

НЕРАВЕНСТВО НА *BERNOULI*

Во оваа статија ќе го разгледаме неравенството на Бернули и неговата примена при докажување на неравенства.

Теорема (Неравенство на *Bernouli*): Ако $x_1, x_2, \dots, x_n$ се реални броеви со ист знак и поголеми од (-1) , тогаш

$$(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Доказ: За $n = 1$ го добиваме точното неравенство $1 + x_1 \geq 1 + x_1$. Претпоставуваме дека тврдењето е точно за $n = k$, т.е. за произволни реални броеви $x_1, x_2, \dots, x_k$, со ист знак и поголеми од (-1) , важи неравенството

$$(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k.$$

Ќе докажеме дека неравенството важи и за природниот број $n = k + 1$. Нека $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ се произволни реални броеви со ист знак и поголеми од (-1) . Тогаш

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)x_{k+1} \geq 0 \text{ и } 1 + x_{k+1} \geq 0.$$

Имајќи ја во предвид индуктивната претпоставка, добиваме дека

$$\begin{aligned} (1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) &\geq (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k)(1 + x_{k+1}) = \\ &= 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} + (x_1 + x_2 + \dots + x_k)x_{k+1} \geq \\ &1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1}. \end{aligned}$$

Значи неравенството важи и за природниот број $n = k + 1$. Според принципот на математичка индукција, неравенството важи за секој $n \in \mathbb{N}$ и секои реални броеви $x_1, x_2, \dots, x_n$ со ист знак и поголеми од (-1) .

Забелешка 1: Ако $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ и $x > -1$, тогаш неравенството на *Bernouli* гласи

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \text{ за секој } n \in \mathbb{N}.$$

Забелешка 2: Нека $x > -1$. Тогаш:

а) $(1 + x)^r \geq 1 + rx$, за секој $r \in \mathbb{Q}$, $r \geq 1$;

б) $(1 + x)^r \leq 1 + rx$, за секој $r \in \mathbb{Q}$, $0 \leq r < 1$,

Доказ: **а)** Нека $r = \frac{p}{q}$, $p \geq q$, $p, q \in \mathbb{N}$. Тогаш неравенството гласи

$$(1 + x)^{\frac{p}{q}} \geq 1 + \frac{p}{q}x. \text{ Ова неравенство е еквивалентно со неравенството}$$

$$1+x \geq \sqrt[p]{\left(1+\frac{p}{q}x\right)^q}, \text{ т.е. со } 1+x \geq \sqrt[p]{\left(1+\frac{p}{q}x\right)^q \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{(p-q)-\text{пати}}}.$$

Ќе го докажеме ова неравенство. Со тоа ќе биде докажано и даденото. Со примена на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме дека

$$\sqrt[p]{\left(1+\frac{p}{q}x\right)^q \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{(p-q)-\text{пати}}} \leq \frac{\left(1+\frac{p}{q}x\right)q + (p-q)}{p} = \frac{p(x+1)}{p} = 1+x,$$

што требаше да се докаже.

б) Нека $r = \frac{p}{q}$ и $p < q$, $p, q \in \mathbb{N}$. Тогаш

$$(1+x)^r = (1+x)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(1+x)^p \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{(q-p)-\text{пати}}} \leq \frac{(1+x)p + (q-p)}{q} = 1+rx.$$

Со тоа и неравенството **б)** е докажано.



№ 1. Докажи дека $4^{79} < 2^{100} + 3^{100} < 4^{80}$.

Решение: Прво ќе го докажеме неравенството $2^{100} + 3^{100} < 4^{80}$. Бидејќи $2 \cdot 3^{100} = 3^{100} + 3^{100} > 2^{100} + 3^{100}$, доволно е да докажеме дека $4^{80} > 2 \cdot 3^{100}$, т.е.

$$\left(\frac{4^4}{3^5}\right)^{20} > 2, \text{ односно } \left(\frac{256}{243}\right)^{20} > 2. \text{ Бидејќи}$$

$$\frac{256}{243} = 1 + \frac{256}{243} - 1 = 1 + \frac{13}{243} > 1 + \frac{1}{20},$$

според неравенството на *Bernoulli* имаме дека

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{20} > \left(1 + \frac{1}{20}\right)^{20} \geq 1 + 20 \cdot \frac{1}{20} = 2.$$

За доказ на неравенството $2^{100} + 3^{100} > 4^{79}$, доволно е да докажеме дека $3^{100} > 4^{79}$, т.е. $4 \cdot 3^{100} > 4^{80}$. Од

$$\frac{4^{80}}{3^{100}} = \left(\frac{256}{243}\right)^{20} < \left(\frac{19}{18}\right)^{20} = \left(\frac{361}{324}\right)^{10} < \left(\frac{9}{8}\right)^{10} = \left(\frac{81}{64}\right)^5 < \left(\frac{9}{7}\right)^5 = \frac{59049}{16807} < 4,$$

добиваме дека $4 \cdot 3^{100} > 4^{80}$. Со тоа неравенството е докажано.

№ 2. Нека $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, такви што $a + b + c = 1$. Докажи дека

$$a \cdot \sqrt[3]{1+b-c} + b \cdot \sqrt[3]{1+c-a} + c \cdot \sqrt[3]{1+a-b} \leq 1.$$

Решение: Бидејќи $r = \frac{1}{3} \in [0,1]$, според неравенството на *Bernoulli* добиваме

$$\begin{aligned} & a \cdot \sqrt[3]{1+b-c} + b \cdot \sqrt[3]{1+c-a} + c \cdot \sqrt[3]{1+a-b} = \\ & a(1+b-c)^{\frac{1}{3}} + b(1+c-a)^{\frac{1}{3}} + c(1+a-b)^{\frac{1}{3}} \leq \\ & \leq a\left(1 + \frac{1}{3}(b-c)\right) + b\left(1 + \frac{1}{3}(c-a)\right) + c\left(1 + \frac{1}{3}(a-b)\right) = a+b+c = 1. \end{aligned}$$

Еднаквост важи кога $a = b = c = 3^{-1}$.

№ 3. Докажи дека за произволни природни броеви m и n важи неравенството

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} > 1.$$

Решение: Ако некој од броевите m и n е еднаков на 1, неравенството е точно. Затоа претпоставуваме дека $m > 1$ и $n > 1$. Тогаш важи $\sqrt[n]{m} = 1 + u$ и $\sqrt[m]{n} = 1 + v$, за некои позитивни реални броеви u и v . Според неравенството на *Bernoulli* имаме дека

$$m = (1+u)^n > 1 + nu \quad \text{и} \quad n = (1+v)^m > 1 + mv, \text{ односно } u < \frac{m-1}{n} \quad \text{и} \quad v < \frac{n-1}{m}.$$

Оттука следува дека $1+u < \frac{m+n-1}{n}$ и $1+v < \frac{m+n-1}{m}$. Конечно,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} = \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} > \frac{n}{m+n-1} + \frac{m}{m+n-1} = \frac{m+n}{m+n-1} > 1.$$

№ 4. Докажи дека ако p и q се позитивни реални броеви такви што $p+q=2$, тогаш

$$3p^q q^p + p^p q^q \leq 4.$$

Решение: Бидејќи $p, q \in \mathbb{R}^+$ и $p+q=2$, може да претпоставиме дека

$$2 > p \geq 1 \geq q > 0. \text{ Со примена на неравенството на } \textit{Bernoulli} \text{ за } 1+x = \frac{p}{q} \text{ и } r = \frac{p}{2}$$

добиваме дека

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{2}} \leq 1 + \frac{p}{2}\left(\frac{p}{q} - 1\right) = 1 + \frac{p^2}{2q} - \frac{p}{2} = \frac{2q + p^2 - pq}{2q} = \frac{p^2 + q(2-p)}{2q} = \frac{p^2 + q^2}{2q}.$$

$$\text{Оттука } q\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{2}} \leq \frac{p^2 + q^2}{2}, \text{ односно}$$

$$q^2 \frac{p^p}{q^p} \leq \frac{(p^2 + q^2)^2}{4}, \text{ т.е. } q^{2-p} p^p \leq \frac{(p^2 + q^2)^2}{4}.$$

Но по услов $q = 2 - p$, па $p^p q^q \leq \frac{(p^2 + q^2)^2}{4}$.

Слично, со примена на неравенството на *Bernouli* за $1 + x = \frac{q}{p}$ и $r = \frac{p}{2}$ добиваме

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{2}} \leq 1 + \frac{p}{2} \left(\frac{q}{p} - 1\right) = 1 + \frac{q}{2} - \frac{p}{2} = \frac{2 + q - p}{2} = \frac{p + q + q - p}{2} = q.$$

Со квадрирање добиваме $\frac{q^p}{p^p} \leq q^2$, односно

$$\frac{q^p p^2}{p^p} \leq q^2 p^2, \quad q^p p^{2-p} \leq p^2 q^2, \quad \text{т.е.} \quad q^p p^q \leq p^2 q^2.$$

Следува дека

$$\begin{aligned} 3p^q q^p + p^p q^q &\leq 3p^2 q^2 + \frac{(p^2 + q^2)^2}{4} = \frac{12p^2 q^2 + p^4 + 2p^2 q^2 + q^4}{4} = \\ &= \frac{p^4 + 14p^2 q^2 + q^4}{4} = \frac{p^4 + 6p^2 q^2 + q^4 + 4pq(2pq)}{4} \leq \\ &\leq \frac{p^4 + 6p^2 q^2 + q^4 + 4pq(p^2 + q^2)}{4} = \\ &= \frac{p^4 + 4p^3 q + 6p^2 q^2 + 4pq^3 + q^4}{4} = \frac{(p + q)^4}{4} = 4. \end{aligned}$$

Во неравенството $2pq \leq p^2 + q^2$ еднаквост важи ако и само ако $p = q$, но поради условот $p + q = 2$, добиваме дека во даденото неравенство еднаквост важи кога $p = q = 1$.

№ 5. Нека $x, y \in R^+$ такви што $x^y + y = y^x + x$. Докажи дека $x + y \leq 1 + xy$.

Решение: Без губење на општоста, нека $x \geq y$. Претпоставуваме спротивно, т.е. нека $x + y > 1 + xy$. Тогаш

$$(x - 1) + y(1 - x) > 0,$$

$$(x - 1) - y(1 + x) > 0,$$

$$(x - 1)(1 - y) > 0, \text{ т.е.}$$

$$(1 - x)(1 - y) < 0 \quad (*)$$

Од (*) следува дека $x > 1$ и $0 < y < 1$ (т.е. $x > 1 > y > 0$). Неравенството на *Bernouli* гласи:

- Ако $a > 1$ и $b > -1$, тогаш $(1 + b)^a > 1 + ab$;

- Ако $0 < a < 1$ и $b > 0$, тогаш $(1 + b)^a < 1 + ab$.

Според тоа

$$y^x = (1 + (y-1))^x > 1 + x(y-1) \text{ и}$$

$$x^y = (1 + (x-1))^y < 1 + y(x-1), \text{ т.е. } -(1 + (x-1))^y > -1 - y(x-1).$$

Ги собираме двете неравенства и добиваме

$$(1 + (y-1))^x - (1 + (x-1))^y > 1 + x(y-1) - 1 - y(x-1),$$

$$(1 + (y-1))^x + 1 + y(x-1) > (1 + (x-1))^y + 1 + x(y-1),$$

$$y^x + yx - y > x^y + xy - x,$$

$$y^x - y > x^y - x,$$

односно

$$x^y + y < y^x + x,$$

што е во спротивност со направената претпоставка. Значи $x + y \leq 1 + xy$.

№ 6. Нека $a, b \in R^+$, $a \neq b$, такви што $(a-1)(b-1) \geq 0$. Докажи дека

$$a^b + b^a \geq 1 + ab + (1-a)(1-b) \min\{1, ab\}.$$

Решение: Претпоставуваме дека $0 < a < 1$. Тогаш и $0 < b < 1$. Нека $a = 1 - r$ и $b = 1 - s$, каде што $0 < r < 1$ и $0 < s < 1$. Бидејќи во овој случај $\min\{1, ab\} = ab$, десната страна на неравенството е

$$\begin{aligned} 1 + ab + (1-a)(1-b)ab &= 1 + ab(1 + (1-a)(1-b)) = \\ &= 1 + (1-r)(1-s)(1+rs). \end{aligned}$$

Според неравенството на *Bernoulli* имаме дека $(1-r)^s \leq 1 - rs$ и $(1-s)^r \leq 1 - rs$, па

$$\begin{aligned} a^b + b^a &= (1-r)^{1-s} + (1-s)^{1-r} = \frac{1-r}{(1-r)^s} + \frac{1-s}{(1-s)^r} \geq \\ &\geq \frac{1-r}{1-rs} + \frac{1-s}{1-rs} = \frac{1-r+1-s}{1-rs} = \frac{1-rs+rs-r+1-s}{1-rs} = 1 + \frac{rs-r+1-s}{1-rs} = \\ &= 1 + \frac{r(s-1)-(s-1)}{1-rs} = 1 + \frac{(r-1)(s-1)}{1-rs} = 1 + \frac{(1-r)(1-s)}{1-rs} > \\ &> 1 + (1-r)(1-s)(1+rs) = 1 + (1-r)(1-s) + (1-r)(1-s)rs = \\ &= 1 + ab + ab(1-a)(1-b). \end{aligned}$$

Овде го применивме и неравенство $\frac{1}{1-rs} > 1 + rs$, кое што е еквивалентно со точното неравенство $rs > 0$.

Претпоставуваме дека $a \geq 1$. Тогаш и $b \geq 1$. Ставаме $a = 1 + r$ и $b = 1 + s$, каде што $r \geq 0$ и $s \geq 0$. Бидејќи во овој случај $\min\{1, ab\} = 1$, десната страна на неравенството е

$$1 + ab + (1-a)(1-b) \cdot 1 = 1 + (1+r)(1+s) + rs = 2rs + r + s + 2.$$

Според неравенството на *Bernouli* имаме дека

$$(1+r)^{1+s} \leq 1+r(1+s) \text{ и } (1+s)^{1+r} \leq 1+s(1+r).$$

Ги собираме последните две неравенства и добиваме

$$a^b + b^a \geq 1+r(1+s) + 1+s(1+r) = 2rs + r + s + 2rs,$$

што требаше да се докаже.

Во даденото неравенство знакот за еднаквост важи кога $a = b = 1$.

№ 7. Нека $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^+$ и $x_i \in (0,1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Докажи дека

$$\sqrt[2]{1+x_1} \cdot \sqrt[3]{1+x_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{1+x_n} \geq 2^n.$$

Решение: Бидејќи $x_i \in (0,1)$, имаме дека $\frac{1}{x_i} > 1$, за секој $i = 1, 2, \dots, n$. Со при-

мена на неравенството на *Bernouli* и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned} (1+x_1)^{\frac{1}{x_1}} \cdot (1+x_2)^{\frac{1}{x_2}} \cdot \dots \cdot (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} &\geq \left(1+\frac{x_1}{x_2}\right) \cdot \left(1+\frac{x_2}{x_3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1+\frac{x_n}{x_1}\right) \geq \\ &\geq 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \cdot 2\sqrt{\frac{x_2}{x_3}} \cdot \dots \cdot 2\sqrt{\frac{x_n}{x_1}} = 2^n. \end{aligned}$$

№ 8. Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ се реални броеви поголеми или еднакви на $\frac{1}{2}$. Докажи

дека

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{2x_1}{3}\right)^{x_1} \cdot \left(1+\frac{2x_2}{3}\right)^{x_2} \cdot \dots \cdot \left(1+\frac{2x_n}{3}\right)^{x_n} &\geq \\ &\geq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{(x_1+x_2) \cdot (x_2+x_3) \cdot \dots \cdot (x_{n-1}+x_n) \cdot (x_n+x_1)}. \end{aligned}$$

Решение: Од $x_i \geq \frac{1}{2}$ имаме дека $2x_i \geq 1$, за секој $i = 1, 2, \dots, n$. Според неар-

венството на *Bernouli* за секој $i = 1, 2, \dots, n$ имаме

$$\left(1+\frac{2x_i}{3}\right)^{2x_i} \geq 1+2x_i \frac{2x_i}{3} = 1+\frac{4}{3}x_i^2 = \frac{4}{3}\left(x_i^2 + \frac{3}{4}\right) \quad (*)$$

Од друга страна, според неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, за броевите m и n имаме дека

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(m^2 + \frac{3}{4}\right)\left(n^2 + \frac{3}{4}\right)} &= \sqrt{\left(m^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4} + n^2 + \frac{1}{2}\right)} \geq m\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{m}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{m+n}{2} + \frac{1}{2} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{m+n}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{m+n}, \end{aligned}$$

односно $\left(m^2 + \frac{3}{4}\right)\left(n^2 + \frac{3}{4}\right) \geq m + n$. Ова неравенство го применуваме на броевите x_i и x_{i+1} , за секој $i = 1, 2, \dots, n$ и добиваме

$$\left(x_1^2 + \frac{3}{4}\right)\left(x_2^2 + \frac{3}{4}\right) \geq x_1 + x_2,$$

$$\left(x_2^2 + \frac{3}{4}\right)\left(x_3^2 + \frac{3}{4}\right) \geq x_2 + x_3,$$

$$\left(x_3^2 + \frac{3}{4}\right)\left(x_4^2 + \frac{3}{4}\right) \geq x_3 + x_4,$$

$$\dots\dots\dots \left(x_n^2 + \frac{3}{4}\right)\left(x_{n+1}^2 + \frac{3}{4}\right) \geq x_n + x_{n+1} = x_n + x_1,$$

каде што $x_{n+1} = x_1$. Ги множиме овие неравенства и добиваме

$$\left(x_1^2 + \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(x_2^2 + \frac{3}{4}\right)^2 \cdot \dots \cdot \left(x_n^2 + \frac{3}{4}\right)^2 \geq (x_1 + x_2) \cdot (x_2 + x_3) \cdot \dots \cdot (x_n + x_1).$$

Но поради (*) имаме дека за секој $i = 1, 2, \dots, n$,

$$x_i^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4} \left(1 + \frac{2x_i}{3}\right)^{2x_i}, \text{ т.е. } \left(x_i^2 + \frac{3}{4}\right)^2 \leq \left(\frac{3}{4} \left(1 + \frac{2x_i}{3}\right)^{2x_i}\right)^2,$$

па затоа

$$\left(\frac{3}{4} \left(1 + \frac{2x_1}{3}\right)^{2x_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4} \left(1 + \frac{2x_2}{3}\right)^{2x_2}\right)^2 \cdot \dots \cdot \left(\frac{3}{4} \left(1 + \frac{2x_n}{3}\right)^{2x_n}\right)^2 \geq \\ \geq (x_1 + x_2) \cdot (x_2 + x_3) \cdot \dots \cdot (x_n + x_1),$$

т.е.

$$\left(1 + \frac{2x_1}{3}\right)^{x_1} \cdot \left(1 + \frac{2x_2}{3}\right)^{x_2} \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2x_n}{3}\right)^{x_n} \geq \\ \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{(x_1 + x_2) \cdot (x_2 + x_3) \cdot \dots \cdot (x_{n-1} + x_n) \cdot (x_n + x_1)}.$$

Литература

1. Gh. Andrei, I. Cucurezanu, C. Caragea, Gh. Bordea; Algebra, Constanta, 1990.
2. Mathematical Reflections 3 (2007).
3. Сигма бр. 88, Подготвителни задачи за математички натпревари.