

БАБИЛИЕРОВА ТЕОРЕМА

Во оваа статија ќе дадеме два докази (не така чести), од многу познатите, за една теорема позната како Вабилерова (Babilier) теорема.

Теорема. Во секој триаголник е точно равенството:

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r,$$

каде

- R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот,
- r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот,
- r_a, r_b, r_c се радиуси на припишаните кружници (тоа се кружници кои допираат една страна и продолженијата на другите две страни на триаголникот) на триаголникот.

Доказ 1. Во доказот ќе ги користиме познатите формули

$$r_a = \frac{P}{s-a}, \quad r_b = \frac{P}{s-b}, \quad r_c = \frac{P}{s-c}, \quad P = sr$$

каде s е полупериметар на триаголникот, т.е. $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Според претходните формули, ако на првите три ги собереме левите и десните страни соодветно го добиваме равенството:

$$r_a + r_b + r_c = P\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}\right),$$

и по средување на последниот израз, го добиваме равенството

$$r_a + r_b + r_c = \frac{s}{P}[3s^2 - s(2a + 2b + 2c) + bc + ac + ab] = \frac{s}{P}(-s^2 + ab + bc + ca).$$

Заради равенството $ab + bc + ca = r^2 + s^2 + 4Rr$ (кое лесно се докажува), конечно добиваме

$$r_a + r_b + r_c = \frac{s}{P}(-s^2 + r^2 + s^2 + 4Rr) = \frac{s}{sr} \cdot r(r + 4R) = r + 4R.$$

Последица. Заради $R \geq 2r$, добиваме дека $r_a + r_b + r_c \geq 9r$. (Докажи дека $R \geq 2r$).

Доказ 2. Претходно ќе ја докажеме точноста на равенствата (кои се интересни и само по себе)

$$\text{а) } \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + \frac{r}{R}$$

$$\text{б) } -\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r_a}{R} - 1,$$

$$\text{в) } \cos \alpha - \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r_b}{R} - 1,$$

$$\text{г) } \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = \frac{r_c}{R} - 1.$$

Ќе ја докажеме точноста на тврдењето под б). Од $abc = 4RP$ имаме $R = \frac{abc}{4P}$ и ако замениме во равенството

$$-\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r_a}{R} - 1,$$

добиваме $-\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1 = \frac{r_a}{\frac{abc}{4P}} \Leftrightarrow -\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1 = \frac{4r_a P}{abc}$ односно

го добиваме равенството

$$2abc(-\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1) = 8Pr_a.$$

Нека е $L = 2abc(-\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 1)$ и $D = 8Pr_a$. Заради косинусна теорема, равенствата

$$2bc \cos \alpha = -a^2 + b^2 + c^2, \quad 2ac \cos \beta = -b^2 + a^2 + c^2, \quad 2ab \cos \gamma = -c^2 + a^2 + b^2,$$

се точни при што

$$\begin{aligned} L &= -a(-a^2 + b^2 + c^2) + b(a^2 - b^2 + c^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) + 2abc \\ &= a^3 + a^2(b+c) - a(b^2 + c^2 - 2bc) - b^3 + b^2c + bc^2 - c^3 = (*) \end{aligned}$$

Ако го искористиме равенството

$$b^3 - b^2c - bc^2 + c^3 = (b-c)^2(b+c), \quad (*)$$

добиваме

$$\begin{aligned} (*) &= a^2(a+b+c) - (b-c)^2(a+b+c) = (a+b+c)[a^2 - (b-c)^2] \\ &= (a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 2s(2s-2b)(2s-2c) \\ &= 8s(s-b)(s-c) = \frac{8P^2}{s-a} = 8Pr_a = D. \end{aligned}$$

Да забележиме дека

$$\frac{8P^2}{s-a} = \frac{8r_a^2(s-a)^2}{s-a} = 8r_a(s-a)r_a = 8Pr_a.$$

На ист начин ги докажуваме и останатите две равенства в) и г). Сега имаме

$$-\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r_a}{R} - 1 \quad (1)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta + \cos \gamma = \frac{r_b}{R} - 1, \quad (2)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = \frac{r_c}{R} - 1. \quad (3)$$

Со собирање на равенствата (1), (2) и (3) добиваме

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{1}{R}(r_a + r_b + r_c) - 3$$

и заради равенството а), добиваме

$$1 + \frac{r}{R} = \frac{1}{R}(r_a + r_b + r_c) - 3 \Leftrightarrow R + r = r_a + r_b + r_c - 3R \Leftrightarrow r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

Во наредниот дел на статијата ќе разгледаме некои примени на оваа теорема.

Пример 1. За аглиите на остроаголен триаголник се точни неравенствата:

$$1) \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1,$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}.$$

Решение. Ќе го искористиме равенството $r_a + r_b + r_c = 4R + r$, $R \geq 2r$ и равенствата $r_a = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $r_b = s \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$, $r_c = s \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$, (провери ја точноста на овие равенства). Нека

$$S_1 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \text{ и } S_2 = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Непосредно, користејќи ги претходните равенства, добиваме

$$S_1 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r_a}{s} + \frac{r_b}{s} + \frac{r_c}{s} = \frac{r_a + r_b + r_c}{s} = \frac{4R + r}{s} \geq \frac{9s}{r} \quad (4)$$

Знак за равенство важи ако и само ако триаголникот е рамностран и заради тоа

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6} a = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{2}{3} s = \frac{\sqrt{3}}{9} s,$$

па заради тоа, ако замениме во (4), добиваме:

$$S_1 \geq \frac{9 \frac{\sqrt{3}}{9} s}{s} = \sqrt{3}.$$

Од точноста на равенството

$$S_1 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

со квадрирање добиваме

$$S_1^2 = S_2 + 2(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}),$$

и заради точноста равенството

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1$$

(докажи!) добиваме $S_1^2 = S_2 + 2$. Според тоа $S_2 = S_1^2 - 2 \geq (\sqrt{3})^2 - 2 = 1$.

Точноста на равенството (*) се добива од

$$\begin{aligned}
-b^3 + b^2c + bc^2 - c^3 &= bc(b+c) - (b^3 + c^3) = bc(b+c) - (b+c)(b^2 - bc + c^2) \\
&= (b+c)(bc - b^2 + bc - c^2) = -(b+c)(b^2 - 2bc + c^2) \\
&= -(b+c)(b-c)^2.
\end{aligned}$$

За крај на читателот му предлагам да докаже:

1. $r_a = \frac{P}{s-a}$, $P = sr$, $abc = 4RP$, $R \geq 2r$, $r_a = s \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ и

$$ab + bc + ca = r^2 + s^2 + 4Rr. \quad (**)$$

Доказ на ().**

$$\begin{aligned}
r^2 + s^2 + 4Rr &= \frac{P^2}{s^2} + s^2 + \frac{abc}{s} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2} + s^2 + \frac{abc}{s} \\
&= \frac{(s-a)(s-b)(s-c) + s^3 + abc}{s} \\
&= 2s^2 - s(a+b+c) + ab + bc + ca \\
&= 2s^2 - s \cdot 2s + ab + bc + ca \\
&= ab + bc + ca.
\end{aligned}$$

2. $r_a + r_b + r_c = 4R + r$, на уште некој начин.

3. $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \geq 1$ и $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$ каде α, β, γ се агли на остроаголен триаголник. Докажи на друг начин, различен од презентираниот овде.

4. Обопшти го, ако може, истиот проблем во простор (тетраедар и припишани топки).