

Р. Малчески, А. Малчески, Скопје

ПРЕСЛИКУВАЊА ВО РАМНИНА ПРЕКУ КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ II

(Продолжение!)

2.3. Нека е дадена права (p) со својата автокоњугирана равенка (1) и точка z_0 . Ако равенката (1) ја запишеме во обликот $z = -\frac{B}{A}\bar{z} - \frac{C}{A}$, тогаш комплексниот аглив коефициент на произволна права, нормална на (p), е $\eta' = \frac{B}{A}$. Значи, равенката на правата (q) која минува низ точката z_0 и е нормална на правата (p) е

$$z - z_0 = \frac{B}{A}(\bar{z} - \bar{z}_0),$$

односно

$$Az - B\bar{z} - z_0A + \bar{z}_0B = 0. \quad (2)$$

Ако ги собереме равенките (1) и (2), тогаш за пресечната точка на правите (p) и (q), т.е. за проекцијата на z_0 врз правата (p) добиваме $2Az' = Az_0 - B\bar{z}_0 - C$, односно $z' = \frac{Az_0 - B\bar{z}_0 - C}{2A}$. Според тоа,

$$z_0 - z' = \frac{Az_0 + B\bar{z}_0 + C}{2A},$$

па затоа **растојанието** од точката z_0 до правата (p), зададена со нејзината автокоњугирана равенка (1) е

$$d(z_0, (p)) = \frac{|Az_0 + B\bar{z}_0 + C|}{|2A|}.$$

3. РАВЕНКА НА КРУЖНИЦА

3.1. Како што знаеме $|z - z_0| = R$ е равенка на кружница со центар во точката S , со афикс z_0 , и радиус R . Во овој параграф подетално ќе се осврнеме на кружницата во комплексната рамнина.

3.2. Пример. Нека P_1 и P_2 се произволни точки во комплексната рамнина со афикси z_1 и z_2 , соодветно. Докажете дека кружницата опишана над отсечката P_1P_2 , како над дијаметар има равенка

$$|2z - z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|. \quad (1)$$

Решение. Бидејќи радиусот на кружницата опишана над P_1P_2 , како над дијаметар, е $R = \frac{|z_1 - z_2|}{2}$, а нејзиниот центар P_0 е средина на отсечката P_1P_2 , со афикс $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$, добиваме дека равенката на разгледуваната кружница е $|z - \frac{z_1 + z_2}{2}| = \frac{|z_1 - z_2|}{2}$. Ако последната равенка ја помножиме со 2 ја добиваме еквивалентната на неа равенка (1). ♦

3.3. Пример. Нека A, B и C се три различни точки во рамнината. Најдете го геометриското место на точки кои се еднакво оддалечени од точките A, B и C .

Решение. Нека афиксите на точките A, B и C се a, b и c , соодветно. Според пример 1.10 геометриското место на точки еднакво оддалечени од точките A и B , B и C , A и C , се симетралите на отсечките AB, BC и CA чии равенки се

$$z - \frac{a+b}{2} = -\frac{b-a}{b-a}(\bar{z} - \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}) \quad (2)$$

$$z - \frac{b+c}{2} = -\frac{b-c}{b-c}(\bar{z} - \frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}) \quad (3)$$

$$z - \frac{a+c}{2} = -\frac{a-c}{a-c}(\bar{z} - \frac{\bar{a}+\bar{c}}{2}) \quad (4)$$

соодветно. Ќе разгледаме два случаи.

а) Ако точките A, B и C се колинеарни, тогаш од последица 1.3 следува дека симетралите на отсечките AB, BC и CA имаат еднакви комплексни агливи коефициенти, а од последица 1.8 следува дека тие се паралелни. Но, точките A, B и C се различни, па затоа и средините на отсечките AB, BC и CA се различни, што значи дека не постои точка која ги задоволува условите на задачата.

б) Ако точките A, B и C не се колинеарни, тогаш симетралите на отсечките AB, BC и CA се сечат две по две. Ако од равенката (2) ја извадиме равенката (3) за афиксот o на пресечната точка O на симетралите на отсечките AB и BC добиваме

$$o = \frac{a\bar{a}(c-b) + b\bar{b}(a-c) + c\bar{c}(b-a)}{\begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}}.$$

Со непосредна проверка се докажува дека точката O лежи на правата CA . Според тоа, бараното геометриско место е точката O со афикс o . ♦

3.4. Забелешка. Во претходниот пример, всушност докажавме дека низ три неколинеарни точки A, B и C минува една и само една кружница со центар во точката O и радиус $R = |a - o|$, односно докажавме дека околу произволен триаголник може да се опише кружница чиј центар се наоѓа во пресекот на симетралите на неговите страни.

3.5. Пример. Ако $z_j, j = 1, 2, 3, 4$ се последователни темиња на тетивен четириаголник, тогаш

$$\frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} > 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} |z_1 - z_3| \cdot |z_2 - z_4| &= \\ &= |z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_4| + |z_1 - z_4| \cdot |z_2 - z_3| \end{aligned} \quad (6)$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека центарот на опишаната кружница се совпаѓа со координатниот почеток, а радиусот на кружницата е r . (Зошто?). Тогаш,

$$z_j = r e^{i\varphi_j}, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Исто така, можеме да претпоставиме дека последователноста на темињата е еквивалентна со условот

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4 < \varphi_1 + 2k\pi. \quad (7)$$

При направените претпоставки важи:

$$\begin{aligned} \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} &= \frac{(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2})(e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi_4})}{(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_4})(e^{i\varphi_2} - e^{i\varphi_3})} \\ &= \frac{(e^{\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} - e^{-\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}})(e^{\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2}} - e^{-\frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2}})}{(e^{\frac{\varphi_1 - \varphi_4}{2}} - e^{-\frac{\varphi_1 - \varphi_4}{2}})(e^{\frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2}} - e^{-\frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2}})} \\ &= \frac{\sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2}}{\sin \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2}} > 0 \end{aligned}$$

бидејќи според (7), секоја величина под знакот на синусот е од интервалот $(0, \pi)$. Со тоа е докажано неравенството (5).

Од неравенството (5) следува

$$\begin{aligned} |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)| + |(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| \\ &= |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| \\ &= |-z_1 z_4 - z_2 z_3 + z_1 z_2 + z_3 z_4| \\ &= |(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)| \end{aligned}$$

т.е. равенството (6) е исполнето. ♦

3.6. Забелешка. Равенството (6) всушност е познатата **теорема на Птоломеј**: Производој на должините на дијагоналиите на шестивен четириаголник е еднаков на збирот од производите на должините на спротивните страни.

3.7. Како што рековме равенката на кружницата со центар во точката z_0 и радиус R е $|z - z_0| = R$. Меѓутоа, од практични причини пожелно е да се знае обликот на равенката на кружницата сличен на оној на автокоњугираната равенка на права. Ќе докажеме дека

$$\bar{z}z + \bar{A}z + A\bar{z} + B = 0, \quad B \in \mathbf{R}, A \in \mathbf{C}, |A|^2 - B > 0 \quad (8)$$

е равенка на кружница.

Навистина, ако земеме $z_0 = -A$ и $R^2 = z_0 \bar{z}_0 - B = |A|^2 - B > 0$, и ако замениме во равенката (8) ја добиваме равенката

$$\bar{z}z - z_0 \bar{z} - \bar{z} z_0 + z_0 \bar{z}_0 = R^2,$$

т.е. равенката $|z - z_0| = R$, која е равенка на кружница со центар во z_0 и радиус R . Според тоа, равенката (8) е равенка на кружница со центар во z_0 и радиус

$$R = \sqrt{|A|^2 - B}.$$

3.8. Забелешка. Во следниот пример ќе дадеме еден аргумент кој ни дава за право правите и кружниците во комплексната рамнина да ги нарекуваме кружници, а кружниците да ги нарекуваме вистински кружници.

3.9. Пример. (Аполониева кружница).

Нека A и B се произволни точки во рамнината. Геометриското место на точката M со својство

$$\overline{MA} : \overline{MB} = k, \quad (k > 0, k \neq 1)$$

е кружница. Докажете!

Решение. Ќе го разгледаме случајот $k > 1$. Поставуваме координатен систем xOy таков што x -оската се совпаѓа со правата AB , а координатниот почеток се совпаѓа со средината на отсечката AB . Имаме $A(a, 0)$ и $B(-a, 0)$, т.е. точките A и B имаат афикси $z_1 = a$ и $z_2 = -a$, соодветно. Ако точката M од разгледува-

ното геометриско место има афикс z , тогаш од условот на задачата следува дека $k = \frac{|z-a|}{|z+a|}$, односно

$$z\bar{z} + a \frac{k^2+1}{k^2-1} (z + \bar{z}) + a^2 = 0. \quad (9)$$

Константите $A = a \frac{k^2+1}{k^2-1}$, $B = a^2$ го задоволуваат условот $|A|^2 - B > 0$, па затоа (9) е равенка на кружница со центар во $z_0 = -a \frac{k^2+1}{k^2-1}$ и радиус $R = \sqrt{|A|^2 - B} = \frac{2ak}{k^2-1}$.

Случајот $0 < k < 1$ се разгледува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. ♦

3.10. Замен однос на права и кружница. Дадени се права (p) и кружница (K) чии равенки се

$$z - z_0 = \eta(\bar{z} - \bar{z}_0) \quad \text{и} \quad |z - z_1| = R,$$

соодветно. Во центарот на кружницата чиј афикс е z_1 повлекуваме права (p') нормална на правата (p). Нејзината равенка е $z - z_1 = -\eta(\bar{z} - \bar{z}_1)$. Ако ги собереме равенките на правите (p) и (p') го добиваме афиксот на пресечната точка на овие две прави $z^* = \frac{\eta(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) + z_1 + z_0}{2}$. Според тоа, за растојанието од центарот на кружницата до правата (p) добиваме

$$d(z^*, z_0) = |z^* - z_0| = \frac{|\eta(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) + z_1 - z_0|}{2}.$$

Од досега изнесеното следува:

- ако $\frac{|\eta(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) + z_1 - z_0|}{2} = R$, тогаш правата (p) е тангентата на кружницата (K) и допирната точка има афикс z^* ;

- ако $\frac{|\eta(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) + z_1 - z_0|}{2} < R$, тогаш правата (p) и кружницата (K) се сечат во две точки; и

- ако $\frac{|\eta(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) + z_1 - z_0|}{2} > R$, тогаш правата (p) и кружницата (K) немаат заеднички точки.

3.11. Пример. Определете го заемниот однос на правата (p) и кружницата (K) чии равенки се

$$z = \bar{z} + 3i \quad \text{и} \quad |z + 4 - 2i| = 3,$$

соодветно.

Решение. Од равенката на правата (p) добиваме $z_0 = \frac{3i}{2}$, а од равенката на кружницата (K) наоѓаме $z_1 = -4 + 2i$ и $R = 3$. Затоа

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\eta(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) + z_1 - z_0|}{2} = \frac{|(-4 - 2i + \frac{3i}{2}) + (-4 + 2i - \frac{3i}{2})|}{2} \\ &= \frac{|-8|}{2} = 4 > 3 = R \end{aligned}$$

што според 3.10 значи дека правата правата (p) и кружницата (K) немаат заеднички точки. ♦

3.12. Пример. Нека е дадена кружница (K): $|z - z_0| = R$ и точка z_1 на неа. Да се состави равенката на тангентата на кружницата (K) која минува низ точката z_1 .

Решение. Равенката на правата (p) која минува низ точките z_0 и z_1 гласи $z - z_0 = \frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_0} (\bar{z} - \bar{z}_0)$. Според тоа, равенката на тангентата (p') на (K) повлечена во точката z_1 е $z - z_1 = -\frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_0} (\bar{z} - \bar{z}_1)$. ♦

3.13. Забелешка. а) Ако (K): $|z| = 1$ е единичната кружница и z_1 е точка на неа, тогаш равенката на тангентата на (K) повлечена во z_1 гласи $z + z_1^2 \bar{z} = 2z_1$.

б) Ако A, B, C и D се точки од единичната кружница (K): $|z| = 1$, со афикси a, b, c и d , соодветно, тогаш $\bar{a} = a^{-1}$, $\bar{b} = b^{-1}$, $\bar{c} = c^{-1}$ и $\bar{d} = d^{-1}$. Според последица 1.8 тетивите AB и CD се паралелни ако и само ако

$$(b - a)(\bar{d} - \bar{c}) = (\bar{b} - \bar{a})(d - c),$$

што значи ако и само ако $ab = cd$. Аналогно се добива дека тетивите AB и CD се заемно нормални ако и само ако $ab + cd = 0$.

в) Ако A, B, C и D се точки од единичната кружница (K): $|z| = 1$, со афикси a, b, c и d , соодветно, и $AB \cap CD = \{S\}$. Равенките на правите AB и CD се

$z + ab\bar{z} = a + b$ и $z + cd\bar{z} = c + d$,
соодветно. Ако од последните две равенки
го елиминираме \bar{z} , за афиксот s на пре-
сечната точка S добиваме

$$s = \frac{(a+b)cd - (c+d)ab}{cd - ab}.$$

г) Нека A и B , со афикси a и b , се
точки од единичната кружница, такви што
 AB не е дијаметар. Според а) равенките
на тангентите (t_A) и (t_B) се $z + a^2\bar{z} = 2a$ и
 $z + b^2\bar{z} = 2b$, соодветно. Ако од последни-
те две равенки го елиминираме \bar{z} за афикс-
сот s на пресечната точка S добиваме

$$s = \frac{2ab}{a+b}.$$

д) Нека правата (p) ја сече единичната
кружница во точките A и B , со афикси a
и b , и нека M , со афикс m , е произволна
точка од рамнината. Лесно се докажува
дека афиксот c на ортогоналната проек-
ција C на точката M врз правата (p) е
зададен со формулата

$$c = \frac{a+b+m-abm}{2}.$$

4. ДИРЕКТНИ СЛИЧНОСТИ

4.1. Дефиниција. Пресликувањето
 $S: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ дефинирано со

$$w = S(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \quad (1)$$

го нарекуваме **директна сличност**.

4.2. Теорема. Множеството директни
сличности **DS** во однос на операцијата
композиција на пресликување е група.

Доказ. Ако $S_1, S_2 \in \mathbf{DS}$, тогаш

$$S_1(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0 \quad \text{и}$$

$$S_2(z) = cz + d, \quad c, d \in \mathbb{C}, d \neq 0.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} S_1(S_2(z)) &= S_1(cz + d) = a(cz + d) + b = \\ &= (ac)z + (ad + b), \quad ac, ad + b \in \mathbb{C}, ac \neq 0 \end{aligned}$$

т.е. $S_1 \circ S_2 \in \mathbf{DS}$. Значи, множеството **DS**
е затворено во однос на композицијата на
пресликувања.

Нека $S_1, S_2, S_3 \in \mathbf{DS}$. Со непосредна
проверка се докажува дека

$$S_1 \circ (S_2 \circ S_3)(z) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3(z),$$

за секој $z \in \mathbb{C}$, па затоа

$$S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3$$

т.е. важи асоцијативниот закон.

Пресликувањето $E(z) = z$, за секој
 $z \in \mathbb{C}$ припаѓа на **DS** и притоа

$$E \circ S = S \circ E = S, \quad \text{за секој } S \in \mathbf{DS}.$$

Нека $S(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$ е про-
изволна директна сличност. Пресликува-
њето $S_1(z) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$ е директна сличност и
притоа важи $S(S_1(z)) = S_1(S(z))$, за секој
 $z \in \mathbb{C}$, т.е. $S^{-1} = S_1 \in \mathbf{DS}$. ♦

4.3. Теорема. Секоја директна сличност
е еднозначно определена со два пара при-
дružени точки.

Доказ. Нека S е произволна директна
сличност за која важи $S(z_1) = w_1$ и
 $S(z_2) = w_2$. Тогаш $S(z) = az + b$, каде
 $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$ се непознати коефициенти
кои треба да ги определиме. Според теоре-
ма 4.2 секоја директна сличност е биек-
ција, па затоа од $z_1 \neq z_2$ следува $w_1 \neq w_2$.
Со замена во $S(z) = az + b$ добиваме

$$\begin{cases} w_1 = az_1 + b \\ w_2 = az_2 + b \end{cases} \quad (2)$$

Решавајќи го системот (2) по непознати a
и b добиваме $a = \frac{w_1 - w_2}{z_1 - z_2}$, $a = \frac{z_1 w_2 - z_2 w_1}{z_1 - z_2}$ и
 $a \neq 0$, т.е. коефициентите a и b на ди-
ректната сличност $S(z) = az + b$ се напoлно
определени со два пара придružени точки
($z_1, S(z_1)$) и ($z_2, S(z_2)$). ♦

4.4. Теорема. а) Слика на права (p)
при директна сличност е права (p').

б) Паралелни прави при директна слич-
ност се пресликуваат во паралелни прави.

в) Нормални прави при директна слич-
ност се пресликуваат во нормални прави.

Доказ. а) Нека е дадена директната
сличност (1) и правата (p) со равенка
 $z = \eta\bar{z} + c$. Од (1) имаме $z = \frac{w-b}{a}$ и ако за-
мениме во равенката на правата добиваме
 $w = (\frac{a}{a}\eta)\bar{w} + ac + b - \frac{ab}{a}\eta$. Сега од $|\frac{a}{a}\eta| = 1$
следува дека слика на права (p) при ди-

ректна сличност е права (p') чиј комплексен аголов коефициент е $\frac{a}{a}$.

Тврдењата под б) и в) непосредно следуваат од а) и последица 1.8. ♦

4.5. Теорема. Слика на кружница (K) при директна сличност е кружница (K') .

Доказ. Нека е дадена директната сличност (1) и кружница (K) чија равенка е $|z-c|=R$. Од (1) имаме $z = \frac{w-b}{a}$ и ако замениме во равенката на кружницата добиваме $|w-(ac+b)|=|a|R$, што значи дека сликата на кружницата (K) при дадената сличност (1) е кружница (K') , чиј центар има афикс $ac+b$ и истиот е слика на центарот на кружницата (K) , а нејзиниот радиус е еднаков на $|a|R$. ♦

4.6. Теорема. Ако A, B се произволни различни точки и A', B' се нивните слики при директната сличност (1) и ако $a = re^{i\varphi}$, тогаш $\overline{A'B'} = r\overline{AB}$ и правите AB и $A'B'$ формираат ориентиран агол φ .

Доказ. Нека z_1, z_2, w_1, w_2 се афиксите на точките A, B, A', B' , соодветно. Тогаш $z_2 - z_1 = \overline{AB}e^{i\alpha}$ и $w_2 - w_1 = \overline{A'B'}e^{i\alpha_1}$, каде α и α_1 се аглие кои ги зафаќа реалната оска со векторите \overline{AB} и $\overline{A'B'}$, соодветно. Од равенствата $w_1 = az_1 + b$ и $w_2 = az_2 + b$ го добиваме равенството $w_2 - w_1 = a(z_2 - z_1)$, т.е. равенството $\overline{A'B'}e^{i\alpha_1} = r\overline{AB}e^{i(\alpha+\varphi)}$, од што следува $\overline{A'B'} = r\overline{AB}$ и $\varphi = \alpha_1 - \alpha$. ♦

Реалниот број r го нарекуваме **коефициент на директната сличност** (1), а аголот φ го нарекуваме **агол на директната сличност** (1).

4.7. Дефиниција. За две фигури ќе велиме дека се **директно слични** ако постои директна сличност која едната од нив ја пресликува во другата.

4.8. Последица. Ако ABC и $A'B'C'$ се директно слични триаголници, тогаш $\overline{A'B'} : \overline{A'C'} = \overline{AB} : \overline{AC}$ и $\angle A'B'C' = \angle ABC$. ♦

4.9. Теорема. Нека точките A, B, C, A', B', C' имаат афикси $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$, соодветно. Триаголниците ABC и $A'B'C'$ се директно слични ако и само ако

$$z_1(w_2 - w_3) + z_2(w_3 - w_1) + z_3(w_1 - w_2) = 0 \quad (3)$$

Доказ. Триаголниците ABC и $A'B'C'$ ако и само ако постои директна сличност (1) за која важи $w_i = az_i + b$, за $i=1,2,3$. Од последните равенства ги добиваме равенствата

$$w_1 - w_2 = a(z_1 - z_2) \text{ и } w_1 - w_3 = a(z_1 - z_3).$$

Ако ги поделиме овие две равенства го добиваме равенството $\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$ кое е еквивалентно со равенството (3). ♦

4.10. Дефиниција. За точката z ќе велиме дека е **неподвижна** за директната сличност (1) ако го задоволува условот $z = az + b$.

Јасно, ако $a \neq 1$, тогаш директната сличност (1) има единствена неподвижна точка чиј афикс е $z_1 = \frac{b}{1-a}$, а ако $a = 1$, тогаш $b = 0$, т.е. директната сличност (1) е идентичното пресликување и сите точки од комплексната рамнина се неподвижни.

Точката C со афикс $c = \frac{b}{1-a}$ ја нарекуваме **центар** на директната сличност $S(z) = az + b$.

5. ДВИЖЕЊА

5.1. Во претходниот параграф ги разгледаме директните сличности и докажавме неколку нивни својства. Во овој параграф ќе се осврнеме на една важна класа на директни сличности и ќе дадеме класификација на овие директни сличности.

5.2. Дефиниција. Директната сличност $S(z) = az + b, |a| \neq 1$ ја нарекуваме **движење**.

5.3. Теорема. Множеството движења D во однос на операцијата композиција на пресликувања е подгрупа од групата директни сличности DS .

Доказ. Ако $S_1, S_2 \in D$, тогаш

$$S_1(z) = az + b, S_2(z) = cz + d, |a| \neq |d| \neq 1.$$

Според тоа,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(cz + d) = a(cz + d) + b \\ = (ac)z + (ad + b), |ac| = 1,$$

па затоа $S_1 \circ S_2 \in \mathbf{D}$. Значи множеството

\mathbf{D} е затворено во однос на композицијата на пресликувања.

Ако $S_1, S_2, S_3 \in \mathbf{D}$, тогаш $S_1, S_2, S_3 \in \mathbf{DS}$, па затоа $S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3$, т.е. важи асоцијативниот закон.

Ако ставиме $a = 1, b = 0$ добиваме дека $1 \cdot z + 0 = E(z) \in \mathbf{D}$.

Нека $S(z) = az + b, |a| = 1$ е произволно движење. Пресликувањето

$$S_1(z) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}, \left| \frac{1}{a} \right| = \frac{1}{|a|} = 1$$

е движење и притоа важи

$$S(S_1(z)) = S_1(S(z)) = z, \text{ за секој } z \in \mathbf{C},$$

т.е. $S^{-1} = S_1 \in \mathbf{D}$. ♦

5.4. Дефиниција. Движењето

$$S(z) = z + b$$

го нарекуваме **транслација**.

5.5. Теорема. Транслација која не е идентичното пресликување нема неподвижни точки.

Доказ. Непосредно следува од 4.10. ♦

5.6. Теорема. Множеството транслации \mathbf{T} во однос на операцијата композиција на на пресликувања е комутативна подгрупа од групата движења \mathbf{D} .

Доказ. Ако $S_1, S_2 \in \mathbf{T}$, тогаш

$$S_1(z) = z + b, S_2(z) = z + d.$$

Според тоа,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(z + d) = (z + d) + b = z + (d + b),$$

па затоа $S_1 \circ S_2 \in \mathbf{T}$. Значи множеството \mathbf{T} е затворено во однос на композицијата на пресликувања.

Ако $S_1, S_2, S_3 \in \mathbf{T}$, тогаш $S_1, S_2, S_3 \in \mathbf{D}$, па затоа $S_1 \circ (S_2 \circ S_3) = (S_1 \circ S_2) \circ S_3$, т.е. важи асоцијативниот закон.

Нека $S_1, S_2 \in \mathbf{T}$, тогаш $S_1(z) = z + b$ и $S_2(z) = z + d$. Според тоа,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(z + d) = (z + d) + b = (z + b) + d \\ = S_2(z + b) = S_2(S_1(z))$$

за секој $z \in \mathbf{C}$, т.е. важи комутативниот закон.

Ако ставиме $b = 0$ добиваме дека

$$1 \cdot z + 0 = E(z) \in \mathbf{T}.$$

Нека $S(z) = z + b$ е произволна транслација. Пресликувањето $S_1(z) = z - b$ е транслација и притоа важи

$$S(S_1(z)) = S_1(S(z)) = z,$$

за секој $z \in \mathbf{C}$, т.е. $S^{-1} = S_1 \in \mathbf{D}$. ♦

5.7. Дефиниција. Директната сличност со коефициент 1 и агол π ја нарекуваме **централна симетрија**.

Според тоа,

$$S(z) = az + b, a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0$$

е централна симетрија ако $a = -1$, што значи дека централната симетрија има облик $S(z) = b - z$. Од 4.10 следува дека централната симетрија $S(z) = b - z$ има центар со афикс $c = \frac{b}{2}$. Во натамошните разгледувања множеството централни симетрии ќе го означуваме со \mathbf{CS} .

5.8. Теорема. а) Композиција на две централни симетрии е транслација.

б) Композиција на централна симетрија и транслација е централна симетрија.

Доказ. а) Нека

$$S_1(z) = b - z \text{ и } S_2(z) = d - z, b, d \in \mathbf{C}$$

се произволни централни симетрии.

Тогаш,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(d - z) = b - (d - z) = z + (b - d)$$

што значи дека композицијата $S_1 \circ S_2$ е транслација за вектор $b - d$.

б) Нека $S_1(z) = b - z$ и $S_2(z) = z + d$,

$b, d \in \mathbf{C}$ се произволна централна симетрија и транслација, соодветно. Тогаш,

$$S_1(S_2(z)) = S_1(z + d) = b - (z + d) = b - d - z$$

$$S_2(S_1(z)) = S_2(b - z) = d + (b - z) = b + d - z$$

т.е. $S_1 \circ S_2$ и $S_2 \circ S_1$ се централни симетрии со центри $\frac{b-d}{2}$ и $\frac{b+d}{2}$, соодветно. ♦

5.9. Дефиниција. За пресликувањето $S: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ ќе велиме дека е **инволуторно** ако тоа е инверзибилно, т.е. постои S^{-1} и ако $S^{-1} = S$.

5.10. Теорема. Директната сличност, која не е идентитет, е инволуторна ако и само ако таа е централна симетрија.

Доказ. Од теорема 4.2 следува дека директната сличност е инволуторна ако и само ако $az+b = \frac{z-b}{a}$, за секој $z \in \mathbb{C}$, односно ако и само ако $a = \frac{1}{a}$ и $b = -\frac{b}{a}$. Последните две равенства се исполнети ако и само ако $a = -1$, па затоа S е инволуторна ако и само ако е централна симетрија. ♦

5.11. Последица. Множеството $T \cup \mathbb{CS}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е некомулативна подгрупа од групата движења D .

Доказ. Непосредно следува од теоремите 4.2, 5.6 и 5.8. ♦

5.12. Дефиниција. Движењата кои не се транслации ги нарекуваме **ротации**.

Бидејќи за ротацијата $S(z) = az + b$, $|a| = 1$ важи $a \neq 1$ заклучуваме дека секоја ротација има центар C со афикс $c = \frac{b}{1-a}$. Ако ротацијата има центар C и агол α , тогаш ќе велíme дека тоа е ротација околу C за агол α . Во натамошните разгледувања множеството ротации ќе го означуваме со R . Јасно, централните симетрии се ротации за агол π , па затоа $\mathbb{CS} \subset R$.

Нека $S(z) = az + b$, $|a| = 1$, $a \neq 1$ е ротација околу C за агол α . Тогаш, инверзното пресликување S^{-1} дефинирано со $S^{-1}(z) = \bar{a}z - \bar{a}b$ е ротација околу C за агол $-\alpha$.

5.13. Теорема. а) Композиција на две ротации е ротација или транслација.

б) Композиција на ротација и транслација е ротација.

Доказ. а) Нека $S_1(z) = az + b$, $|a| = 1$, $a \neq 1$ и $S_2(z) = cz + d$, $|c| = 1$, $c \neq 1$ се две ротации. Тогаш

$$\begin{aligned} S_1(S_2(z)) &= S_1(cz + d) = a(cz + d) + b \\ &= (ac)z + (ad + b) \end{aligned}$$

Јасно, ако $ac = 1$, тогаш $S_1 \circ S_2$ е транслација, а ако $ac \neq 1$ таа е ротација околу C

чиј афикс е $\frac{ad+b}{1-ac}$ за агол $\alpha_1 + \alpha_2$ каде α_1 и α_2 се аглите на ротациите S_1 и S_2 .

б) Нека $S_1(z) = z + b$ и $S_2(z) = cz + d$, $|c| = 1$, $c \neq 1$ се произволна транслација и ротација соодветно. Тогаш, од

$$S_1(S_2(z)) = S_1(cz + d) = cz + (d + b)$$

следува дека $S_1 \circ S_2$ е ротација околу C чиј афикс е $\frac{d+b}{1-c}$ за агол α_2 на S_2 .

Понатаму, од

$$S_2(S_1(z)) = S_2(z + b) = cz + (d + bc)$$

следува дека $S_2 \circ S_1$ е ротација околу C чиј афикс е $\frac{d+bc}{1-c}$ за агол α_2 на S_2 . ♦

5.14. Последица. Множеството $T \cup R$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е некомулативна подгрупа од групата движења D .

Доказ. Непосредно следува од 5.12 и теоремите 4.2, 5.6 и 5.13. ♦

5.15. Пример. Дадени се точката M_k , $k = 1, 2, 3, 4$ со афикси z_k , $k = 1, 2, 3, 4$, соодветно. Докажете дека

$$z_2 - z_1 = \pm i(z_4 - z_3) \quad (1)$$

ако и само ако

$$\overline{M_1 M_2} = \overline{M_3 M_4} \text{ и } M_1 M_2 \perp M_3 M_4 \quad (2)$$

Решение. Од условот (1) имаме $|z_2 - z_1| = |z_4 - z_3|$, што значи дека

$$\overline{M_1 M_2} = \overline{M_3 M_4}.$$

Исто така

$$z_2 - z_1 = \pm i(z_4 - z_3) = e^{\pm i \frac{\pi}{2}}(z_4 - z_3),$$

што значи дека бројот $z_2 - z_1$ се добива со ротација на бројот $z_4 - z_3$ околу координатниот почеток за агол $\pm \frac{\pi}{2}$. Тоа значи $M_1 M_2 \perp M_3 M_4$. Според тоа, условот (2) следува од условот (1).

Обратно, од

$$\begin{aligned} \overline{M_1 M_2} = |z_2 - z_1|, \quad \overline{M_3 M_4} = |z_4 - z_3| \text{ и} \\ \overline{M_1 M_2} = \overline{M_3 M_4} \end{aligned}$$

следува $z_2 - z_1 = r e^{it}$, $z_4 - z_3 = r e^{is}$, т.е.

$$z_2 - z_1 = e^{i(t-s)}(z_4 - z_3). \quad (3)$$

Сега од втората релација во (2) следува дека $t-s = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Со замена во (3) добиваме $z_2 - z_1 = \pm i(z_4 - z_3)$. Според тоа, условот (1) следува од условот (2). ♦

6. ХОМОТЕТИЈА

6.1. Дефиниција. Директната сличност со агол 0 или π , која не е транслација ја нарекуваме **хомотетија**.

Според тоа, директната сличност

$$S(z) = az + b, a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0$$

е хомотетија ако и само ако $a \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$. Под коефициент на хомотетијата ќе го подразбираме реалниот број $a, (a \neq 0,1)$, а не бројот a како кај општите директни сличности. Јасно, централните симетрии се хомотетии со коефициент -1 . Од теорема 4.2 следува дека инверзното пресликување на хомотетија со коефициент a е хомотетија со коефициент $\frac{1}{a}$. Во натамошните разгледувања множеството хомотетии ќе го означуваме со \mathbf{H} .

6.2. Теорема. а) Композиција на две хомотетии е хомотетија или транслација.

б) Композиција на хомотетија и транслација е хомотетија.

Доказ. а) Нека

$$S_1(z) = a_1z + b_1, a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\} \text{ и}$$

$$S_2(z) = a_2z + b_2, a_2 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$$

се две хомотетии. Тогаш,

$$S_2(S_1(z)) = a_1a_2z + a_2b_1 + b_2.$$

Јасно, ако $a_1a_2 = 1$, тогаш $S_2 \circ S_1$ е транслација за вектор $a_2b_1 + b_2$, а ако $a_1a_2 \neq 1$, тогаш $S_2 \circ S_1$ е хомотетија со центар C чиј афикс е $\frac{a_2b_1 + b_2}{1 - a_1a_2}$ и коефициент a_1a_2 .

б) Нека се дадени хомотетијата $S_1(z) = a_1z + b_1, a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ и транслацијата $S_2(z) = z + b_2$. Од $S_2(S_1(z)) = a_1z + b_1 + b_2, a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$ следува дека $S_2 \circ S_1$ е хомотетија со центар C чиј афикс е $\frac{b_1 + b_2}{1 - a_1}$ и коефициент a_1 . Од

$$S_1(S_2(z)) = a_1z + b_1 + a_1b_2, a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$$

следува дека $S_1 \circ S_2$ е хомотетија со цен-

тар C чиј афикс е $\frac{a_1b_2 + b_1}{1 - a_1}$ и коефициент a_1 . ♦

6.3. Последица. Множеството $\mathbf{T} \cup \mathbf{H}$ во однос на операцијата композиција на пресликувања е некомутативна подгрупа од групата директни сличности \mathbf{DS} .

Доказ. Непосредно следува од дефиниција 6.1 и теоремите 4.2, 5.6 и 6.2. ♦

6.4. Теорема. Било кои две хомотетии и нивната композиција, ако таа не е транслација, имаат колинеарни центри.

Доказ. а) Нека

$$S_1(z) = a_1z + b_1, a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\} \text{ и}$$

$$S_2(z) = a_2z + b_2, a_2 \in \mathbf{R} \setminus \{0,1\}$$

се две хомотетии чии центри се C_1 и C_2 ,

со афикси $c_1 = \frac{b_1}{1 - a_1}$ и $c_2 = \frac{b_2}{1 - a_2}$, соодветно,

и нека $S_2(S_1(z)) = a_1a_2z + a_2b_1 + b_2$ е хомотетија со центар C чиј афикс е $\frac{a_2b_1 + b_2}{1 - a_1a_2}$.

Тогаш,

$$\frac{c_2 - c}{c_1 - c} = \frac{\frac{b_2}{1 - a_2} - \frac{a_2b_1 + b_2}{1 - a_1a_2}}{\frac{b_1}{1 - a_1} - \frac{a_2b_1 + b_2}{1 - a_1a_2}} = \frac{a_1a_2 - a_2}{1 - a_2} \in \mathbf{R}$$

што според последица 1.4 значи дека точките C_1, C_2 и C се колинеарни. ♦

6.5. Теорема. Директната сличност $S(z) = az + b$ правата (p) ја пресликува во паралелна права (p') ако и само ако таа е хомотетија или транслација.

Доказ. Ако правата (p) има комплексен аглов коефициент η , тогаш нејзината слика (p') при директната сличност $S(z) = az + b$ има комплексен аглов коефициент $\eta \frac{a}{a}$. Правите (p) и (p') се паралелни ако и само ако $\eta \frac{a}{a} = \eta$, т.е. ако и само ако $a = a$, што значи ако и само ако $a \in \mathbf{R}$. Значи, директната сличност $S(z) = az + b$ правата (p) ја пресликува во паралелна права (p') ако и само ако таа е хомотетија или транслација. ♦

(Продолжува!)