

БМО 1990

1. Нека $a_1 = 1, a_2 = 3$ и $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$, за секој $n = 1, 2, \dots$. Определи ги сите броеви n за кои a_n е делив со 11.

Решение. Од рекурентната врска следува дека ако два последователни члена на низата се деливи со 11, тогаш сите следни членови се деливи со 11. Со непосредна проверка се добива дека a_{10} и a_{11} се деливи со 11, а меѓу членовите $a_1, a_2, \dots, a_9$ само a_4 и a_8 се деливи со 11. Според тоа, a_n е делив со 11 за $n = 4, n = 8$ или $n \geq 11$.

2. Нека $p(x)$ е полином дефиниран со равенството

$$P(x) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n} = (1 \cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n)^2.$$

Докажи, дека

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} = \frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}.$$

Решение. Ќе ги искористиме познатите равенства

$$S_1 = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{и} \quad S_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Тогаш $P(1) = \sum_{i=0}^{2n} a_i = S_1^2$. Од друга страна, од принципот на споредување на коефициентите, следува дека за секој фиксиран $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ важи

$$a_k = \sum_{i=0}^k i(k-i) = k \sum_{i=0}^k i - \sum_{i=0}^k i^2 = \frac{k^2(k+1)}{2} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{k^3-k}{6}.$$

Според тоа,

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n \frac{k^3-k}{6} = \frac{S_1^2 - S_1}{6}$$

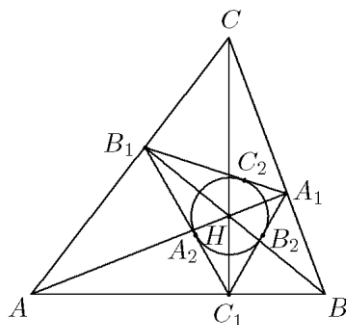
и за бараниот збир добиваме

$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} &= P(1) - \sum_{k=0}^n a_k = S_1^2 - \frac{S_1^2 - S_1}{6} \\ &= \frac{5S_1^2 + S_1}{6} = \frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}. \end{aligned}$$

3. Нека ABC е остроаголен триаголник кој не е рамностраник. Нека A_1, B_1, C_1 се подножјата на висините повлечени соодветно од темињата A, B, C и нека A_2, B_2, C_2 се допирните точки на впишаната кружница во $\triangle A_1B_1C_1$ со неговите страни. Докажи дека Ојлеровите прави на $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ се совпаѓаат.

Забелешка. Ојлеровата права на даден триаголник е правата определена од ортоцентарот и центарот на опишаната кружница околу триаголникот.

Решение. Ќе го користиме фактот дека висините на $\triangle ABC$ се симетрала на аглите на $\triangle A_1B_1C_1$. Според тоа, ортоцентарот H на $\triangle ABC$ е центар на впишаната кружница k во $\triangle A_1B_1C_1$, која истовремено е опишана кружница околу $\triangle A_2B_2C_2$. Значи, Ојлеровите прави l и l_2 соодветни на $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ имаат заедничка точка H . Од рамнокракиот $\triangle B_2C_2A_1$ следува дека



$AA_1 \perp B_2C_2$, па затоа $B_2C_2 \parallel BC$. Аналогно се докажува дека $A_2B_2 \parallel AB$ и $A_2C_2 \parallel AC$. Според тоа, $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ се слични, па затоа постои хомотетија h која $\triangle ABC$ го пресликува во $\triangle A_2B_2C_2$. Но, тоа значи дека $h(l) = l_2$, од каде следува $l \parallel l_2$. Но, правите l и l_2 имаат заедничка точка H , па затоа тие се совпаѓаат.

4. Определи го минималниот број елементи на конечното множество A за кое постои функција $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ со следново својство: $f(i) \neq f(j)$ секогаш кога $|i - j|$ е прост број.

Решение. Нека функцијата $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ го има саканото својство. Да ги разгледаме броевите 1, 3, 6 и 8. Разликата меѓу секои два од овие броеви е прост број и затоа A има барем 4 елементи.

Нека $A = \{0, 1, 2, 3\}$ и за секој n нека $f(n)$ е остатокот од делењето на n со 4. Тогаш, од $f(i) = f(j)$ следува дека $|i - j|$ е делив со 4, т.е. $|i - j|$ е сложен број. Според тоа, минималниот број елементи на A е 4.