = 5(6). Тогда сумма=68. Значит, наибольшее значение Е не больше 6. Значение суммы 66 достигается А = 9, М = 8, Т = 7, И =2, К = 1.

4. Ян выписал в ряд без промежутков числа от 1 до 50. Затем нашел пять цифр, наиболее часто встречающихся в этой последовательности, и все такие цифры вычеркнул. Какая цифра в новой последовательности стоит А) на первом месте? Б) на последнем месте? (*по мотивам Сингапурских олимпиад 2015*)

Ответ. А) 6; Б) 0.

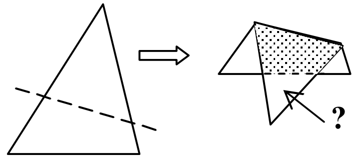
Решение. В каждом десятке каждая цифра единиц встречается по одному разу. Поэтому разница в количестве использованных цифр может быть только из-за цифр десятков. Это 1, 2, 3 и 4. Их больше всего. Кроме того, в последнем десятке есть 5 – это пятая наиболее часто встречающаяся цифра. Значит, после вычеркивания остались только цифры 6,7,8,9,0.

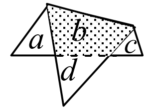
5. Нарисуйте 6 точек и соедините их отрезками так, чтобы в каждой точке пересекалось 4 отрезка и других точек пересечения не было. (*А.Петухов*)



Ответ. Возможный вариант на рисунке.

6. В бумажном треугольнике провели отрезок, делящий площадь треугольника пополам, а затем сложили по этой линии. Оказалось, что площадь «двухслойной части» (серая на рисунке) равна площади «однослойной части» и на 12см^2 меньше площади исходного треугольника. Найдите площадь нижнего маленького треугольника. (*Е.Иванова*)





Ответ. 3 см^2.

Решение 1. Обозначим части a, b, c и d. Из первого условия следует, что $a + b + c = b + d$, или $a + c = d$. Из второго следует, что $b = a + c + d$, то есть $b = 2d$. Также из второго условия получаем $a + c + d = a + 2b + c + d - 12$ (обе части равны b), откуда b = 6. Тогда d = 3.

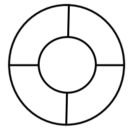
Решение 2. Сгибая треугольник, мы уменьшаем его площадь на площадь двухслойной части. Значит, площадь серой фигуры равна 12. Поскольку треугольник разбили на две одинаковые по площади части, то площадь каждой части равна площади одной и той же серой фигуры + один или два треугольника. То есть площадь нижнего треугольника равна сумме площадей двух других. А в сумме их площади равны площади серой фигуры.

7. Когда в Белграде полдень, на Камчатке 11 часов вечера. В этот же момент в Бостоне 6 ч утра, а в Лос-Анжелесе 3 часа ночи того же дня. 10 января в 8 часов вечера Миша отправил фотографию по e-mail из Бостона в Белград Вове (фотографии доставляются по e-mail почти мгновенно). Через 14 часов Вова отправил ее по e-mail на Камчатку Родиону. На следующий день утром в 8 часов Родион отправил ее в Лос-Анжелес Грише тоже по e-mail. В какое время и какого числа фотография была доставлена Грише? (*О.Парамонова*)

Ответ. 12 января в 12:00 дня (в полдень)

Решение. Вова получил фотографию 11 января в 2 часа ночи, в 16 часов этого же дня он отправил ее Родиону. Родион получил фотографию в 3 часа ночи 12 января, отправил ее Грише 13 января в 08 часов утра, Гриша получил ее в полдень 12 января.

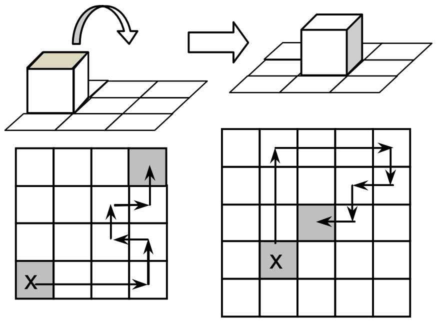
8. У полей ведьминской шляпы 4 сектора. Каждый из них можно покрасить целиком в один из цветов: синий или красный. В магазине представлены все возможные варианты расцветок. Сколько это вариантов? (*О.Парамонова*)



Ответ. 6 вариантов

Решение. Заметим, что при повороте шляпы не получаем новых вариантов раскраски и все зависит только от положения цветов относительно друг друга. Тогда можно выписать только цвета: 1) СССС; 2) КККК; 3) СССК; 4) КККС; 5) ССКК; 6) СКСК.

9. У кубика одна из 6 граней выкрашена в серый цвет. Касаясь бумаги этой гранью, кубик окрашивает бумагу в серый цвет. Сэм перекатывает кубик через ребро на клетчатой плоскости, не попадая дважды в одну и ту же клетку. Нарисуйте маршрут, как получить рисунок на картинке, если изначально кубик стоит окрашенной гранью вниз. Местоположение кубика отмечено крестиком.. (*Е.Иванова*)



Ответ. Один из возможных вариантов указан на рисунке.

10. Игра «лживые шашки» – игроки по очереди выставляют на доску черные или белые шашки. Если игрок ставит белую шашку, он должен сказать правду, если черную – солгать. На доске стоит 1 шашка. Петя поставил еще шашку и сказал: «Теперь на доске черных шашек больше, чем белых». Какого цвета первая шашка? (*Е.Иванова*)

Ответ. Белая

Решение. Заметим, что в любом случае игрок не мог поставить белую шашку. Так как, какая бы шашка на доске до этого ни стояла, поставив белую, нельзя сделать черных больше. Значит, игрок поставил черную шашку. Тогда он должен был солгать. Значит, на доске не могла быть черная шашка, так как тогда утверждение игрока было бы верным.

Часть Б

В этой части кроме ответа требуется привести решение.

1. Два бегуна бегут друг за другом с одинаковой скоростью 150м/мин, на расстоянии 300м друг от друга. По пути им встретилась гора. При подъеме в гору каждый снизил скорость на 50 м/мин, а на спуске затем увеличил на 100 м/мин и дальше побежал с изначальной скоростью. Какое максимальное расстояние могло оказаться между бегунами? (*фольклор*)

Ответ. 400м.

Решение. Пример строится несложно. Докажем, что это максимум. Заметим, что до подножья горы спортсмены добегут с разницей в 2 минуты (300:150). То есть второй повторяет движения первого с запаздыванием в 2 минуты. Рассмотрим такую интерпретацию: пусть оба бегуна находятся на движущемся со скоростью 150м/мин транспортере. Тогда изначально они просто стоят на нем на расстоянии 300м. Потом первый начинает пятиться назад со скоростью 50м/мин, а через некоторое время двигаться вперед тоже со скоростью 50м/мин. Заметим, что теперь абсолютно неважно, в какой момент происходит движение назад и на сколько, так как второй через некоторое время (через 2 минуты) сделает то же самое и «компенсирует» изменение. Поэтому увеличение расстояния между бегунами зависит исключительно от того, как долго первый сможет двигаться вперед, а второй еще этого не делает. Поскольку запаздывание во времени равно 2 минуты, то максимальное время, когда первый увеличивает расстояние – это 2 минуты. И за это время он сможет увеличить расстояние максимум на 100м.

2. Имеется цепь из 13 звеньев (каждое массой 1г), пронумерованных по порядку: 1, 2, 3, ..., 13. Какое звено надо расковать, чтобы с помощью образовавшихся частей (в том числе и раскованного звена) на чашечных весах одним взвешиванием можно было отмерить любые массы в 1г, 2г, 3г,... , 13г? Части цепи можно класть на обе чаши весов. После указания выбранного звена нужно указать, как получаются требуемые взвешивания. (*Д.Оскорбин*)

Ответ. Четвертое (или десятое – четвертое с конца).

Решение. Чтобы отмерить 2г должны быть два последовательных по массе куска или два куска отличающихся на 2г. Вариант расковать четвертое с начала или четвертое с конца кольцо вполне подходит: Тогда получаются три части массами 1 г, 3 г, 9 г и все массы от 1 до 13 г можно будет отмерить (веса со знаком плюс кладем на одну чашу, со знаком минус - на другую):

1=+1; 2=+3-2; 3=+3; 4=+1+3; 5=+9-3-1; 6=+9-3; 7=+1+9-3; 8=+9-1; 9=+9; 10=+1+9; 11=+3+9-1; 12=+3+9; 13=+1+3+9.

Замечание. Можно попытаться рассмотреть другой вариант – каких-то кусков, отличающихся на 2г. В данном случае это 5г, 7г и 1г – само кольцо. К сожалению этот вариант не дает получить массы 9г и 10г.

3. У бабушки есть банки емкостью 7, 8 и 20 литров. Две меньшие банки наполнены доверху морсом, а большая – пустая. Можно ли разделить морс поровну на три банки? Никаких дополнительных приспособлений нет, делений на банках тоже нет. (*О.Парамонова*)

Ответ. Нельзя.

Решение. При переливании мы можем либо из какой-то банки вылить всё, либо долить доверху какую-то банку. То есть после каждого хода должна появиться либо полностью пустая банка, либо полностью заполненная. Предположим требуемое в условии можно. Тогда в трех банках должно быть по 5л морса. Посмотрим, каким было последнее переливание – как написано выше, должна была появиться либо полностью пустая банка, либо полностью заполненная, а такого нет. Противоречие.

4. Гоша считает месяц «удачным», если в нем ровно 4 понедельника и ровно 4 вторника. Однажды Гоша сказал: «Текущий месяц удачный, кстати, прошлый месяц тоже был удачным, да и следующий месяц будет удачным». В каком месяце Гоша мог такое сказать? (*Н.Михайловский*)

Ответ. В марте

Решение. Посмотрим, сколько может быть дней в указанных Гошей трёх месяцах. По условию в них ровно 3x4 = 12 понедельников и 12 вторников, то не меньше 11 полных недель и еще 2 дней. Всего 79 дней. При этом первый месяц мог начаться в ср, чт, пт, сб или вс, а последний закончится не позже вс. Итого максимум 79 + 5 + 5 = 89 дней. Известно, что в месяце бывает 28, 29, 30, 31. Раз сумма 89, то хотя бы в одном из месяцев количество дней должно быть меньше 30, то есть это февраль. Рассмотрим тройки месяцев, в которые входит февраль: дек-янв-фев (90 или 91 день), янв-фев-март (90 или 91 день), фев-март-апр (89 или 90 дней). Подходит только один случай, когда Гоша сказал это в марте (причем невисокосного года).

5. В футбол за победу начисляется 3 очка, за ничью – 1, за проигрыш дают 0 очков. В круговом футбольном турнире из 5 команд (каждая сыграла с каждой по 1 разу) «Метеор» набрал 4 очка, при этом в течение турнира он забил 5 голов, а пропустил всего 2. Найдите счета всех матчей, которые провел «Метеор». (*Н.Михайловский*)

Ответ. 0:1; 0:1; 5:0; 0:0

Решение. В турнире каждая команда сыграла по 4 матча. Как можно набрать 4 очка за 4 игры? Либо все игры свести вничью, то есть 4 = 1 + 1 + 1 + 1, либо одну выиграть, одну свести вничью и еще две проиграть, то есть 4 = 3 + 1 + 0 + 0. Если все встречи он провести вничью, то всего забитых и пропущенных голов должно быть поровну в каждом матче, и, соответственно, всего за турнир, но «Метеор» забил 5 голов, 2 пропустил, поэтому все игры вничью он сыграть не мог. Значит, он одну встречу выиграл, две проиграл и еще была одна ничья. Для того, чтобы проиграть, надо пропустить хотя бы один мяч, значит, в каждой из двух проигранных встреч он пропускал хотя бы по одному голу, но всего за 4 встречи он пропустил всего лишь 2 мяча, значит, каждая из проигранных встреч закончилась проигрышем «Метеора» со счетом 0:1, и все пропущенные мячи команда получила в проигранных встречах. Тогда ничья была нулевой, а единственную победу «Метеор» одержал со счетом 5:0.

Критерии:

Каждый правильный ответ в части А стоит 2 балла (если пунктов несколько, то каждый пункт стоит 2 балла).

В части Б оценивается решение – от 0 до 5 баллов.

Творческая Лаборатория «Дважды Два»

Творческая лаборатория «2×2» – содружество преподавателей, студентов, аспирантов и просто математиков, обеспокоенных состоянием математического образования в России. Мы хотим, чтобы наши дети росли любознательными, заинтересованными, грамотными, и стараемся по мере сил этому содействовать. За много лет работы мы создали систему обучения детей математике с 1 по 11 класс. Она включает в себя матклассы, олимпиады различного уровня, кружки в разных точках Москвы.

Кроме олимпиад мы проводим выездные математические школы для всех классов. Школы проводятся в период каникул, а также майских праздников. Кроме того мы проводим мини-школы или школы выходного дня. Ближайшая такая школа планируется ***с 22 февраля***.

Летняя школа в Подмосковье (2 смены) – ***с 1 по 21 июня*** – 1-6 класс.

Летняя школа в Болгарии (3 смены) – ***с 24 июня по 2 августа*** – 1-9 класс.

Летняя школа в Подмосковье – ***с 4 по 28 августа*** – для 5–10 классов.

Большое внимание мы уделяем также нашим математическим классам на базе разных школ Москвы. В прошлом наши ученики завоевали более десятка золотых медалях на международных олимпиадах по математике и физике, а также разнообразные призы и награды на других соревнованиях России и других стран. В частности в 2015 и 2016 годах наших ученики в составе сборной России на международной Олимпиаде по математике завоевали две серебряные и две золотые медали. В 2018 году – золотую медаль на олимпиаде по астрономии.

Более подробно со всеми направлениями нашей работы в можете познакомиться на сайте.

Олимпиада 5 класса

Письменный тур.

Результаты письменного тура будут опубликованы ***после 15 февраля*** на нашем сайте. http://mathbaby.ru

Устный тур.

Устный тур пройдёт 17 марта. Место пока определяется. На него будут приглашены участники, показавшие высокий результат на письменном туре.