XXXV олимпијада

1. Нека $m, n \in \mathbb{N}$, а $a_1, a_2, ..., a_m$ се меѓусебно различни елементи од множеството $\{1, 2, ..., n\}$. Ако $a_i + a_j \leq n$ за некои i, j, $1 \leq i \leq j \leq m$, тогаш постои k, $1 \leq k \leq m$, таков што $a_i + a_j = a_k$. Докажи дека

$$\frac{a_1+a_2+...+a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека за броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ важи $a_1 < a_2 < ... < a_m$. Ќе докажеме дека за секој $i = 1, 2, ..., m$ важи $a_i + a_{m-i+1} \geq n+1$.

Нека претпоставиме дека постои i таков што $a_i + a_{m-i+1} \leq n$. Тогаш,

$$a_{m-i+1} < a_{m-i+1} + a_1 < a_{m-i+1} + a_2 < ... < a_{m-i+1} + a_i \leq n.$$

Според тоа, добивме $i+1$ различни броеви кои припаѓаат на множеството $\{a_{m-i+1}, a_{m-i+2}, a_{m-i+3}, ..., a_m\}$ кое има i елементи, што е противречност. Значи, за секој $i = 1, 2, ..., m$ важи $a_i + a_{m-i+1} \geq n+1$.

Од претходно изнесеното следува дека

$$\begin{aligned} 2(a_1 + a_2 + ... + a_m) &= (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + ... + (a_{m-1} + a_2) + (a_m + a_1) \\ &\geq m(n+1), \end{aligned}$$

т.е. $\frac{a_1+a_2+...+a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$, што и требаше да се докаже.

2. Даден е $\triangle ABC$, со $\overline{AB} = \overline{AC}$. Нека

(a) M е средина на страната BC, а O е точка на правата AM таква што OB е нормална на AB.

(b) Q е произволна точка на страната BC различна од B и C.

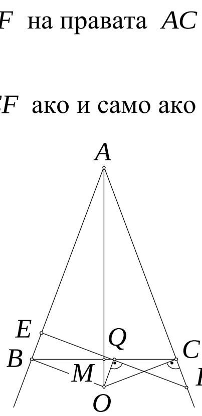
(c) E се наоѓа на правата AB, а F на правата AC и притоа точките E, Q и F се различни и колинеарни.

Докажи дека OQ е нормална на EF ако и само ако $\overline{QE} = \overline{QF}$.

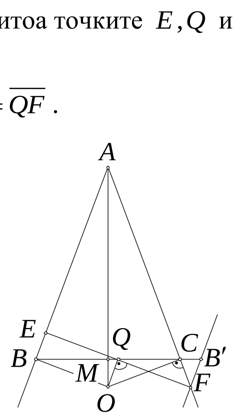
Решеие. Нека $OQ \perp EF$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $Q \in MC$. Од

$$\measuredangle OBE + \measuredangle OQE = 180^\circ$$

следува дека четириаголникот $OQEB$ е тетивен. Оттука следува дека



Црт. 35.1.



Црт. 35.2.

$$\measuredangle OEQ = \measuredangle OBQ = \measuredangle OAB .$$

Од друга страна

$$\measuredangle FCO = \measuredangle FQO = 90^\circ ,$$

што значи дека четириголникот $OFCQ$ е тетивен. Затоа

$$\measuredangle QOF = 180^\circ - \measuredangle FCQ = \measuredangle BCA ,$$

од што следува дека

$$\measuredangle OFQ = 90^\circ - \measuredangle QOF = \measuredangle CAM = \measuredangle QEO.$$

Според тоа, $\triangle EOF$ е рамнокрак со висина OQ, од што следува $\overline{EQ} = \overline{FQ}$ (црт. 35.1).

Нека претпоставиме дека $\overline{EQ} = \overline{FQ}$. Применуваме централна симетрија на B и E во однос на точката Q. Нека B' е сликата на B при оваа централна симетрија. Од $\overline{EQ} = \overline{FQ}$ следува дека F е сликата на E. Од $B'F \parallel BE$ следува дека триаголниците ABC и $FB'C$ се слични, па затоа $\overline{CF} = \overline{B'F} = \overline{BE}$.
Од

$$\measuredangle EBO = 90^\circ = \measuredangle FCO ,\ \overline{OB} = \overline{OC} \text{ и } \overline{BE} = \overline{CF}$$

следува дека $\triangle OEB \cong \triangle OFC$ па затоа $\overline{OE} = \overline{OF}$. Според тоа, $\triangle OFE$ е рамнокрак со основа EF и тежишна линија OQ, па затоа $OQ \perp EF$.

3. За секој $k \in \mathbb{N}$ со $f(k)$ да го означиме бројот на елементите од множеството $\{k+1, k+2, ..., 2k\}$ кои запишани во броен систем со основа 2 имаат точно три единици.

(a) Докажи дека за секој $m \in \mathbb{N}$, постои барем еден $k \in \mathbb{N}$ таков што $f(k) = m$.

(b) Најди ги сите природни броеви m за кои постои точно еден број k таков што $f(k) = m$.

Решение. Нека M е множеството од сите природни броеви во чиј бинарен запис има точно три единици. Природен број n во својот бинарн запис има точно три единици ако $n = 2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma$, каде α, β, γ се различни ненегативни цели броеви. Според тоа,

$$M = \{n \mid n = 2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma, \alpha > \beta > \gamma \geq 0\} .$$

Ако $n \in M$, тогаш

$$2n = 2(2^\alpha + 2^\beta + 2^\gamma) = 2^{\alpha+1} + 2^{\beta+1} + 2^{\gamma+1} ,$$

па затоа $2n \in M$. Ако $2n \in M$, тогаш

$$2n = 2^{\alpha+1} + 2^{\beta+1} + 2^{\gamma+1}$$

и притоа $\alpha > \beta > \gamma \geq 0$, од што следува дека

$$n = 2^{\alpha} + 2^{\beta} + 2^{\gamma},$$

каде α, β, γ се различни ненегативни цели броеви. Според тоа,

$$n \in M \text{ ако и само ако } 2n \in M. \tag{1}$$

Нека $B_k = \{1,2,...,k\} \cap M$ и $A_k = \{k+1, k+2,...,2k\} \cap M$. Тогаш, $f(k) = |A_k|$. Ако ставиме $g(k) = |B_k|$, тогаш $f(k) = g(2k) - g(k)$, бидејќи $A_k = B_{2k} \setminus B_k$.

Ако $k = 2^t$, тогаш $B_k = \{n \mid n = 2^{\alpha} + 2^{\beta} + 2^{\gamma}, t > \alpha > \beta > \gamma \geq 0\}$, па затоа $g(k)$ е еднаков на бројот на сите тројки (α, β, γ) за кои важи $t > \alpha > \beta > \gamma \geq 0$, а такви тројки вкупно се $\binom{t}{3} = \frac{t(t-1)(t-2)}{6}$. Според тоа,

$$f(2^t) = g(2 \cdot 2^t) - g(2^t) = \binom{t+1}{3} - \binom{t}{3} = \binom{t}{2} = \frac{t(t-1)}{2}.$$

Да ги разгледаме множествата A_k и A_{k+1}, т.е. множествата

$$\{k+1, k+2,...,2k\} \cap M \text{ и } \{k+2,...,2k, 2k+1, 2k+2\} \cap M.$$

Бидејќи тие се разликуваат само во тоа дали $k+1, 2k+1, 2k+2 \in M$, од $2k+2 = 2(k+1)$ и од (1) следува дека дека:

$$\text{ако } 2k+1 \in M\text{, тогаш } A_{k+1} = A_k \cup \{2k+1\}\text{, и} \tag{2}$$

$$\text{ако } 2k+1 \notin M\text{, тогаш } A_{k+1} = A_k, \tag{3}$$

па затоа

$$\text{ако } 2k+1 \in M\text{, тогаш } f(k+1) = f(k)+1\text{, и} \tag{4}$$

$$\text{ако } 2k+1 \notin M\text{, тогаш } f(k+1) = f(k). \tag{5}$$

Од $f(2^t) = \binom{t}{2}$ следува дека за секој m постои t, таков што $f(2^t) > m$. Сега од $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ и $f(4) = 1$ следува дека за секој m постои k, таков што $f(k) = m$, со што е докажано тврдењето под а).

Понатаму, нека за природниот број m постои точно еден природен број k таков што $f(k) = m$. Од (4) и (5) следува $f(k-1) = m-1$ и $f(k+1) = m+1$. Понатаму, од (2) и (3) следува $2(k-1)+1 \in M$ и $2k+1 \in M$.

Од $2k+1 \in M$ следува $2k = 2^{\alpha} + 2^{\beta}$, за $\alpha > \beta \geq 1$. Од $2k-1 \in M$ следува $\beta \neq 1$. Ако $\beta > 2$, тогаш $2k-1 = 2^{\alpha} + 2^{\beta-1} + 2^{\beta-2} + ... + 2 + 1 \notin M$, па затоа $\alpha > \beta = 2$. Според тоа $2k = 2^{\alpha} + 2^2$, т.е. $k = 2^{\alpha-1} + 2$, за $\alpha - 1 \geq 2$.

Значи $f(k) = m$ има единствено решение ако и само ако $k = 2^{\alpha-1} + 2$, за $\alpha - 1 \geq 2$ и тогаш

$$\begin{aligned} m = f(k) &= g(2k) - g(k) = g(2^{\alpha} + 4) - g(2^{\alpha-1} + 2) \\ &= 1 + g(2^{\alpha}) - g(2^{\alpha-1}) = 1 + \binom{\alpha}{3} - \binom{\alpha-1}{3} = 1 + \binom{\alpha-1}{2} \end{aligned}$$

Последното равенство е исполнето бидејќи

$$B_{2^t+2}=B_{2^t+1}=B_{2^t}\text{ , т.е. } g(2^t+2)=g(2^t)$$

и

$$B_{2^t+4}=B_{2^t+2^2}=B_{2^t+2^1+2^0}=B_{2^t+2}\cup\{2^t+2+1\}\text{ т.е.}$$

$$g(2^t+4)=g(2^t+2)+1=g(2^t)+1\,.$$

Конечно, бараното множество под б) е $\{1+\binom{t}{2}\,|\,t\geq 2\}$.

4. Најди ги подредени парови природни броеви (m,n), такви што $\frac{n^3+1}{mn-1}\in\mathbb{N}$.

Решение. I *начин*. Нека $\frac{n^3+1}{mn-1}=k$, за $m,n,k\in\mathbb{N}$. Тогаш, $n^3+1=mnk-k$, т.е. $n(mk-n^2)=k+1$. Значи, $k+1=np$, т.е. $k=np-1$, за $p\in\mathbb{N}$. Според тоа, $n^3+1=mn^2p-mn-np+1$ од што следува $n(n^2-mnp+m+p)=0$ и како $n\in\mathbb{N}$ добиваме $n^2-mnp+m+p=0$. Последната равенка разгледувана како квадратна равенка по n мора да има решение во $\mathbb{N}$, па затоа

$$(pm)^2-4(m+p)=a^2\,,$$

за некој $a\in\mathbb{N}$ и како $(pm)^2-4(m+p)<(pm)^2$ добиваме $a<pm$. Од

$$(pm)^2-4(m+p)-(pm-1)^2=-4(m+p)+2pm-1\neq 0$$

следува $a\neq pm-1$. Понатаму, од

$$a^2=(pm-2)^2+4pm-4-4(m+p)=(pm-2)^2+4(p-1)(m-1)-8$$

и $a\leq pm-2$ следува дека $(p-1)(m-1)\leq 2$.

Ако $p=1$, тогаш од $a^2=m^2-4m-4=(m-2)^2-8$ следува дека

$$8=(m-2)^2-a^2=(m-2-a)(m-2+a)\,.$$

Ако $m-2-a=2$, $m-2+a=4$ или $m-2-a=4$, $m-2+a=2$, тогаш $2m-4=6$, т.е. $m=5$. Ако $m-2-a=8, m-2+a=1$ или $m-2-a=1,$ $m-2+a=8$, тогаш $2m-4=9$, што не е можно. Слично, ако $m=1$, тогаш $p=5$.

Ако $p\geq 2$ и $m\geq 2$, тогаш $(p-1)(m-1)\leq 2$ е можно само ако $m=p=2$, $p=2, m=3$ или $p=3, m=2$.

За $p=1, m=5$, од $n^2-5n+6=0$ следува $n=2$ или $n=3$.

За $p=5, m=1$, од $n^2-5n+6=0$ следува $n=2$ или $n=3$.

За $p=m=2$, од $n^2-4n+4=0$ следува $n=2$.

За $p=3, m=2$, од $n^2-6n+5=0$ следува $n=1$ или $n=5$.

За $p=2, m=3$, од $n^2-6n+5=0$ следува $n=1$ или $n=5$.

Според тоа, бараните подредени парови се

$$(2,5); (3,5); (2,1); (3,1); (2,2); (1,3); (1,2); (5,3); (5,2).$$

II *начин*. Бидејќи $mn-1$ и m^3 се заемно прости, добиваме дека $mn-1$ е делител на n^3+1 ако и само ако $mn-1$ е делител на

$$m^3(n^3+1)=m^3n^3-1+m^3+1=(mn-1)(m^2n^2+mn+1)+m^3+1$$

ако и само ако $mn-1$ е делител на m^3+1. Според тоа, подредениот пар (n,m) е решение на задачата ако и само ако подредениот пар (m,n) е решение на задачата.

i) Ако $m=n$, тогаш $\frac{n^3+1}{n^2-1}=\frac{n^2-n+1}{n-1}=n+\frac{1}{n-1}$ е природен број ако и само ако $n=2$.

ii) Нека $m>n$. Ако $n=1$, тогаш $\frac{2}{m-1}$ е природен број ако и само ако $m=2$ или $m=3$.

Понатаму, нека $n\geq 2$. Тогаш, како и во решението според првиот начин имаме $\frac{n^3+1}{mn-1}=pn-1$, од што заедно со $m>n$ добиваме

$$pn-1=\frac{n^3+1}{mn-1}<\frac{n^3+1}{n^2-1}=n+\frac{1}{n-1},$$

па затоа $n(p-1)<1+\frac{1}{n-1}\leq 2$. Но, $n\geq 2$ па затоа од последното неравенство следува дека $p=1$. Сега од

$$n^3+1=(n-1)(mn-1)=n^2m-n-mn+1 \text{ и } n\in\mathbb{N}$$

следува $n^2-mn+m+1=0$, т.е.

$$m=\frac{n^2+1}{n-1}=n+1+\frac{2}{n-1}.$$

Но, $m\in\mathbb{N}$ па затоа од последното равенство следува дека $n=2$ или $n=3$, при што и во двата случаи $m=5$.

Конечно, $(2,5); (3,5); (2,1); (3,1); (2,2); (1,3); (1,2); (5,3); (5,2)$.

5. Нека S е множество од сите реални броеви поголеми од -1. Најди ги сите функции $f:S\to S$ кои ги задоволуваат условите:

(a) $f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$, за секои $x,y\in S$;

(b) Функцијата $\frac{f(x)}{x}$ е строго растечка во секој од интервалите $-1<x<0$ и $x>0$.

Решение. Од условот *ii*) следува дека равенката $f(x)=x$ има најмногу три решенија и тоа: едно за $x\in(-1,0)$, едно за $x=0$ и едно за $x\in(0,+\infty)$.

Нека $f(a)=a$, за некој $a>0$. Ако ставиме $x=y=a$, тогаш од *i*) добиваме

$$f(2a+a^2)=f(a+f(a)+af(a))=a+f(a)+af(a)=2a+a^2.$$

Тогаш, бидејќи $2a+a^2>0$ следува дека и $2a+a^2$ е решение на $f(x)=x$, при $x>0$. Според тоа, $2a+a^2=a$ т.е. $a(a+1)=0$, што не е можно за $a>0$. Значи, за секој $a>0$ важи $f(a)\neq a$.

Слично, за секој $a\in(-1,0)$ важи $f(a)\neq a$.

Бидејќи, за $x=y$ од *i*) добиваме $f(x+f(x)+xf(x))=x+f(x)+xf(x)$ и $-1<x+f(x)+xf(x)$, добиваме дека $x+f(x)+xf(x)=0$, за секој $x>-1$. Според тоа, $f(x)=-\frac{x}{1+x}$. Лесно се проверува дека $\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{1+x}$ строго монотоно расте на интервалите $(-1,0)$ и $(0,+\infty)$. Понатаму,

$$y+f(x)+yf(x)=y-\frac{x}{1+x}-\frac{yx}{1+x}=\frac{y-x}{1+x}=-\frac{x-y}{1+x}=-\frac{\frac{x-y}{1+y}}{1+\frac{x-y}{1+y}}.$$

$$=f(\tfrac{x-y}{1+y})=f(x+f(y)+xf(y)).$$

6. Докажи дека постои подмножество A од множеството природни броеви со следното својство: за секое бесконечно множество S од прости броеви постојат два природни броеви $m\in A$ и $n\notin A$ такви што секој од нив е производ на k различни елементи од множеството S, за некој $k\geq 2$.

Решение. Нека $P=\{p_1,p_2,p_3,...\}$ е множеството од сите прости броеви. Дефинираме $A=\bigcup\limits_{k=2}^{\infty}A_k$, каде што $A_k=\{q_1...q_k\,|\,q_i\in P,\,p_{k-1}\neq q_1,q_2,...,q_k\}$.

Нека S е бесконечно множество прости броеви и $p_k\in S$. Тогаш, множеството $S\setminus\{p_k\}$ е бесконечно, па постојат $q_1,q_2,...,q_{k+1}\in S\setminus\{p_k\}$ и притоа ако

$$m=q_1q_2...q_kq_{k+1} \text{ и } n=q_1q_2...q_kp_k$$

добиваме $m\in A$ и $n\notin A$. Ако $p_k\notin S$, тогаш егзистенцијата на броевите m и n е очигледна.