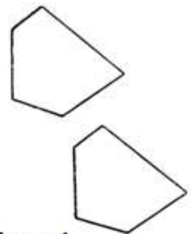
Ристо Малчески, Скопје

ПРЕСМЕТУВАЊЕ ПЛОШТИНА НА ПАРАЛЕЛОГРАМ И ТРИАГОЛНИК

Во редовната настава се запозна со формулите за пресметување плоштина на квадрат, правоаголник, паралелограм и триаголник и научи истите да ги применуваш при решавање на елементарни задачи. Но, како се добиени овие формули? Одговорот на ова прашање не е ниту малку едноставен, па затоа во нашите следни разгледувања ќе се обидеме да дадеме одговор на истото, со тоа што како појдовна основа ќе прифатиме дека плоштината на квадрат со должина на страна a е еднаква на a^2.

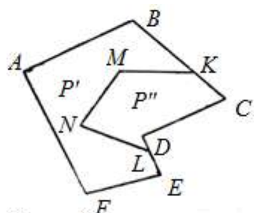
1. ПОИМ ЗА ПЛОШТИНА. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ПЛОШТИНА НА ПАРАЛЕЛОГРАМ


Цртеж 1

Да се изгради систем на мерење на површините на многуаголниците значи на секој многуаголник да му се придружи позитивен реален број, наречен негова *плоштина*, при што се исполнети следните својства:

а) Складни многуаголници имаат еднакви плоштини (цртеж 1).

б) Ако многуаголникот е составен од два или повеќе многуаголници што не се преклопуваат, тогаш неговата плоштина е збир од плоштините на многуаголниците кои се негови делови (на цртеж 2 плоштината на многуаголникот $ABCDEF$ е еднаква на збирот на плоштините на многуаголниците $ABKMNLEF$ и $DCKMNL$).



Цртеж 2

в) Плоштината на квадрат со страна a е еднаква на a^2.

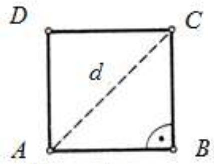
Својството в) ни овозможува да се утврди *единица мерка за плоштина*. За ваква единица може да се земе било кој квадрат со должина на страна a, но заради усогласување на мерните единици со меѓународниот SI систем е прифатено единица мерка за плоштина да биде квадрат со страна $1m$, за кој велиме дека има плоштина од еден метар квадратен и истата ја означуваме со $1m^2$.

Забелешка 1. Во практиката често пати плоштините се изразуваат и со други единици, од кои овде ќе ги споменеме $1\,dm^2, 1\,cm^2, 1\,ar$ и $1ha$. Притоа важи: $1\,m^2 = 100\,dm^2$, $1\,m^2 = 10000\,cm^2, 1\,ar = 100\,m^2$ и $1\,ha = 10000\,m^2$ (зошто?).

При воведување на поимот плоштина на рамнинска фигура со својството в) прифативме дека плоштината на квадрат со страна a се пресметува со формулата $P = a^2$.

Пример 1. Квадрат со страна $a = 0,3\,m$ има плоштина $P = 0,09\,m^2$. Меѓутоа, ако се има предвид забелешка 1 добиваме дека плоштината на овој квадрат може да се запише на еден од следните начини $P = 9\,dm^2$, $P = 900\,cm^2$, $P = 0,0009\,ar$ и $P = 0,000009\,ha$. ■

Забелешка 2. Од Питагоровата теорема следува дека за дијагоналата d и страната a на квадратот $ABCD$ (цртеж 3) важи формулата $d = a\sqrt{2}$, односно формулата $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$. Според тоа, ако замениме во формулата $P = a^2$, тогаш за плоштината на квадратот изразена преку неговата дијагонала ја добиваме формулата $P = \frac{d^2}{2}$. Така, на пример, квадрат со дијагонала $d = 6cm$ има плоштина $P = \frac{36}{2}cm^2 = 18cm^2$.



Цртеж 3

Во натамошните разгледувања ќе покажеме како со помош на својствата а)-в) може да се изведат формули за пресметување на плоштини на други рамнински фигури. За таа цел прво ќе ја изведеме формулата за пресметување плоштина на правоаголник.

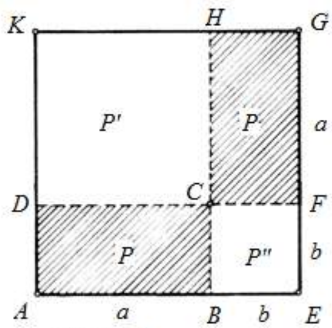
Теорема 1. Плоштината на правоаголник со должини на страни a и b е еднаква на ab, т.е. $P = ab$.

Доказ. Нека е даден правоаголник $ABCD$ чии должини на страни се a и b (цртеж 4). Над страната DC конструираме квадрат $DCHK$ со страна a, а над страната BC конструираме квадрат $BEFC$ со страна b и ги продолжуваме страните KH и EF кои се сечат во точката G. Јасно, четириаголникот $CFGH$ е правоаголник со страни a и b, а четириаголникот $AEGK$ е квадрат со страна $a+b$.

Од својството а) следува дека секој правоаголниците $ABCD$ и $CFGH$ има плоштина P. Понатаму, ако плоштините на квадратите $DCHK$, $BEFC$ и $AEGK$ се еднакви на $P', P"$ и $P*$, тогаш од својството б) следува

$$P* = 2P + P' + P". \quad (1)$$

Понатаму, од својството в) добиваме дека $P* = (a+b)^2, P' = a^2, P" = b^2$ и ако замениме во (1) наоѓаме $(a+b)^2 = 2P + a^2 + b^2$, од каде што следува дека $P = ab$. ■



Цртеж 4

Забелешка 3. Ако должините на страните a и b на правоаголникот се зададени во различни мерни единици, тогаш прво треба да ги изразиш во иста мерна единица, а потоа да ја пресметаш плоштината на правоаголникот.

Пример 2. Пресметај ја плоштината на правоаголник зададен со:

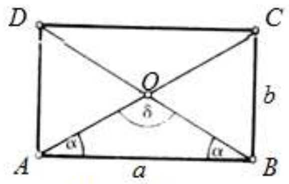
а) страни $a = 0,3m$ и $b = 12dm$, **б)** страна $b = 0,05m$ и дијагонала $d = 13cm$.

Решение. а) Согласно забелешка 3 за страната a имаме $a = 0,3m = 3dm$, па затоа плоштината на правоаголникот е $P = 3 \cdot 12dm^2 = 36dm^2 = 0,36m^2$.

б) Согласно забелешка 3 за страната b на правоаголникот имаме $b = 5cm$. Понатаму, од Питагоровата теорема следува $a = \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{13^2 - 5^2}cm = 12cm$, па затоа неговата плоштина е $P = 5 \cdot 12cm^2 = 60cm^2$. ■

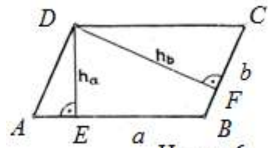
Пример 3. Пресметај ја плоштината на правоаголник зададен со дијагонала $d = 12cm$ и агол меѓу дијагоналите $\delta = 120^\circ$.

Решение. Страните a и b можеме да ги определиме од правоаголниот $\triangle ABC$ (цртеж 5), за кој е позната хипотенузата $\overline{AC} = d$. Од $\triangle ABO$ имаме $2\alpha + \delta = 180^\circ$ и како $\delta = 120^\circ$ добиваме $\alpha = 30^\circ$. Сега, ако во $\triangle ABC$ повлечеме висина од темето O, тогаш триаголникот е поделен на два складни правоаголни триаголници кои се половинким од рамностран триаголник. Затоа $\frac{b}{2} = \frac{d}{4}$, т.е. $b = \frac{d}{2} = 12 \cdot \frac{1}{2} cm = 6cm$ и $\frac{a}{2} = \frac{d}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $a = \frac{d\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}cm$, што значи $P = 6\sqrt{3} \cdot 6cm^2 = 36\sqrt{3}cm^2$. ■



Цртеж 5

Да го разгледаме ромбоидот $ABCD$ за кој имаме основа $\overline{AB} = a$ и висина $\overline{DE} = h_a$, односно основа $\overline{BC} = b$ и висина $\overline{DF} = h_b$ (цртеж 6). Формулата за пресметување на плоштината на ромбоидот ќе ја најдеме користејќи ги својствата а) и б).

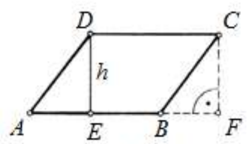


Цртеж 6

Теорема 2. Плоштината на ромбоид со должина на основа a и и висина h е еднаква на ah, т.е.

$$P = ah. \tag{2}$$

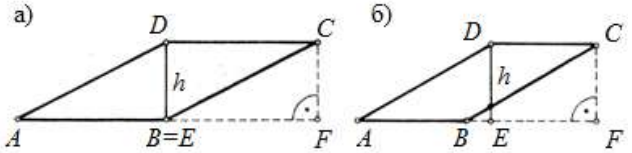
Доказ. Нека е даден правоаголник $ABCD$ со основа a и висина h (цртеж 7). Ги повлекуваме висините DE и CF кон основата AB и го добиваме правоаголникот $EFCD$ чии должини на страни се a и h. Триаголниците AED и BFC се складни, па затоа $P_{AED} = P_{BFC}$ (својство а). Сега од својството б) и теорема 1 следува



Цртеж 7

$$P_{ABCD} = P_{AED} + P_{EBCD} = P_{BFC} + P_{EBCD} = P_{EFCD} = ah.$$

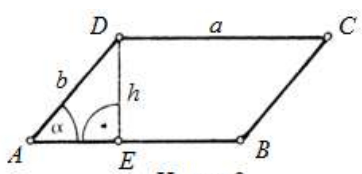
Обиди се самостојно да ги докажеш случаите кога висините DE и CF се во положба претставена на црт. 8 а) и б). ♦



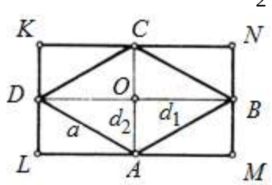
Цртеж 8

Пример 4. Пресметај ја плоштината на ромбоидот зададен со страни $a = 10cm$, $b = 5cm$ и агол меѓу страните $\alpha = 45^\circ$.

Решение. Правоаголниот $\triangle AED$ е рамнокрак, па затоа $\overline{AE} = \overline{DE} = \frac{\overline{AD}\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\, cm$ (цртеж 9). Конечно, за плоштината на ромбоидот добиваме $P = ah = 10 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} cm^2 = 25\sqrt{2}cm^2$. ■



Цртеж 9



Цртеж 10

На крајот од овој дел ќе дадеме уште една формула за пресметување на плоштина на ромб кај кој се дадени должините на неговите дијагонали d_1 и d_2 (цртеж 10). Дијагоналите на ромбот AC и BD се заемно нормални, па затоа ако во темињата A и C

повлечеме прави паралелни на дијагоналата BD, а во темињата на B и D повлечеме прави паралелни на дијагоналата AC, тогаш во пресекот на овие прави ги добиваме точките K, L, M и N кои се темиња на правоаголник. Плоштината на правоаголникот $KLMN$ е двапати поголем од плоштината на ромбот $ABCD$ (зошто?), т.е. $2P_{ABCD} = P_{KLMN} = d_1d_2$ од што следува

$$P_{ABCD} = \frac{d_1d_2}{2}. \qquad (3)$$

Пример 5. Пресметај ја плоштината на ромбоот зададен со страни $a = 13cm$ и дијагонала $d_2 = 10cm$.

Решение. Од правоаголниот $\triangle AOD$ (цртеж 10), добиваме

$$\frac{d_1}{2} = \sqrt{a^2 - (\frac{d_2}{2})^2} = \sqrt{13^2 - (\frac{10}{2})^2}cm = 12cm \text{ т.е. } d_1 = 24cm.$$

Сега, ако ја примениме формулата (3) за плоштината на ромбот наоѓаме

$$P = \frac{d_1d_2}{2} = \frac{10\cdot 24}{2}cm^2 = 120cm^2. \ \blacklozenge$$

2. ПРЕСМЕТУВАЊЕ ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

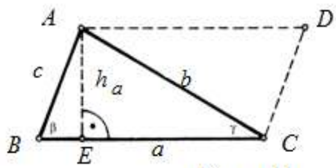
Да го разгледаме $\triangle ABC$ (цртеж 11). Низ точката A повлекуваме права паралелна на страната BC, а низ точката C права паралелна на страната AB во чиј пресек ја добиваме точката D. Четириаголникот $ABCD$ е парелеограм, што значи $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (зошто?). Плоштината на паралелограмот $ABCD$ е еднаква на ah_a, и таа е двапати поголема од плоштината на $\triangle ABC$. Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема 3. Плоштината P на ΔABC со страна a и соодветна висина h_a се пресметува со формулата

$$P = \frac{ah_a}{2}. \ \blacksquare \qquad (1)$$

Коментар 2. Секоја страна на ΔABC може да се земе за негова основа, па затоа точно е дека

$$P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}. \qquad (2)$$



Цртеж 11

Забелешка 5. а) Да се потсетиме, висинатана рамностран триаголник со страна a е еднаква на $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, со замена во (1) за неговата плоштина добиваме:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \qquad (3)$$

б) Од друга страна, кај правоаголен триаголник со катети a и b важи $h_a = b$, па затоа плоштината на правоаголниот триаголник се пресметува според формулата

$$P = \frac{ab}{2}. \qquad (4)$$

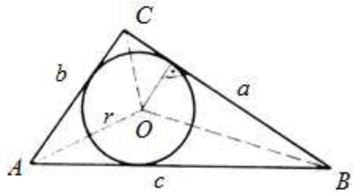
Пример 6. а) Плоштината на рамностран триаголник е еднаква на $\frac{9\sqrt{3}}{2}cm^2$. Најди ја неговата страна.

б) Плоштината на правоаголен триаголник со катета $a=8cm$ е еднаква на $0,52dm^2$. Најди ја другата катета.

Решение. а) Ако со a ја означеме должината на страната на рамностраниот триаголник, тогаш со замена во формулата (3) наоѓаме $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$, од каде наоѓаме $a^2=18$ т.е. $a=3\sqrt{2}cm$.

б) Ако со b ја означеме должината другата катета, тогаш со замена во формулата (4) наоѓаме $\frac{ab}{2}=0,52dm^2=52cm^2$, од каде наоѓаме $b=\frac{2\cdot 52}{13}cm=13cm$. ■

Познато ни е дека во секој триаголник може да се впише кружница со радиус r. Ќе покажеме дека плоштината на триаголникот може да се пресмета ако ни е познат радиусот на впишаната кружница и полупериметарот. Да го разгледаме $\triangle ABC$ во кој е впишана кружница со радиус r (цртеж 12). Центарот O на впишаната кружница го поврзуваме со темињата на триаголникот и ги добиваме триаголниците ABO, BCO и CAO чии плоштини се $P_1=\frac{cr}{2}, P_2=\frac{ar}{2}$ и $P_3=\frac{br}{2}$, соодветно. Според тоа, за плоштината на $\triangle ABC$ добиваме



Цртеж 12

$$P=P_1+P_2+P_3=\frac{cr}{2}+\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}=\frac{a+b+c}{2}r=rs,$$

каде $s=\frac{a+b+c}{2}$ е полупериметарот на ΔABC. Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема 4. Плоштината P на ΔABC со полупериметар s и радиус на впишана кружница r се пресметува со формулата

$$P=rs. \blacksquare \tag{5}$$

Пример 8. Пресметај го радиусот на впишаната кружница во правоаголен триаголник со плоштина $480cm^2$ чии катети се однесуваат како $5:12$.

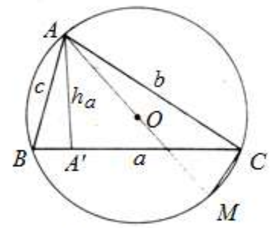
Решение. Нека a и b се катетите на правоаголниот триаголник. Од условот на задачата имаме $a:b=5:12$ и $ab=2\cdot 480$. Од правата равенка $a=\frac{5}{12}b$ и ако замениме во втората добиваме $\frac{5}{12}b^2=960$, т.е. $b=48cm$. Значи, $a=\frac{5}{12}b=20cm$. Од Питагоровата теорема за хипотенузата c добиваме $c=\sqrt{a^2+b^2}=52cm$, па затоа неговиот полупериметар е $s=\frac{a+b+c}{2}=60cm$.

Конечно, ако замениме во формулата (7) за радиусот на впишаната кружница наоѓаме $480=60r$, т.е. $r=8cm$. ■

Во претходните разгледувања видовме дека со помош на радиусот на впишаната кружница и полупериметарот, т.е. должините на страните може да се пресмета плоштината на триаголникот. Како што знаеме, околу секој триаголник може да се опише кружница со радиус R. Природно е да се запрашаме, дали со помош на радиусот R и страните може да се пресмета плоштината на триаголникот. Одговорот на ова прашање е потврден, што може да се види од следнта теорема.

Теорема 5. Плоштината P на ΔABC со страни a,b,c и радиус на опишан кружница R се пресметува со формулата

$$P = \frac{abc}{4R}. \qquad (6)$$



Цртеж 13

Доказ. Нека околу $\triangle ABC$ е опишана кружница со радиус $k(O,R)$ (цртеж 13). Повлекуваме права AO која кружницата k ја сече и во точката M, $(\overline{MA} = 2R)$. Имаме $\measuredangle ABC = \measuredangle AMC$, како агли над ист лак во кружница, и како $\triangle AMC$ е правоаголен (зошто?), добиваме дека $\triangle AMC \sim \triangle ACA_1$ од што следува $h_a : c = b : 2R$ односно $h_a = \frac{bc}{2R}$. Конечно, ако замениме во формулата $P = \frac{ah_a}{2}$ добиваме $P = \frac{a\frac{bc}{2R}}{2} = \frac{abc}{4R}$, што и требаше да се докаже. ■

Пример 9. Даден е рамнокрак триаголник со основа $a = 8cm$ и крак $b = 5cm$. Пресметај го радиусот на опишаната кружница околу триаголникот.

Решение. За висината на триаголникот соодветна на основата a наоѓаме

$$h_a = \sqrt{b^2 - (\tfrac{a}{2})^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3cm.$$

Според тоа, плоштината на триаголникот е $P = \frac{ah_a}{2} = 12cm^2$. Понатаму, ако се има предвид дека $c = b$, од (8) за радиусот R на опишаната кружница имаме $R = \frac{ab^2}{4P} = \frac{25}{6}cm$. ■

Плоштината на триаголникот може да се пресмета користејќи ги само неговите страни a,b и c, за што се користи познатата Херонова формула,која нема да ја докажуваме.

Теорема 6. Нека a,b,c се должините на страните ΔABC и s е неговиот полупериметар. Тогаш плоштината P се пресметува со формулата

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (7)$$

Пример 10. Пресметај ја плоштината на триаголникот зададен со страните $a = 25cm$, $b = 39cm$ и $c = 56cm$.

Решение. Полупериметарот на триаголникот е $s = \frac{a+b+c}{2} = 60cm$. Ако ја искористиме Хероновата формула за плоштината на триаголникот добиваме

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b(s-c)} = \sqrt{60(60-25)(60-39)(60-56)} = \sqrt{60\cdot 35\cdot 21\cdot 4} = 420cm^2 \ \blacklozenge$$

Пример 11. Пресметај ги радиусите на впишаната и опишаната кружница за ΔABC зададен со страните $a = 12cm$, $b = 35cm$ и $c = 37cm$.

Решение. Полупериметарот на триаголникот е $s = \frac{a+b+c}{2} = 42cm$. Ако ја искористиме Хероновата формула за плоштината на триаголникот добиваме

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b(s-c)} = \sqrt{42(42-12)(42-35)(42-37)} = 210cm^2.$$

Сега, со замена во $P = sr$ добиваме $r = \frac{P}{s} = 5cm$, а со замена во $P = \frac{abc}{4R}$ добиваме $R = \frac{abc}{4P} = \frac{37}{2}cm$. ■