Ристо Малчески, Скопје

КРАЛОТ АРТУР И ТРКАЛЕЗНАТА МАСА

Според легендата тркалезната маса ја измислил англискиот крал Артур. Имено, витезите на кралот Артур постојано се расправале за тоа кој на кое место ќе седи, т.е. кој ќе седи на "челото на масата". За да ги прекине непотребните караници, кралот Артур се досетил да направи тркалезна маса на која ќе нема ознаки. Околу масата поставил 12 столици и како сите места биле рамноправни витезите престанале да се расправаат.

По извесно време, Мерлин, советникот на кралот Артур, забележал дека пред состаноците витезите скоро и да не разговараат меѓу себе, па затоа им го поставил следниов проблем:

На колку различни начини можат дванаесетте витези да се распоредат околу тркалезната маса, при што два распореди се сметаат за различни ако барем еден витез има барем еден (*лев или десен различен сосед*). *Притоа им напоменал дека ако и двата соседи се исти, но левиот преминал на десната страна и обратно, тоа е нов, различен, распоред.*

Артуровите витези веднаш се зафатиле со решавање на поставениот проблем, така што почнале да ги менуваат местата и да ги бележат различните распореди. Но, по извесно време увиделе дека има премногу можности, се откажале од натамошното броење и на Мерлин му соопштиле дака не можат да го решат поставениот проблем. На ова Мерлин се насмеал и после кратко пресметување им соопштил дека бројот на различните распореди е 39916800.

Како Мерлин дошол до овој број? Дали ги испишал сите можни распореди? Јасно, не! Мерлин едноставно знаел математика. Ајде и ние да научиме како се решаваат задачи од ваков вид.

Пред да приминеме на разгледувања на задачи од наведениот вид ќе го формулираме таканаречениот *принцип на производ*, кој е еден од основните комбинаторни принципи, и истиот ќе го прифатиме без да го докажуваме. Имено, точно е следново тврдење:

Тврдење 1 (принцип на производ). Ако првата постапка може да се реализира на m_1 различни начини, втората постапка може да се реализира на m_2 различни начини, итн. $n-$тата постапка може да се реализира на m_n различни начини, тогаш сите n постапки заедно може да се реализираат на $m_1 m_2 ... m_n$ различни начини. ■

Принципот на производ ќе го искористиме при решавањето на следнава задача, која е и основа за решавање на задачата на советникот Мерлин.

Задача 1. На колку различни начини на n столици, означени со броевите $1,2,3,...,n$ може да се распоредат n лица и за два распореди ќе сметаме дека се различни ако барем една едно лице има барем еден (лев или десен) различен сосед.

Решение. Јасно, на првата столица може да седне кое било од $n-$те лица, па затоа таа може да биде зафатена на n различни начини. Понатаму, откако едно лице ќе седне на првата столица, тогаш на втората столица може да седне секое од останатите $n-1$ лица, т.е. таа може да биде зафатена на $n-1$ различни начини. Слично, третата столица може да биде зафатена на $n-2$ различни начини, четвртата на $n-3$ различни начини, итн. последната столица може да биде зафатена на $n-(n-1)=1$ начин. Сега, од принципот на производ следува дека n лица на n означени столици може да седнат на $n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1=n!$ различни начини. ■

Да се вратиме на задачата на советникот Мерлин. За таа цел ќе ја решиме следнава поопшта задача.

Задача 2. На колку различни начини на n столици, околу тркалезна маса, можат да се распоредат n лица, при што местата на масата не се означени и за два распореди ќе сметаме дека се различни ако барем една едно лице има барем еден (лев или десен) различен сосед, а ако и двата соседи се исти, но левиот преминал на десната страна и обратно, тоа е нов, различен, распоред.

Решение. Најпрво столиците околу тркалезната маса да ги нумерираме со броевите $1,2,$ $3,...,n$. Според задача 1, на вака нумерираните столици n лица можат да се распоредат на

Цртеж 1

$$n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1=n!$$

различни начини. Произволно да избереме еден ваков распоред. Ако сега околу масата лицата се преместуваат на столиците за едно место спротивно од движењето на стрелката на часовникот, тогаш од избраниот распоред можеме да добиеме n нови распореди, кои во случај кога столиците се нумерирани се меѓусебно различни (за $n=4$ столици распоредите на лицата A,B,C,D се дадени на цртеж 1). Меѓутоа, бидејќи столиците не се нумерирани, овие n распореди се идентични. Според тоа, бројот на различните распореди на n лица околу тркалезна маса е

$$\frac{n!}{n}=\frac{n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1}{n}=(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1=(n-1)!.\ ■$$

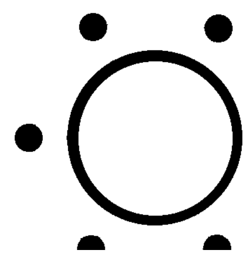
Забелешка 1. Секој распоред од задача 1 во математиката е познат како *пермутација без повторување од n елементи.* Понатаму, како што видовме, секој распоред од задача 2 се добива од распоредите во задача 1 со тоа што за n распореди, кои се познати како *циклични пермутации*, сметаме дека се еднакви.

Задача 3. На колку начини можеме околу тркалезна маса да распоредиме 5 момчиња и 5 девојчиња, така да две момчиња не се соседи?

Решение. Петте девојчиња ги распоредуваме околу тркалезната маса, така што ќе ја зафатат секоја втора столица и тоа можеме да го направиме на $4!=24$ начини. Потоа, петте момчиња ќе ги распоредиме на петте празни столици. Јасно, нивните леви и десни соседи ќе бидат девојчиња, па затоа при распоредувањето на момчињата цикличните пермутации нема да ги сметаме за еднакви. Според тоа, момчињата можеме да ги распоредиме на $5!=120$ начини. Сега, од принципот на производ следува дека вкупниот број на бараните распоредувања е

$$4!5!=24\cdot120=2880\,. \blacksquare$$

Задача 4. На колку начини околу тркалезна маса можеме да распоредиме 6 момчиња и 4 девојчиња, така да две девојчиња не седат на две соседни места?

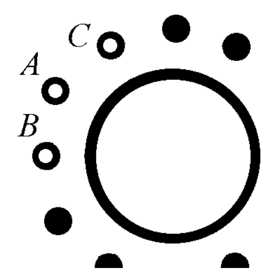


Решение. Да ги распоредиме шесте момчиња околу тркалезната маса (цртеж 2). Тоа можеме да го направиме на $5!=120$ начини. Сега, за четирите девојчиња може да поставиме четири столици, по една меѓу кои било две момчиња. Ќе ги распоредиме една по една. За првото девојче имаме 6 можности, за второто девојче имаме 5 можности, за третото девојче имаме 4 можности и конечно за четвртото девојче имаме 3 можности (зошто?). Конечно, од принципот на производ следува дека бараниот број е

$$120\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3=43200 \text{ распоредувања. } \blacksquare$$

Задача 5. Дванаесетте витези на кралот Артур седат околу тркалезната маса. На колку различни начини кралот Артур може да избере придружба од два витеза, ако во придружбата не може да бидат витези кои се соседи на тркалезната маса?

Решение. Да го разгледаме цртеж 3. Ако витезот A е во придружбата на кралот Артур, тогаш во неа неможе да се витезите B и C. Според тоа, во случај кога витезот A е придружник на кралот Артур, изборот може да се направи на 9 начини. Но изборот на витезот A е случаен, што значи дека за секој од дванаесетте витези може да се направи избор на вториот витез на 9 начини. Јасно, притоа секоја придружба е броена двапати, на пример A со F и F со A (цртеж 3), па затоа бараниот број е $\frac{12\cdot9}{2}=54$.



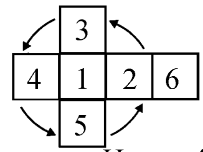
Да забележиме дека бараниот број всушност е еднаков на бројот на дијагоналите на конвексниот дванаесетаголник. $\blacksquare$

Задача 6. Околу тркалезна маса треба да распоредиме 4 лица, но за тие четири места конкурираат 5 лица. На колку различни начини можеме да ги потполниме местата на масата?

Решение. Ако од петте лица, изоставиме едно лице, тогаш сме направиле избор на четири лица кои треба да ги распоредиме околу тркалезната маса. Јасно, ова можеме да го направиме на 5 начини. Сега, според задача 2 четирите лица околу тркалезната маса можеме да ги распоредиме на $3!=3\cdot 2\cdot 1=6$ начини. Конечно, од принципот на производ следува дека бараниот број е $5\cdot 6=30$ начини. ■

Задача 7. На колку различни начини можеме со шест различни бои да ги обоиме шесте страни на коцката?

Решение. Да ги означиме боите со броевите 1,2,3,4,5 и 6. Обоената коцка можеме да ја вртиме на масата, така да горната страна биде еден од овие броеви. Јасно, такви можности има 6, но притоа станува збор за исто боење. Понатаму, ако горната страна на коцката ја означиме со 1, тогаш за означување на спротивната страна (страната која не се гледа и која ја допира масата) имаме 5 можности. На мрежата претставена на цртеж 4 таа страна е означена со бројот 6. Со тоа е определено кои се останатите четири бои со кои се обоени вертикалните страни на коцката. Во случајот, на цртеж 4 тоа се боите 2, 3, 4 и 5, кои како околу тркалезна маса се распоредени околу бојата 1. Според задача 2, овие четири бои може да се распоредат на $3!=6$ начини, па од принципот на производ следува дека вкупниот број на различни боења на коцката со шест различни бои е $5\cdot 3!=30$. ■



Цртеж 4

На крајот од нашите разгледувања ќе наведеме неколку задачи за самостојна работа, при што оние со поголема тежина се означени со знакот *.

Задача 8. За време на зимскиот распуст 5 членови на математичката секција се договориле да се подготвуваат за претстојните натпревари, но така што секој ден на масата ќе седат во друг распоред, а подготовките ќе завршат кога ќе бидат исцрпени сите можни распоредувања на учениците. Колку денови траеле подготовките за натпреварите?

Задача 9. Околу тркалезна маса треба да распоредиме 4 лица, но за тие четири места конкурираат 6 лица. На колку различни начини можеме да ги потполниме местата на масата?

Задача 10*. Дванаесетте витези на кралот Артур седат околу тркалезната маса и секој од нив е скаран со своите соседи. На колку различни начини може да се изберат четири витези кои ќе го придружуваат кралот Артур, но така да меѓу избраните витези да нема скарани?

Ѓердан е специјален вид на тркалезна маса. Бројот на ѓерданите е двапати помал од бројот на распоредите околу тркалезна маса, со ист број елементи. Имено, ѓерданот може да се ротира за 180^0 и "горната" страна да се сврти "долу", што во случај на тркалезна маса не е можно, бидејќи луѓето би стоеле на глава.

Задача 11. Колку различни ѓердани можеме да направиме од пет златни и пет сребрени монети, ако секоја монета се разликува од останатите и златните и сребрените монети се редат наизменично?

Задача 12. Од четири сребрени, четири златни и четири платинести монети е направен ѓердан така што секои три последователни монети се од различен метал. Колку различни ѓердани можеме да направиме?