Горан П. Трајковски

Една задача на Ојлер и проблемот на Каталан

Во 1752 година швајцарскиот математичар Леонард Ојлер ($1707-1783$) ја поставил следната задача во врска со триангулацијата на конвексен многуаголник:

На колку различни начини еден конвексен n -аголник може да се подели на триаголници со помош на неговите дијагонали, така што дијагоналите да не се сечат?

(За триангулацијата на конвексен многуаголник потсетете се на написот "Многуаголник во квадратна мрежа" во Сигма бр.29)

Во 1751 година, пак, францускиот математичар Каталан, поставил задача во врска со организацијата на пресметувањето на производ на неколку броја:

На колку различни начини може да се пресмета производот на n множители така што во секој чекор се множат точно по два броја и така добиениот меѓупроизвод се зема за нов множител во наредниот чекор на пресметувањето?

На прв поглед задачите немаат ништо заедничко. Но, процесот на нивното решавање ќе не убеди во спротивното.

Најнапред ќе ја разгледаме задачата на Ојлер.

Нека со e_n го означиме бројот на сите можни поделби на зададен конвексен n-аголник на триаголници, акко во условот на задачата. Со проба и скици на лист хартија лесно можат да се најдат првите неколку члена на низата $\{e_n\}$: $e_3=1$, $e_4=2$, $e_5=5$, $e_6=14$, но за $n=7$ уштен а почетокот и најупорните се откажуваат од методот на пребројување за наоѓање на триангулациите на седумаголникот.

Во 1758 година за поставениот проблем е составена следната рекурентна релација која овозможува пресметување на членовите на низата $\{e_n\}$:

$$e_n = e_2 e_{n-1} + e_3 e_{n-2} + ... + e_{n-1} e_2 \ , \ n > 2 \tag{1}$$

при што по дефинција се зема $e_2=1$.

Да ја докажеме релацијата (1).

Нека со A_i ($i=1,2,...,n$) е означено i-тото теме на n-аголникот $A_1A_2...A_n$. При произволна триангулација отсечката A_nA_1 ќе биде страна на некој од триаголниците $A_nA_1A_k$ ($2 \le k \le n-1$). На едната страна на од триаголникот ќе го имаме k -аголникот $A_1A_2...A_k$ а на другата страна ($n+1-k$)-аголникот $A_kA_{k+1}...A_n$. Првиот многуаголник можеме да го триангулираме на e_k начини, додека вториот на e_{n+1-k} начини, што значи дека при фиксирање на темето A_k на триаголникот $A_nA_1A_k$, можни се e_ke_{n+1-k} поделби на n -аголникот $A_1A_2...A_n$. Бројот k може да ја прими секоја вредност меѓу 2 и $n-1$. Сега точноста на (1) е јасна, бидејќи за $k=2,3,...,n-1$ добиваме рзлични триангулации на n - аголникот и со наведената постапка сите триангулации се исцрпуваат(зошто?)

Со добиената рекурентна формула можат лесно да се пресметаат и уште некои членови на низата $\{e_n\}$: $e_7=42$, $e_8=132$ итн. Сепак пресметувањето станува се подолготрајно, па според тоа и неефикасно, па затоа е добро да се најде формула за пресметување на броевите e_n како функција од n . За таа цел, прво ќе ја решиме задачата на Каталан.

За полесно разбирање на постапката за множење на која се инсистира во втората задача, ќе разгледаме пример на преместувањето на производот $x \cdot y \cdot z \cdot t$. Возможни се пет начини да се пресмета производот и тоа: $[(x\cdot y)\cdot z]\cdot t$,$[x\cdot(y\cdot z)]\cdot t$, $(x\cdot y)\cdot(z\cdot t)$, $x\cdot[(y\cdot z)\cdot t]$ и $x\cdot[y\cdot(z\cdot t)]$, при што го запазуваме однапред зададениот редослед на множителите. Но што ако можеме да множиме и вака: $x\cdot[z\cdot(y\cdot t)]$ или $(x\cdot t)\cdot(z\cdot y)$?

Проблемот на Каталан треба да се разгледува како две тесно поврзани задачи. Едната е во врска со бројот на различни производи во случај кога се запазува претходно зададениот редослед на множителите, а другата кога истиот не мора да е запазен. Бројот на производите на n броеви во кои се запазува редоследот на множителите ќе го наречеме n -ти Каталанов број од прв ред и ќе го означуваме со c_n , а бројот на производите кога не се запазува редоследот на множителите ќе велиме дека е од втор ред и ќе го означуваме со r_n . Соодветно и ќе ги употребуваме терминате Каталанов производ од прв ред и втор ред.

Врската меѓу Каталановите броеви од прв и втор ред едноставно се наоѓа. Бидејќи броевите кои треба да се помножат можат да се распоредат на $n!$ различни начини во Каталановиот производ од втор ред, важи следната реалција: $r_n = c_n \cdot n!$.

Да најдеме кои рекурентни релации ги опишуваат низите $\{r_n\}$ и $\{c_n\}$.

Да претпоставиме дека ги имаме запишано сите r_n начини на множење на множителите $f_1, f_2, ..., f_n$. За да го добиеме бројот r_{n+1} потребен ни е уштее ден множител f.

Нека P е Каталановиот производ од втор ред на n множители. Очигледно производот содржи $(n-1)$ производи од облик $A \cdot B$, каде што A и B се подпроизводи. Така на пример, за $n=4$ и $P = z \cdot [(x \cdot y) \cdot t]$ за A и B ги имаме следните можности $A = x$, $B = y$; $A = x \cdot y$, $B = t$ и $A = z$, $B = (x \cdot y) \cdot z$. Ако го употребиме и множителот f еднаш во позиција пред A, потоа по него, пред B и по него, од производот $A \cdot B$ ги добиваме следнит Каталанови производи од втор ред: $(f \cdot A) \cdot B, (A \cdot f) \cdot B, A \cdot (f \cdot B)$ и $A \cdot (B \cdot f)$. Ако тоа се направи за сите $(n-1)$ подпроизводи од облик $A \cdot B$ во производот P добиваме $4(n-1)$ различни Каталанови производи од втор ред на $(n+1)$ множител. Покрај тоа, треба да се земат предвид и следниве две можности: $f \cdot P$ и $P \cdot f$, па оттаму заклучуваме дека важи следново равенство: $r_{n+2} = (4n-2) r_n$ односно $r_n = 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot ... \cdot (4n-6)$. Јасно е дека $r_2 = 2$, затоа ќто два броја a и b можеме да ги помн ожиме на два начина $a \cdot b$ и $b \cdot a$.

Кај Каталановите производи од прв ред се почитува однапред зададениот редослед на множителите $f_1, f_2, ..., f_n$ ($n \geq 2$). Секој од c_n-те такви производи е од облик $A \cdot B$, каде што производот A се среќаваат првите k-множители, а во B и преостанатите $n-k$ (k е произволен природен број помал од n). При зададено k бројот на можни производи од прв ред е $c_k c_{n-k}$. Бидејќи k е произволен природен број од 1 до $n-1$ ја добиваме рекурентната релација:

$$c_n = c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + ... + c_{n-1} c_n .$$

Со употреба на рекурентната врска и знаејќи дека $c_1 = 1$ и $c_2 = 1$ можеме да добиеме неколку од првите членови на низата $\{c_n\}$: $c_3 = 2, c_4 = 5, \ldots$

Користејќи ја врската меѓу Каталановите броеви од прв и втор ред, се добива формула за пресметување на општиот член c_n:

$$c_n = \frac{r_n}{n!} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot ... \cdot (4n-6)}{n!} . \tag{3}$$

Со тоа проблемот на Каталан е решен, а веќе се насетува и како ше биде истиот искористен за решавање на Ојлеровата задача за триангулација на конвексен многуаголник. Од рекурентните релации (1) и (2) за низите $\{e_n\}$ и $\{c_n\}$ лесно се гледа дека $e_n = c_{n-1}$, па затоа од (3) ќе важи

$$e_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot ... \cdot (4n-10)}{(n-1)!} .$$

Последново равенство може да се трансформира со што ќе добиеме поедноставен запис:

$$e_n = \frac{2^{n-2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-5)}{(n-1)!} = \frac{2^{n-2}(2n-3)!}{(n-1)! 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n-4) \cdot (2n-3)} = \frac{2^{n-2} \cdot (2n-3)!}{(n-1)! \cdot 2^{n-2} \cdot (n-2)! \cdot (2n-3)} ,$$

од каде што добиваме

$$e_n = \frac{1}{2n-3} \binom{2n-3}{n-2} = \frac{1}{k} \binom{k}{t} .$$

Бројот $t = n-2$ е бројот на триаголниците што се добиваат со триангулација на многуаголникот со дијагонали што излегуваат само од едно теме, додека $k = 2n-3$ е збир на бројот на страните на многуаголникот и на бројот на дијагоналите коиизлегуваат од едно теме.

Непер и црниот петел

Познатиот шкотски математичар Џон Непер(John Napier, 1550-1617) потекнувал од земјопоседничко потекло и само аматерски се занимавал со математика и астрономија. Во негово време дурим и изведувањето на сите четири основни операции со броевите пишувано на современ начин, само што почнало да станува достапно на сите, а за сметањето со големите броеви било потребно доста време. Затоа Непер го вовел поимот логаритам.

Непер бил многу затворен човек, зафатен со научна работа. Затоа сограѓаните се сомневале дека се занимава со црна маѓија и дека има врска со ѓаволот. Но тоа во еден случај, како што вели анегдотата многу му помогнало.

Еднаш од неговата куќа бил украден скапоцен предмет и никој од слугите не признавал дека е крадецот. После кратко размислување, Непер изјавил дека неговиот црн петел има способност да кукурика кога ќе го допре крадецот. Потоа го внел петелот во една замрачена просторија и наредил секој од слугите да влезе во просторијата и да го допре петелот. Петелот се разбира ниеднаш не кукурикнал, но после тоа Непер открил кој е крадецот. Имено, тој претходно го потурил петелот со пепел и само крадецот верувајќи му на Непер, не го допрел петелот и излегол со чисти раце.