## *XLVIII олимпијада*

1. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се реални броеви. За секој $i \in \{1,2,...,n\}$ нека
$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \le j \le i\} - \min\{a_j \mid i \le j \le n\}$$
и нека
$$d = \max\{d_i \mid 1 \le i \le n\}.$$
а) Докажи дека за произволни реални броеви $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ важи
$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \le i \le n\} \ge \tfrac{d}{2}. \qquad (1)$$
б) Докажи дека постојат реални броеви $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ такви што во (1) важи знак за равенство.

**Решение.** Од условот на задачаа следува дека $d = a_k - a_l$ за некои $k \le l$. Бидејќи
$$(x_l - a_l) - (x_k - a_k) = (a_k - a_l) + (x_l - x_k) \ge a_k - a_l = d \text{ и } d \ge 0$$
следува
$$2\max\{|x_k - a_k|, |x_l - a_l|\} \ge |x_l - a_l| + |x_k - a_k| = |(a_k - x_k) - (a_l - x_l)| \ge d,$$
односно $\max\{|x_k - a_k|, |x_l - a_l|\} \ge \frac{d}{2}$, од каде следува а).

Јасно, низата која го задоволува б) зависи од изразите $M_i = \max\{a_j \mid 1 \le j \le i\}$ и $m_i = \min\{a_j \mid i \le j \le n\}$. Со цел да се минимизира изразот на левата страна во (1), природно е да земеме $x_i = \frac{M_i + m_i}{2}$, за $i = 1,2,...,n$. Оваа низа го задоволува б), бидејќи

1) По конструкција низите $\{m_i\}_{i=1}^n$ и $\{M_i\}_{i=1}^n$ не опаѓаат, па затоа не опаѓа и $\{x_i\}_{i=1}^n$.
2) Ако $d_i = M_i - m_i$, тогаш
$$-\frac{d_i}{2} = \frac{m_i - M_i}{2} = x_i - M_i \le x_i - a_i \le x_i - m_i = \frac{M_i - m_i}{2} = \frac{d_i}{2},$$
т.е. $|x_i - a_i| \le \frac{d_i}{2} \le \frac{d}{2}$, па како важи а) добиваме дека во (1) важи знак за равенство.

2. Нека точките $A, B, C, D$ и $E$ се такви што $ABCD$ е паралелограм, а $BCED$ е тетивен четириаголник. Правата $l$ која минува низ точката $A$ ја сече отсечката $DC$ во нејзина внатрешна точка $F$ и ја сече правата $BC$ во точка $G$. Ако $\overline{EF} = \overline{EG} = \overline{EC}$, докажи дека $l$ е симетрала на $\measuredangle DAB$.

**Решение.** *Прв начин.* Нека $K$ и $L$ се подножјата на нормалите повлечени од точката $E$ на $DC$ и $BC$, соодветно. Триаголниците $EFC$ и $ECG$ се рамнокраки, $K$ и $L$ се средини на отсечките $FC$ и $CG$, соодветно, и важи

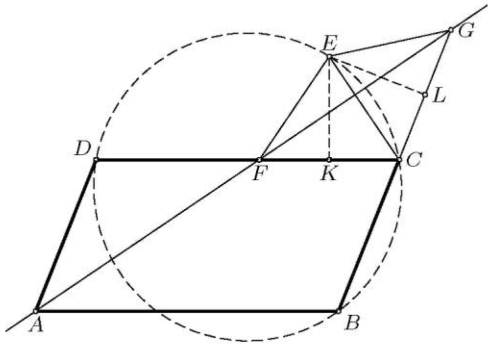
$\triangle KCL \sim \triangle FCG$. Да означиме $\measuredangle BAF = \alpha$ и $\measuredangle DAF = \beta$. Од тетивниот четирисаголник $EKCL$ и теоремата за агли со паралелни краци следува дека

$$\measuredangle LEC = \measuredangle LKC = \measuredangle GFC = \alpha \text{ и } \measuredangle CEK = \measuredangle CLK = \measuredangle CGF = \beta .$$

Во правоаголните триаголници $EKC$ и $CLE$ важи

$$\overline{CK} = \overline{CE}\sin\beta,\ \overline{EK} = \overline{CE}\cos\beta,$$

$$\overline{CL} = \overline{CE}\sin\alpha,\ \overline{EL} = \overline{CE}\cos\alpha.$$




Имаме, $\triangle DAF \sim \triangle CGF$, па затоа $\frac{\overline{DF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{CG}} = r$. Тогаш

$$\overline{DF} = r\overline{FC} = 2r\overline{CK} \text{ и}$$

$$\overline{BC} = \overline{DA} = r\overline{CG} = 2r\overline{CL},$$

па затоа

$$\overline{BL} = \overline{BC} + \overline{CL} = (2r+1)\overline{CL} = (2r+1)\overline{CE}\sin\alpha$$

и

$$\overline{DK} = \overline{DF} + \overline{FK} = (2r+1)\overline{CK} = (2r+1)\overline{CE}\sin\beta .$$

Бидејќи четириаголникот $DBCE$ е тетивен, важи

$$\measuredangle EDK = \measuredangle EDC = \measuredangle EBC = \measuredangle EBL ,$$

па важи $\operatorname{tg}\measuredangle EDK = \operatorname{tg}\measuredangle EBL$. Но, од правоаголниот триаголник $EDK$ следува

$$\operatorname{tg}\measuredangle EDK = \frac{\overline{EK}}{\overline{DK}} = \frac{\overline{CE}\cos\beta}{(2r+1)\overline{CE}\sin\beta} = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{2r+1},$$

а од правоаголниот триаголник $BLE$ следува

$$\operatorname{tg}\measuredangle EBL = \frac{\overline{EL}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{CE}\cos\alpha}{(2r+1)\overline{CE}\sin\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2r+1},$$

па затоа мора да важи $\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha$ и оттука $\beta = \alpha$, т.е. $l$ е симетрала на $\measuredangle DAB$.

*Втор начин*. Нека се ознаките исти како и во првиот начин и нека $O$ е пресекот на дијагоналите на паралелограмот $ABCD$. Точката $E$ припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle BCD$, па затоа нормалите од $E$ на страните на овој триаголник припаѓаат на една права (Симпсоновата права). Бидејќи $Kl$ е средна линија на $\triangle CGF$ и бидејќи точките $A, F$ и $G$ лежат на една права, правата $KL$ минува низ средината на $AC$, т.е. низ $O$. Според тоа, нормалната проекција од $E$ на $BD$ е точката $O$, па затоа важи $\measuredangle DBE = \measuredangle EDB$.

Меѓутоа, како во првиот нмачин на решавање добиваме

$$\measuredangle FAD = \measuredangle CGF = \measuredangle CLK = \measuredangle CEK = 90^\circ - \measuredangle ECK = 90^\circ - \measuredangle ECD = 90^\circ - \measuredangle EBD$$

и

$$\measuredangle BAF = \measuredangle CFG = \measuredangle CKL = \measuredangle CEL = 90^\circ - \measuredangle LCE = 90^\circ - \measuredangle EDB ,$$

т.е. $\measuredangle DAF = \measuredangle BAF$ , што и требаше да докажеме.

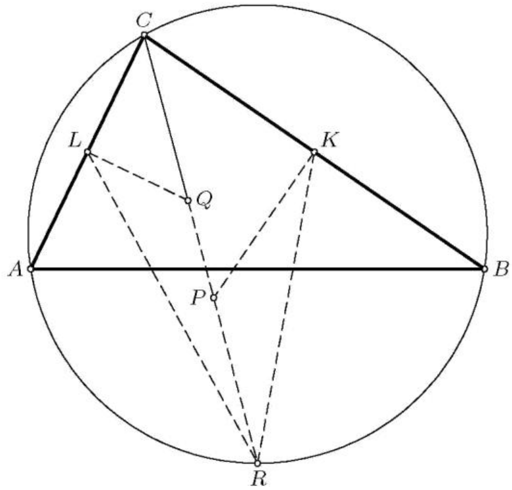
3. На математички натпревар некои ученици се пријатели; ако $A$ е пријател со $B$, тогаш и $B$ е пријател со $A$. Група ученици се нарекува дружина ако секои два ученика во таа групи се пријатели. (Специјално, секоја група со помалку од два ученика е дружина.) Бројот на учениците во една дружина се нарекува големина на дружината.
На овој натпревар максималната големина на дружина е парен број. Докажи дека учениците може да се распоредат во две соби, така што максималната големина на дружине во едната соба е еднаква на максималната големина на дружина во другата соба.
**Решение.** На почетокот да ги сместиме сите ученици на една дружина со максимална големина $2n$ во соба $X$. Овие ученици да ги наречеме $П$–ученици. Останатите ученици ги сместуваме во соба $Y$. Нека се $d(X)$ и $d(Y)$ максималните големини на дружините во собите $X$ и $Y$ во дадениот момент, соодветно. Со префрлање на еден ученик од собата $X$ во собата $Y$ големината $d(X)$ се намалува за 1, а $d(Y)$ не се не менува или се зголемува за 1, па затоа разликата $d(X)-d(Y)$ се намалува за 1 или 2. Со повторување на оваа постапка можеме да постигнеме оваа разлика да биде 0 (со што тврдењето на задачата е докажано) или $-1$ (т.е. $d(Y)=d(X)+1$).
Во натамошните разгледувања ќе претпоставиме дека $d(X)=l$ и $d(Y)=l+1$. Ги разликуваме следниве случаи:
1) Ако во собата $Y$ постои $П$–ученик кој не припаѓа на некоја од дружините во $Y$ со големина $l+1$, тогаш по неговото префрлање во собата $X$ останува $d(Y)=l+1$, а $d(X)$ се зголемува за 1, со што се постигнува $d(X)=d(Y)$.
2) Нека претпоставиме дека секој од $2n-l$ $П$–ученици во $Y$ припаѓа на сите дружини во $Y$ со големина $l+1$. Тогаш произволна дружина со големина $l+1$ во собата $Y$ содржи $2n-l$ $П$–ученици и $0 \le l+1-(2n-l) = 2(n-l)+1$ ученици кои не се $П$–ученици (да ги наречеме не-$П$–ученици). Бидејќи $2(n-l)+1 \ne 0$ , во секоја дружина со големина $l+1$ во $Y$ постои не-$П$–ученик.
Сега да избереме некоја дружина во $Y$ со големина $l+1$ и да префрлиме еден не-$П$–ученик од неа во $X$. Оваа постапка ја повторуваме се додека постојат дружини со големина $l+1$ во $Y$ (нив ги има конечно многу). Бидејќи $d(Y)$ при секој ваков потез не се менува или се намалува за 1, во еден момент ќе важи $d(Y)=l$ . Доволно е да докажеме дека по оваа постапка останува $d(X)=l$ .
Навистина, ако претпоставиме дека во $X$ се формирала дружина со големина $l+1$, тогаш сите ученици на таа дружине ги познаваат сите $2n-l$

*П*–ученици во Y (бидејќи сите се или *П*–ученици, или се префрлени од *Y* каде биле во дружина со овие $2n-l$ ученици), па нивната унија со овие $2n-l$ ученици формира дружина со големина $(l+1)+(2n-l)=2n+1>2n$, што не е можно.

Конечно, од претходните разгледувања следува точноста на тврдењето на задачата.

4. Симетралата на $\measuredangle BCA$ на $\triangle ABC$ ја сече по вторпат опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката $R$, а симетралите на страните $BC$ и $AC$ ги сече во точките $P$ и $Q$, соодветно. Нека $K$ и $L$ се средините на страните $BC$ и $AC$, соодветно. Докажи дека плоштините на триаголниците $RPK$ и $RQL$ се еднакви.

**Решение.** Нека $\alpha,\beta,\gamma$ се соодветните агли на $\triangle ABC$, $a,b,c$ се соодветните страни и $r$ е радиусот на опишаната кружница. Од $\measuredangle QCL=\frac{\gamma}{2}$ следува




$\measuredangle RQL=90^\circ+\frac{\gamma}{2}$,

$\overline{LQ}=\overline{CL}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=r\sin\beta\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ и

$\overline{CQ}=\frac{\overline{CL}}{\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{r\sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}}$.

Бидејќи

$\measuredangle CAR=\measuredangle CAB+\measuredangle BAR$

$=\measuredangle CAB+\measuredangle BCA=\alpha+\frac{\gamma}{2}$,

следува

$$\overline{QR}=\overline{CR}-\overline{CQ}=2r\sin(\alpha+\tfrac{\gamma}{2})-\frac{r\sin\beta}{\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{r}{\cos\frac{\gamma}{2}}(2\sin(\alpha+\tfrac{\gamma}{2})\cos\tfrac{\gamma}{2}-\sin\beta)$$

$$=\frac{r}{\cos\frac{\gamma}{2}}(\sin(\alpha+\gamma)+\sin\alpha-\sin\beta)=\frac{r\sin\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

па затоа

$$P_{\triangle RQL}=\frac{\overline{LQ}\cdot\overline{QR}\cdot\sin\measuredangle RQL}{2}=\frac{1}{2}r\sin\beta\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{r\sin\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}\cdot\sin(90^\circ+\tfrac{\gamma}{2})=\frac{r^2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{2}\sin\alpha\sin\beta\ .$$

Заради симетрија, со замена на елементите кои соодветствуваат на темињата $A$ и $B$ се добива $P_{\triangle RKP}=\frac{r^2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{2}\sin\alpha\sin\beta$, од каде следува тврдењето на задачата.

*Втор начин*. Правите $KP$ и $QL$ се сечат во центарот $O$ на опишаната кружница на $\triangle ABC$. Тогаш $\overline{OP}=\overline{OQ}$. Навистина, ако $\overline{AB}=\overline{AC}$, тогаш $O\equiv P$ $\equiv Q$. Ако, на пример, $\overline{AB}>\overline{AC}$, тогаш

$$\measuredangle OQP=\measuredangle CQL=90^\circ-\tfrac{\gamma}{2}=\measuredangle CPK=\measuredangle QPO,$$

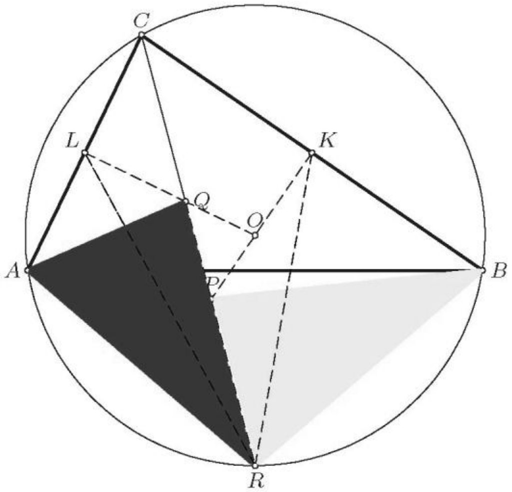
па затоа $\overline{OP}=\overline{OQ}$. Исто така $\measuredangle RQL=\measuredangle RPK=90^\circ+\frac{\gamma}{2}$, па затоа

$$P_{\triangle RQL}=\tfrac{1}{2}\overline{RQ}\cdot\overline{QL}\sin(90^\circ+\tfrac{\gamma}{2})=\tfrac{1}{2}\overline{RQ}\cdot\overline{QC}\sin\tfrac{\gamma}{2}\sin(90^\circ+\tfrac{\gamma}{2}).$$

Аналогно, $P_{\triangle RPK}=\frac{1}{2}\overline{RP}\cdot\overline{PC}\sin\frac{\gamma}{2}\sin(90^\circ+\frac{\gamma}{2})$, па останува да докажеме дека $\overline{RQ}\cdot\overline{QC}=\overline{RP}\cdot\overline{PC}$, т.е. дека степените на точките $P$ и $Q$ во однос на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ се еднакви. Имаме,

$$\overline{RQ}\cdot\overline{QC}=r^2-\overline{OQ}^2=r^2-\overline{OP}^2=\overline{RP}\cdot\overline{PC}.$$

*Трет начин*. Нека ознаките се како во вториот начин на решавање. Ако $\overline{AB}=\overline{AC}$, тогаш $O\equiv P\equiv Q$, а ако на пример $\overline{AB}>\overline{AC}$, тогаш како и во вториот начин добиваме $\overline{OP}=\overline{OQ}$, т.е. $\triangle OPQ$ е рамнокрак Триаголниците $RQL$ и $RQA$ имаат заедничка страна, а според Талесовата теорема висините спуштени на таа страна се однесуваат како $\frac{\overline{CL}}{\overline{CA}}=\frac{1}{2}$, па затоа




$$P_{\triangle RQA}=2P_{\triangle RQL}.$$

Аналогно се добива $P_{\triangle RBP}=2P_{\triangle RKP}$, па затоа е доволно да докажеме дека $P_{\triangle RQA}=P_{\triangle RBP}$. Последното равенство е точно, бидејќи со ротација $\rho$ околу точката $O$ за агол $\gamma$ триаголникот $RQA$ се пресликува во триаголникот $RBP$ ($\overline{OA}=\overline{OR}=r$, $\measuredangle ROA=2\measuredangle RCA=\gamma$ и $\measuredangle ROB=2\measuredangle RCB=\gamma$, па затоа $\rho(A)=R$ и $\rho(R)=B$, во $\triangle OPQ$ имаме $\overline{OP}=\overline{OQ}$ и

$$\measuredangle POQ=180^\circ-2(90^\circ-\tfrac{\gamma}{2})=\gamma,$$

па е $\rho(Q)=P$).

5. Нека $a$ и $b$ се природни броеви. Докажи, дека ако $4ab-1$ е делител на

$(4a^2-1)^2$, тогаш $a=b$.

**Решение.** Ќе го докажеме следново поопшто тврдење:

Нека $k>1$ е природен број. Ако ако $kab-1$ е делител на $(ka^2-1)^2$, тогаш $a=b$.

За парот природни броеви $(a,b)$ ќе велиме дека е *добар* ако $kab-1\,|\,(ka^2-1)^2$. Од

$$(ka^2-1)^2 \equiv (ka^2-kab)^2 = k^2a^2(a-b)^2 \pmod{kab-1} \text{ и } \mathrm{NZD}(k^2a^2, kab-1)=1$$

следува дека $kab-1\,|\,(ka^2-1)^2$ ако и само ако $kab-1\,|\,(a-b)^2$. Според тоа, парот $(a,b)$ е добар ако и само ако парот $(b,a)$ е добар. Последното значи, дека ако $a\neq b$, тогаш можеме да претпосатвиме дека $b>a$.

Нека $a$ е најмалиот природен број за кој постои $b>a, b\in\mathbb{N}$ таков што парот $(a,b)$ е добар. Тогаш

$$\tfrac{(ka^2-1)^2}{kab-1} \equiv -\tfrac{(ka^2-1)^2}{kab-1}(kab-1) = -(ka^2-1)^2 \equiv -1 \pmod{ka},$$

па затоа постои $c\in\mathbb{N}$ таков што $(ka^2-1)^2=(kab-1)(kac-1)$, што значи дека парот $(a,c)$ е добар. Меѓутоа, $kac-1=\tfrac{(ka^2-1)^2}{kab-1}<ka^2-1$, па затоа $a>c$, што противречи на изборот на парот $(a,b)$. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

6. Нека $n$ е природен број и нека

$$S=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in\{0,1,...,n\},\ x+y+z>1\}$$

е множество точки кое се состои од $(n+1)^3-1$ точка на тридимензионалниот простор. Определи го најмалиот можен број рамнини чија унија ги содржи сите точки на множеството $S$, но не ја содржи точката $(0,0,0)$.

**Решение.** *Прв начин*. Унијата на $3n$ мнини $x=i,\ y=i,\ z=i$ за $1\le i\le n$ го содржи множеството $S$ и не ја содржи точката $(0,0,0)$. Нека претпоставиме дека постои фамилија $\{a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0\,|\,1\le i\le N\}$ од $N<3n$ рамнини кои го содржат $S$ и не ја содржат $(0,0,0)$. Го разгледуваме полиномот

$$P(x,y,z)=\prod_{i=1}^{N}(a_ix+b_iy+c_iz+d_i).$$

*Лема 1.* Постојат броеви $\delta_i,\ i=1,2,...,n$ такви што $\sum_{i=1}^{n}\delta_i=-1$ и $\sum_{i=1}^{n}\delta_i i^m=0$, за $0<m<n$.

*Доказ.* Горниот систем е систем од $n$ линеарни равенки со $n$ непознати.

Детерминантата на системот е Вандермондовата детерминанта(за броевите $1,2,...,n$) која е различна од нула, од каде следува тврдењето на лемата. ■

Од лема 1 (ако се усвои $0^0=1$) следува дека постојат $\delta_0=1,\delta_i, i=1,2,...,n$ такви што $\sum_{i=0}^{n}\delta_i i^m=0$ за $0\le m<n$.

Нека $\deg P=N<3n$ и

$$S_1=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\delta_i\delta_j\delta_k P(i,j,k).$$

Бидејќи во претходната сума $\delta_0^3P(0,0,0)$ е единствен член различен од 0, следува дека $S_1=P(0,0,0)\neq 0$. Од друга страна, ако

$$P(x,y,z)=\sum_{\alpha+\beta+\gamma\le N}p_{\alpha,\beta,\gamma}x^\alpha y^\beta z^\gamma ,$$

следува

$$\begin{aligned} S_1&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\delta_i\delta_j\delta_k\sum_{\alpha+\beta+\gamma\le N}p_{\alpha,\beta,\gamma}i^\alpha j^\beta k^\gamma \\ &=\sum_{\alpha+\beta+\gamma\le N}p_{\alpha,\beta,\gamma}(\sum_{i=}^{n}\delta_i i^\alpha)(\sum_{j=0}^{n}\delta_j j^\beta)(\sum_{k=0}^{n}\delta_k k^\gamma)\end{aligned} \qquad (1)$$

Да го разгледаме собирокот кој соодветствува на тројката $(\alpha,\beta,\gamma)$ вп (1). Бидејќи $\alpha+\beta+\gamma\le N<3n$, мора барем еден од $\alpha,\beta,\gamma$ да е помал од $n$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа е $\alpha$ и тогаш важи $\sum_{i=}^{n}\delta_i i^\alpha=0$. Според тоа, секој собирок во (1) е 0, па затоа $S_1=0$, што е противречност

Од добиената противречност следува дека се поттребни најмалку $3n$ рамнини, што значи дека врз основа на горниот пример, бараниот број рамнини е $3n$.

*Забелешка*. Без користење на Вандермондовата детерминанта може да се докаже дека броевите $\delta_0=1,\delta_i=(-1)^i\binom{n}{i}, i=1,2,...,n$ ги задоволуваат условите потребни во горното решение. Тоа следува од следната лема.

*Лема 2*. За секои природни броеви $0\le m<n$ и произволен полином $P$, $\deg P=m$ важи

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}P(i)=0.$$

*Доказ*. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $n$. За $n=1$ полиномот $P$ е константа, па затоа го задоволува даденото равенство, бидејќи важи $P(0)-P(1)=0$.

Нека тврдењето е точно за $n-1$ и нека $Q(x)=P(x+1)-P(x)$. Јасно $Q$ е полином и важи $\deg Q=\deg P-1=m-1<n-1$, па затоа важи

$$\begin{aligned}0&=-\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}Q(i)=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(P(i)-P(i+1))\\&=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}P(i)-\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}P(i+1)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}P(i)+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\binom{n-1}{i-1}P(i)\\&=P(0)+\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\left(\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}\right)P(i)+(-1)^nP(n)\\&=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}P(i),\end{aligned}$$

т.е. тврдењето важи и за $n$. ■

*Втор начин.* Нека важи се исто како во првиот пасус на првиот начин на решавање.

*Лема 3.* Нека $P^*(x_1,x_2,...,x_k)$ е полином кој се анулира во сите тоќки на множеството

$$\{(x_1,x_2,...,x_k)\,|\,x_1,x_2,...,x_k\in\{0,1,...,n\},\;x_1+x_2+...+x_k>0\}$$

и $P^*(0,0,...,0)\neq 0$. Тогаш $\deg P^*\geq kn$.

*Доказ.* Со индукција по $k$. За $k=1$, $P^*$ е ненулти полином со $n$ нули, па затоа $\deg P^*\geq n$. Нека тврдењето важи за полином со $k-1$ променлива.

Нека $R(x_1,x_2,...,x_k)$ е остатокот од делењето на полиномот $P^*(x_1,x_2,...,x_k)$ со $Q(x_k)=x_k(x_k-1)...(x_k-n)$. Бидејќи $0,1,2,...,n$ се нули на полиномот $Q$, добиваме дека $P^*$ и $R$ примаат исти вредности на множеството $\{0,1,...,n\}^k$, па затоа за полиномот $R$ се исполнети условите на лема 2 и $\deg_{x_k} R\leq n$. Нека

$$R(x_1,...,x_k)=R_n(x_1,...,x_{k-1})x_k^n+R_{n-1}(x_1,...,x_{k-1})x_k^{n-1}+...+R_0(x_1,...,x_{k-1}).$$

1) Нека $a_1,a_2,...,a_{k-1}\in\{0,1,...,n\}$ не се сите еднакви на нула. Степенот на полиномот $T(x_k)=R(a_1,a_2,...,a_{k-1},x_k)$ е помал или еднаков на $n$ и тој се анулира $x_k\in\{0,1,...,n\}$, па затоа мора да е $T\equiv 0$, од каде што следува $R_n(a_1,...,a_{k-1})=0$.
2) Слично, $T(x_k)=R(0,0,...,0,x_k)$ е полином со степен помал или еднаков на $n$, има $n$ нули $1,2,...,n$ и важи $T(0)=R(0,0,...,0)\neq 0$, па затоа $\deg T=n$, од каде што следува дека $R_n\not\equiv 0$, како и дека $R_n(0,0,...,0)\neq 0$.

Од претходно изнесеното следува дека полиномот $R_n(x_1,...,x_{k-1})$ ја задоволува индуктивната претпоставка, па затоа

$$\deg P^* \geq \deg R \geq \deg R_n + n \geq (k-1)n + n = kn\ . \ \blacksquare$$

Сега тврдењето на задачата следува од лема 3 применета на полиномот $P$, бидејќи $P(0,0,0) \neq 0$ и $P(i,j,k) = 0$ за $(i,j,k) \in S$, па е $\deg P \geq 3n$.