Сава Гроздев, Веселин Ненков
Софија

НЕРАВЕНСТВО НА ШУР И ПРИМЕНА

Исаи Шур е евреин, роден во 1875 година во градот Могилев, Белорусија. Поголемиот дел од животот престојувал во Германија, што е една од причините да се изјасни како германец. Во 1939 година емигрирал во Палестина и умрел две години подоцна во Тел Авив, во тоа време Израел како држава се уште не постоел, на 66 годишна возраст, точно на неговиот роденден. Ученик е на познатиот германски математичар Џорџ Фробениус (1849–1917). Основните научни резултати му се во областите комбинаторика, теорија на броеви и математичка физика.

Во математиката е познато следново неравенство, кое се нарекува *неравенство на Шур*: Ако $a, b, c \geq 0$ и $t > 0$, тогаш

$$a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-a)(b-c)+c^t(c-a)(c-b) \geq 0 . \qquad (1)$$

Доказот на ова неравенство се заснива на добро познатата формула

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+xy^{n-2}+y^{n-1}) .$$

Бидејќи во неравенството на Шур променливите a, b и c учествуваат симетрично, без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a \geq b \geq c$. Тогаш

$$\begin{aligned}
&a^t(a-b)(a-c)+b^t(b-a)(b-c)+c^t(c-a)(c-b) = \\
&=(a-b)(a^t(a-c)-b^t(b-c))+c^t(a-c)(b-c) \\
&=(a-b)((a^{t+1}-b^{t+1})-c(a^t-b^t))+c^t(a-c)(b-c) \\
&=(a-b)((a-b)(a^t+a^{t-1}b+...+ab^{t-1}+b^t)-c(a-b)(a^{t-1}+a^{t-2}b+...+ab^{t-2}+b^{t-1}))+c^t(a-c)(b-c) \\
&=(a-b)^2((a^t-ca^{t-1})+(a^{t-1}b-ca^{t-2}b)+...+(ab^{t-1}-cb^{t-1})+b^t)+c^t(a-c)(b-c) \\
&=(a-b)^2(a^{t-1}(a-c)+a^{t-2}b(a-c)+...+b^{t-1}(a-c)+b^t)+c^t(a-c)(b-c) \\
&=(a-b)^2((a-c)(a^{t-1}+a^{t-2}b+...+b^{t-1})+b^t)+c^t(a-c)(b-c) \geq 0
\end{aligned}$$

при што последното неравенство е очигледно. Од горниот израз следува, дека равенство се достигнува само кога $a=b=c$ или кога две од променливите се еднакви меѓу себе, а третата е еднаква на нула.

Едно обопштување на неравенството на Шур е следново:

Ако $a, b, c \geq 0$ *и* $x, y, z > 0$*, тогаш*

$$x(a-b)(a-c)+y(b-a)(b-c)+z(c-a)(c-b) \geq 0 .$$

Во 2007 година румунскиот математичар Валентин Ворничу го дава следново обопштување на неравенството на Шур: Ако $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, $a \geq b \geq c$ и

$x \geq y \geq z$ или $z \geq y \geq x$, тогаш за секој природен број k и секоја функција со позитивни вредности, која е конвексна или монотона, важи:

$$f(x)(a-b)^k (a-c)^k + f(y)(b-a)^k (b-c)^k + f(z)(c-a)^k (c-b)^k \geq 0 .$$

Од горната најопша (досега позната) формула, ако го земеме парцијалниот случај $x = a$, $y = b$, $z = c$, $k = 1$ и $f(m) = m^t$, го добиваме првичното неравенство на Шур (1). Нема да се задржуваме на доказите на двете обопштувања. Во натамошните разгледувања ќе го користиме неравенството на Шур само во случај кога $t = 1$, т.е. неравенството

$$a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) \geq 0 . \quad (2)$$

Од доказот на (1) следува точноста на (2), кога $a, b, c \geq 0$. Јасно, равенство се достигнува само кога $a = b = c$ или кога две од променливите се еднакви меѓу себе, а третата е еднаква на нула. При услов, дека $a, b, c \geq 0$, но кога променливите a, b и c не се истовремено еднакви на нула, ќе го разгледаме и неравенството:

$$\frac{9abc}{a+b+c} + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca) . \quad (3)$$

Јасно, неравенствата (2) и (3) се еквивалентни, само при услов дека трите променливи не се истовремено еднакви на нула. Навистина, ако се ослободиме од заградите на левата страна на (2), добиваме

$$a^3 + b^3 + c^3 - (a^2 b + a^2 c + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b) + 3abc \geq 0 . \quad (4)$$

Аналогно, ако во (3) се префрлиме на левата страна, сведеме под заеднички именител и ги извршиме потребните траснформации, повторно го добиваме неравенството (4). Да забележиме, дека во доказот на (1) ја користиме симетричноста на променливите a, b и c. Имено, тоа означува дека: при произволна пермутација на a, b и c, изразот (1) не се менува. Кога станува збор за собирање, како што е во (1), тогаш имаме основа да се воведе знак за скратен запис на збирот. Така, собирањето во математиката се означува со грчката голема буква $\sum$ (сигма). Тогаш (1) може да се запише скратено на следниов начин:

$$\sum_{cyc} a^t (a-b)(a-c) \geq 0 .$$

Симболот $\sum_{cyc}$ означува, дека променливите се заменуваат циклично, т.е. a се заменува со b, b со c и c со a, при што смените се извршуваат последователно до добивање на толку различни собироци во сумата, колку е бројот на променливите. Слични ознаки се погодни и при извршување на пресметувања. На пример, при споредување на (2) и (3), кога ја трансформираме (2), доволно е да се ослободиме од заградите на првиот собирок. Тогаш (2) го добива видот:

$$\begin{aligned} a(a-b)(a-c) + b(b-a)(b-c) + c(c-a)(c-b) &= \sum_{cyc} a(a-b)(a-c) \\ &= \sum_{cyc} (a^3 - a^2 b - a^2 c + abc) \geq 0. \end{aligned}$$

Понатаму ќе разгледаме неколку задачи, кои можаат да се решат со неравенството на Шур (2) или (3).

Задача 1. Ако $a, b, c > 0$, да се докаже, дека

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca).$$

Решение. Од (3) следува, дека е доволно да го докажеме неравенството $2abc+1 \geq \frac{9abc}{a+b+c}$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за броевите abc, abc и 1 следува

$$2abc+1 = abc+abc+1 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Значи, доволно е да докажеме, дека $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq \frac{9abc}{a+b+c}$. Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$a+b+c \geq \frac{9abc}{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = \frac{3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = 3\sqrt[3]{abc},$$

т.е. со неравенството $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, кое е неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за броевите a, b и c.

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

Последица 1. Од решението на задача 1 следува, дека е точно следното неравенство, кое е послабо од неравенството во задача 1:

$$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 2(ab+bc+ca).$$

Да забележиме дека знак за равенство во ова послабо неравенство важи ако и само ако $a=b=c$, т.е. сега отпаѓа необходноста променливите да се еднакви на 1.

Забелешка. Од решението на задача 1 следува, дека за да тврдењето во неа е точно кога $a, b, c \geq 0$, доволно е трите броја да не се истовремено еднакви на нула.

Задача 2. Ако $a, b, c > 0$, докажи дека

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \geq \sum_{cyc}(b+c-a)(c+a-b).$$

Решение. Бидејќи

$$\sum_{cyc}(b+c-a)(c+a-b) = \sum_{cyc} c^2-(a-b)^2,$$

десната страна на неравенството го добива обликот

$$a^2-(b-c)^2+b^2-(a-c)^2+c^2-(a-b)^2 = 2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2).$$

Според тоа, почетното неравенство е еквивалентно на неравенството

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \ge 2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)$$

па од последица 1, следува дека доволно е да докажеме, дека

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \ .$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за броевите $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$ следува $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \ge 3\sqrt[3]{\sqrt{abc}} = 3\sqrt[6]{abc}$. Конечно,

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \ge \sqrt{abc}\cdot 3\sqrt[6]{abc} = \sqrt[6]{a^3b^3c^3}\cdot 3\sqrt[6]{abc}$$
$$= 3\sqrt[6]{a^4b^4c^4} = 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

Јасно, знак за тавенство важи ако и само ако $a=b=c$.

Задача 3. Ако $a, b, c > 0$, докажи дека

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+(a+b+c)^2 \ge 4\sqrt{3abc(a+b+c)} \ .$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+a^2+b^2+c^2 \ge 4\sqrt{3abc(a+b+c)}-2(ab+bc+ca) \ .$$

Од друга страна, од решението на задача 2 следува, дека

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+(a^2+b^2+c^2) \ge 2(ab+bc+ca)$$

и следствено доволно е да докажеме, дека

$$2(ab+bc+ca) \ge 4\sqrt{3abc(a+b+c)}-2(ab+bc+ca) \ ,$$

т.е. дека $ab+bc+ca \ge \sqrt{3abc(a+b+c)}$. Последното неравенство е добро познатото *неравенство на Хадвигер-Финслер*, кое во натамошните разгледувања ќе го докажеме. За таа цел ќе искористиме неколку помошни тврдења, кои сами по себе се одделни самостојни тврдења.

Задача 3.1. Ако *x, y* и *z* се реални броеви, докажи дека

$$x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx \ .$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx) \ge 0 \ ,$$

т.е. со неравенството

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \ge 0 \ ,$$

кое е очгледно. Занак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$.

Задача 3.2. Ако $a, b, c \ge 0$, докажи дека

$$(ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c) \ .$$

Решение. Левата страна на неравенството ќе ја запишеме во видот

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2abc(a+b+c)$$

и следствено даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \geq abc(a+b+c)=ab^2c+bc^2a+ca^2b\,,$$

т.е. со неравенството

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \geq ab^2c+bc^2a+ca^2b\,.$$

Последното неравенство всушност е неравенството од задача 3.1 при $x=ab$, $y=bc$ и $z=ca$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

Сега неравенството на Хадвигер-Финслер се добива после коренување на двете страни на неравенството од задача 3.2. Со тоа е решена и задача 3. Јасно, во неа знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

Задача 4. Ако $x, y, z>0$ и $(x+y)(y+z)(z+x)=1$, докажи, дека

$$xy+yz+zx \leq \tfrac{3}{4}\,.$$

Решение. Ќе ја искористиме класичната смена $x=\frac{b+c-a}{2}$, $y=\frac{c+a-b}{2}$ и $z=\frac{a+b-c}{2}$. Сега условот $(x+y)(y+z)(z+x)=1$ го добива обликот $abc=1$, а неравенството се запишува во видот $\sum\limits_{cyc}(b+c-a)(c+a-b)\leq 3$, т.е. во видот (види го решението на задача 2):

$$2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\leq 3\,.$$

Последното фактички е неравенството од задача 1, во кое е заменето $abc=1$.

Задача 5. Да се докаже, дека ако $a, b, c>0$, тогаш

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)\,.$$

Решение. Прво со помош на неравенството меѓу кадратната и аритметичката средина за броевите ab, bc и ca заклучуваме, дека

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq \tfrac{(ab+bc+ca)^2}{3}\,.$$

Тогаш

$$3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+9 \geq (ab+bc+ca)^2+9 \geq 6(ab+bc+ca)\,,$$

бидејќи $(ab+bc+ca-3)^2\geq 0$, т.е. $(ab+bc+ca)^2-6(ab+bc+ca)+9\geq 0$. Следствено

$$3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+9\geq 6(ab+bc+ca)\,,$$

од каде добиваме

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+6\geq 4(ab+bc+ca)\,.$$

Понатаму ја трансформираме левата страна на неравенството од условот на задачата и го добиваме изразот

$$(abc)^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 8 .$$

Така неравенството го сведуваме до

$$(abc)^2 + 4(ab + bc + ca) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 2 \geq 9(ab + bc + ca) .$$

Но, согласно задача 3.1 имаме

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(ab + bc + ca)$$

и следсвено доволно е да докажеме, дека

$$(abc)^2 + 7(ab + bc + ca) + (a^2 + b^2 + c^2) + 2 \geq 9(ab + bc + ca) ,$$

т.е. дека

$$(abc)^2 + (a^2 + b^2 + c^2) + 2 \geq 2(ab + bc + ca) .$$

Ако го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за броевите $(abc)^2$, 1 и 1, добиваме

$$(abc)^2 + 2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

и заклучуваме, дека е доволно да го докажеме неравенството

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 2(ab + bc + ca) ,$$

кое е докажано во последица 1.

Знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c$.

Задача 6. Докажи дека, ако $a, b, c > 0$, тогаш

$$\tfrac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leq \max\{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2, (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2, (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2\} .$$

Решение. Јасно е, дека

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 + (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2}{3} \leq \max\{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2, (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2, (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2\} .$$

Од друга страна,

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 = 2(a + b + c) - 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$$

и затоа доволно е да докажем, дека

$$a + b + c + 3\sqrt[3]{abc} \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) ,$$

што всушност е докажано во последица 1, за броевите $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ и $\sqrt{c}$.

Литература

1. Lupu, C., Pohoata, C. *About a nice inequality*, Mathematical reflections, 1, 2007.
2. Малчески, Р. *Елементарни алгебарски и аналитички неравенства*, СММ, Скопје, 2016.