5 и 6 ОДДЕЛЕНИЕ

<u>**Секоја од задачите со реден број од 1 до 10 се вреднува со 3 поени**</u>

1. Димитар направил плаката на која го запишал зборот КЕНГУРЧЕ. Тој секој ден цртал и боел по една буква. Почнал да работи во среда. Кој ден тој завршил со работа?

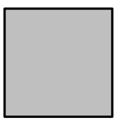
(A) понеделник (B) вторник (C) среда (D) четврток (E) петок

Решение. Зборот КЕНГУРЧЕ содржи 8 букви. Значи, почнувајќи од среда тој ќе пишува 8 дена. Според тоа, последната буква ќе ја запише во СРЕДА.

2. Еден мотрциклист растојанието од 28 km го минува за 30 min . Колку е неговата брзина на движење во km/h ?

(A) 28 (B) 36 (C) 56 (D) 58 (E) 62

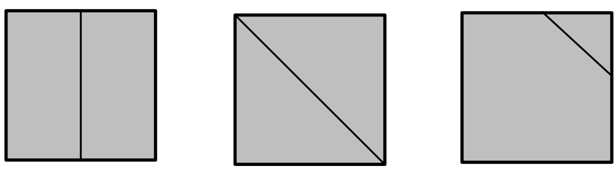
Решение. Ако за 30 min моторциклистот минува 28 km , тогаш за 1h=60 min тој ќе помине 56 километри. Според тоа, неговата брзина е 56 km/h

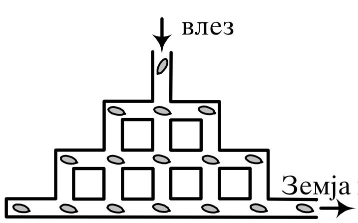


3. Лист хартија во облик на квадрат е поделен на два дела со повлекување на права линија. Која од следниве фигури не може да се добие со таквата поделба

(A) квадрат (B) правоаголник (C) правоаголентриаголник
(D) петаголник (E) рамнокрак триаголник

Решение. Од дадениот цртеж е очигледно дека не може да се добие квадрат.





4. Хрчакот Фридолин оди во Земјата на чудата. Пред да влезе во оваа легендарна земја, тој мора да помине низ систем на тунели прикажан на цртежот. Не му е дозволено два пати да помине по истиот пат или истата раскрсница. Во системот од тунели има семки од тиква.

Колку најмногу семки од тиква хрчакот Фридолин може да собере?

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

Решение. Со директна проверка се добива дека најголемиот број на семки кои тој може да ги собере е 13 .

Ако на првата раскрсница тој не сврти лево или десно, тогаш тој може да собере најмногу 6 односно 10 семки.

Ако на првата раскрсница сврти десно а потоа на наредната лево тој ќе собере девет семки.

Ако на првата раскрсница сврти десно а потоа на наредната пак десно тој може да собере 11 или 13 семки.

Слично се дискутира и случајот ако тој на првата раскрсница сврти лево.

5. Во Чудниот град, куќите од десната страна на улицата имаат непарни броеви. Жителите од чудниот град не ги употребуваат броевите кои ја содржат цифрата 3. Првата куќа на десната страна на улицата има број 1.
Кој е бројот на петнаесеттата куќа од десната страна на улицата?

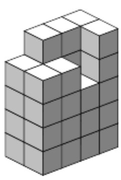
(A) 24 (B) 41 (C) 43 (D) 45 (E) 47

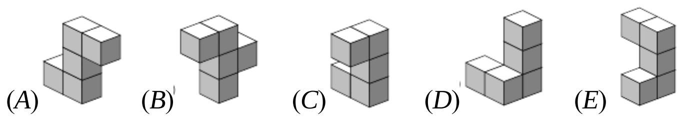
Решение.Според условите од задачата на десната страна од улицата броевите на куќите се означени со

1 5 7 9 11 15 17 19 21 25 27 29 41 45 47

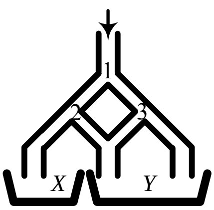
Значи бројот на петнаесеттата куќа е 47 .

6. Која од следниве фигури ќе го дооформи квадарот?





Решение. Очигледно е дека фигурите под A, B, C и . D не го комплетираат квадарот. Тоа единствено е можно само со фигурата E .



7. Вода се прочистува низ систем како што е прикажано на цртежот. На секое расчленување на цевките, количеството вода се дели на половина и продолжува да тече низ системот. Ако во системот истуриме 1000 литри вода, колку литри вода ќе се соберат во контејнерот Y ?

(A) 800 (B) 660 (C) 666,67 (D) 750 (E) 500

Решение. При првото делење 1 половина од водата ќе оди левата цевка а половина во десната цевка. При второто делење 2, половината ќе се подели на половина. Во контајнерот друг прилив, освен четвртина од водата нема.

Според тоа, во контајнерот X ќе се слеат 250 литри а во контајнерот Y останатите 750 литри вода.

8. Датата 01-03-05 (1 март 2005), се состои од три последователни непарни броеви, запишани во растечки редослед. Ова е првата ваква дата во 21-виот век. Вклучувајќи ја наведената дата, колку вкупно дати од 21-виот век го исполнуваат ова својство(редоследот е ден-месец-година).

(A) 5 (B) 6 (C) 16 (D) 13 (E) 8

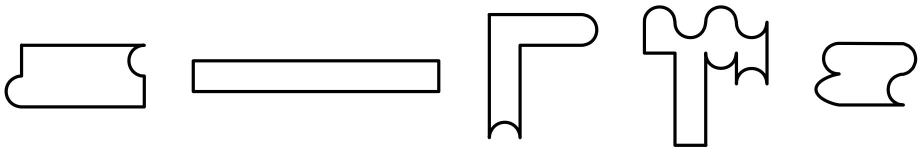
Решение. Дати кои го имаат тоа својство се

01.03.05 03.05.07 05.07.09 07.09.11 09.11.13

Повеќе такви дати нема, заради бројот на месеците.

9. Четирите картонски фигури прикажани на цртежот се спојуваат, без празнини и преклопување, и се добива нова фигура. Која од следниве

фигури не може да се добие на тој начин?



(A) (B) (C) (D) (E)

Решение. Не е тешко да се провери дека единствена фигура која не може да се направи од картонските парчиња е фигурате (E).

10. Ако мачката на Нина се излежува цел ден, тогаш пие 60ml млеко. Ако лови глувиња, тогаш пие една третина повеќе млеко. Во тек на последниве две недели, таа лови глувчиња секој втор ден. Колку млеко испила таа во последниве две недели?

(A) 840ml (B) 980ml (C) 1050ml (D) 1120ml (E) 1960ml

Решение. Бидејќи мачката на Нина ловела преку еден ден,, таа седум дена пиела по 60 ml млеко, а седум дена пиела по 80 ml . Значи, за тие 14 дена таа испила

$$7\cdot 60+7\cdot 80=420+560=980 \text{ ml}$$

млеко.

<u>**Секоја од задачите со реден број од 11 до 20 се вреднува со 4 поени**</u>

1	2
3	4
5	6
7	8

11. Виктор ги запишувал буквите од зборот KANGAROO во квадратчиња, во секое квадратче по една буква. Првата буква може да ја запише во било кое квадратче. Секоја следна буква ја запишува во квадратче кое има најмалку една заедничка точка со квадратчето во кое е запишана претходната буква. Која од следните табели Виктор не може да ја добие?

(A)

K	*A*
N	*O*
O	*G*
R	*A*

(B)

N	*G*
A	*A*
K	*R*
O	*O*

(C)

O	*O*
K	*R*
A	*A*
G	*N*

(D)

K	*A*
N	*G*
O	*O*
R	*A*

(E)

K	*O*
A	*O*
R	*N*
A	*G*

Решение. Квадратчињата ше ги означиме со броеви како на цртежот од 1 до 8 од горе надолу од лево кон десно. Тогаш имаме

(A):1 5 2 7 8 4 3 6

(B):5 3 2 1 5 6 7 8

(C):2 3 4 8 7 6 5 1

(E):1 2 7 8 4 3 6 5

Во случајот (D) таква низа од поврзани коцки не постои.

12. Сите четирицифрени броеви, составени од истите цифри како и бројот 2011 (една двојка, две единици и една нула)се запишани во опаѓачки редослед. Колку е разликата меѓу двата соседни броеви на 2011?

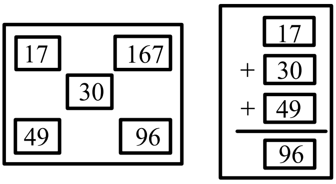
(A) 890 (B) 891 (C) 900 (D) 909 (E) 990

Решение. Четирицифренитге броеви запишани со цифрите $2,0,1,1$ запишани во опаѓачки редослед се

$$2110, 2101, 2011, 1210, 1201, 1120, 1102, 1021, 1012 .$$

Соседни броеви на 2011 се 2101 и 1210, а нивната разлика е

$$2101-1210=891 .$$



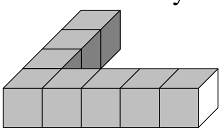
13. Четири од петте броја запишани во правоаголниците од левата страна на цртежот се преместени на десната страна, така да собирањето е точно.

Кој број ќе остане непреместен?

(A) 17 (B) 30 (C) 49 (D) 96 (E) 167

Решение. Не е тешко да се види дека единствено решение е предложеното, а непрефрлен ќе остане бројот 167 .

14. Нина употребила 36 идентични коцки за да направи ограда од коцки околу квадратен полигон. Дел од оградата е прикажана на цртежот.



Колку коцки и се потребни на Нина за да го пополни заградениот простор?

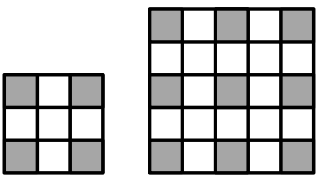
(A) 36 (B) 49 (C) 64 (D) 81 (E) 100

Решение. Надворешниот раб на квадратната ограда има 10 должински единици, а внатрешниот ран на оградата има 8 должински единици.

Според тоа, површината на заградената квадратна површина е

$$8\cdot 8=64 .$$

Значи, на заградената површина може да се стават 64 коцки.



15. Квадратни подови се покриваат со бели и црни плочки. Подови со 4 и со 9 црни плочки се прикажани на цртежот. Во секое ќоше има црна плочка и секоја црна плочка е заградена со бели плочки од сите страни.

Колку бели плочки се потребни за да се покрие под на кој се поставени 25 црни плочки?

(A) 25 (B) 39 (C) 45 (D) 56 (E) 72

Решение. Ако должината на страната на една плочка е 1, тогаш должината на страсната на подот во чие поплочување учествуваат има 25 црни плочки е 9. За негово поплочување се потребни 81 плочка. Бидејќи 25 се црни, бели плочки се

$$81-25=56 .$$

16. Димитар сакал еден цел број да го помножи со 301, но ја заборавил нулата и го помножил целиот број со бројот 31. Резултатот што го добил е 372. Кој резултат ќе го добиеше Димитар ако не погрешеше?

(A) 3010 (B) 3612 (C) 3702 (D) 3720 (E) 30720

Решение. Ако непознатиот број е x, тогаш бараниот број е $301 \cdot x$. Но,

$$x \cdot 31 = 372$$
$$x = 372 : 31 = 12 .$$

Значи, бараниот број е $12 \cdot 301 = 3612$.

17. На три натпревари тимот на "Барселона" постигнал 3 гола, а примил 1 гол. Во овие 3 натпревари, "Барселона" еднаш победила, еднаш играла нерешено и еднаш изгубила. Со кој резултат на "Барселона" победила?

(A) $2:0$ (B) $3:0$ (C) $1:0$ (D) $4:1$ (E) $0:1$

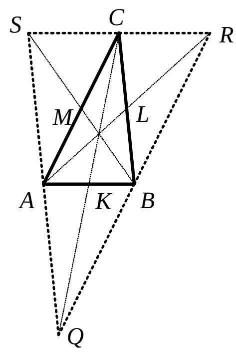
Решение. Бидејќи примила еден гол, единствен резултат со кој може да изгуби е $1:0$. Но тогаш единстве резултат кој е нерешен е $0:0$.

Сега, јасно е дека Барселона победила со $3:0$.

18. Дадени се три точки што формираат триаголник. Сакаме да додадеме уште една точка за да направиме паралелограм. На колку различни начини може да ја додадеме четвртата точка?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

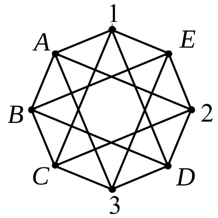
(E) зависи од почетниот триаголник



Решение. Нека ABC е триаголник и K,L,M се средини на страните AB,BC и CA соодветно. Тогаш AL,BM и CK се тежишни линии на триаголникот. Нека Q,R и S се точки кои лежат на полуправите AL,BM и CK такви што

$$\overline{AL} = \overline{LR}$$
$$\overline{BM} = \overline{MS}$$
$$\overline{CK} = \overline{KQ} .$$

Бидејќи паровите отсечки AB и CQ, AR и BC, AC и BS се половат, четираголниците $AQBC, ABRC, ABCS$ се паралелограми. Бидејќи точно две страни од триаголникот треба да се страни и на таквите можни паралелограми, најдените се единствени.



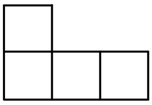
19. Броевите 1, 2, 3 и 4 треба да се запишат во секоја од 8-те обележани точки на дадената фигура(во секоја точка еден број) така што на краевите на секоја отсечка се запишани различни броеви. Три броеви се веќе запишани. Колку пати ќе биде запишан бројот 4?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Решение. Точките во кои не е запишан број ќе ги означиме со A,B,C,D и E. Точките A,C,D,E се краеви на отсечки во кои се запишани броевите $1,2,3$. Според тоа, тие ќе биодат краеви на отсечки во кои е запишан бројот 4.

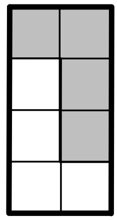
Во точката B може да е запишан било кој број од броевите $1,2,3$. Значи, бројот 4 ќе биде запишан четири пати.

Секоја од задачите со реден број од 21 до 30 се вреднува со 5 поени



20. Даниел сака да состави квадрат користејќи само фигури како на цртежот. Кој е најмалиот број фигури што тој мора да ги употреби?

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 16 (E) 20



Решение. Еден квадрат може да има $4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,...$ единечни квадратчиња (една фигура има пет единечни квадратчиња). За да биде направен од најмал број на плочки од облик даден на цртежот, тој треба да има 25 единечни квадратчиња или да има 100 единечни квадратчиа (број делив со 5).

За да се направи квадрат со 25 единечни квадратчиња, потребни се пет фигури. Ако се испишат сите можности за правење на ваков квадрат со пет фигуре ќе се види дека тоа не е можно.

Квадрат со страна 10 може да се направи со 20 фигури. Квадратот ше го поделиме на 10 дела секој од нив правоаголник со страни 2 и 5. Потоа секој таков правоаголник ќе се препокрие со фигура како на цртежот.

21. Во едно училиште за танцување има 10 ученици. Нивната учителка-ментор има 80 гумени бомбони. Таа на девојчињата им поделила по еднаков број на бомбони и и останале три бомбони. Колку момчиња има во училиштето?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 6

Решение. Учителката поделила $80-3=77$ бомбони. Бидејќи $77=7\cdot 11$ имало 11 девојчиња кои добиле по 7 бомбони, или имало 7 девојчиња кои добиле 11 бомбони. Бидејќи вкупно биле 10 ученици, во групата биле 7 девојчиња и 3 момчиња.

22. Мачка има 7 мачиња: бели, црни, црвени, бело-црни, бело-црвени, црно-црвени и бело-црно-црвени. На колку начини можат да се изберат 4 мачиња така што секои две од избраните да имаат заедничка боја?

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 7

Решение. Четири мачиња кои го исполнуваат условот на задачата е едно е еднобојно се

бело, бело-црно, бело-црвено, бело-црно-црвено

црно, бело-црно, црно-црвено, бело-црно-црвено

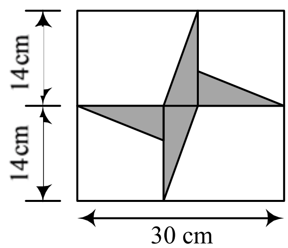
црвено, бело-црвено, црно-црвено, бело-црно-црвено

Други такви случаи нема.

Четири мачиња кои го исполнуваат условот на задачата, а меѓу нив нема еднобојно се

Бело-црно, бело-црвено, црно-црвено-бело-црно-црвено

Значи, тоа може да се направи на четири начини.



23. Во внатрешноста на правоаголник се наоѓаат четири складни правоаголни триаголници (види цртеж). Одреди ја вкупната плоштина на четирите триаголници.

(A) 46 cm^2 (B) 52 cm^2 (C) 54 cm^2 (D) 56 cm^2 (E) 64 cm^2

Решение. Едната катета на правоаголниот триаголник е 2 cm а другата катета е 14 cm .

Според тоа, плоштината на еден триаголник е

$$S=\frac{2\cdot 14}{2}=14\text{ cm}^2 .$$

Сега, плоштината на затемнетиот дел, односно на четирите триаголници заедно е

$$P=4S=4\cdot 14=56\text{cm}^2 .$$

24. Нина рекол Димитар е лажго. Димитар рекол дека Виктор е лажго. Виктор рекол вели Димитар е лажго. Јана рекла дека Нина е лажга.

Колку од децата се лажговци?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

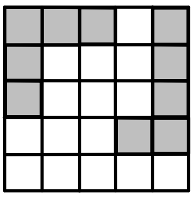
Решение. Ако Нина ја зборува вистината, тогаш Димитар е лажго. Ако Димитар е лажго, тогаш Виктор ја зборува вистината. Ако Нина ја зборува вистината, тогаш Јана е лажга.

Значи, во овој случај две деца ја зборуваат вистината, а две деца лажат.

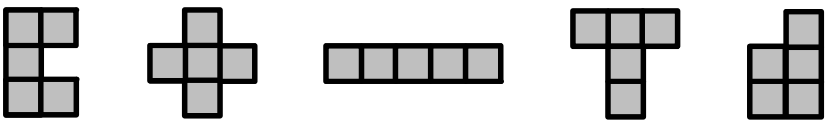
Ако Нина е лажга, тогаш таа лажи, па според тоа Димитар ја зборува вистината. Ако Димитар ја зборува вистината, тогаш Виктор е лажго. Но во тој случај Јана ја зборува вистината.

Во овој случај вистината ја зборуваат двајца, Јана и Димитар, а двајца лажат, Нина и Виктор.

Во секој случај, двајца од нив се лажговци, а двјца ја зборуваат вистината.

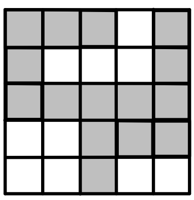


25. Илина поставила две фигури составени од по пет мали квадрати на квадратна плоча (види цртеж). Која од следниве пет фигури таа може да ја смести на празниот дел од таблата, така што не би имало место за ниту една од преостанатите четири фигури?



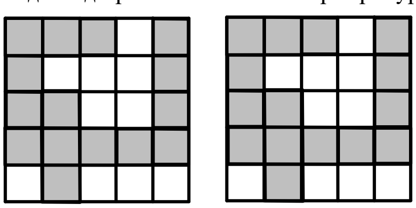
(A) (B) (C) (D) (E)

Решение. Ако ја ставиме фигурата под (D) како на цртежот, тогаш ниту една од



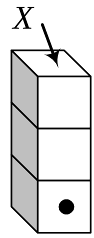
другите фигура не може да се постави.

Од друга страна, на пример како и да го поставиме крстот во празниот дел, секогаш може да се постави барем една од преостанатите четири фигури.



Слично се разгледуваат и другите фигури.

26. На цртежот се прикажани три правилни коцки, ставени една врз друга. Правилна коцка го има следново својство: збирот на точките на две спротивни страни е 7. Збирот на точките на секои две страни што се поклопуваат (допираат) е 5. Колку точки има на страната X ?



$(A)\,2$ $(B)\,3$ $(C)\,4$ $(D)\,5$ $(E)\,6$

Решение. Збирот на бројот на точки на две спротивни страни од коцката е 7. Значи, страната од најдолната коцка, која лежи на подот не може да е 1 и не може да е 6.

Значи, тоа може да биде страната која што има $2,5,3$ или 4 точки. Секој од овие случаи ќе го разгледаме одвоено.

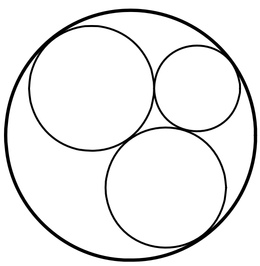
Случај 1. Ако има 5 точки, тогаш нејзината спротивна страна има 2 точки. Страната од средната коцка со која се допрени, според условот од задачата има 3 точки. Нејзината спротивна има 4 точки. Страната од горната коцка, со која е допрена на средната коцка , повторно според условот на задачтата има 1 точка. Најгорната страна има $x=6$ точки.

Случај 2. Ако има две точки, тогаш нејзината спротивна страна има 5 точки, што според условот на задачата не е можно.

Случај 3. Ако има 3 точки, тогаш нејзината спротивна страна има 4 точки, а според условот од задачата, страната од средната коцка со која се допираат има 1 точка. Нејзината спротивна страна има 6 точки, што не е можно според условот од задачата.

Случај 4. Ако има 4 точки, тогаш нејзината спротивна страна има 3 точки. Страната од средната коцка со која се допира до најдолната ќе има 2 точки, а нејзината спротивна страна ќе има 5 точки. Но тоа не е можно според условот од задачата.

Значи, на бараната страна има 6 точки.



27. На табла треба да се нацртаат четири кружници така што секои две од нив се допираат. Кој е најголемиот можен број на допирни точки за таквите четирите кружници?

$(A)\,1$ $(B)\,4$ $(C)\;5$ $(D)\,6$ $(E)\;8$

Решение. Очигледно е дека бараниот број е најголем ако и само ако се допираат точно попарно. Во тој случај бројот на допирни точки е 6. Тоа е можно според цртежот.

28. Во еден месец има 5 саботи, 5 недели, но само 4 петоци и 4 понеделници. Во следниот месец ќе има

(A) 5 среди (B) 5 четвртоци (C) 5 петоци (D) 5 саботи (E) 5 недели

Решение. За да во еден месец има 5 саботи, 5 недели, 4 петоци и 4 понеделници, со непосредна проверка се добива дека во тој месец има 30 дена и први е во сабота.

Тоа значи дека тоа не е месец јануари, а следниот месец не е февруари. Бидејќи месецот има 30 дена, наредниот месец има 31 ден и први е во понеделник. Тој ќе има 5 понеделници, 5 вторници, 5 среди и по 4 четвртоци, петоци, саботи и недели.

Значи, точен одговор е под $A)$, т.е. тој месец има 5 среди.

29. Дадени се четири позитивни броеви a, b, c и d такви што a < b < c < d. Кој од броевите треба да се зголеми за 1, така да производот на броевите по зголемувањето биде најмал?

(A) a (B) b (C) c (D) d (E) или b или c

Решение. Имаме четири можности за зголемување за единица и тоа

1° $a+1, b, c, d$

2° $a, b+1, c, d$

3° $a, b, c+1, d$

4° $a, b, c, d+1$

Ако ги пресметаме соодветните производи добиваме

$(a+1)bcd = abcd + bcd$

$a(b+1)cd = abcd + acd$

$ab(c+1)d = abcd + abd$

$abc(d+1) = abcd + abc$

Бидејќи $a < b < c < d$, имаме

$abc < abd < acd < bcd$.

Значи, производот е најмал ако бројот d го наголемиме за 1.

30. Колку броеви може да се формираат од цифрите $1,2,3,4$ и 5 употребувајќи ја секоја цифра само по еднаш, така што првата цифра е делива со 1, првите две цифри формираат број кој е делив со 2, првите три цифри образуваат број кој е делив со 3, првите четири цифри формираат број кој е делив со 4 а петцифрениот број е делив со 5.

(A) тоа не е можно (B) 1 (C) 2 (D) 5 (E) 10

Решение. Ако бројот е делив со 5, тој завршува со цифрата 5. Ако бројот е таков што првите четири цифри образуваат број делив со 4, тогаш бараниот број завршува на 325, 245, 125.

Броеви составени од цифрите $1,2,3,4,5$ во кој последните цифри се 325 се

14325

41325

Првите три цифри на овие броеви не формираат броеви деливи со 3.

Броеви кои се составени од цифрите $1,2,3,4,5$ а кои завршуваат на 245 се

13245

31245

Првите две цифри од овие два броеви не формираат броеви кои се деливи со 2.

Броеви составени од цифрите $1,2,3,4,5$ кои завршуваат на 125 се

43125

34125

Првите три цифри од овие броеви не се броеви деливи со 3.

Од разгледаните случаи гледаме дека ваква ситуација не е можна.