Р. Малчески, А. Малчески, Скопје

ПРЕСЛИКУВАЊА ВО РАМНИНА ПРЕКУ КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ IV

8.5. Нека O е центар на инверзијата (1), A е произволна точка од рамнината, различна од O, и $\mathrm{I}(A)=A'$. Афиксите на точките O,A и A' нека се a,z и z^*, соодветно. Притоа важи

$$z^*-a=a+\frac{m}{\overline{z}-\overline{a}}-a=\frac{m}{|z-a|^2}(z-a).$$

Од последното равенство следува дека

$$\arg(z^*-a)=\arg(z-a) \text{ и}$$

$$|z^*-a|\cdot|z-a|=m.$$

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема. Секоја точка A различна од центарот O на инверзијата (1), со инверзијата се пресликува во точка A' која лежи на полуправата OA и таква што

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=m.\ \blacklozenge \qquad (2)$$

8.6. Теорема. Секоја внатрешна точка на кружницата на инверзијата се пресликува во надворешна точка, и обратно.

Доказ. Ако A е внатрершна точка на кружницата на инверзија $K_0(O,\sqrt{m})$ и $\mathrm{I}(A)=A'$, тогаш $\overline{OA}<\sqrt{m}$ и од (2) следува дека $\overline{OA'}>\sqrt{m}$, што значи дека A' е надворешна точка за K_0.

Обратното тврдење се докажува аналогно. ♦

8.7. Да видиме како ќе ја конструираме сликата A' на произволна точка A при инверзијата (1). Нека A, со афикс z_0, е внатрешна точка на кружницата на инверзија $K_0(O,\sqrt{m})$. Тогаш,

$$|z_0-a|^2<m.$$

Равенката на правата OA е

$$z-a=\frac{z_0-a}{\overline{z_0}-\overline{a}}(\overline{z}-\overline{a}).$$

Во точката A повлекуваме права (q) нормална на правата OA. Нејзината равенка е

$$z-z_0=-\frac{z_0-a}{\overline{z_0}-\overline{a}}(\overline{z}-\overline{z_0}).$$

Пресечните точки на правата (q) и кружницата $K_0(O,\sqrt{m})$ ги наоѓаме како решенија на системот

$$\begin{cases} z-z_0=-\frac{z_0-a}{\overline{z_0}-\overline{a}}(\overline{z}-\overline{z_0}) \\ |z-a|=\sqrt{m} \end{cases}$$

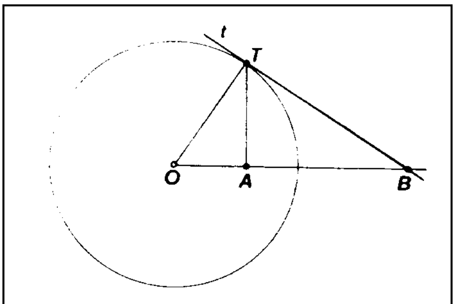
Една од нив е точката T чиј афикс е

$$z_1=z_0+i\frac{\sqrt{m-|z_0-a|^2}}{|z_0-a|}(z_0-a).$$

Во точката T повлекуваме тангента (t) на кружницата $K_0(O,\sqrt{m})$, чија равенка гласи

$$z-z_1=-\frac{z_1-a}{\overline{z_1}-\overline{a}}(\overline{z}-\overline{z_1}).$$

Наоѓаме пресек на правите (t) и OA и ја добиваме точката B чиј афикс е



Црт. 8

$$z=a+\frac{m}{\overline{z_0}-\overline{a}}.$$

Значи, $\mathrm{I}(A)=B=A'$.

Нека A е надворешна точка на кружницата $K_0(O,\sqrt{m})$. Според теорема 8.4 имаме $\mathrm{I}^2=E$, од што следува следната конструкција на точката $\mathrm{I}(A)=A'$. Низ точката A ја повлекуваме тангентата (t) на K_0 и ортогоналната проекција од допирната точка T на (t) и K_0 врз правата OA ќе биде точката $\mathrm{I}(A)=A'$.

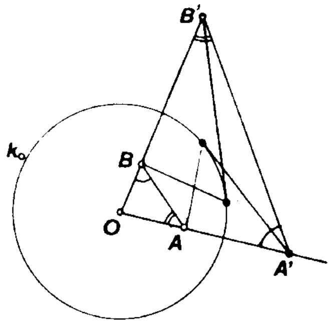
8.8. Нека точките A и B имаат афикси c и b. Афиксите на нивните слики при инверзијата (1) се $c'=a+\frac{m}{\overline{c}-\overline{a}}$ и $b'=a+\frac{m}{\overline{b}-\overline{a}}$, соодветно. Комплексните агли коефициенти на правите OA, OB, AB, OA', OB' и $A'B'$ се

$$\eta_1 = \frac{c-a}{\bar{c}-\bar{a}}, \eta_2 = \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}, \eta_3 = \frac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}}, \eta_4 = \eta_1,$$

$$\eta_5 = \eta_2, \eta_6 = \frac{(b-a)(c-a)(\bar{b}-\bar{c})}{(\bar{b}-\bar{a})(\bar{c}-\bar{a})(b-c)}$$

соодветно. Од $\frac{\eta_2}{\eta_3} = \frac{\eta_6}{\eta_4}$ и $\frac{\eta_1}{\eta_3} = \frac{\eta_6}{\eta_5}$ и од теорема 1.7 следува дека (црт. 9):

$$\angle OBA = \angle B'A'O \text{ и } \angle OAB = \angle A'B'O .$$



црт. 9

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема. Нека O е центар на инверзијата (1), A и B се произволни точки и A' и B' се нивни слики при инверзијата (1). Тогаш,

$$\angle OBA = \angle B'A'O \text{ и } \angle OAB = \angle A'B'O . \blacklozenge$$

8.9. Правата (p) чија автокоњугирана равенка е

$$Az + B\bar{z} + C = 0, C \in \mathbf{R}, B = \bar{A}$$

со инверзијата (1) се пресликува во крива чија равенка е

$$Aa + B\bar{a} + C + \frac{Am}{\bar{w}-\bar{a}} + \frac{Bm}{w-a} = 0 . \qquad (3)$$

Можни се два случаи:

i) Ако $Aa + B\bar{a} + C = 0$, т.е. правата минува низ центарот на инверзијата, тогаш од (3) следува дека сликата на (p) е права чија равенка е

$$Aw + B\bar{w} + C = 0, C \in \mathbf{R}, B = \bar{A},$$

а тоа е правата (p).

ii) Ако $Aa + B\bar{a} + C \neq 0$, т.е. правата не минува низ центарот на инверзијата, тогаш од (3) следува дека сликата на (p) е кружница чија равенка е

$$w\bar{w} + \bar{A}_1 w + A_1 \bar{w} + B_1 = 0 ,$$

каде $A_1 = \frac{Bm}{Aa+B\bar{a}+C} - a, B_1 = a\bar{a} - \frac{Aam+Bm\bar{a}}{Aa+B\bar{a}+C}$.

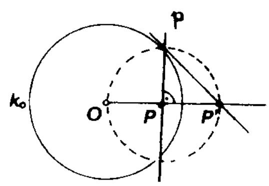
Со непосредна проверка добиваме дека $a\bar{a} + \bar{A}_1 a + A_1 \bar{a} + B_1 = 0$, што значи дека сликата на правата (p) која не минува низ центарот на инверзијата (1) е кружница која минува низ центарот на инверзјата.

Од досега изнесеното непосредно следува точноста на следната теорема.

Теорема. Секоја права што минува низ центарот O на инверзијата I се пресликува во самата себе, а секоја права која не минува низ O се пресликува во кружница која што минува низ O. ♦

8.10. Ако правата (p) не минува низ центарот на инверзијата O, тогаш од доказот на теорема 8.9 следува дека центарот O_1 на кружницата во која се пресликува има афикс

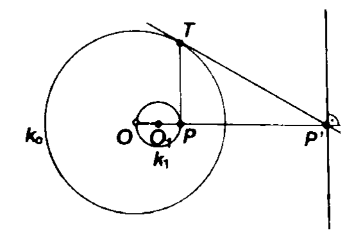
$$z_1 = -A_1 = a - \frac{Bm}{Aa+B\bar{a}+C} .$$



Црт. 10

Нека P е ортогоналната проекција на центарот O врз правата (p). Според 2.3 афиксот на точката P е $z_0 = \frac{Aa-B\bar{a}-C}{2A}$, па затоа афиксот на нејзината слика $P' = \mathrm{I}(P)$ ќе биде $z^* = a - \frac{2Bm}{Aa+B\bar{a}+C}$. Од $\frac{z^*+a}{2} = a - \frac{Bm}{Aa+B\bar{a}+C} = z_1$ заклучуваме дека O_1 е средина на OP'.

Од досега изнесеното ја имаме следната конструкција на кружницата $\mathrm{I}(p)$ кога правата (p) не минува низ центарот O на инверзијата I. Ја определуваме ортогоналната проекција P на центарот на инверзијата O врз правата (p) и наоѓаме $P' = \mathrm{I}(P)$, (црт. 10 и 11). Конструираме кружница со дијаметар OP', со што ја добиваме кружницата $\mathrm{I}(p)$.



Црт. 11

8.11. Пример. Дадени се правите (p) и (q). Дали постои инверзија I таква што $\mathrm{I}(p)=q$?

Решение. Според теорема 8.9 таква инверзија постои ако и само ако правите (p) и (q) се совпаѓаат. Притоа, за секоја инверзија чиј центар припаѓа на (p) и произволен коефициент важи $\mathrm{I}(p)=q$. ♦

8.12. Теорема. Ако кружницата K_1 минува низ центарот O на инверзијата I, тогаш $\mathrm{I}(K_1)$ е права што не минува низ O.

Доказ. Непосредно следува од теоремите 8.4 и 8.9. ♦

8.13. Пример. Дадени се права (p) и кружница $K_1(O_1,R)$. Дали постои инверзија I таква што $\mathrm{I}(p)=K_1$?

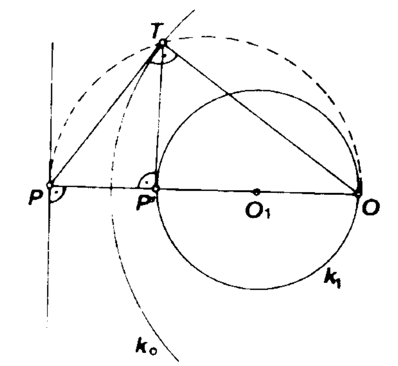
Решение. Според теорема 8.9 ако бараната инверзија I постои, тогаш нејзиниот центар O лежи на кружницата $K_1(O_1,R)$ и правата OO_1 е нормална на правата (p).

Можни се следните три случаи.

i) Правата (p) и кружницата K_1 се сечат во точките M и N. Од центарот O_1 на кружницата K_1 повлекуваме права (q) нормална на правата (p) и во пресекот на (q) и K_1 ги наоѓаме точките O и O'. Од дискусијата во 8.10 следува дека инверзиите I и I_1 определени со кружниците $K(O,\overline{OM})$ и $K'(O',\overline{O'M})$ ги задоволуваат условите на задачата.

ii) Правата (p) и кружницата K_1 се допираат во точката M. Од центарот O_1 на кружницата K_1 повлекуваме права (q) нормална на правата (p) и во пресекот на (q) и K_1 ја наоѓаме другата пресечна точка O. Од дискусијата во 8.10 следува дека инверзијата I определена со кружницата $K(O,\overline{OM})$ ги задоволува условите на задачата.

iii) Правата (p) и кружницата K_1 немаат заеднички точки. Од центарот O_1 на кружницата K_1 повлекуваме права (q) нормална на правата (p) и во пресекот на (q) и (p) ја наоѓаме точката P, а во пресекот на (q) и K_1 ги наоѓаме точките O и P', така што P' е меѓу O_1 и P, (црт. 12). Над OP, како над дијаметар конструираме кружница, во P' повлекуваме права нормална на OP и во нивниот пресек наоѓаме точка T. Од дискусијата во 8.10 следува дека инверзијата I определена со кружницата



Црт. 12

$K(O,\overline{OT})$ ги задоволува условите на задачата. ♦

8.14. Останува да видиме во што ќе се пресликува кружницата $K_1(O_1,R)$ при инверзија I ако K_1 не минува низ центарот O на I.

Нека е дадена кружницата K_1: $|z-b|=R$, која не минува низ центарот на инверзијата (1), т.е. $|a-b|\neq R$. Ако во равенката на кружницата K_1 замениме $z=a+\frac{m}{\overline{w}-\overline{a}}$ после еквивалентни трансформации добиваме дека кружницата K_1 се пресликува во кружница $\mathrm{I}(K_1)$ чија равенка е $w\overline{w}+\overline{A_1}w+A_1\overline{w}+B_1=0$, каде

$$A_1=\frac{m(b-a)}{R^2-|b-a|^2}-a,$$

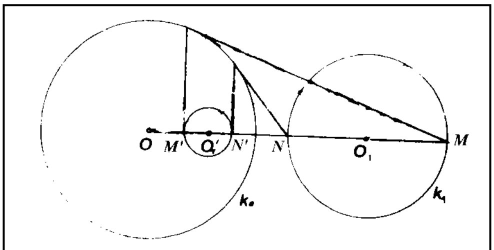
$$B_1=|a|^2-\frac{m^2+ma(\overline{b}-\overline{a})+m\overline{a}(b-a)}{R^2-|b-a|^2}$$

Со непосредна проверка добиваме дека $a\overline{a}+\overline{A_1}a+A_1\overline{a}+B_1\neq 0$, од што следува точноста на следната теорема.

Теорема. Ако кружницата K_1 не минува низ центарот O на инверзијата I, тогаш $\mathrm{I}(K_1)$ е кружница која што не минува низ O. ♦

8.15. Ако кружницата K_1 не минува низ центарот на инверзијата O, тогаш од доказот на теорема 8.14 следува дека центарот $O_1^{'}$ на кружницата $\mathrm{I}(K_1)$ има афикс $z_1=-A_1=a-\frac{m(b-a)}{R^2-|b-a|^2}$. За афиксите z_1, a и b на точките $O_1^{'}, O$ и O_1 важи $\frac{z_1-a}{b-a}=\frac{m}{|b-a|^2-R^2}\in\mathbf{R}$, што според последица 1.4 значи дека тие се колинеарни. Но, правата OO_1 е фиксна за инверзијата I, па затоа од дискусијата во 8.5 заклучуваме дека дијаметарот на K_1 кој лежи на оваа права се пресликува во дијаметар на $\mathrm{I}(K_1)$ кој лежи на OO_1.

Од досега изнесеното следува следната конструкција на кружницата $\mathrm{I}(K_1)$ кога кружницата K_1 не минува низ центарот O на инверзијата I. Ја повлекуваме правата OO_1, ги определуваме пресечните точки M,N на K_1 и OO_1 и наоѓаме $M'=\mathrm{I}(M)$ и $N'=\mathrm{I}(N)$. Конструираме кружница над $M'N'$ како над дијаметар, со што ја



Црт. 13

добиваме кружницата $\mathrm{I}(K_1)$, (црт. 13).

8.16. Пример. Дадени се кружниците $K_1(O_1,R)$ и $K_2(O_2,R)$. Дали постои инверзија I таква што $\mathrm{I}(K_1)=K_2$?

Решение. Нека равенките на кружниците K_1 и K_2 се $|z-c_1|=R_1$ и $|z-c_2|=R_2$, соодветно. Ќе разгледаме пет случаи.

i) Ако $c_1=c_2$, т.е. кружниците се концентрични, тогаш пресликувањето $\mathrm{I}(z)=c_1+\frac{R_1R_2}{\overline{z}-\overline{c_1}}$ е инверзија таква што $\mathrm{I}(K_1)=K_2$. Јасно, c_1 е центарот на инверзијата, R_1R_2 е коефициентот на инверзијата. Кружницата на инверзија можеме да ја конструираме ако низ центарот повлечеме произволна полуправа и искористиме дека пресечните точки со кружниците K_1 и K_2 се инверзибилни.

ii) Ако

$c_1\neq c_2$, $R_1\neq R_2$ и $|c_1-c_2|\neq|R_1-R_2|$

тогаш пресликувањето

$$\mathrm{I}(z)=\frac{c_1R_2-c_2R_1}{R_2-R_1}+\frac{\frac{R_1R_2|(R_2-R_1)^2-|c_1-c_2|^2|}{(R_2-R_1)^2}}{\overline{z}-\frac{\overline{c_1}R_2-\overline{c_2}R_1}{R_2-R_1}}$$

е инверзија таква што $\mathrm{I}(K_1)=K_2$. Забележуваме дека центарот на инверзијата се совпаѓа со надворешниот центар на хомотетија, точка 6.6, кој можеме да го конструираме на начин опишан во забелешка 6.7. За да ја конструираме кружницата на инверзија потребно е да постапиме како во пример 8.13.

iii) Ако

$c_1\neq c_2$, $R_1\neq R_2$ и $|c_1-c_2|=|R_1-R_2|$

тогаш пресликувањето

$$\mathrm{I}(z) = \frac{c_1R_2+c_2R_1}{R_2+R_1} + \frac{\frac{R_1R_2|(R_2+R_1)^2-|c_1-c_2|^2|}{(R_2+R_1)^2}}{\bar{z}-\frac{\bar{c}_1R_2+\bar{c}_2R_1}{R_2+R_1}}$$

е инверзија таква што $\mathrm{I}(K_1)=K_2$. Забележуваме дека центарот на инверзијата се совпаѓа со внатрешниот центар на хомотетија, точка 6.6, кој можеме да го конструираме на начин опишан во забелешка 6.7. За да ја конструираме кружницата на инверзија потребно е да постапиме како во пример 8.13.

iv) Ако

$c_1 \neq c_2$, $R_1 = R_2 = R$ и $|c_1 - c_2| < 2R$

тогаш пресликувањето

$$\mathrm{I}(z) = \frac{c_1+c_2}{2} + \frac{R^2 - \frac{|c_1-c_2|^2|}{4}}{\bar{z}-\frac{\bar{c}_1+\bar{c}_2}{2}}$$

е инверзија таква што $\mathrm{I}(K_1)=K_2$. Забележуваме дека центарот на инверзијата е средина на отсечката O_1O_2, а пресечните точки на кружниците K_1 и K_2 се неподвижни, што значи повторно можеме да ја конструираме кружницата на инверзија.

iv) Ако

$c_1 \neq c_2$, $R_1 = R_2 = R$ и $|c_1 - c_2| > 2R$

тогаш од теорема 8.4 следува дека не постои инверзија со саканото својство. ♦

8.17. Од тоа што инверзијата е биекција следува точноста на следната теорема.

Теорема. Ако две прави, односно права и кружница, односно две кружници немаат заеднички точки или се допираат или се сечат во две точки, тогаш и нивните слики при инверзија I немаат заеднички точки или се допираат или се сечат во две точки, соодветно. ♦

8.18. Нека правата (p) и кружницата K се сечат во точките M и N. Ако во точката M повлечеме тангента (t) на кружницата K и со α го означиме помалиот агол меѓу правите (p) и (t), тогаш ќе велиме дека кружницата K и правата (p) **се сечат под агол** α.

Нека кружниците K и K^* се сечат во точките M и N. Ако во точката M повлечеме тангенти (t_1) и (t_2) на кружниците K и K^* и со α го означиме помалиот агол меѓу правите (t_1) и (t_2) тогаш ќе велиме дека кружниците K и K^* **се сечат под агол** α.

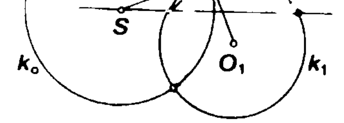
За кружницата K ќе велиме дека **ортогонално ја сече** кружницата K^* ако K и K^* се сечат под агол од 90^0.

Во теорема 8.2 докажавме дека неподвижни точки при инверзијата I со кружница K_0 се само точките од K_0, што значи дека кружницата K_0 е точкасто неподвижна за I. Од теорема 8.8 следува дека не постои точкасто неподвижна права за I, но секоја права која минува низ центарот на инверзијата е неподвижна за I. Се поставува прашање дали постојат и други кружници, различни од K_0, кои се неподвижни при инверзијата I.

Од теорема 8.6 следува дека ако таква кружница $K_1: |z-b| = R$ постои, тогаш таа мора да ја сече кружницата на инверзија K_0, па затоа таа ќе има две неподвижни точки. Едната од овие точки да ја означиме со T и нека нејзиниот афикс е z_1 (црт. 14). Сега, од доказот на теорема 8.14 следува дека $K_1: |z-b| = R$ е неподвижна за инверзијата (1) ако и само ако $b = a - \frac{m(b-a)}{R^2-|b-a|^2}$, односно ако и само ако $m + R^2 = |b-a|^2$. Последното равенство е еквивалентно на равенството $\frac{z_1-a}{\bar{z}_1-\bar{a}} = -\frac{z_1-b}{\bar{z}_1-\bar{b}}$, па затоа K_1 е неподвижна за инверзијата (1) ако и само ако тангентите на K_1 и K_0 повлечени во точката T се заемно нормални.

Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема. Кружницата K_1, различна од K_0 е неподвижна за инверзијата I ако и само ако K_1 ортогонално ја сече K_0. ♦



Црт. 14

8.19. Теорема. Агол меѓу две прави, меѓу права и кружница или меѓу две кружници се запазува при секоја инверзија.

Доказ. Нека инверзијата е дадена со (1) и нека (p) и (q) се две прави чии автокоњугирани равенки се

$$Az+B\overline{z}+C=0,\ B=\overline{A},\ C\in\mathbf{R} \text{ и}$$

$$A_1z+B_1\overline{z}+C_1=0,\ B_1=\overline{A_1},\ C_1\in\mathbf{R}$$

соодветно. Можни се следните случаи.

i) Правите (p) и (q) минуваат низ центарот на инверзијата. Од доказот на теорема 8.9 следува дека (p) и (q) се неподвижни, па затоа аголот меѓу нив се запазува.

ii) Една од правите, на пример (p), минува низ центарот на инверзијата, а другата, во случајот (q), не минува низ центарот на инверзијата. Од доказот на теортема 8.9 следува дека правата (p) е неподвижна, а правата (q) се пресликува во кружница

$$\mathrm{I}(q): \left| z-a+\frac{B_1 m}{A_1a+B_1\overline{a}+C_1}\right| = \frac{m|A_1|}{|A_1a+B_1\overline{a}+C_1|}.$$

Притоа правата (p) и кружницата $\mathrm{I}(q)$ се сечат во центарот на инверзијата чиј афикс е a. Равенката на тангентата (q_1) на кружницата $\mathrm{I}(q)$ повлечена во точката a е $A_1z+B_1\overline{z}+C_1-aA_1-\overline{a}B_1=0$. Непосредно се проверува дека за комплексните аглови коефициенти η_1,η_2,η_3 на правите (p), (q), (q_1) важи $\frac{\eta_1}{\eta_2}=\frac{\eta_1}{\eta_3}$. Сега тврдењето на теоремата следува од теорема 1.7.

iii) Правите (p) и (q) не минуваат низ центарот на инверзијата. Од доказот на теорема 8.9 следува дека сликите на правите (p) и (q) се кружници чии равенки се $\left| z-a+\frac{Bm}{Aa+B\overline{a}+C}\right| = \frac{m|A|}{|Aa+B\overline{a}+C|}$ и $\left| z-a+\frac{B_1 m}{A_1a+B_1\overline{a}+C_1}\right| = \frac{m|A_1|}{|A_1a+B_1\overline{a}+C_1|}$, и кружниците $\mathrm{I}(p)$ и $\mathrm{I}(q)$ се сечат во центарот на инверзијата чиј афикс е a. Равенките на тангентите (p_1) и (q_1) на кружниците $\mathrm{I}(p)$ и $\mathrm{I}(q)$ повлечена во точката a се

$$Az+B\overline{z}+C-aA-\overline{a}B=0 \text{ и}$$

$$A_1z+B_1\overline{z}+C_1-aA_1-\overline{a}B_1=0,$$

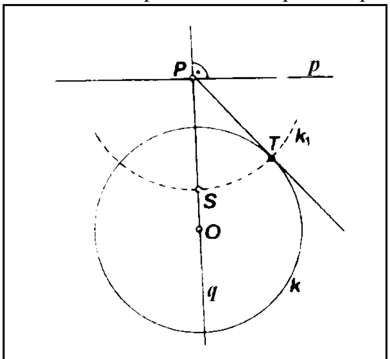
соодветно. Непосредно се проверува дека за комплексните аглови коефициенти $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ на правите (p), (q), (p_1), (q_1) важи $\frac{\eta_1}{\eta_2}=\frac{\eta_3}{\eta_4}$. Сега тврдењето на теоремата следува од теорема 1.7.

Останатиот дел од теоремата се докажува аналогно, при што покрај теорема 8.9 се користат и теоремите 8.12 и 8.14. ♦

8.20. Пример. Нека правата (p) и кружницата $K(O,R)$ немаат заеднички точки. Докажете дека постои инверзија I таква што $\mathrm{I}(p)$ и $\mathrm{I}(K)$ се две концентрични кружници.

Решение. Низ центарот O на кружницата K повлекуваме права (q) нормална на правата (p) и нека $P=(p)\cap(q)$. Нека T е произволна точка од K, која не припаѓа на (q), и S е една од пресечните точки на кружницата $K_1(P,\overline{PT})$ со правата (q).

Земаме инверзија I со центар во S и произволен коефициент. Според теоремите



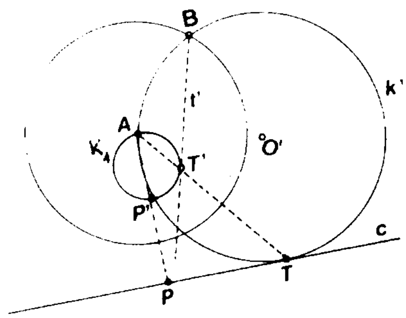
Црт. 15

8.9 и 8.14 сликите $\mathrm{I}(p)$ и $\mathrm{I}(K)$ се кружници. Да ги определиме нивните центри.

Правата (p) ортогонално ги сече правата (q) и кружницата K_1, па од теорема 8.19 следува дека $\mathrm{I}(p)$ ортогонално ги сече $\mathrm{I}(q)$ и $\mathrm{I}(K_1)$. Од теорема 8.9 следува дека $\mathrm{I}(q)=q$, а од теорема 8.12 следува дека $\mathrm{I}(K_1)$ е права. Бидејќи правите (q) и $\mathrm{I}(K_1)$ ортогонално ја сечат кружницата $\mathrm{I}(p)$ нејзиниот центар O'' се наоѓа во пресекот на овие прави. Значи, $O''=(q)\cap \mathrm{I}(K_1)$.

Кружницата K ортогонално ги сече правата (q) и кружницата K_1, па од теорема 8.19 следува дека $\mathrm{I}(K)$ ортогонално ги сече $\mathrm{I}(q)$ и $\mathrm{I}(K_1)$, што значи дека $\mathrm{I}(K)$ ортогонално ги сече (q) и $\mathrm{I}(K_1)$. Според тоа, за центарот O' на кружницата $\mathrm{I}(K)$ важи $O'=(q)\cap \mathrm{I}(K_1)$.

Конечно, $O'\equiv O''$, што значи дека $\mathrm{I}(p)$ и $\mathrm{I}(K)$ се две концентрични кружници. ♦



Црт. 16

8.21. Пример. Следната задача претходно го решивме со помош на хомотетија, пример 7.18. Овде истата задача ќе ја решиме со помош на инверзија.

Пример. Да се конструира кружница, којашто минува низ две дадени точки и допира дадена права.

Решение. Нека се дадени точкте A и B и правата c. Претпоставуваме дека точките A и B лежат во иста полурамнина во однос на правата c и дека правата AB не е паралелна со правата c.

Нека I е инверзија со центар во A и коефициент $\overline{AB}^2$. Тогаш, $\mathrm{I}(B)=B$ и $\mathrm{I}(c)$ е кружница K_1 која што минува низ точката A. Бараната кружница K минува низ точката A, па затоа $\mathrm{I}(K)$ ќе биде права која минува низ точката B и ја допира кружницата K_1, т.е. тоа ќе биде тангентата на кружницата K_1 повлечена од точката B. Од досега изнесеното ја имаме следната конструкција (црт. 16).

- Избираме инверзија I со центар во A и коефициент $\overline{AB}^2$.
- Конструираме кружница $K_1=\mathrm{I}(c)$
- Од точката B повлекуваме тангенти (t') и (t'') на кружницата K_1.
- Бараните кружници се кружниците $K'=\mathrm{I}(t')$ и $K''=\mathrm{I}(t'')$. ♦

Литература

1. **Volenc, V.:** *Analitička geometrija u kompleksnim koordinatima* I, II, III, Matematičko-fizički list, 186, 187,188, Zagreb, 1996/97
2. **Караматa, Ј.:** *Комплексан број, са применом на елементарну геометрију,* Научна књига, Београд, 1950
3. **Моденов, П.Ц.:** *Задачи по геометрии,* Наука, Москва, 1979
4. **Самарџиски, А.:** *Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј,* ПМФ, Скопје, 1988
5. **Тонов, И.К.; Сидеров, П.Н.:** *Приложение на комплексните числа в геометриÔта*, СофиÔ, 1981