Ирена Стојменовска
Скопје

НЕИСПРАВНА МОНЕТА

Повод за оваа статија е следната добро позната задача:

Во купче со n **наизглед еднакви монети точно една е со различна тежина од другите, полесна или потешка, што не ни е познато. Одредете го минималниот број мерења со вага без тегови и постапката со која се констатира која монета се разликува по тежина и дали е потешка или полесна од останатите манети.**

Ќе докажеме дека со **две мерења** може да се констатира која **од три монети** се разликува по тежина и дали таа е потешка или полесна од останатите две монети. Тоа може да се постигне со следната постапка.

Прво мерење. Се споредуваат било кои две монети. Можен е еден од следните два случаи:

а) монетите се во рамнотежа, и
б) монетите не се во рамнотежа.

Второ мерење. Во првиот случај третата монета се разликува по тежина од првите две. За да констатираме дали е потешка или полесна треба да ја споредиме со една монета од првото мерење.

Во вториот случај третата монета има еднаква тежина со една монета од првото мерење. Тогаш втората монета е потешка ако во првото мерење била на потешката страна, а полесна ако била на полесната страна. Ако ја споредиме третата монета со една од монетите кои учествувале во првото мерење, тогаш можен е еден од следните два случаи:

б1) монетите се во рамнотежа, и

б2) монетите не се во рамнотежа.

Во првиот случај монетата која не учествуваше во второто мерење е потешка од останатите монети, ако во првото мерење била на потешката страна, а е полесна од останатите монети ако била на полесната страна.

Во вториот случај монетата која учествуваше во двете мерења и двата пати беше на потешката страна, потешка е од останатите монети, а ако двата пати беше на полесната страна тогаш е полесна од останатите две монети.

Сега проблемот да го разгледаме кога имаме **четири монети**, три од кои се со иста тежина. Комбинирајќи ги сите споредувања кои можат да се направат со помош на **две мерења** можеме да констатираме дека **не сме во состојба да одредиме** која монета се разликува по тежина и дали е полесна или потешка од останатите три монети. Ако со две мерења не можеме проблемот да го решиме кога имаме четири монети, тогаш, јасно, со две мерења проблемот не можеме да го решиме кога имаме повеќе од четири монети.

Ќе докажеме дека за $3 < n \leq 12$, со n е означен бројот на монетите, проблемот може да се реши со помош на **три** мерења. Доволно е тоа да се констатира за $n = 12$, $\left(12 = 3 + 3^2\right)$.

Прво мерење. Споредуваме по четири монети. Можни се следните случаи:

а) монетите не се во рамнотежа, и

б) монетите се во рамнотежа.

Второ мерење. а) Споредуваме по три монети, од кои по две монети во претходното мерење биле на потешката страна и по една на полесната страна. Можни се следните два случаи:

а1) монетите не се во рамнотежа,

а2) монетите се во рамнотежа.

б) Споредуваме три монети кои не учествувале со три монети кои учествувале во првото мерење. Можни се следните два случаи:

б1) монетите не се во рамнотежа, и

б2) монетите се во рамнотежа.

Трето мерење. а1) Ги споредуваме двете монети кои биле на потешката страна во двете претходни мерења. Потешката од овие две монети е потешка и од сите останатите монети. Ако овие две монети се во рамнотежа, тогаш монетата која во претходните две мерења била на полесната страна е полесна од сите останати монети.

а2) Ги споредуваме преостанатите две монети од првото мерење, кои не учествуваа во второто мерење. Полесната од овие две монети е полена и од сите останати монети.

б1) Споредуваме две од трите монети, кои учествувале само во второто мерење. Да претпоставиме дека овие монети во второто мерење биле на потешката страна. Монетата која во последните две мерења била на потешката страна потешка е од сите останати монети. Ако овие две монети се во рамнотежа, тогаш третата монета која учествувала само во второто мерење е потешка од сите останати монети. Аналогно се заклучува ако се претпостави дека монетите кои учествувале во ова мерење биле на полесната страна во второто мерење.

б2) Ја споредуваме монетата која не учествувала во првите две мерења со било која монета и наоѓаме дали е полесна или потешка од сите останати.

Слично, за $12 < n \leq 39$ проблемот може да сеши со **четири мерења**. Доволно е тоа да се констатира за $n = 39$, $\left(39 = 3 + 3^2 + 3^3\right)$. Притоа во првото мерење се споредуваат по 13 монети, во второто по 9, во третото по 3 и во четвртото по 1 монета.

Од досега изнесеното може да се наслути дека за

$$\frac{3^{k-1}-3}{2} < n \le \frac{3^k-3}{2}, \ (k=3,4,\ldots)$$

проблемот може да се реши со k мерења. Доволно е да се докаже дека тоа може да се постигне за

$$n = \frac{3^k-3}{2}, \ (k=2,3,4,\ldots).$$

Веќе покажавме дека тврдењето е точно за $k=2$ и $k=3$.

Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $k-1$ и k. Да докажеме дека тврдењето е точно и за $k+1$. Да ги разгледаме првите три мерења.

Прво мерење. Споредуваме по

$$\frac{3^k-1}{2}$$

монети. Тогаш, можни се следните два случаи:

а) монетите не се во рамнотежа, и

б) монетите се во рамнотежа.

Второ мерење. а) Споредуваме по 3^{k-1} монета, од кои по 3^{k-2} монети во претходноот мерење биле на полесната страна и по $2\cdot 3^{k-2}$ биле на потешката страна. Можни се следните два случаи:

а1) монетите не се во рамнотежа, и

а2) монетите се во рамнотежа.

б) Споредуваме 3^{k-1} монети кои не учествувале во првото мерење со исто толку монети кои учествувале во првото мерење. Тогаш, можни се следните два случаи:

б1) монетите не се во рамнотежа, и

б2) монетите се во рамнотежа.

Трето мерење. а1) Споредуваме по 3^{k-2} монети кои во двете претходни мерења биле на потешката страна. Ако монетите не се во рамнотежа, тогаш меѓу 3^{k-2} монети кои во ова мерење се наоѓаат на потешката страна се наоѓа монетата која е потешка од сите останати монети. Со следните $k-2$ мерења, во кои секогаш учествуваат трипати помалку монети отколку во претходното мерење, се добива монетата која е потешка од сите останати монети. Ако во третото мерење настапила рамнотежа, тогаш меѓу 3^{k-2} монети кои во претходното мерење биле на полесната страна се наоѓа и монетата која е полена од сите останти монети, па на ист начин со следните $k-2$ мерења се издвојува оваа монета.

а2) Споредуваме по 3^{k-2} монети кои во првото мерење биле на полесната страна и не учествувале во второто мерење. Ако монетите не се во рамнотежа, тогаш меѓу оние 3^{k-2} монети кои во ова мерење биле на полесната страна се наоѓа и монетата која е полесна од сите останати монети и истата очигледно може да се најде со следните $k-2$ мерења, во кои секогаш учествуваат по трипати помалку монети отколку во претходното мерење. Ако во третото мерење настапила рамнотежа, тогаш меѓу преостанатите $\frac{3^{k-2}-1}{2}$ монети кои во првото мерење биле на потешката страна и не учествувале во следните две мерења се наоѓа монетата која е потешка од сите останати монети, или меѓу исто толку монети кои во првото мерење биле на полесната страна и не учествувале во останатите две мерења се наоѓа монета која е полесна од останатите монети. Истата состојба се јавува и во случајот $n=\frac{3^{k-1}-3}{2}$ после првото мерење, ако монетите не се во рамнотежа, па, по претпоставка, во следните $k-2$ мерења може да се пронајде монетата која се разликува од останатите монети и да се констатира дали е потешка или е полесна од останатите монети.

б1) Нека монетите кои учествувале во второто мерење, а не учествувале во првото мерење се наоѓаат на потешката страна во второто мерење. Тогаш меѓу овие 3^{k-1} монети се наоѓа монета која е потешка од сите останати монети. Во третото мерење споредуваме по 3^{k-2} монети од ова множество. Ако монетите се во рамнотежа, тогаш меѓу преостанатите 3^{k-2} монети на споменатото множество се наоѓа монетата која е потешка од сите останати монети. Ако монетите не се во рамнотежа, тогаш меѓу 3^{k-2} монети кои во ова мерење се на потешката страна се наоѓа монетата која е потешка од сите останатите. Во двата случаи со следните $k-2$ мерења во кои секогаш учествуваат трипати помалку монети отколку во претходното мерење, се наоѓа монетата која е потешка од сите останати. Слично се изведуваат заклучоците ако се претпостави дека монетите кои учествувале во второто мерење и не учествувале во првото мерење се наоѓаат на полесната страна во второто мерење.

б2) Споредуваме 3^{k-2} монети кои не учествувале во претходното мерење со исто толку монети кои учествувале во првото мерење. Ако монетите не се во рамнотежа, тогаш меѓу оние 3^{k-2} монети кои првпат учествуваат во ова мерење се наоѓа монетата која во тежина се разликува од останатите монети. Тогаш со следните $k-2$ мерења, при што секогаш учествуваат трипати помалку монети отколку во претходното мерење се наоѓа монетата која се разликува според тежината и се констатира дали таа е полесна или е потешка од останатите монети. Ако во следното мерење настапила рамнотежа, тогаш меѓу преостанатите $\frac{3^{k-2}-1}{2}$ монети кои не учествувале во претходното мерење се наоѓа монетата која се разликува според тежината од останатите монети. Иста состојба се јавува во случајот $n=\frac{3^{k-1}-3}{2}$ после првото мерење ако се монетите во рамнотежа, па по претпоствка, со следните $k-2$ мерења може да се најде монетата и да се констатира дали таа е полесна или е потешка.