Ристо Малчески
Алит Ибраими
Алекса Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ С9

(збирка нерешени задачи за натпревари за средно образиование)

Скопје, 2020

Рецензенти

Слаѓана Брсаковска
Катерина Аневска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

51(075.3)(076)

МАЛЧЕСКИ, Ристо
Математички талент С9 : (збирка нерешени задачи за натпревари за средно образование) / Ристо Малчески, Алит Ибраими, Алекса Малчески. - Скопје : Армаганка, 2020. - 266 стр. ; 25 см

Библиографија: стр. 260-266

ISBN 978-608-4904-49-6

1. Ибраими, Алит [автор] 2. Малчески, Алекса [автор]
а) Математика -- Задачи за средно образование

COBISS.MK-ID 51229189

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* С9 (*збирка нерешени задачи за натпревари за средно образование*) е дел од серијата збирки во која веќе се издадени осум книги, по две за секоја година во средното образование. Во книгата се содржани вкупно 2340 нерешени задачи, од кои 1937 се задачи на основно ниво, т.е. задачи за подготовка за општинските, регионалните и државните натпревари, а 403 се задачи на напредно ниво и истите се наменети за подготовка за меѓународните натпревари. Незначителен дел од задачите се содржани во претходните осум книги, а нивното поместување во оваа книга е во функција на поврзување на книгите во една целина.

Задачите во основното ниво се поделени во 18 теми, со што практично се опфатени сите области од елементарната математика кои се застапени до државните натпревари. Притоа, во некои теми задачи се распределени на поттеми, што има за цел учениците полесно да препознаат со кој апарат треба да се решаваат определени задачи. Меѓутоа, во делот на теоријата на броеви, планиметријата и неравенствата ваквата поделба е на поголеми области, што има за цел учениците самостојно да препознаваат во кој дел од наведената област се наоаѓа определена задача. Последното посебно се однесува на планиметриските задачи, дел од кои успешно може да се решаваат со помош на тригонометрија, но тоа на учениците не им е посочено. Сметаме дека учениците кои претходно, користејќи ги првите осум збирки од оваа серија, ги усвоиле знаењата од соодветните области нема да имаат потешкотии во изборот на методите за решавање на задачите содржани во оваа збирка. Покрај тоа, на мислење сме дека самостојното решавање на задачите во оваа збирка ќе биде добредојдено за финалните подготовки за натпрварите по математика за учениците од средното образование. Слични забелешки и напатставија важат и за задачите содржани во напредното нивко, кои се поделени во шест теми.

Рецензентите, д-р Слаѓана Брсаковска и д-р Катерина Аневска, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје — Авторите

февруари, 2020 г.

I ОСНОВНО НИВО

1. МНОЖЕСТВА И ЛОГИКА

1. Од 100 ученици: 24 ученици не учат ниту еден од јазиците англиски, руски и германски; 48 учат англиски, 8 учат и англиски и руски, 26 учат германски, 8 учат и германски и англиски, 13 и германски и руски и 28 учат руски. Колку ученици ги учат сите три јазици?

2. Во кутија се наоѓаат 100 коцки, чии страни се обоени со црвена, жолта и зелена боја. Меѓу нив 75 коцки имаат најмалку еден црвен ѕид, 80 коцки имаат барем еден зелен ѕид, а 85 коцки имаат барем еден жолт ѕид. Определи го најмалиот можен број коцки кои имаат ѕидови од сите три бои,

3. Определи го најмалиот број елементи кои ги има множеството природни броеви A чиј најмал елемент е 1, најголем елемент е 100, и е такво што секој број од A, освен 1, е еднаков на збирот на два (еднакви или различни) броеви од A.

4. На правата се наоѓаат n затворени интервали. Докажи дека ако секои два од овие интервали имаат непразен пресек, тогаш пресекот на сите интервали е непразен.

5. Колку најмногу елементи може да има подмножество на множеството $\{1, 2, 3, ..., 2017\}$ такво што за секои два елементи a и b на тоа подмножество бројот $a+b$ не е делив со бројот $a-b$?

6. Колку најмногу цели броеви може да содржи конечно множество S такво што меѓу секои три елементи на множеството S постојат два различни броја чиј збир припаѓа на S?

7. Дадено е разбивањето на множеството природни броеви
$$\mathbb{N} = \{1\} \cup \{2,3\} \cup \{4,5,6\} \cup \{7,8,9,10\} \cup \{11,12,13,14,15\} \cup ... .$$
Ако S_k е збирот на $k-$те броеви во $k-$тотот множество, докажи дека
$$S_1 + S_3 + S_5 + ... + S_{2n-1} = n^n,$$
за секој природен број n.

8. Тркало за рулет е поделено на 36 делови. Во овие делови по некој редослед се запишани броевите од 1 до 36. Докажи дека постојат три последователни делови такви што збирот на броевите запишани во нив е поголем или еднаков на 56.

9. Тркалото на среќата е поделено на 30 делови во кои се запишани броевите 1, 2, 3, ...,30. Докажи дека постојат три последователни делови во кои збирот на запишаните броеви е поголем или еднаков на 47.

10. Природните броеви од 1 до 2003 произволно се наредени во низа. На низата ја реализираме следнва операција: ако првиот број во низата е еднаков на k, го вртиме редоследот на првите k броеви. Докажи дека по конечен број последователни примени на оваа операција бројот 1 ќе се појави на првото место независно од почениот распоред.

11. На таблата се запишани броевите $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{2001}$. Андреј избира два од запишаните броеви, на пример x и y, го пресметува бројот $x+y+xy$, резултатот го запишува на таблата и ги брише броевите x и y. Определи кој број ќе остане на таблата ако оваа постапка ја повтори 2000 пати.

12. Дадени се 99 (не задолжително различни) природни броеви помали од 100. Ако збирот на никои два, три или повеќе броеви (помалку од 100) не е делив со 100, докажи дека сите овие броеви се меѓусебно еднакви.

13. Должините на страните на конвексен многуаголник со 1998-аголник се природни броеви. Периметарот на многуаголникот е еднаков на 1997000. Докажи дека барем две страни на овој многуаголник имаат еднакви должини.

14. Томе, Филип и Никола дошле со своите девојки Ана, Марија и Ивана во трговски центар. Секој од шестмината за секој купен предмет платил онолку евра колку што купил предмети, а секој дечко потрошил 63 евра повеќе од својата девојка. Томе купил 23 предмети повеќе од Марија, а Никола 11 предмети повеќе од Ивана. Откриј ги паровите момче – девојка.

15. На n картици запишани се речениците:

    Најмалку k реченици лево од оваа картица се невистинити.

    за $k=0,1,2,...,n-1$. Картиците се наредени во некој редослед од лево на десно. Колку најмногу реченици може да бидат вистинити?

16. Едно утро 11 пријатели решиле да обојат една ограда. Боењето почнале во 9 часот и завршило во 16 часот. Секој од пријателите почнал да работи на цел час и работел точно два часа. Дали можеме да бидеме сигурни дека во некој период работеле најмалку четири пријатели?

17. Во трка учествуваат 200 велосипедисти. На почетокот на трката велосипедистите се наредени еден зад друг. Ќе велиме дека еден велосипедист претекнува ако го менува местото со велосипедистот непосредно пред него. Во те-

кот на трката редоследот се менува само кога некој велосипедист претекнува. Нека A е бројот на сите можни редоследи на крајот на трката во која секој велосипедист претекнувал точно еднаш, а нека B е бројот на сите можни редоследи на крајот на трката во која секој велосипедист претекнувал најмногу еднаш. Докажи дека $B = 2A$.

18. На шаховски турнир со 8 учесници секои двајца шахисти одиграле по една партија. Победникот во секоја партија добива по 1 бод, поразениот по 0 бодови, а ако партијата заврши нерешено секој од играчите добива по $\frac{1}{2}$ бодови. На крајот на турнирот секои два шахисти имаат различен број бодови, а второпласираниот шахист има онолку бодови колку што имаатпоследните четворица заедно. Колку бодови освоил седмопласираниот шахист во партијата со третопласираниот шахист?

19. На шаховски турнир учествувале три ученици од прва година и неколку ученици од втора година. Трите ученици од прва година освоиле вкупно 7 бодови, а секој ученик од втора година освоил еднаков број бодови. Колку ученици од втора година имало на турнирот ако за победа се добива по 1 бод, за пораз по 0 бодови и за нерешен резултат по половина бод. Турнирот се игра така што секој играч игра со секој од преостанатите играчи по една партија.

20. На еден турнир учествувале n кошаркарски тимови. Секој ти одиграл со секој друг тим точно еден натпревар. Во кошарката нема нерешени исходи. Ако на крајот на турнирот $i-$тиот тим има x_i победи и y_i порази, $i = 1, 2, \ldots, n$ докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \ .$$

21. На кошаркарски турнир учествувале 8 екипи и секоја со секоја одиграла по еден натпревар. Во кошарката за победа се добиваат по 2 бода, а за пораз 0 бодови (нема нерешени резултати). Екипите освоиле 14, 12, 8, 8, 6, 4, 2 и 2 бода. Колку натпревари последните четири екипи изгубиле од првите четири екипи.

22. Во секое поле на табела 4×4 е впишан по еден број. За секое поле збирот на броевите во неговите соседни полиња е еднаков на ист природен број x (соседни се полињата кои имаат заедничка страна). Збирот на сите броеви во табелата е еднаков на 282. Определи го бројот x.

23. На две спротивни страни на коцката се наоѓа по една точка, на другите две спротивни страни по две, а на преостанатите две по три точки. Од осум такви коцки е направена коцка $2 \times 2 \times 2$, па потоа се изброени точките на секоја страна. Дали може на овој начин да се добијат шест последователни природни броеви?

24. Во 20 садови (секоја содржи најмалку 210 литри) се наоѓаат редоследно 1, 2, 3, ..., 20 литри вода. Од садот A во садот B дозволено е да се прелие точно онолку вода колку што веќе има во садот B (при претпоставка дека во садот A има барем толку вода колку што има во садот B). Дали е мно по конечен број прелевања да се добијат:
а) пет садови со по 3 литри вода, а во останатите садови да има по 6, 7, .. 20 литри вода,
б) сите 210 литри вода да се во еден сад.

25. Осум светилки се распоредени на кружница. Секоја светилка може да биде запалена или изгасната. Во еден чекор дозволена е следнава трансформација: светилката по трансформацијата ќе биде угасена, ако една од нејзините соседни светилки е запалена, а другата угасена, односно светилката по трансформацијата ќе свети ако двете соседни светилки се или запалени или угасени. Во еден чекор се менува состојбата на сите свитилки истовремено. Докажи дека по најмногу четири чекори сите светилки ќе светат.

26. Во една вреќа се наоѓаат 255 топчиња означени со броевите 1, 2, ,3, ..., 255. Секој од N ученици од вреќата зел по едно топче. Се покажало дека ниту еден од извлечените броеви не е точно двапати поголем од некој друг извлечен број. Определи ја најголемата можна вредност на N.

27. Имаме монети од 1, 2, 5, 10, 20, 50 центи и 1 евро. Докажи дека ако сума од M центи може да се плати со помош на N монети, тогаш сума од N евра може да се плати со помош на M монети.

28. Докажи дека темињата на коцката може да се означат со степените 2^i, $i=1,2,3,4,5,6,7,8$ така што производот на сите степени кои се наоѓаат на една страна на коцката е еднаков за сите страни на коцката. Определи го тој производ.

29. Сопружниците Ана и Томе дошле на забава на која имало уште четири пара. При доаѓањето имало извесен број ракувања. Притоа никој не се ракувал со својот брачен другар, ниту со самиот себе. Кога покасно Томе ги прашал сите присутни со колку лица се ракувале, добил девет различни одговори. Со колку лица се ракувала Ана?

30. Околу тркалезна маса седат m жени и n мажи ($m+n\geq 3$). Кога во зависност од m и n можеме да тврдиме дека постои лице кое седи меѓу двајца мажи?

31. Во селото на дедо Илко има 20 клубови. Секој жител на селото е член на еден или два клуба. Секој клуб има најмногу 25 членови и за секој пар клубови постои жител кој е член на двата клуба. Определи го најголемиот и најмалиот можен број жители на селото на дедо Илко.

32. Ванчо на таблата ги запишал броевите 1 и 2, а потоа продолжил да пишува броеви така што секој нов број е еднаков на збирот на квадратите на послед-

ните два запишани броја. Докажи, дека продолжувајќи ја оваа постапка Ванчо никогаш нема да запише број кој е делив со 3 или кој е делив со 7.

33. На почетокот на таблата се наоѓаат броевите 2015, 2018 и 2021. Илија во секој чекор ги означува броевите на таблата со a, b и c во некој редослед, а потоа ги заменува со броевите $3a-b, 3b-c$ и $3c-a$. Дали може Илија со последователна примена на оваа постапка во некој момент на таблата да добие три еднакви броеви?

34. На таблата се запишани броевите 1, 2, 3, ..., 2015, 2016. Во секој чекор избираме два од запишаните броеви a и b, ги бришиме и на нивно место ги запишуваме броевите $3a-b$ и $13a-3b$. Дали после конечен број чекори може на таблата да се појават броевите 2, 4, 6, ..., 4030, 4032.

35. Ламјата Огненка има 2010 глави. Јунакот Марко може со еден удар на мечот да и отсече 2, 17, 21 или 33 лави, по што на Огненка и растат 9, 10, 0, или 47 глави, соодветно. Дали може во некој момент Марко да и ги отсече сите глави на Огненка?

36. Дадена е тројката броеви $(a_1, a_2, a_3) = (3, 4, 12)$. Ја спорведуваме следната постапка: избираме два броја a_i и a_k, $i \neq k$ и ги заменуваме со броевите $0,6a_i - 0,8a_k$ и $0,8a_i + 0,6a_k$. Дали може со повеќекратно повоторување на опишаната постапка да се добие тројката $(2, 8, 10)$.

37. Жаба скока по точките на координатната мрежа почнувајќи од точката (1,1) по следниве правила:
    1) од точката (a,b) жабата може да скокне во една од точките $(a, 2b)$ или $(2a, b)$,
    2) ако $a > b$, жабата смее да скокне од (a,b) во $(a-b, b)$, а ако $a < b$ смее да скокне од (a,b) во $(a, b-a)$.

    Дали жабата може да стигне до точката:
    а) (24, 40), б) (40, 60), в) (24, 60), г) (200, 4)?

38. Три скакулци седат во три темиња на еден квадрат. Секоја минута еден од нив прескокнува еден од другите два и се сместува во точката која е симетрична на точката од која скокнал во однос на точката во која е скакулецот кој го прескокнал. Дали може барем еден од скакулците по конечен број чекори да се најде во четвртото теме на квадратот?

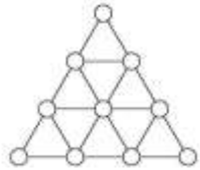
39. Дали може рабовите на тетраедар да се означат со броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6 (секој број за точно еден раб) така што збировите на броевите придружени на секој ѕид на тетраедарот ќе бидат еднакви?

40. Броевите 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 се распоредени на кружница. Со N да го означиме најголемиот од десетте збирови кои се добиваат така што

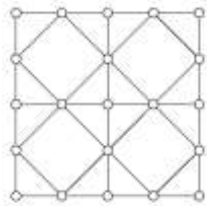
секој од броевите го собереме со двата негови соседни броја. Определи ја најмалата вредност на бројот N која можеме да ја постигнеме.

41. Квадратна табела 2009×2009 е пополнета со броевите 1, 2, 3, ..., 2009 така што во секој ред и во секоја колона се појавува секој од броевите. Ако табелата е симетрична во однос на една дијагонала, тогаш на таа дијагонала се наоѓаат сите броеви 1, 2, 3, ..., 2009. Докажи!

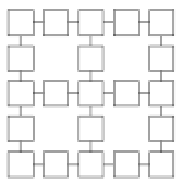
42. Броевите 1, 2, 3, ..., 10 се распоредини во крукчињата на цртежот десно, а потоа во секој од деветте мали триаголници е запишан звирот на броевите запишани во неговите темиња.
Докажи, дека меѓу броевите запишани во триаголниците подтојат три броја чиј збир е поголем или еднаков на 48.



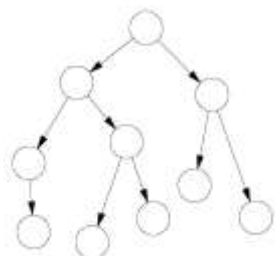
43. Дадени се 21 точка како на цртежот десно. На почетокот на секоја точка е придружен бројот 0. Во секој потез се избира права која содржи некоја од нацртаните отсечки и во сите точки низ кои минува оваа права придружените броеви се зголемуваат за 1. Ќе велиме дека природниот број n е достижен ако на опишаниот начин по конечен број чекори може да се постигне на сите точки да е придружен бројот n .
а) Докажи дека бројот 2010 е достижен.
б) Докажи дека бројот 2011 не е достижен.



44. На почетокот во секој квадрат на цртежот десно е запишан бројот 0. Во секој потез се избира еден квадрат и истовремено сите броеви во тој квадрат и соседните на него квадрати се зголемуваат за 1. Д0окажи дека по конечен број потези:
а) може да се постиогне во секој квадрат да е запишан бројот 2010,
б) не може да се постигне во секојквдрат да е запишан бројот 2011.



45. На колку начини можеме во кругчињата на цртежот десно да ги запишеме броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 така што секоја стрелка ќе покажува од поголем кон помал број?



46. Иван и Маја имаат два идентични сета од по 50 картички со различни симболи. Секој од нив го измешал својот сет картички. Потоа Иван на масата го става својот сет картички, а Маја своите картички ги става над картичките на Иван. Иван потоа брои колку картички има меѓу две идентични картички и тоа го прави за секој од 50-те парови идентични картилчки, па ги собира добиените броеви. Кои збирови може да ги добие Иван?

2. АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

1. Докажи, дека производот на било кои два елементи на множеството
$$\{m \mid m = a^2 - 5b^2,\ a,b \in \mathbb{N}\}$$
исто така припаѓа на ова множество.

2. Разложи го на множители изразот
$$(b-c)(b+c)^3 + (c-a)(c+a)^3 + (a-b)(a+b)^3 .$$

3. Докажи дека за секои цели броеви a и b важи
$$a^3 - 3a^2b - 9ab^2 - b^3 + 6 \neq 0 .$$

4. Докажи дека
$$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a) .$$

5. Ако $x + y + z = 0$, докажи дека $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

6. Ако $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$ и $ac + bd = 0$, пресметај $ab + cd$?

7. Нека $a + b = 2$ и $a^2 + b^2 = 6$. Пресметај ја вредноста на изразот $a^{-1} + b^{-1}$.

8. За реалните броеви a,b,c важи $a + b + c = 0$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Определи ја вредноста на изразот $a^4 + b^4 + c^4$.

9. Нека x, y, z се реални броеви такви што $x + y + z = xyz$. Докажи дека
$$x(1 - y^2)(1 - z^2) + y(1 - x^2)(1 - z^2) + z(1 - x^2)(1 - y^2) = xyz .$$

10. За реалните броеви a и b важи
$$a^3 - 3ab^2 = 44 \text{ и } b^3 - 3a^2b = 8 .$$
Пресметај $a^2 + b^2$.

11. Ако $a + b = 4, a^2 + b^2 = 14$, пресметја ја вредноста на изразот $a^3 + b^3$.

12. Која релација ги поврзува броевите a,b и c ако за некои броеви x и y важи
$$a = x - y,$$
$$b = x^2 - y^2,$$
$$c = x^3 - y^3.$$

13. Ако $a + b = 1$ и $ab \neq 0$ докажи дека

$$\frac{a}{b^3-1}-\frac{b}{a^3-1}=\frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

14. Пресметај го збирот
$$\frac{2}{2\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 8}+...+\frac{2}{1997\cdot 2000}+\frac{2}{2000\cdot 2003}.$$

15. Нека x, y, z и w се позитивни реални броеви такви што
$$\frac{x}{y+z+w}+\frac{y}{x+z+w}+\frac{z}{x+y+w}+\frac{w}{x+y+z}=1.$$
Пресметај го збирот
$$\frac{x^2}{y+z+w}+\frac{y^2}{x+z+w}+\frac{z^2}{x+y+w}+\frac{w^2}{x+y+z}.$$

16. а) Разложи го на множители изразот n^4+4.
б) Докажи:
$$\frac{(1^4+\frac{1}{4})(3^4+\frac{1}{4})(5^4+\frac{1}{4})...(11^4+\frac{1}{4})}{(2^4+\frac{1}{4})(4^4+\frac{1}{4})(6^4+\frac{1}{4})...(12^4+\frac{1}{4})}=\frac{1}{313}.$$

17. Пресметај ја вредноста на изразот
$$\frac{1234321234321\cdot 2468642468641-1234321234320}{1234321234320\cdot 2468642468641+1234321234321}.$$

18. Упрости го изразот
$$3(5^n-5)(5^n+5)+2(25+5^{2n})+25^{n+1}:5^{2n}$$

19. Упрости го изразот
$$\frac{2^{2n+1}-2^{4n+3}+2^{6n+3}}{2^{2n}-2^{4n+1}}.$$

20. Упрости го изразот
$$\frac{2016^{3n+2}-2016^5}{2016^{2n+3}+2016^{n+4}+2016^5}.$$

21. Нека $x>0$. Упрости го изразот
$$-x^{-x^{-x}}\cdot\frac{x^{-x^{-x}}+x^{x^{-x}}}{x^{-x^{-x}}+x^{x^x}}.$$

22. Докажи дека од $xyz=1$ следува $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1$.

23. Определи ги меѓусебните односи на броевите x, y, z ако за дадените броеви $a, b, c, abc\neq -1$ важат равенствата $x+by=y+cz=z+ax$.

24. Нека a, b, c се по парови различни ненулти реални броеви такви што $a+b+c=0$. Докажи дека

а) $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=3$,

б) $(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b})(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a})=9$.

25. Докажи дека за реалните броеви $a\neq b\neq c\neq a$ е точно равенството

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c.$$

26. Ако се a,b,c реални броеви такви што $a\neq b\neq c\neq a$ докажи дека

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

27. Ако збирот $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ е еднаков на 1, тогаш два од трите собирци се еднакви на 1, а третиот е еднаков на -1. Докажи!

28. За броевите a,b,c важи

$$\frac{a^2-bc}{a(1-bc)}=\frac{b^2-ac}{b(1-ac)} \text{ и } abc(1-bc)(1-ac)\neq 0.$$

Ако $a\neq b$, докажи дека

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

29. Ако за реалните броеви a,b,c важи

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1,$$

докажи дека

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

30. Изразот

$$A=\frac{x^3+a^3}{x-a}+\frac{x^3-a^3}{x+a}-\frac{8x^3a^3}{x^4-a^3},\quad x\neq a,-a$$

запиши го како нескратлива дропка $\frac{P}{Q}$ и докажи дека изразот $Q^2-P-3a^2x^2$ е точен квадрат.

31. Ако $x+y+z=0$, упрости ги изразот

$$\frac{x^7+y^7+z^7}{xyz(x^4+y^4+z^4)}.$$

32. Нека $y\neq 0,\pm 1$. Ставаме $x_1=\frac{y-1}{y+1}$, $x_2=\frac{x_1-1}{x_1+1}$, $x_3=\frac{x_2-1}{x_2+1}$ итн. Определи го y ако $x_{1972}=3$.

33. Нека a_i, $i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)}+\frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)}+...+\frac{a_n}{a_1(a_n+a_1)}=\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_3}{a_2(a_2+a_3)}+...+\frac{a_1}{a_n(a_n+a_1)}.$$

34. Пресметај го збирот

$$\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+...+\frac{100^2+1}{100^2-1}.$$

35. Нека a и b се позитивни реални броеви за кои важи

$$a^2+b^2=8 \text{ и } a^6+b^6=416.$$

Определи го производот ab.

36. Нека a и b се различни ненулти реални броеви такви што

$$\frac{a}{2017}+\frac{2017}{a}=\frac{b}{2017}+\frac{2017}{b}.$$

Определи го $\sqrt{ab}$.

37. За реалните броеви $x_1,x_2,...,x_{2016}$ точни се равенствата

$$\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2}{x_2+2}=...=\frac{x_{2016}}{x_{2016}+2016}$$

$$x_1+x_2+...+x_{2017}=2017.$$

Пресметај го x_{2017}.

38. Нека x и y се меѓусебно различни реални броеви за кои важи

$$x+4=(y-2)^2, \quad y+4=(x-2)^2.$$

Определи ја вредноста на изразот x^2+y^2.

39. Докажи дека не постојат реални броеви a,b,c за кои се исполнети равенствата

$$a+b+c=63$$

$$ab+bc+ca=1996.$$

40. Нека a,b,c се реални броеви такви што

$$a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{b}=c+\frac{1}{c}.$$

Докажи дека

$$a+\frac{1}{b}=-abc.$$

41. Ако

$$x+y+z=a,$$

$$x^2+y^2+z^2=b^2$$

$$x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=c^{-1}$$

пресметај $x^3+y^3+z^3$.

42. Ако $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$ и $\frac{a}{1}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0$, определи ја вредноста наизразот
$$\frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}+\frac{9}{c^2}.$$

43. Нека $x+\frac{1}{x}=1$. Докажи дека $x^{6n+1}+\frac{1}{x^{6n+1}}=1$ за секој природен број n.

44. Ако $x+\frac{1}{x}=a$, пресметај $x^7+\frac{1}{x^7}$.

45. Што може да се заклучи за броевите a^2,b^2,c^2 ако важи равенството
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{a+c}.$$

46. Докажи дека бројот
$$\underbrace{111...11}_{2n}-\underbrace{222...22}_{n}$$
е точен квадрат на природен број.

47. Спореди ги изразите
$$A=\frac{2,00...004}{(1,00...004)^2+2,00...004} \text{ и } B=\frac{2,00...002}{(1,00...002)^2+2,00...002}$$
каде во секој број во броителот и именителот има по 1988 нули.

48. Упрости го изразот $\sqrt{6-4\sqrt{2}}-\sqrt{6+4\sqrt{2}}$.

49. Докажи дека вредноста на изразот $\frac{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\,(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}}$ е природен број.

50. Докажи дека $\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26}$ е цел број и определи го.

51. Докажи дека $\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$ е рационален број.

52. Пресметај
$$\sqrt{\underset{2n}{44...4}+\underset{n+1}{11...1}-\underset{n}{66..6}}.$$

53. Нека a,b,c се реални броеви такви што $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$. Докажи дека $(a+b+c)^3=27abc$.

54. Ако $ax^3=by^3=cz^3$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, докажи дека
$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

55. Пресметај го збирот $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$.

56. Во множеството реални броеви е дефинирана функцијата
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}.$$
Пресметај го збирот
$$f(1)+f(2)+...+f(2003).$$

57. Докажи дека: $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2004^2}+\frac{1}{2005^2}}=2005-\frac{1}{2005}$.

58. Определи ја најмалата можна вредност на изразот
$$(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)+3^2.$$

59. За реалните броеви x,y,z важи $x^2+y^2+z^2=1$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$.

60. Нека x,y,z,w се реални броеви такви што важи
$$x^2+y^2+z^2+w^2+x+3y+5z+7w=4.$$
Определи ја најголемата можна вредност на збирот $x+y+z+w$.

61. Нека a,b,c се реални броеви. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $a^2+5b^2+8c^2-4ab-4bc-8c+24$.

62. Нека a,y и a се реални броеви такви што $x+y=a-1$ и $xy=a^2-7a+12$.Определи ја вредноста на a за која изразот x^2+y^2 прима најголема можна вредност.

63. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $\frac{4x^2+2y^2-4y+4}{2x^2+y^2-2y+5}$.

64. Докажи дека во табелата

1
2, 3, 4,
3, 4, 5, 6, 7,
4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
....

збирот на сите броеви во секој ред е еднаков на квадратот на средиот број.

65. Пресметај го збирот $\sum_{i=0}^{2007}\frac{x_i^3}{1-3x_i+x_i^2}$, каде $x_i=\frac{i}{2007}$, за $i=0,1,2,...,2007$

3. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА, РАВЕНКА И НЕРАВЕНКА

1. Реши ја равенката

$$\frac{a-5}{x+1}-\frac{7+3a}{x-2}=\frac{2ax-5}{x^2-x-2},$$

каде a е реален параметар.

2. Реши ја равенката

$$\frac{6a+1}{a}x+\frac{6a}{a+1}+\frac{a^2}{(a+1)^3}=\frac{2a+1}{a^3+2a^2+a}x$$

каде a е параметар.

3. Реши ја равенката

$$(m+x)^2-(x-3)^2=x(3+m^2)\,.$$

4. Определи ја вредноста на реалниот параметар a така што решението на равенката

$$\frac{2a+x}{2-x}-\frac{2a-x}{2+x}=\frac{4a}{4-x^2}$$

е помало или еднакво на 1.

5. Во множеството реални броеви решија равенката

$$\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}-2\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}}+3\sqrt{2x+8-6\sqrt{2x-1}}=4\,.$$

6. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\left(4-\frac{x}{2013}\right)^{10^{2013}}=\left(\frac{x}{671}\right)^{10^{2013}}.$$

7. Реши ја равенката

$$|x-|x-|x+1||=x\,.$$

8. а) Реши ја равенката

$$|3x-2|+|3x+2|=5\,.$$

б) Определи ја плоштината на фигурата ограничена со правата $y=5$ и графикот на функцијата

$$y=\sqrt{9x^2-12x+4}+\sqrt{9x^2+12x+4}\,.$$

9. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$|x+3|+2\sqrt{x^2+2x+1}=7\,.$$

10. За која вредност на реалниот параметар a равенката $|3-2|x||=-\frac{3}{4}a$ има точно три решенија?

11. За кои реални броеви a равенката

$$|x-2|+|3-x|=a$$

има точно две решенија.

12. Нека n е природен број. Определи ги сите решенија на равенката
$$||...|||x-1|-2|-3|-...-(n-1)|-n|=0 .$$
13. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$2|x-1|+a|x-3|=3a+5-x .$$
14. Во множеството реални броеви реши ја равенката
$$f(x)+f(2-x)=2 ,$$
каде
$$f(x)=\begin{cases}|x|, & x\le 1\\ 2-x, & x>1.\end{cases}$$

15. Нека $\{p,r,s,t\}=\{4,8,12,16\}$. Разгледувајќи ги сите можни избори на броевите p,r,s,t определи ги сите решенија (x,y,z) на системот равенки
$$\begin{aligned} x+y+z&=p\\ x+y-z&=r\\ x-y+z&=s\\ x-y-z&=t.\end{aligned}$$

16. Реши го системот равенки
$$\begin{cases}2x_1-5x_2+3x_3=0\\ 2x_2-5x_3+3x_4=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ 2x_{1993}-5x_{1994}+3x_1=0\\ 2x_{1994}-5x_1+3x_2=0\end{cases}$$

17. Реши го системот равенки
$$x_1+a_1x_2=x_2+a_2x_3=x_3+a_3x_4=x_4+a_4x_5=x_5+a_5x_1=1 ,$$
каде $a_1a_2a_3a_4a_5\ne -1$.

18. Реши го системот равенки
$$\begin{cases}\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_3}{a_3}=...=\frac{x_{n-2}}{a_{n-2}}=\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{x_n}{a_n}\\ x_1+x_2+...+x_n=0\end{cases}$$

19. Определи го x_{1000} ако
$$\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2}{x_2+3}=\frac{x_3}{x_3+5}=...=\frac{x_{1006}}{x_{1006}+2011}$$
$$x_1+x_2+...+x_{1006}=503^2.$$

20. Во Декартов координатен систем претстави го множеството точки (x, y) за кои важи
$$||x-1|-1|=|y+1|.$$

21. Скицирај го множеството точки (x, y) во координатната рамнина за кои важи
$$y \geq |2|x|+|x-2||,\ \ y \leq 8.$$
Определи ја плоштината на добиената геометриска фигура.

22. За која вредност на реалниот параметар a равенката $|3-2|x||=-\frac{3}{4}a$ има точно три решенија?

23. Определи ја плоштината на множеството точки за кои во Декартов координатен систем важи
$$|x|+|y|+|x+y| \leq 2.$$

24. Во координатната рамнина нацртај го множеството точки (x, y) кои го задоволуваат равенството
$$|y|=x+\sqrt{x^2-6x+9}.$$

25. Докажи дека за секој $a \in (1,2)$ плоштината на ликот ограничен со графиците на функциите
$$y=1-|x-1| \text{ и } y=|2x-a|$$
е помала од $\frac{1}{3}$.

26. Во Декартов координатен систем скицирај го множеството тоочки за кои важи
$$||x|+|y|-2| \geq 1.$$

27. Ако $a>0$, во Декартов правоаголен координатен систем прикажи го множеството точки кои ја задоволуваат неравенката
$$||x+a|-|y-a||<a.$$

28. Реши го системот равенки
$$\begin{cases} |x+y|=1 \\ |x|+|y|=1. \end{cases}$$

29. Реши го системот равенки
$$\begin{cases} |x+y-4|=5 \\ |x-3|+|y-1|=5. \end{cases}$$

30. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} |x-3|+|y+2|=1 \\ |x+1|-|y-1|=2. \end{cases}$$

31. Определи го бројот на негативните цели броеви x за кои важи $\frac{x-2011}{x+2012} \leq 1$.

32. Реши ја неравенката

$$\frac{x-8}{2012}+\frac{x-7}{2013}+\frac{x-6}{2014}+\frac{x-5}{2015}+\frac{x-4}{2016}<\frac{x-2012}{8}+\frac{x-2013}{7}+\frac{x-2014}{6}+\frac{x-2015}{5}+\frac{x-2016}{4}.$$

33. Реши ја неравенката

$$\left|\frac{2013}{x+2013}+\frac{2013}{(x+1)(x+2)}+\frac{2013}{(x+2)(x+3)}+...+\frac{2013}{(x+2012)(x+2013)}\right|<1.$$

34. Реши ја неравенката

$$|||9-x|-x|+2x|\leq 2009.$$

35. Системот неравенки

$$a_1x+b_1 \geq 0,\ \ a_1>0$$
$$a_2x+b_2 \geq 0,\ \ a_2<0$$

нема ниту едно решение. Докажи дека постојат броеви c_1, c_2 такви што

$$b_1c_1+b_2c_2<0$$
$$a_1c_1+a_2c_2=0.$$

4. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

4.1. ДЕЛИВОСТ

1. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{a2017b}$ ќе биде делив со 72.

2. Определи ги сите седумцифрени броеви од облик $\overline{2012xyx}$ кои се деливи со 72.

3. Определи ги цифрите a и b така што бројот $\overline{2a0b82}$ ќе биде делив со 13.

4. Определи ги цифрите a и b за да збирот на броевите $\overline{29a8}$ и $\overline{342b}$ биде делив со 18.

5. Даден е бројот 123456789. Кој е најмалиот број цифри кои треба да се избрипат така што новиот број ќе биде делив со 36? Кои се тие цифри?

6. Определи ги цифрите x, y, z така што бројот $\overline{13xy45z}$ кој е запишан во декаден броен систем е делив со 792.

7. Определи ги сите природни n за кои вредноста на изразот $\frac{n^2-n-12}{n-3}$ исто така е природен број.

8. Докажи дека за секој природен број n бројот $n(n^2+5)$ е делив со 6.

9. Користејќи ги цифрите 1, 3, 4 ,5 и a, каде a е цифра (не задолжително различна), запиши го најголемиот можен петцифрен број кој е делив со 12. Секоја од цифрите 1, 3, 4 ,5 и a треба да се употреби.

10. За природниот број велиме дека е палиндром ако тој во декаден запис од десно на лево се чита исто како и кога се чита од лево на десно. Определи ги сите петцифрени палиндроми кои се деливи со 101.

11. Докажи дека за секој цел број x и $\frac{x}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ е цел број.

12. Докажи дека за секој природен број n бројот
$$\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{4}+\frac{11n^2}{24}+\frac{n}{2}$$
е исто така е природен.

13. Определи ги сите природни броеви m за кои дропката $\frac{6n^2-10n-12}{3n-5}$ е природен број.

14. Определи ги сите цели броеви x за кои $\frac{x^3+3x^2-x-10}{x+2}$ е природен број.

15. Определи ги сите цели броеви n за кои изразот $\frac{5n-23}{n-7}$ е цел број.

16. Дали постои цел број x за кој и двата броја $\frac{14x+5}{9}$ и $\frac{17x-5}{12}$ се цели?

17. За кои природни броеви n вредноста на изразот $\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{n}}{2\sqrt{7}-\sqrt{n}}$ е цел број.

18. Определи ги сите парови природни броеви за кои
$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$$
е рационален број.

19. Разликата на два непарни броја е делива со 5. Определи ја цифрата на единиците на разликата на кубовите на овие два броја.

20. Определи ги сите трицифрени броеви кои се деливи со 7, а при делење со 9 даваат остаток 5.

21. Определи ги сите трицифрени броеви кои при делење со 2 даваат остаток 1, при делење со 3 даваат остаток 2, а при делење со 4 даваат остаток 3. Колку такви броеви има?

22. Определи го најмалиот природен број таков што при делење со бројот 2 дава остаток 1, при делење со бројот 3 дава остаток 2, при делење со 4 остаток 3, при делење со 5 остаток 4, при делење со 6 остаток 5, при делење со 7 остаток 6, при делење со 8 остаток 7 и при делење со 9 остаток 8.

23. Пет различни четирицифрени броеви кои почнуваат со иста цифра се такви што четири од нив се делители на збирот на сите пет броеви. Определи ги сите вакви петорки природни броеви.

24. Нека $a=123456789$ и $N=a^3-2a^2-3a$. Докажи дека N е делив со 540.

25. Нека a,b,c,d се цели броеви. Докажи дека
$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(c-d)$$
е делив со 12.

26. Определи го бројот на петцифрените броеви од облик $\overline{37abc}$ такви што секој од бровите $\overline{37abc}, \overline{37bca}$ и $\overline{37cab}$ е делив со 37.

27. Нека x и y се цели броеви. Докажи дека $3x+y$ е делив со 13 ако и само ако $5x+6y$ е делив со 13.

28. Нека a,b,c се цели броеви. Ако збирот $4a+5b-3c$ е делив со 19, докажи дека и бројот $6a-2b+5c$ е делив со 19.

29. Нека x,y,z се природни броеви такви што бројот $x^3+y^3+z^3$ е делив со 7. Докажи дека производот xyz е делив со 7.

30. Докажи дека за секој природен број n бројот n^5-n е делив со 30.

31. Докажи дк за секој природен број n изразот $n^{19}-n^7$ е делив со 30.

32. Ако n е непарен природен број, докажи дека бројот n^3+3n^2-n-3 е делив со 48.

33. Докажи дека изразот n^5-5n^3+4n е делив со 120 за секој природен број n.

34. Докажи дека меѓу три природни броја можеме да избереме два, да ги означиме со a и b такви што a^3b-b^3a е делив со бројот 10.

35. Нека a и b се природни броеви такви што $8a^2+1=b^2$. Докажи дека производот ab е делив со 3.

36. Определи ги дите природни броеви n кои бројот n^n-3 е делив со 10.

37. Нека a е природен број заемно прост со 35. Докажи дека бојот

$$(a^4-1)(a^4+15a^2+1)$$

е делив со 35.

38. Докажи дека постои број од видот $\overline{...1995}$ кој е делив со 1999.

39. Нека $a_i \in \mathbb{N}, i=1,2,...,1988$. Докажи дека од $10 \mid \sum_{i=1}^{1988} a_i$ следува $10 \mid \sum_{i=1}^{1988} a_i^5$.

40. Докажи дека за секој природен број n изразот $3^{6n}-2^{6n}$ е делив со 665.

41. Ако n е природен број кој не е делив со 4, докажи дека $1^n+2^n+3^n+4^n$ е делив со 5.

42. Ако k и n се природни броеви докажи дека изразот

$$(n^4-1)(n^3-n^2+n-1)^k+(n+1)n^{4k-1}$$

е делив со n^5+1.

43. Докажи дека за секој цел број $n \geq 0$ бројот $7^{2n+1} + 2 \cdot 13^{2n+1} + 17^{2n+1}$ е делив со 50.

44. Нека a и b се два различни седумцифрени броеви такви што секој од нив ги содржи сите цифри од 1 до 7. Докажи, дека b не е делител на a.

45. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $n^2 + 1$ и $(n+1)^2 + 1$, каде $n \in \mathbb{N}$.

46. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n за кои броевите $2n^2 + 3$ и $n^2 + n + 1$ се заемно прости.

47. Определи го $\text{NZD}(5n+6, 8n+7)$, каде $n \in \mathbb{N}$.

48. Докажи дека изразот $\frac{n^2-n+2}{n^3+2n^2-n+1}$ не може да се скрати за било кој $n \in \mathbb{N}$.

49. Нека m и n се природни броеви и $a = (n+1)^m - n$, $b = (n+1)^{m|3} - n$.

    а) Докажи дека a и b се заемно прости ако m не е делив со 3.

    б) Определи ги сите броеви m и n за кои a и b не се заемно прости.

50. а) Докажи дека за два различни природни броја a и b постојат бесконечно многу природни броеви n такви што броевите $a+n$ и $b+n$ се заемно прости.

    б) Дали постојат различни природни броеви a, b, c, d за кои не постои природен број n таков што броевите $a+n, b+n, c+n, d+n$ се по парови заемно прости.

51. Дали постои природен број m таков што 7 е делител на $2^{m^2} - 4$?

52. Определи го целиот број x така што $x^2 + 1 \mid x^3 - 8x^2 + 2x$.

53. Определи ги сите парови природни броеви (m, n), $m, n > 1$ за кои $mn - 1$ е делител на $n^3 - 1$.

54. Нека се x, y, z, a, b, c се цели броеви за кои важи

$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$x^2 + z^2 = b^2$$
$$y^2 + z^2 = c^2$$

    Докажи дека бројот xyz е делив со 55.

55. Определи го најголемиот природен број n кој е делив со сите природни броеви k такви што $k \le \sqrt{n}$.

56. Определи ги последните четири цифри на бројот 3^{1000} и 3^{1997}.

57. Определи ги последните две цифри на бројот $7^{2016^{2017}}$.

58. На која цифра завршува бројот $2012^3 + 3^{2012}$?

59. Определи ги сите парови природни броеви (m,n) такви што $n \mid 2m-1$ и $m \mid 2n-1$.

60. Нека се m и n природни броеви и $n > 2$. Докажи дека $2^m + 1$ не е делив со $2^n - 1$.

61. Определи го најголемиот природен број n за кој постои $n-$цифрен број $\overline{a_1 a_2 ... a_n}$ со својства:

а) $a_1, a_2, ..., a_n$ се меѓусебно различни цифри,

б) за секој $j \le n$ важи $j! \mid \overline{a_1 a_2 ... a_j}$.

За најдениот n определи ги сите $n-$цифрени броеви со овие својства.

62. Броевите 10101 и 13226 имаат ист остаток при делење со ист трицифрен број. Определи го тој остаток.

63. Определи го најмалиот содржател на бројот 84 чиј декаден запис ги содржи само цифрите 6 и 7.

64. Докажи, дека бројот чиј декаден запис се состои од 2187 цифри 1 е делив со 2187.

65. Во кој броен систем 297 е делител на 792.

66. Определи ги сите природни броеви b за кои равенството $11 \cdot 22 \cdot 33 = 13310$ важи во броен систем со основа b.

67. Во кој броен систем е точно равенството
$$\sqrt{2521} - \sqrt{2400} = 1.$$

68. За бројот n ќе велиме дека е *среќен* ако збирот на цифрите со кои е запишан е содржател на 7, а *суперсреќен* ако тој е среќен и ниту еден од броевите
$$n+1, n+2, ..., n+12$$
не е среќен. Определи го најмалиот суперсреќен природен број?

69. Претставувањата на еден природен број во системи со основа 7 и 9 имаат по три исти цифри, но запишани во обратен редослед. Определи ги сите вакви броеви.

4.2. ПРОСТИ И СЛОЖЕНИ БРОЕВИ

70. Определи го најмалиот природен број чиј производ на цифри е еднаков на 18900.

71. Определи ги сите прости броеви кои се помали од 2011 и чиј збир на цифри е еднаков на 2.

72. Докажи дека изразот $a^4 - 10a^2 + 9$ е делив со 1920 за секој прост број $a > 5$.

73. Докажи дека за секои два прости броја $a, b > 3$, бројот $a^2 - b^2$ е делив со 24.

74. Дали за некој природен број n бројот $n^4 + 4$ може да биде прост број?

75. Нека m и $k \geq 2$ се природни броеви. Докажи дека секој бројот $m^4 + 4k^4$ е сложен.

76. Докажи дека бројот $1\underbrace{00...00}_{2012}1$ е сложен.

77. Нека n е природен број кој може да се запише како збир на два квадрати на природни броеви на два начина

$$n = a^2 + b^2 = c^2 + d^2, a \neq c, d \ .$$

Докажи дека n е сложен број.

78. Определи ги сите природни броеви n за кои $n^3 - 10n^2 + 28n - 19$ е прост број.

79. Само еден делител на бројот $3^{12} - 1$ е поголем од 70 и е помал од 80. Кој е тој делител?

80. Докажи дека во секоја основа сите броеви од видот 10101, 101010101, 1010101010101, ...се сложени.

81. Определи ги сите прости броеви p за кои $2^p + p^2$ исто така е прост број.

82. Определи ги сите парови природни броеви x и y за кои $\frac{xy^2}{x+y}$ е прост број.

83. Нека a е природен број поголем од 1. Докажи дека за секој природен број n бројот
$$n(2n+1)(3n+1)...(an+1)$$
е делив со сите прости броеви помали од a.

84. За даден природен број n нека $M(n)$ е наголемиот природен број за кој може да се конструира низа природни броеви $x_1, x_2, ..., x_{M(n)} \in \{2,3,...,n\}$ таква што важи:

За секои два различни броја $i, j \in \{1,2,...,M(n)\}$ броевите $2^{x_i}-1$ и $2^{x_j}-1$ се заемно прости.

Ако $M(k)=M(k-1)$ за некој природен број $k>1$, докажи дека k е сложен број.

85. Нека a и m се природни броеви, p е непарен прост број таков што $p^m \mid a-1$ и $p^{m+1} \nmid a-1$. Докажи дека

а) $p^{m+n} \mid a^{p^n}-1$ за секој $n \in \mathbb{N}$,

б) $p^{m+n+1} \nmid a^{p^n}-1$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

86. Нека $p_1=2,\ p_2=3, ..., p_n, ...$ е низата од сите прости броеви подредени по големина. Докажи дека за секој природен број n важи неравенството
$$p_n \geq 3n-5.$$

87. Ако збирот на квадратите на три прости броја a,b,c е прост број, докажи дека барем еден од броевите a,b,c е еднаков на 3.

88. Нека n е природен број таков што $n+1$ е делив со 24.
а) Докажи дека бројот n има парен број делители.
б) Докажи дека збирот на сите делители на бројот n е делив со 24.

89. Определи го најмалиот природен број кој има точно 30 делители.

90. Определи ги сите природни броеви деливи со 90 кои имаат точно 20 делители.

91. Докажи дека за секој прост број $p>3$ бројот p^2+11 има повеќе од шест различни природни делители.

92. Определи го бројот на делителите на бројот 30^{2003} кои не се делители на бројот 20^{2000}.

93. Кој број има повеќе делители во множеството природни броеви 2013^2 или 20480.

94. Докажи дека збирот на сите трицифрени броеви чии декадни записи се состојат од три различни цифри различни од нула има најмалку три различни прости делители.

95. Природниот број n е производ на различните прости броеви p_1, p_2, p_3, p_4 кои се помали од 250. Притоа важи $p_1 p_2 p_3 = 3(p_1 + p_2 + p_3)$, а збирот $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ е број запишан со исти цифри. Определи ги сите такви броеви n.

96. Ако $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$ се сите делители на бројот $n > 1$ докажи дека
$$d_1 + d_2 + ... + d_k > k\sqrt{n}.$$

97. Даден е бројот $n = p_1 p_2 p_3 p_4$, каде p_1, p_2, p_3 и p_4 се четири различни прости броеви. Неговите позитивни делители се
$$1 = d_1 < d_2 < ... < d_{15} < d_{16} = n.$$
Дали постои $n < 2001$ таков што $d_9 - d_8 = 22$?

98. Нека c и d се позитивни делители на природниот број n. Ако $c > d$, докажи дека $c > d + \frac{d^2}{n}$.

99. Определи ги сите природни броеви n такви што производот на сите позитивни делители на бројот n е еднаков на n^3.

100. Определи ги сите прости броеви p и q такви што и бројот $p^q + 1$ е прост број.

101. За даден прост број p определи ги сите природни броеви n такви што $\sqrt{n^2 + pn}$ е природен број.

102. Определи ги сите ненегативни цели броеви p и n такви што
$$p, p + 3^n, p + 3^{n+1}, p + 3^{n+2}, p + 3^{n+3}$$
се прости броеви.

103. Броевите $\{p_n\}, n \in \mathbb{N}$ се определени на следниов начин: $p_1 = 2$ и за $n \geq 2$, p_n е најголемиот прост делител на $p_1 p_2 ... p_{n-1} + 1$. Докажи дека $p_n \neq 5$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

104. Определи ги сите природни броеви n за кои броевите 2^n-1 и 2^n+1 се истовремено прости.

105. Определи го збирот на сите реципрочни вредности на сите позитивни делители на бројот $n=2^{p-1}(2^p-1)$, а 2^p-1 е прост број.

4.3. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

106. Збирот на неколку последователни природни броеви е еднаков на 1000. Определи ги сите вакви низи.

107. На испит по математика се решаваат 40 задачи. Точен одговор на секоја задача вреди 15 бода, а грешен одговор -4 бода. Дарко ги решил сите задачи, но за жал некои погрешно. Колку грешни одговори дал Дарко, ако освоил вкупно 353 бодови?

108. Определи го бројот $\overline{abcd}$ за кој важи
$$\overline{cda}-\overline{abc}=297$$
$$a+b+c=23.$$

109. Определи го четирицифрениот број $\overline{abcd}$ за кој важи
$$\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=2017\,.$$

110. Најди два природни броја кои се деливи со 4 и чија разлика на третите степени е четирицифрен природен број делив со 91.

111. Определи ги сите четирицифрени природни броеви кои се деливи со 45 и чија разлика на квадратите на цифрата на стотките и цифрата на десетките е еднаква на 24.

112. Во множеството природни броеви реши ја равеката
$$x!+y!=10z+9\,.$$

113. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$k!l!=k!+l!+m!\,.$$

114. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$x^2-y!=2016\,.$$

115. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$m!+2=n^2\,.$$

116. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$1!+2!+3!+...+x!=y^2 .$$

117. Во множеството цели броеви реши ја равенката $a(a-b)=b$.

118. Определи ги сите природни броеви a и n за кои важи
$$a^n+a^{n+1}+a^{n+2}+a^{n+3}+a^{n+4}+a^{n+5}=2016 .$$

119. Докажи дека равенката $2x^2-5x^2=7$ нема решение во множеството природни броеви.

120. Определи го бројот на парови (x,y) од цели броеви такви што
$$(x+y+2012)^2=x^2+y^2+2012^2 .$$

121. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$5x^2-4y^2=1999 .$$

122. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$y^2=x^2+1990 .$$

123. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2-xy+y^2=1 .$$

124. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2+11^2=y^2 .$$

125. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^3+11^3=y^3 .$$

126. Определи ги целите броеви x за кои $2x^2-x-36$ е квадрат на прост број.

127. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$(7a-b)^2=2(a-1)b^2 .$$

128. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2(y-1)+y^2(x-1)=1 .$$

129. Определи ги сите парови природни броеви p и q за кои постои цел број a таков што важи $a^4=pa^3+q$.

130. Определи ги сите парови цели броеви (x,y) такви што

$$6x^2y^2 - 4y^2 = 2012 - 3x^2.$$

131. Во множестото природни броеви реши ја равенката
$$2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4 = 576.$$

132. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2.$$

133. Во множеството природни броеви реши ја равека
$$10(m+n) = mn.$$

134. Во множествот природни боеви реши ја равенката
$$mn^2 = 100(n+1).$$

135. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$m^3 + n^3 = (m+n)^2.$$

136. Докажи дека не постојат природни броеви k и n за кои важи
$$k(k+1)(k+2)(k+3) = n(n+1).$$

137. Докажи, дека равенката
$$x^2 - 2y^2 = 75y + 5$$
нема целобројни решенија.

138. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^2 + y^2 - 8z = 14.$$

139. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$y^2 = x^3 + 3x^2 + 2x.$$

140. Докажи дека равенката
$$3x^4 + 2013 = 25y^2 - 24x^2$$
нема целобројни решенија.

141. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1999}.$$

142. Определи ги сите природни броеви n за кои равенката $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ има точно пет решенија во множеството природни броеви.

143. Во множеството природни броеви реши ја равенката $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1$.

144. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{mn}=\frac{2}{5}.$$

145. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn^2}=\frac{3}{4}.$$

146. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$\frac{2}{x^2}+\frac{3}{y^2}+\frac{4}{z^2}=1.$$

147. Докажи, дека за секој природен број $n\geq 3$ постојат n по парови различни природни броеви такви што збирот на нивните реципрочни вредности е еднаков на 1.

148. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$10x^3+20y^3+8xyz=1999z^3.$$

149. Докажи дека не постои природен број k таков што $k+4$ и k^2+5k+2 се кубови на некои природни броеви.

150. Определи ги сите тројки цели броеви (a,b,c) такви што $\text{NZD}(b,c)=1$ и
$$\sqrt{a+\frac{b}{c}}=a+\sqrt{\frac{b}{c}}.$$

151. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$4x+y+4\sqrt{xy}-28\sqrt{x}-14\sqrt{y}+48=0.$$

152. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^8+y^{2016}=32x^4-256.$$

153. Докажи дека постојат најмалку 2000 тројки природни броеви (a,b,c) такви што $a^{15}+b^{15}=c^{16}$.

154. Колку подредени парови (m,n) природни броеви ја задоволуват равенката $m^2-n^2=2^{2013}$?

155. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$y^4+x^{2010}=2y^2-1.$$

156. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^{2010}=y^{2010}+2010.$$

157. Во множеството цели броеви реши ја равенката $4\cdot 3^{2m}+5=n^2$.

158. Во множеството цели броеви реши ја равенката $3\cdot 2^m+1=n^2$.

159. Определи ги сите цели броеви x такви што $1+5\cdot 2^x$ е квадрат на рационален број.

160. Во множеството природни броеви реши ја равенката $3^m+7^n=k^2$.

161. Докажи дека за секој $n\geq 3$ постојат непарни броеви x и y такви што $2^n=7x^2+y^2$.

162. Докажи дека не постојат непарни цели броеви x,y,z такви што

$$(x+y)^2+(y+z)^2=(z+x)^2.$$

163. Определи ги сите природни броеви n за кои збирот $2^4+2^7+2^n$ е точен квадрат.

164. Определи ги сите природни броеви m и n за кои бројот 6^m+2^n+2 е точен квадрат.

165. Во множеството природни броеви реши ја равенката $5^x+5^y+5^z=18775$, каде $x<y<z$. Колку триаголници има чии должини на страни се од множеството $\{x,y,z\}$?

166. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$5^n+2^{n+1}3^n=9^n+4^n.$$

167. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$2^a3^b+3^{b+1}+2^a=13.$$

168. а) Определи ги сите четирицифрени броеви кои се еднакви на четвртиот степен на збирот на своите цифри.
б) Докажи дека не постои петцифрен број кој е еднаков на петтиот степен на збирот на своите цифри.

169. Нека p е прост број. Определи ги сите парови цели броеви (a,b) такви што

$$p(a-2)=a(b-1).$$

170. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$5p^3-8q+5p-10=0.$$

171. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$2p^3 - q^2 = 2(p+q)^2 .$$

172. Во множеството природни броеви реши го системот равенки
$$\begin{cases} a^3 - 3b = 15 \\ b^2 - a = 13. \end{cases}$$

173. Во множеството природни броеви реши го системот равенки
$$\begin{cases} ab + bc = 44 \\ ac + bc = 23. \end{cases}$$

174. Определи ги сите парови природни броеви (m,n) за кои постојат цели броеви a,b,c такви што
$$a+b+c=0 \text{ и } a^2+b^2+c^3 = 2^m 3^n .$$

175. Во множеството цели броеви реши го системот равенки
$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^3+y^3+z^3 = 90. \end{cases}$$

176. Определи ги сите прости броеви p за кои постојат природни броеви x и y такви што
$$\begin{cases} p+1 = 2x^2 \\ p^2+1 = 2y^2. \end{cases}$$

4.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

177. Определи ги природните броеви x, y и z за кои важи:
$$\frac{37}{13} = 2 + \frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}} .$$

178. Нека A е природен број со парен број n цифри, а B е број добиен со промена на редоследот на цифрите на бројот A и нека важи $A+B=10^n$.

а) Определи барем еден пар броеви кои го задоволуваат горниот услов при $n=4$.

б) Докажи дека за секој парен број n секој од броевите A и B со горното својство е делив со 10.

179. Определи ја цифрата на единиците на производот

$$(8-5)(8^2-5^2)(8^3-5^3)...(8^{2006}-5^{2006}).$$

180. Збирот на цифрите на природниот број x е y ,а збиротна цифрите на бројот y е z . Определи ги сите броеви x за кои $x+y+z=60$.

181. На колку нули завршува производот на првите 2016 природни броеви?

182. Докажи, дека за секој природен број $k>2$ постојат k природни броеви такви што нивниот збир е еднаков на нивниот производ.

183. Дали постојат три последователни природни броја чиј збир на квадрати е делив со 2016?

184. а) Докажи, дека не постојат два природни броја чија разлика на квадрати е еднаква на 987654.
б) Докажи, дека не постојат два природни броја чија разлика на кубови е еднаква на 987654.

185. Колку точни кивадрати на природни броеви се наоѓаат меѓу броевите 4^9 и 9^4 , не сметајќи ги овие два броја.

186. Нека $a,b\in\mathbb{N}, a>b$ и $a-b=5b^2-4a^2$. Докажи, дека $a-b$ е точен квадрат на природен број.

187. Нека се a и b природни броеви со различна парност. Докажи дека бројот $(a+3b)(5a+7b)$ не е квадрат на природен број.

188. Нека a и b се цели броеви такви што $a\quad+2b$ е квадрат на цел број. Докажи дека бројот a^2+b може да се запише како збир на квадрати на два цели броја.

189. Нека n и d се природни броеви такви што d е делител на $2n^2$. Докажи дека бројот n^2+d не е точен квадрат.

190. За природните броеви a,b,c важи

$$c(ac+1)^2=(5c+2b)(2c+b).$$

а) Ако c е непарен, докажи дека тој е точен квадрат.
б) Дали може c да биде парен број?

191. Нека a,b,c се природни броеви такви што

$$c=a+\tfrac{b}{a}-\tfrac{1}{b}.$$

Докажи дека c е точен квадрат на некој природен број.

192. Определи го најголемиот природен број n таков што бројот $n^2+2007n$ е квадрат на некој природен број.

193. Определи ги сите трицифрени броеви n такви што бројот n^2 завршува со истите цифри како и бројот n.

194. Определи ги сите природни броеви кои се запишани со најмалку три цифри во кои секои две последователни цифри формираат квадрат на природен број.

195. Докажи дека збирот на квадратите на пет последователни цели броеви не може да биде квадрат на некој цел број.

196. Нека a и b се цели броеви со различна парност. Докажи, дека постои цел број c таков што броевите $ab+c, a+c$ и $b+c$ се квадрати на цели броеви.

197. За броевите 1, 2 и 7 важи $1\cdot 2+2=2^2, 1\cdot 7+2=3^2, 2\cdot 7+2=4^2$. Докажи дека не постојат четири различни природни броеви такви што производот на секои два од нив зголемен за 2 е квадрат на некој природен број.

198. Докажи дека природен број може да се запише како збир на два или повеќе последователни природни броеви ако и само ако тој не е степен на бројот 2.

199. Од сите броеви од облик 36^m-5^n, каде m и n се природни броеви определи го најмалиот по апсолутна вредност.

200. За множеството $A\subset\mathbb{N}$ велиме дека е *добро* ако за некој природен број n равенката $x-y=n$ има бесконечно многу решениеја (x,y), каде $x\in A$, $y\in A$. Ако $\mathbb{N}=A_1\cup A_2\cup...\cup A_{1988}$, тогаш барем едно од множествата $A_1, A_2,..., A_{1988}$ е добро. Докажи!

201. За $k\in\mathbb{N}$ со $f(k)$ да го означиме природниот број кој е најблизок до бројот $\sqrt[4]{k}$. Нека е даден $m\in\mathbb{N}$. Определи го бројот на природните броеви n за кои важи $f(n)=m$.

202. Нека a и b се ирационални броеви такви што $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$, $A=\{[na]\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ и $B=\{[nb]\,|\,n\in\mathbb{N}\}$. Докажи дека $A\cup B=\mathbb{N}$ и $A\cap B=\varnothing$.

203. Определи ги сите 200-цифрени природни броеви кои се квадрати на природни броеви, а почнваат со 99 деветки.

204. Нека се n и k природни броеви. Докажи дека збирот на цифрите во записот на бројот 5^n не е поголем од k ако и само ако бројот на цифрите во записот на бројот 2^n не е поголем од $n-k+1$.

205. Докажи дека постои точно еден природен број кој во декаден броен систем се запишува само со цифрите 2 и 5, има 2005 цифри и е делив со 2^{2005}.

206. Нека $m \geq 2$ е природен број. Определи го бројот на решенијата во множеството природни броеви на равенката

$$[\tfrac{x}{m}] = [\tfrac{x}{m-1}].$$

207. Нека j и k се природни броеви. Докажи дека неравенството

$$[(j+k)\alpha] + [(j+k)\beta] \geq [j\alpha] + [j\beta] + [k(\alpha+\beta)]$$

е точно за секои реални броеви α и β ако и само ако $j = k$.

208. Пресметај го збирот

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \ldots + [\sqrt{n^2-1}].$$

209. Докажи дека за секој природен број $n > 2$ важи

$$[\tfrac{n(n+1)}{4n-2}] = [\tfrac{n+1}{4}].$$

210. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$[\tfrac{2x-1}{3}] + [\tfrac{4x+1}{6}] = \tfrac{5x-4}{3}.$$

211. Дали има решение равенката

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] = 12345.$$

212. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$[\sqrt[4]{1}] + [\sqrt[4]{2}] + \ldots + [\sqrt[4]{n}] = \tfrac{3}{2}n + 1.$$

213. Докажи дека

$$\tbinom{n}{p} - [\tfrac{n}{p}]$$

е делив со p за секој прост број p и секој природен број $n \geq p$.

214. Реши ја равенката

$$[x] \cdot \{x\} = 2009x.$$

215. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$[(x-1)^2] = [x].$$

216. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$4x^2 - 20[x] + 9 = 0.$$

217. Нека $S = \{k \in \mathbb{N} \mid a \in \mathbb{N}, a^2 \mid k \Rightarrow a = 1\}$ и $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека

$$\sum_{k\in S}[\sqrt{\tfrac{n}{k}}]=n\ .$$

218. Докажи, дека не постои рационален број x таков што $\{x^2\}+\{x\}=1$. Определи барем еден реален број x кој е решение на оваа равенка.

219. Реши ја равенката

$$[x]+\tfrac{1}{[x]}=\{x\}+\tfrac{1}{\{x\}}\ .$$

220. Ако n е природен број поголем од 1 за кој важи

$$[\tfrac{n}{1}]+[\tfrac{n}{2}]+...+[\tfrac{n}{n}]=2+[\tfrac{n-1}{1}]+[\tfrac{n-1}{2}]+...+[\tfrac{n-1}{n-1}],$$

тогаш n е прост број. Докажи!

221. Во множеството позитивни реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}3[x]-\{y\}+[z]=20,3\\3[y]+5[z]-\{x\}=15,1\\\{y\}+\{z\}=0,9.\end{cases}$$

5. КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

1. Колку има природни броеви $n<2013$ за кои вредноста на изразот
$$(i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+...+i^{n+2012})^{2013}$$
е природен број.

2. Во множеството комплексни броеви реши ја равенката
$$(4+i)z+(2-3i)\bar{z}=1-i^{11}.$$

3. Определи ги сите комплексни броеви z за кои важи $z^3=\bar{z}$.

4. Во множеството комплексни броеви реши ја равенката $z^5=\bar{z}$.

5. Нека z е комплексен број различен од нула за кој важи $z^8=\bar{z}$. Кои вредности може да ги има бројот z^{2019}.

6. Во множеството комплексни броеви реши ја равенката $z^3+|z|=0$.

7. Определи ги сите комплексни броеви z за кои важи
$$z^4=2(1-i)z^2-2i=0.$$

8. Во множеството комплексни броеви реши ја равенката
$$z^5 i+(i-1)z^2=0.$$

9. Реши ја равенката
$$2z^3-(5+6i)z^2+9iz+1-3i=0$$
ако се знае дека едно нејзино решение е реално.

10. Во множеството комплексни броеви реши ја равенката
$$(x^2-a^2)^2-4ax-1=0.$$

11. Во множеството комплексни броеви реши ја равенката
$$x^8+4x^6-10x^4+4x^2+1=0.$$

12. Реши ја равенката
$$x=1-1998(1-1998x^2)^2,\ x\in\mathbb{C}.$$

13. Докажи, дека секој комплексен број z за кој постои точно еден комплексен број a таков што
$$z^3+(2-a)z^2+(1-3a)z+a^2-a=0 \tag{1}$$
го задоволува равенството $z^3=1$.

14. Определи ги сите реални броеви a,b,c за кои важи $c=(a+ib)^3-7i$.

15. Нека a е комплексен број таков што важи $a^5+a+1=0$. Колку вредности може да има изразот $a^2(a-1)$?

16. Нека z_1 и z_2 се комплексни броеви со модул 1. Докажи дека $\frac{1-z_1z_2}{z_1-z_2}$ е реален број.

17. Ако a и b се комплексни броеви такви што $|a|=|b|=1$, $a\neq b$ и z е комплексен број, докажи дека бројот
$$\tfrac{1}{a-b}(z+ab\bar{z}-a-b)$$
е имагинарен.

18. Нека $w\neq 1$ е комплексен број таков што $|w|=1$ и нека $z=\frac{2}{1-w}$. Определи го $\operatorname{Re} z$.

19. Нека се z_1,z_2 комплексни броеви такви што $|z_1+2z_2|=|2z_1+z_2|$. Пресметај $|\frac{z_1}{z_2}|$, каде $z_2\neq 0$.

20. Нека z_1 и z_2 се комплексни броеви такви што важи $|z_1+2z_2|=|2z_1+z_2|$. Докажи, дека за секој релаен број α важи $|z_1+\alpha z_2|=|\alpha z_1+z_2|$.

21. Нека z и w се комлексни броеви такви што $|z|=|w|=|z-w|$. Пресметај $(\frac{z}{w})^{1992}$.

22. Нека z е комплексен број таков што $|z|=2$. Определи ја најмалата и најголемата вредност на изразот $|z-\frac{1}{z}|$.

23. Нека a,b,c се комплексни броеви такви што $|a|=|b|=|c|=1$.
а) Ако $a+b+c\neq 0$, докажи дека $|\frac{bc+ca+ab}{a+b+c}|=1$.
б) Докажи дека $\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}$ е реален број.

24. Нека a,b,c се комплексни броеви такви што $a+b+c=0$ и $ab+bc+ca=0$. Докажи, дека $|a|=|b|=|c|$.

25. Нека $w=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Докажи дека
$$(a+b+c)(a+bw+cw^2)(a+bw^2+cw)=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

26. Нека z_1, z_2 и z_3 се комплексни броеви такви што $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ и $z_1+z_2+z_3=0$. Докажи дека вредноста на изразот
$$|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2$$
е константна за секој избор на комплексните броеви кои ги задоволуваат горните услови.

27. Нека a и b се комплексни броеви. Докажи дека
$$|1-a\bar{b}|^2-|a-b|^2=(1+|ab|)^2-(|a|+|b|)^2.$$

28. Определи ги сите комплексни броеви z за кои важи $|z|=|1-z|=\frac{1}{|z|}$.

29. Нека $A\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$ е множество со својство: Ако $x\in A$, тогаш $\frac{1}{x}, 1-x\in A$. Дали постои множество A со наведеното својство кое има точно 5 елементи.

30. Определи го множеството комплексни броеви z за кои z^2+z+1 е позитивен реален број, а потоа графички претстави го тоа множество.

31. Нека z_1, z_2, z_3, z_4 се коплексни броеви во I, II, III, IV квадрант на комплексната рамнина и $a_i=|z_i-z_{i+1}|-|z_i+z_{i+1}|$, $z_5=z_1$, $i=1,2,3,4$. Докажи дека барем еден од броевите a_1, a_2, a_3, a_4 е ненегативен.

32. Докажи дека за секоја точка z од комплексната рамнина за која $|z-1|=1$, точката $\frac{1}{z}$ лежи на една иста права. Која е таа права?

33. Нека z_1, z_2, z_3 се комплексни броеви такви што
    1) $z_1z_2z_3=1$,
    2) $z_1+z_2+z_3=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}$.

    Докажи дека барем еден од овие броеви е еднаков на 1.

34. Нека $A=\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ е множество од n коплексни броеви, $n\geq 2$ и нека за секој i важи $\{z_1z_i, z_2z_i, ..., z_nz_i\}=A$,
    а) докажи дека за секој i важи $|z_i|=1$.
    б) докажи дека од $z\in A$ следува $\bar{z}\in A$.

35. Дадени се 1995 комплексни броеви. Ако помножиме било кои два од нив (не задолжително различни), повторно добиваме некој од овие броеви. Определи ги сите множества броеви со даденото својство.

36. Даден е комплексниот број $z=\frac{(x+i\sqrt{3})^4}{1-i}$. Определи го реалниот број x ако $|z|=8\sqrt{2}$.

37. Определи ги сите парови комплексни броеви (x,y) за кои важи
$$(1+x+y)(1+x^2+y^2)+xy(1+xy)-x^3-y^3=0.$$

38. Нека $a\geq 1$. Реши ја равенката
$$z+a|z+1|+i=0,\ \ z\in\mathbb{C}$$

39. Определи ги сите комплексни броеви z за кои важи
$$|z^2+1|=2|z|,\quad |z-3i|=\sqrt{10}.$$

40. Определи ги сите комплексни броеви z за кои важи
$$|\tfrac{1}{z-i}+1|=1 \text{ и } |\tfrac{1}{z-i}-i|=1.$$

41. Определи го комплексниот број z за кој важи
$$|z+2|=|1-\bar{z}| \text{ и } \mathrm{Re}(\tfrac{z}{2+3i})=\tfrac{1}{13}.$$

42. Определи ги сите комплексни броеви z за кои важи
$$z|z|+2z+i=0.$$

43. Определи ги сите комплексни броеви z за кои важи
$$(z-1)^4=(\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{1}{2}i)^5-i$$
и за кои $\mathrm{Re}\,z>0,\ \mathrm{Im}\,z>0$.

44. Даден е комплексен број $w=-3-i$. Определи ги сите комплексни броеви од облик $z=n^2+ni$, каде $n\in\mathbb{Z}$ и важи $\mathrm{Re}(\frac{z}{w})<-0,4$ и $\mathrm{Im}(z\bar{w})<4$.

45. Ако $a=3(\frac{1+i}{1-i})^2-2(\frac{1-i}{1+i})^3$, определи ги сите комплексни броеви z за кои важи
$$|a\bar{z}+z\bar{a}|=4 \text{ и } \mathrm{Im}\tfrac{az}{1-i}=0.$$

46. Меѓу комплексните броеви кои го задоволуваат условот $|z-4-4i|=\sqrt{2}$ определи ги броевите кои имаат најмал и наголем модул.

47. Докажи дека точките чии афикси се комплексните броеви a,b,c лежат на една права ако и само ако $\frac{c-a}{b-a}$ е реален број.

48. Определи го и скицирај го во комплексната рамнина множеството точки кое е определено со условот $|\frac{1}{z}-i|\leq 1$.

49. Определи ги сите реални броеви a такви што постои комплексен број z за кој важи

$$|z|=1 \text{ и } |az-1|=a|z+1| .$$

50. Определи го реалниот параметар a за кој постои комплексен број z таков што
$$|z+\sqrt{2}|=\sqrt{a^2-3a+2} \text{ и } |z+i\sqrt{2}|<a .$$

51. Во комплексната рамнина нацртај го множеството точки (x,y) кои се придружени на комплексните броеви $z=x+iy$ за кои важи
$$\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z < 0, \quad |z|^2 \le \operatorname{Im}(z^2)+1 .$$
Определи ја плоштината на ова множество точки.

52. Определи го комплексниот број z за кој важи
$$\operatorname{Re}\tfrac{1}{1-z}=2, \ \operatorname{Im}\tfrac{1}{1-z}=-1 .$$

53. Во рамнината претстави ги сите комплексни броеви z за кои важи
$$|z+1-\tfrac{i}{2}|=\operatorname{Im} z$$
и меѓу нив определи го бројот кој има најмал имагинарен дел.

54. Определи го множеството комплексни броеви z за кои важи
$$\operatorname{Im}(z^4)=(\operatorname{Re}(z^2))^2$$
и графички прикажи го.

55. Во комплексната рамнина прикажи го множеството точки $z \in \mathbb{C}$ за кое важи
$$|z-(1-i)^4|<|\sqrt{3}-i|^2 .$$

56. Определи го и скицирај го во комплексната рамнина множеството броеви z за кои важи
$$\operatorname{Re}((4+3i)z^2) \ge 0 .$$

57. Нека $z=(a+\cos x)+(\sqrt{3}a-\sin x)i$ определи за кои реални броеви a важи $|z| \le 3$ за секој $x \in \mathbb{R}$.

58. Нека $c \ne 0$. Во комплексната рамнина прикажи ги комплексните броеви z за кои важи $|z+c|=|z-c|$.

59. Во комплексната рамнина претстави го множеството комплексни броеви z за кои важи $|z-1|-|z+1|=\sqrt{3}$.

60. Нека S е множеството од сите комплексни броеви за кои важи $|z|=\operatorname{Im}(z+2i)$. Прикажи го множеството S во комплексната рамнина и оп-

редели ја плоштината на триаголникот чие едно теме е $P(0,\frac{3}{2})$, а другите две темиња се точките од S кои се најблиску до P.

61. Нека z е комплексен број и $w=f(z)=\frac{2}{3-z}$.
а) Определи го множеството $\{w \mid z=2+iy,\ y\in\mathbb{R}\}$.
б) Докажи дека функцијата w може да се запише во облик $\frac{w-1}{w-2}=\lambda\frac{z-1}{z-2}$.
в) Нека $z_0=\frac{1}{2}$ и низата $\{z_n\}$ е определена со $z_n=\frac{2}{3-z_{n-1}}$. Користејќи го б) најди ја границата на низата $\{z_n\}$ /

62. Во комплексната рамнина го разгледуваме множеството точки z од видот $(4t+1)+(3t+7)i$, каде t е реален број. Што е ова множество?

63. Дадени се комплексните броеви $z=\frac{2t-i}{t+i}, t\in\mathbb{R}$.
а) Кои вредности може да ги има $|z|$?
б) Определи го множеството параметри t за кои важи
$$|3\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z|<3.$$

64. Пресметај
$$(1+\tfrac{1+i}{2})(1+(\tfrac{1+i}{2})^2)(1+(\tfrac{1+i}{2})^{2^2})...(1+(\tfrac{1+i}{2})^{2^k})...(1+(\tfrac{1+i}{2})^{2^{2001}}).$$

65. Нека се z_1 и z_2 комплексни броеви такви што $|z_1|=|z_2|=1$ и нека a и b се реални броеви такви што $a+b=1$. Докажи дека важи
$$|az_1+bz_2|\geq\frac{1}{2}|z_1+z_2|.$$

66. Нека z е комплексен број таков што $|z|=1$. Докажи дека
$$2\leq|z-1|+|z+1|\leq 2\sqrt{2}.$$
Кога важи знак за равенство?

67. Ако u и v се комплексни броеви, докажи дека
$$|1+uv|^2\leq(1+|u|^2)(1+|v|^2).$$

68. Нека n е природен број и нека $z_1,z_2,...,z_n,w_1,w_2,...,w_n$ се комплексни броеви такви што за секој избор на броеви $\varepsilon_i\in\{-1,1\}, i=1,2,...,n$ важи
$$|\varepsilon_1z_1+\varepsilon_2z_2+...+\varepsilon_nz_n|\leq|\varepsilon_1w_1+\varepsilon_2w_2+...+\varepsilon_nw_n|.$$
Докажи дека
$$|z_1|^2+|z_2|^2+...+|z_n|^2\leq|w_1|^2+|w_2|^2+...|w_n|^2.$$

69. Од сите комплексни броеви z за кои важи

$$|\frac{z-i}{z-3i}|=\frac{1}{2}$$

определи го оној кој има најголем модул.

70. Определи ги сите комплексни броеви z за кои количникот на имагинарниот дел на петтиот степен на z и петтиот степен на имагинарниот дел на z е најмал можен број.

71. Комплексните броеви a,b и c се решенија на равенката $x^3-2x+2=0$. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{a+1}{a-1}+\frac{b+1}{b-1}+\frac{c+1}{c-1}.$$

72. Комплесните броеви z_1,z_2,z_3 се придружени на точкиите A,B,C кои од координатниот почеток се оддалечени 2016 мерни единици. Ако за комплексните броеви z_1,z_2,z_3 важи $z_1+z_2+z_3=0$, опреели ги должините на страните на триаголникот ABC.

73. За кои вредности на $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ сите решенија на равеката

$$(x+i\lambda_1)^n+(x+i\lambda_2)^n=0$$

се реални. Определи ги тие решенија.

74. Нека

$$f(n)=(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}})^n+(\tfrac{1-i}{\sqrt{2}})^n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Пресметај ја ведноста на изразот $f(n+2016)-f(n-2016)$.

75. Ако $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, определи го збирот $1+z+z^2+...+z^{2006}$.

76. За кои природни броеви n вредноста на изразот $(\frac{3+i}{2-i})^n$ е реален број?

77. Определи го комплексниот број a така што бројот $z_0=-\sqrt{3}+i$ е нула на полиномот $P(z)=x^{15}-a$. Од преостанатите нули на полиномот определи ја нулата која има најмал аргумент.

78. Нека $z=-\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}$ е комплексен број. Определи го најмалиот природен број n за кој $\operatorname{Re}z^n=0$.

79. Ако е $z+z^{-1}=2\cos\frac{\alpha}{2012}$, определи го α за кој $z^{2012}+z^{-2012}=1$.

80. Нека $z=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, каде n е непарен позитивен број. Докажи го равенството.

$$\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1+z^2}+\frac{1}{1+z^3}+...+\frac{1}{1+z^n}=\frac{n}{2}.$$

81. Докажи дека за секој природен број n бројот $\mathrm{Re}(1+i\sqrt{2})^n$ е непарен број.

82. Пресметај

$$[\frac{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}]^{2012}.$$

83. Нека p е прост број, $n\in\mathbb{N}$ и $z_k=\cos\frac{2k\pi}{p}+i\sin\frac{2k\pi}{p}$, $k=0,1,2,...,n-1$. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k^n .$$

84. Нека $z=(1-i\sqrt{3})^p$ и $w=(1+i)^q$. Определи ги најмалите природни броеви p и q така што комплексните броеви z и w ќе бидат еднакви.

85. Нека n е бројот кој е добиен така што меѓу секои две цифри на бројот 14641 запишуваме по 2013 нули. Во множеството комплексни броеви реши ја равенката $x^4=n$.

86. Определи го бројот на комплексните броеви z кои ги задоволуваат следниве два услова:

$$|z|=1 \text{ и } \mathrm{Re}(z^{100})=\mathrm{Im}(z^{200}).$$

87. Во множеството комплексни броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x(x-y)(x-z)=3 \\ y(y-z)(y-x)=3 \\ z(z-x)(z-y)=3. \end{cases}$$

88. Во множеството комплексни броеви реши го системот:

$$\begin{cases} |z_1|=|z_2|=|z_3| \\ z_1+z_2+z_3=1 \\ z_1z_2z_3=1. \end{cases}$$

89. Во множеството комплексни броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} |z+1+8i|^2-|z+2+i|^2=100 \\ |z-5|=5. \end{cases}$$

90. Во множеството комлексни броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} xy = 2 \\ (x+2y)^2 - x - 2y - 12 = 0. \end{cases}$$

91. Определи ги сите комплексни броеви (w,z), $w \neq z$ такви што

$$w^5 + w = z^5 + z$$
$$w^5 + w^2 = z^5 + z^2.$$

92. Четириаголникот со темиња $0, z, \frac{1}{z}$ и $z + \frac{1}{z}$ во комплексната рамнина има плоштина еднаква на $\frac{35}{37}$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $|\, z + \frac{1}{z} \,|^2$.

93. Определи ја плоштината на многуаголникот чии темиња се решенијата на равенката

$$(\tfrac{z}{z+1})^2 + (\tfrac{z}{z-1})^2 = -1\,.$$

94. Во множеството комплексни броеви реши ја неравенката

$$\log_{0,5} \frac{|z|-3}{1-|z|} \geq -1$$

и прикажи ги нејзините решенија.

6. КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА И КВАДРАТНА РАВЕНКА

1. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$. Со D да ја означиме дискриминантата, со P производот и со S збирот на нејзините нули. Докажи дека постои единствена функција f таква што a,D,P,S се четири последователни цели броеви запишани во растечки редослед.

2. За кои реални броеви a најмалата вредност на функцијата
$$f(x)=4x^2-4ax+a^2-2a+2$$
на интервалот $[0,2]$ е еднаква на 3?

3. Определи ги сите реални броеви a такви што
$$a(x^2+3)-x(x+20)>2$$
за секој реален број x.

4. Темето на параболата
$$f(x)=x^2-(m-n)x+n,\quad m,n\in\mathbb{R}$$
е точката $T(2,3)$. Пресметај $f(m-n)$.

5. Нека a,b,c се должини на страни на триагоилник. Докажи дека функцијата
$$f(x)=b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$$
е позитивна за секој реален број x.

6. За квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$ важи
$$f(-3)<-5,\quad f(-1)>0,\quad f(1)<4.$$
Докажи дека $a<-\frac{1}{8}$.

7. Определи го, ако постои, ралниот параметар k така што максималната вредност на функцијата
$$f(x)=(k-8)x^2-2(k-5)x+k-9$$
е еднаква на минималната вредност на функцијата
$$g(x)=(k-4)x^2-2(k-1)x+k+7.$$

8. Определи ја најмалата вредност на функцијата
$$f(x)=(x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b).$$

9. Квадратниот трином $f(x)=ax^2+bx+c$ е таков што равенката $f(x)=x$ нема реални решенија. Докажи дека равенката $f(f(x))=x$ исто така нема реални решенија.

10. Реши ја равенката

$$\frac{x+3}{12(x+1)} : \left(\frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-1}{4x+4} + \frac{x^2-7x+14}{12x^2-12}\right) = 2015$$

11. Докажи дека решенијата на равенката

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x-1} = 1$$

се реални и различни за секои ненулти реални броеви a и b.

12. Решенијата на квадратната равенка $x^2 + px + q = 0$, каде $p+q=1996$ се цели броеви. Определи ги овие решенија.

13. Определи ги сите природни броеви за кои равенката $|x^2 - 5x + 4| = m$ има точно четири решенија.

14. Определи ги сите квадратни равенки од видот $x^2 + px + q = 0$ ако за коефициентите $p, q \in \mathbb{R}$ важи $|p-q| = 2012$, а збирот на корените на равенката е еднаков на 2012^2.

15. За кои вредости на реалниот параметар m равенката

$$(m-1)x^2 - 2mx + 2 = 0$$

нема негативни решенија.

16. Докажи дека за секој природен број n решенијата на квадратната равенка

$$2nx^2 - 2(n^2+1)x - n^2 - 1 = 0$$

се ирационални броеви.

17. Определи ги сите вредности на параметарот $a \in \mathbb{R}$ за кои равенките

$$x^2 + ax + 1 = 0$$

$$x^2 + x + a = 0$$

имаат барем едно заедничко решение.

18. Определи го бројот на целите броеви a за кои решенијата на равенката

$$(x-20)(x+17) = \frac{1}{4}a$$

се позитивни реални броеви.

19. За коефициентите a, b, c важи $a > 0, b > a + c$. Докажи дека равенката

$$ax^2 + bx + c = 0$$

има две различни решенија.

20. Определи го реалниот параметар a така што равенката

$$x^2 - (5-a)x + a^2 - 11a - 46 = 0$$

има две реални решенија од кои еднаото е помало од 2, а другото е поголемо од 2.

21. Нека $a+b+c>0$ и нека равенката $ax^2+bx+c=0$ нема реални решенија. Докажи дека $c>0$.

22. Коефициентите на равенките $x^2+px+q=0$ и $x^2+mx+n=0$ го задоволуваат условот $mp=2(n+q)$. Докажи дека решенијата на барем една од овие равенки се реални.

23. Нека p_1 и q_1 се цели броеви такви што равенката $x^2+p_1x+q_1=0$ има две целобројни решенија. За секој $n\in\mathbb{N}$ дефинираме $p_{n+1}=p_n+1$ и $q_{n+1}=q_n+\frac{1}{2}p_n$. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n за кои равенката $x^2+p_nx+q_n=0$ има две целобројни решенија.

24. Нека $0<a<b<c<d$ и нека секоја од квадратните функции

$$f(x)=x^2+dx+a \text{ и } g(x)=x^2+cx+b$$

има две различни реални нули. Докажи дека сите четири нули се меѓусебно различни.

25. Докажи дека равенката $x^2-(a+c)x+ac-b^2=0$ има реални трешенија x_1 и x_2 за секои реални броеви a,b и c, при што a и c се решенија на равенката $(y-x_1)(y-x_2)+b^2=0$.

26. Определи ги сите вредности на реалниот параметар $p\neq 0$ така што за решенијата на равенката

$$px(x+2)+2p=3$$

важи

$$|x_1^3x_2+x_2^3x_1|\geq 6.$$

27. Опедели ги вредностите на реалниот параметар a за кои збирот на квадратите на решенијата на равенката $x^2+2ax+a-3=0$ е поголем од 6.

28. Определи ги броевите p и q ако е познато дека разликата на корените на равенката $x^2+px+q=0$ е еднаква на 5, а разликата на нивните кубови е еднаква на 35.

29. Во равенката $x^2+m-3x=mx-2$ определи го позитивниот релаен број m така што збирот на решенијата на равенката и нивните квадрати ќе биде еднков на 44.

30. Ако во секоја од равенките $x^2+px+q=0$ и $x^2+px-q=0$ двете решенија се целобројни, докажи дека постојат цели броеви a и b такви што $p^2=a^2+b^2$.

31. Нека a,b,c се реални броеви, $a\neq 0$. Ако x_1 е едно решение на равенката
$$ax^2+bx+c=0$$
и x_2 е едно решение на равенката
$$-ax^2+bx+c=0,$$
докажи дека тогаш едно решение x_3 на равенката
$$\tfrac{a}{2}x^2+bx+c=0$$
е меѓу x_1 и x_2.

32. Секоја од равенките $x^2+2ax+b^2=0$ и $x^2+2bx+c^2=0$ има по две реални и различни решенија. Колку реални решенија има равенката $x^2+2cx+a^2=0$.

33. Определи ги сите реални броеви c за кои едното решение на квадратната равенка
$$27x^2-12x+c=0$$
е квадрат на другото решение.

34. Определи го збирот на решенијата на равенката
$$\left|\tfrac{2x^2+x-8}{x^2-2x-8}\right|=2.$$

35. Едно решение на равенката $ax^2+bx+5=0$ е пет пати поголемо од другото. Коефициентите a и b се природни броеви помали од 20. Определи ги сите такви равенки.

36. Марко од равенката $(x+3)(2-x)=4$ заклучил дека $x+3=4$ или $2-x=4$, т.е. $x=1$ или $x=-2$. Иако заклучувањето е грешно, се пак се добиени точни решенија. Определи го $r, r\neq 0$ така што за дадени броеви p и q со ист начин на заклучување од равенката $(x+p)(q-x)=r$ ќе се добијат точните решение.

37. Ако $abc\neq 0$, дали е можно секоја од дадените три равенки
$$ax^2+bx+c=0$$
$$cx^2+ax+b=0$$
$$bx^2+cx+a=0$$
да има реални решенија.

38. Определи ја вредноста на параметарот c така што за корените x_1 и x_2 на функцијата $f(x)=x^2+x+c$ важи

$$\frac{2x_1^3}{2+x_2}+\frac{2x_2^3}{2+x_1}=-1.$$

39. Реши ја равенката

$$\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{\cfrac{\dots}{2+\cfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}}}}}=1$$

во која има 1994 дробни црти.

40. Определи го збирот на квадратите на решенијата на равенката

$$(x^2+2x)^2-5(x^2+2x)+3=0.$$

41. Реши ја равенката

$$(x^2-6x)^2-2(x^2-6x+9)=81.$$

42. Реши ја равенката

$$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0.$$

43. Определи го параметарот $a\in\mathbb{R}$ така што сите решенија на равенката

$$x(x-1)(x-2)(x-3)=a$$

се реални.

44. Нека $P(x)=ax^2+bx+c$, каде $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$. Реши ја равенката

$$P(x^2+4x-7)=0,$$

ако е познато дела едното решение е еднакво на 1 и барем едно решение е двапати поголемо.

45. За кои вредности на параметарот $p\in\mathbb{R}$ равенката

$$\frac{5x}{5x^2+px+45}+\frac{x+10}{x^2+5x}=\frac{2}{x}$$

нема решение.

46. Ако a и b се реални броеви, различни од нула, реши ја равенката

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b+x}.$$

47. Определи го целиот број p за кој равенката

$$\frac{1}{(x-4)^2}-\frac{p-1}{16-x^2}=\frac{p}{(x+4)^2}$$

има единствено целобројно решение.

48. Во множеството реални броеви реши ја неравенката

$$\frac{9x+4}{5-x} \le x\,.$$

49. Во множеството реални броеви реши ја неравенката

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 \ge 6\,.$$

50. Нека a и b се реални броеви такви што $0 < a < b$. Реши ја неравенката

$$\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} \le 2\,.$$

51. Во множеството реални броеви реши ја равебката

$$x^2 + x + \sqrt{x^2 + x + 7} = 5\,.$$

52. Определи ги сите природни броеви n за кои постои природен број x таков што

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x+n}+\sqrt{x+n+1}} = 1\,.$$

53. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} (1+4x^2)y = 4z^2 \\ (1+4y^2)z = 4x^2 \\ (1+4z^2)x = 4y^2. \end{cases}$$

54. Определи ги подредените тројки броеви (x, y, z) такви што

$$x^2 - y^2 = y^2 - z^2 = 96\,.$$

55. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

56. Нека $a, b, c \ne 0$. Реши го системот равенки

$$\frac{ay+bx}{xy} = \frac{bz+cy}{yz} = \frac{cx+az}{zx} = \frac{4a^2+4b^2+4c^2}{x^2+y^2+z^2}\,.$$

57. Во множеството реални броеви реши го системот

$$\begin{cases} x^2 - y = z^2 \\ y^2 - z = x^2 \\ z^2 - x = y^2. \end{cases}$$

58. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ (x-a)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

59. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3)x_4 &= a \\ (x_1 + x_2 + x_4)x_3 &= a \\ (x_1 + x_3 + x_4)x_2 &= a \\ (x_2 + x_3 + x_4)x_1 &= a \end{aligned}$$

60. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2) - 3xy + 2(x+y) - 39 = 0 \\ 3(x^2 + y^2) - 4xy + (x+y) - 50 = 0. \end{cases}$$

61. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\sqrt{x} - \tfrac{1}{y} = \sqrt{y} - \tfrac{1}{z} = \sqrt{z} - \tfrac{1}{x}.$$

62. Определи ги сите парови цели броеви (a,b) за кои системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + 2ax - 3a - 1 = 0 \\ y^2 - 2by + x = 0 \end{cases}$$

има точно три реални решенија.

63. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2a^2 - 2ab + b^2 = a \\ 4a^2 - 5ab + 2b^2 = b. \end{cases}$$

64. Во множеството реални броеви реши го системот:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ (x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) = 1 \\ x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = -6. \end{cases}$$

65. Броевите x и y го задоволуваат системот равенки

$$x + y + \tfrac{x}{y} = 19$$

$$\tfrac{x(x+y)}{y} = 60.$$

Кои вредности може да ги има збирот $x + y$?

66. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x_1^2 + ax_1 + (\frac{a-1}{2})^2 = x_2 \\ x_2^2 + ax_2 + (\frac{a-1}{2})^2 = x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}^2 + ax_{n-1} + (\frac{a-1}{2})^2 = x_n \\ x_n^2 + ax_n + (\frac{a-1}{2})^2 = x_1 \end{cases}$$

каде a е реален параметар.

67. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$(x^2 + y^2 - 4)^2 (xy - 1)^2 + \sqrt{y^2 - x^2} = 0\,.$$

68. Определи го бројот на целобројнита решенија има системот неравенки

$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| \geq 2 \\ |x| < 2017. \end{cases}$$

69. Нека $a > 1$. Точките (x, y) за чии координати важи

$$|x| + y = a \text{ и } x^2 + y = a|x|$$

определуваат во координатната рамнина геометриска фигура чија плоштина е 120 квадратни единици. Определи го бројот a.

7. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ И ЛОГАРИТАМСКИ ФУНКЦИИ, РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

1. Ако $60^a=3, 60^b=5$ и $x=\frac{1-a-b}{2(1-b)}$, докажи дека 12^x е природен број.

2. Пресметај
$$144^{\log_5 1000}:10^{6\log_5 12}.$$

3. Определи ги $\log_a b, \log_{ab} b, \log_{ab^2} b$ и $\log_{ab^3} b$ ако
$$\log_a b-\log_{ab} b=\log_{ab^2} b-\log_{ab^3} b.$$

4. Ако $\log_a b=10$ пресметај $\frac{\log_a x\cdot\log_x \frac{b}{a}}{\log_x b\cdot\log_{ab} x}$.

5. Докажи го равенството
$$\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+...+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}=\frac{n-1}{n\log_x^2 2}.$$

6. Нека a,b се катети, а c е хипотенуза на правоаголен триаголник. Докажи дека
$$\log_{b+c} a+\log_{c-b} a=2\log_{b+c} a\cdot\log_{c-b} a.$$

7. За должините на катетите a и b на правоаголен триаголник важи равенството
$$\log(a+b)=\frac{\log a+\log(a+3b)}{2}.$$
Определи ги острите агли на овој триаголник.

8. За должините a,b на катетите на правоаголниот триаголник важи
$$\log\frac{a-b}{2}=\frac{\log a+\log b-\log 2}{2}.$$
Определи ги острите агли на триаголникот.

9. Определи ги сите рациопални броеви x за кои $\log_2(x^2-4x-1)$ е цел број.

10. Определи ги сите природни броеви n такви што $\log_2(3^n+7)$ е исто така природен број.

11. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што $1<a,b\le 100$ и
$$\frac{1}{\log_a 10}+\frac{1}{\log_b 10}$$
е природен број.

12. Во декадниот запис на бројот 2^{1997} има m цифри, а во декадниот запис на бројот 5^{1997} има n цифри. Определи го збирот $m+n$.

13. Определи го бројот на сите парови различни броеви (a,b) кои припаѓаат на множеството $\{5,5^2,5^3,...,5^{33}\}$ и се такви што $\log_a b$ е цел број.

14. Докажи дека за секој природен број важи равенството
$$[\log_2 n]+[\log_3 n]+...+[\log_n n]=[\sqrt{n}]+[\sqrt[3]{n}]...+[\sqrt[n]{n}].$$

15. Нека n е сложен природен број и нека $d_1,d_2,...,d_m$ се сите негови делители. Докажи, дека
$$\frac{2}{\log n^m}\sum_{k=1}^{m}\log d_k=1.$$

16. Ако
$$f(\log_3 x)=\frac{\log_3\frac{9}{x^4}}{\log_{0,3} x-\log_{\sqrt{3}} x} \text{ и } (f\circ g)(x)=e^x,$$
пресметај $g(\ln 2)$.

17. Реши ја равенката
$$3\cdot 4^x+(3x-10)\cdot 2^x+3-x=0.$$

18. Реши ја равенката
$$(16^{-x}-2)^3+(4^{-x}-4)^3=(16^{-x}+4^{-x}-6)^3.$$

19. Во множеството реални броеви реши ја равенката
$$4^{2x+\sqrt{-1+x^2}}-5\cdot 2^{2x-1+\sqrt{-1+x^2}}=6.$$

20. Реши ја равенката
$$4^{4\log x+1}-17\cdot 4^{3\log x}+17\cdot 4^{\log x}-4=0.$$

21. Реши ја равенката
$$\log_{5x-2}2+2\log_{5x-2}x=\log_{5x-2}(x+1).$$

22. Реши ја равенката
$$3^{1+4x+2x^2}+2^{1+4x+2x^2}=5\cdot 6^{x(x+2)}.$$

23. Реши ја равенката
$$2(\log_x y+\log_y x)=5.$$

24. Реши ја равенката
$$\log_2(4^x+16)-\tfrac{2}{\log_5 4}=x+1\,.$$

25. Реши ја равенката
$$x^{\log_5 6}-5\cdot 6^{\log_5\sqrt{x}}=6\,.$$

26. Реши ја равенката
$$\log_x 8+\log_{4x}4+\log_{2x}2=0\,.$$

27. Реши ја равенката
$$\log_{0,125}2x-4\log_{0,25}x\cdot\log_8 x=0$$

28. Реши ја равенката
$$\log_{x+1}(x^3-9x+8)\cdot\log_{x-1}(x+1)=3\,.$$

29. Реши ја равенката
$$2\log_9^2 x=\log_3 x\cdot\log_3(\sqrt{2x+1}-1)\,.$$

30. Реши ја равенката
$$\tfrac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2-3=\log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3-\log_4(x+6)^3\,.$$

31. Реши ја равенката
$$\log_{x+8}(5-\sqrt{1+2x+x^2})=\tfrac{1}{2}\,.$$

32. Реши ја равенката
$$\log_3\tfrac{1}{\sqrt{\log_3 x}}\log_9\log_9\tfrac{x}{3}\,.$$

33. Реши ја равенката
$$x^{\log_5 6}-5\cdot 6^{\log_5\sqrt{x}}=6\,.$$

34. Реши ја равенката
$$\log_5(5^{\frac{1}{x}}+125)=\log_5 6+1+\tfrac{1}{2x}\,.$$

35. Определи го производот на решенијата на равенката
$$2016x^{\log_{2017}x}=x^{2016}\,.$$

36. Определи го производот на решенијата на равенката
$$x^{\log_{2011}x}\cdot\sqrt{2011}=x^{2011}\,.$$

37. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\log_{\frac{1}{3}}(4^{\cos 2x}+4^{\cos^3 x})=\operatorname{sgn}\log_x 1999\sqrt{1-x}\,,$$

каде

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

38. Во множеството $\mathbb{R}$ реши ја равенката

$$\log_{\frac{1}{3}}(4^{\cos 2x}+4^{\cos^2 x})=\operatorname{sgn}\log_x 5^{\sqrt{1-x}}\,.$$

39. Реши ја равенката

$$\log_2^2(x+y)+\log_2^2(xy)+1=2\log_2(x+y)\,.$$

40. Определи ги сите вредности на параметарот p за кои равенката

$$\log_3(9^x+9p^2)=x$$

има две реални решенија.

41. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a така што равенката

$$4^x-(a+3)2^x+4(a-1)=0$$

има точно едно реално решение.

42. Нека $a>0, a\neq 1$ е реален број. За кои вредности на реалниот параметар m равенката

$$\frac{a^{(\log m+2)x}+2a^{\frac{2x+\log m}{x}}}{a^{2+2x}}=3\frac{a^{\frac{1}{x}\log m}}{a^{2x}}$$

има две различни реални решенија.

43. За реалниот број $a>0, a\neq 1$ дадена е функцијата

$$f(x)=\log_a x+\log_{a^2} x\,.$$

Во зависност од вредноста на параметарот a реши ја равенката

$$f(x+a^2-a)=2f(x)\,.$$

44. Реши ја неравенката

$$2012^{2x}-2012^x-2011\cdot 2012\geq 0\,.$$

45. Реши ја неравенката

$$\frac{1}{2^{2x}+3}\geq\frac{1}{2^{x+2}-1}\,.$$

46. Реши ја неравенката

$$2\cdot 125^x-3\cdot 50^x-9\cdot 20^x+10\cdot 8^x\leq 0\,.$$

47. Реши ја неравенката

$$2^{2x} \leq 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}} + 4 \cdot 2^{2\sqrt{x}}.$$

48. Реши ја неравенката

$$(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1.$$

49. Реши ја неравенката

$$\frac{9^x - 5 \cdot 15^x + 4 \cdot 25^x}{-9^x + 8 \cdot 15^x - 15 \cdot 25^x} < 0.$$

50. Во множеството реални броеви реши ја неравенката

$$\left| \frac{4^x - 2^{x+1} - 2}{2^x - 4} \right| < 1.$$

51. Реши ја неравенката

$$\log_9^2 x \geq \log_3^2 \sqrt{1 - \frac{x}{4}}.$$

52. Реши ја неравенката

$$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2(16x) < 1.$$

53. Реши ја неравенката

$$\log_{\frac{x+4}{2}} \log_2 \frac{2x-1}{1+x} < 0.$$

54. Реши ја неравенката

$$\log_{5+x}(5-x) \log_{10-x}(10+x) \leq 0.$$

55. Реши ја неравенката

$$\log_x 2x \leq \sqrt{\log_x(2x^3)}.$$

56. Во множеството реални броеви реши ја неравенката

$$x \log_{0,5}(x^2 + 3x) + \log_3 9^x > 0.$$

57. Реши ја неравенката

$$\log 2^2 + \log 3^{1+\frac{1}{2x}} - \log(3^{\frac{1}{x}} + 3^3) > 0.$$

58. Реши ја неравенката

$$\log_2 5 \cdot \log_5\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) > 1.$$

59. Реши ја неравенката

$$\sqrt{72 \cdot 3^{x+1} + 81} \geq |3^{x+1} - 9| + 3^x \log_x(x^3).$$

60. Реши ја неравенката

$$2\log_{\frac{1}{5}}(49^{\sqrt{x^2-2}}-1)+\log_5(7^{\sqrt{4x^2-8}}+\tfrac{1}{5})\leq -1\,.$$

61. Определи ги сите природни броеви кои ја задоволуваат неравенката

$$\log_x^4 2017+6\log_x^2 2017>4\log_x^3 2017+4\log_x 2017\,.$$

62. Реши ја неравенката $\log_2(\sqrt{x^2-4x}+3)>\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}+1$.

63. Реши ја неравенката $\frac{\log_5(x^2-4x-11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2}\geq 0$.

64. Меѓу точките (x,y) во рамнината за кои $\log_{x^2+y^2}(x+y)>1$ определи ја онаа точка која има најголема апсциса.

65. Нека x и y се позитивни реални броеви такви што

$$2^{x^2}=16^y \text{ и } \log_{\sqrt{2017}}x+\log_{2017}y>0\,.$$

Докажи дека $y>\frac{1}{2}$.

66. За кои вредности на реалниот параметар a равенката

$$2x^2+x+\log_a(a-2)=0$$

има релани решенија по апсолутна вредност поголеми од $\frac{1}{2}$.

67. Реши ја неравенката $x^{1+\log_a x}>a^2x,\ \ a>0, a\neq 1$.

68. Реши ја неравенката $\log_a(x-a)>\log_{\frac{1}{a}}(x+a)$, каде a е параметар.

69. Реши го системот равенки

$$x=2^{\frac{4}{1+\log_2 z}}$$

$$y=2^{\frac{4}{1+\log_2 x}}$$

$$z=2^{\frac{4}{1+\log_2 x}}$$

70. Определи ги сите вредности на параметарот m за кои системот

$$\begin{cases}2^{|x|}+|x|=x^2+y+a\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

има точно едно решение $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

8. ТРИГОНОМЕТРИЈА

1. Без да користиш калкулатор или таблица пресметај $\cos 36^\circ$.
Упатство. Разгледај рамнокраки триаголници во кои барем еден од аглите е еднаков на 36°.

2. Нека $f(x)=\frac{\sin 12x}{\sin 4x}+\frac{\cos 12x}{\cos 4x}$. Пресметај $f(\frac{\pi}{32})$.

3. Ако $\cos x+\cos y=\frac{1}{2}$ и $\sin x+\sin y=\frac{1}{4}$, пресметај $\cos(x-y)$.

4. Ако $\cos\alpha+\cos\beta=a,\ \sin\alpha+\sin\beta=b,\ \ a^2+b^2\neq 0$, определи го $\cos(\alpha+\beta)$.

5. Нека x,y,a,b се реални броеви за кои важи
$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\operatorname{tg}a\,,\ \operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=\operatorname{ctg}b\,,\ x=y=\frac{\pi}{4}\,.$$
Пресметај $\operatorname{ctg}a-\operatorname{tg}b$.

6. Определи ја вредноста на синусот на бројот, чиј косинус е еднаков на неговиот тангенс.

7. Ако $\cos 4x=\frac{3}{\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5...}}}}}$, пресметај ја вредноста на изразот $(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2$.

8. а) Докажи, дека
$$\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-x)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ+x)\,.$$
б) Пресметај
$$\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}40^\circ\cdot\operatorname{tg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}80^\circ\,.$$

9. Определи ги реалните броеви a,b,c за кои функцијата
$$f(x)=ax^2+bx-c\sin x\cos x$$
е непарна.

10. За кои цели броеви n функцијата $f(x)=\cos nx\sin\frac{5x}{n}$ има период 3π.

11. Докажи, дека не постои природен број $n\geq 2$ таков што функцијата
$$f(x)=\cos(x\sqrt{1})+\cos(x\sqrt{2})+...+\cos(x\sqrt{n})$$
е периодична.

12. Веселиот Дончо, враќајќи се од прослава на роденденот на неговиот пријател одел по патека која може да се опише со графикот на функцијата
$$f(x)=2\sin^2 x+2\sin x+1\,.$$

Колкава е најмалата широчина на мостот без ограда, чија должина Дончо успешно ја поминал и дошол на другата страна? ($x-$ оската е поставена по средината на мостот, а $y-$ оската е во правец на течението на реката.)

13. Дали функцијата $f(cx)=\cos x+\cos x\sqrt{2}$ е периодична?

14. Определи ги најмалата и наголемата вредност на фунцкијата
$$f(x)=\frac{\sin^2 x-\sin^2+1}{\sin^2 x+\sin x+1}.$$
За која вредност на интервалот $[0,2\pi]$ дадената функција достигнува максимум, а за која минимум?

15. а) Определи ја основата периода на функцијата
$$f(x)=8\sin^2 x\cos^2 x-2\cos^2 2x.$$
б) Реши ја равенката $f(x)=0$.

16. Определи ја функцијата $f(x)=a\sin(bx+c)+d$ ако та има минимум во точката $(3,-1)$, а првиот максимум по таа точка е во точката $(5,7)$.

17. Дадена е функцијата $f(x)=a\cos x+b\sin x$, каде $a,b\in\mathbb{R}$. Ако постојат $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ такви што $f(x_1)=f(x_2)=0$ и $\frac{x_1-x_2}{\pi}\notin\mathbb{Z}$, тогаш $a=b=0$. Докажи!

18. Дадена е функцијата $f(x)=2\cos 2x+4\cos x+3$. Определи го множеството вредности на функцијата.

19. Докажи, дека за секој природен број n бројот $\cos\frac{\pi}{2\cdot 3^n}$ е ирационален.

20. Ако $(1+\sin t)(1+\cos t)=\frac{5}{4}$, пресметај $\sin t+\cos t$.

21. Пресметај ја вредноста на изразот
$$\cos 5^\circ\cos 10^\circ\cos 15^\circ\ldots\cos 75^\circ\cos 80^\circ\cos 85^\circ.$$

22. Пресметај ја вредноста на изразот
$$\left(1-\frac{\cos 61^\circ}{\cos 1^\circ}\right)\left(1-\frac{\cos 62^\circ}{\cos 2^\circ}\right)\ldots\left(1-\frac{\cos 119^\circ}{\cos 59^\circ}\right).$$

23. Пресметај го збирот
$$\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\ldots+\sin^2 90^\circ.$$

24. Докажи дека вредноста на изразот

$$\sin^2(x-\tfrac{2016\pi}{3})+\sin^2(x-\tfrac{2017\pi}{3})+\sin^2(x-\tfrac{2018\pi}{3})$$

не зависи од x.

25. Нека a,b,c,A,B,C се реални броеви за кои важи

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=0$$

$$a\cos(A+1)+b\cos(B+1)+c\cos(C+1)=0.$$

Докажи дека за секој реален број x важи

$$a\cos(A+x)+b\cos(B+x)+c\cos(C+x)=0.$$

26. Ако $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ докажи дека

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\gamma}{2}.$$

27. Пресметај го збирот

$$\frac{\sin 1}{\cos 0\cdot\cos 1}+\frac{\sin 1}{\cos 1\cdot\cos 2}+\frac{\sin 1}{\cos 2\cdot\cos 3}+...+\frac{\sin 1}{\cos 2008\cdot\cos 2009}.$$

28. Пресметај го производот

$$(1+\operatorname{tg}1^\circ)(1+\operatorname{tg}2^\circ)...(1+\operatorname{tg}44^\circ)(1+\operatorname{tg}45^\circ).$$

29. Пресметај ја вредноста на збирот $\sum\limits_{n=1}^{2018}\operatorname{tg}n\operatorname{tg}(n+1)$.

30. Докажи дека за секој природен број $n>1$ важи

$$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}3x+...+\operatorname{tg}(nx-x)\cdot\operatorname{tg}nx=\frac{\operatorname{tg}nx}{\operatorname{tg}x}-n,$$

за секој реален број x таков што $\operatorname{tg}x\neq 0$.

31. Нека $\alpha,\beta\in(0,\pi)$, $a=\sin\alpha+\sin\beta$ и $b=\cos\alpha+\cos\beta$. Изрази го збирот $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ со помош на a и b.

32. Определи ги рационалните броеви a и b такви што важи

$$\sin 75^\circ\cos 15^\circ=a+\sqrt{b}.$$

33. Нека $A=\frac{\cos 3+\cos 5}{\cos 3-\cos 5}$ и $B=\frac{\sin 5+\sin 7}{\cos 5-\cos 7}$. Определи го реалниот број x ако $A+Bx=0$.

34. Докажи дека за секој природен број n вредноста на изразот

$$(\operatorname{tg}15^\circ)^n+(\operatorname{ctg}15^\circ)^n$$

е парен природен број.

35. Дадена е функцијата $f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x$.

а) Определи ги сите реални броеви m за кои равенката $f(x)=m$ има решение.

б) Реши ја равенката $f(x)=1$.

в) Определи ја најголемата вредност на функцијата $f(x)$ и определи за кои вредности на x таа се достигнува.

36. Ако $x+x^{-1}=2\cos 40^\circ$ докажи дека $x^4+x^{-4}=2\cos 160^\circ$.

37. Ако $a+a^{-1}=2\cos x$, докажи дека $a^4+a^{-4}=2\cos 4x$.

38. Ако $x\neq y$ и важи

$$x\sin^2\alpha+y\cos^2\alpha=1,$$
$$x\cos^2\varphi+y\sin^2\varphi=1,$$
$$x\,\mathrm{tg}\,\alpha=y\,\mathrm{tg}\,\varphi,$$

пресметај ја вредноста на изразот $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

39. Ако

$$\frac{5\cos\frac{x}{2}-3\sin\frac{x}{2}}{3\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}}=\frac{15}{13},\ x\in(0,\tfrac{\pi}{2})$$

пресметај $\mathrm{tg}\,\frac{x}{4}$.

40. Ако $\sin x+\cos x=a, |a|\leq\sqrt{2}$ пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{1+\cos 2x}{\mathrm{ctg}\frac{x}{2}-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}.$$

41. Нека $f(x)=\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\cos 3x}{\cos x}$.

а) Реши ја равенката $f(x)=2$.

б) Определи ги интервалите на реалните броеви x за кои функцијата f прима позитивни вредности.

42. Докажи дека равенката $\sin 2016x+\sin x=2$ нема решение во множеството реални броеви.

43. Определи го бројот на реалните решенија на равенката $\sin x=\frac{x}{2017\pi}$.

44. Нека $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$. Определи го реалниот број p така што $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\beta$ се корени на равенката $x^2+px-\sqrt{3}=0$.

45. Реши ја равенката
$$\sin x\cos 2x\cos 4x = 1 .$$

46. Реши ја равенката
$$\tfrac{1}{2}\sin 2x - \cos^2(\tfrac{\pi}{2} - x) = 0 .$$

47. Реши ја равенката
$$\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \tfrac{1}{\sin x} + \tfrac{1}{\cos x} = -\tfrac{7}{2} .$$

48. За кои вредности на $m \in \mathbb{R}$ равенката
$$\sin^2 x - \sin x\cos x - 2\cos^2 x = m$$
има решение.

49. Во множествоито реални броеви реши ја равенката
$$\operatorname{ctg}(2\pi\cos^2(2\pi x)) = 0 .$$

50. Реши ја равенката
$$2\cos(\tfrac{\pi}{2}(1+x)) = \tfrac{1}{x^2} + x^2 .$$

51. Реши ја равенката
$$1 + \cos 4x = m(\sin x - \cos x)^2 .$$

52. Реши ја равенката
$$\tfrac{a\sin x + b}{b\cos x + a} = \tfrac{a\cos x + b}{b\sin x + a},\ a, b \in \mathbb{R}^+ .$$

53. Определи го збирот на решенијата на равенката
$$\sin 3x + \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$$
во интервалот $[-\pi, 2\pi]$.

54. Реши ја равенката
$$\operatorname{tg} x + 6\operatorname{ctg} x = \sqrt{\tfrac{1}{\cos^2 x} - 1} - 4\sqrt{3} .$$

55. Реши ја равенката
$$\operatorname{tg}(x+y) + \operatorname{ctg}(x-y) = \operatorname{tg}(x-y) + \operatorname{ctg}(x+y)$$
и скицирај го множеството нејзини решенија.

56. Равенката
$$6\log_{27}(-\sin 4x) - 2\log_3(2\sin^2 2x - 1) = 1$$
реши ја во интервалот $[0, 2\pi)$.

57. Реши ја равенката

$$\log_{\sin x}\cos x - 2\log_{\cos x}\sin x + 1 = 0\ .$$

58. Реши ја равенката

$$\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x) = 2$$

59. Определи ги сите парови реални броеви (x, y) за кои важи

$$(\sin^2 x + \tfrac{1}{\sin^2 x})^2 + (\cos^2 x + \tfrac{1}{\cos^2 x})^2 = 12 + \tfrac{1}{2}\sin y\ .$$

60. Реши ја равенката

$$x^2 + 10x\sin(xy) + 25 = 0\ .$$

61. Определи ги реалните броеви x и y за кои важи

$$5\cos^2 y + x^2 - 2x\cos y - 8x + 20 = 0\ .$$

62. Определи ги сите цели броеви p за кои равенката $\sin(px) = \frac{1}{p}$ има 2016 решенија на интервалот $(0, 2\pi)$.

63. За кои реални броеви a равенката

$$\cos 3x \cos^3 x - \sin 3x \sin^3 x = a$$

има решение.

64. За кои реални броеви a равенката

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} + \frac{1}{\mathrm{ctg}^2 x} = a,\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

има реални решенија.

65. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$8^{a\sin^2 x} = 4 \cdot 2^{\cos^2 x}$$

има точно едно решение во интервалот $[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$.

66. Во зависност од реалниот параметар a определи го бројот на решенијата на равенката

$$(2\sin x - \cos x)^2 + (\sin x - 2\cos x)^2 = a$$

кои припаѓаат на интервалот $[0, \pi)$.

67. Определи ги сите парови реални броеви x, y од интервалот $[0, 2\pi]$ за кои важи

$$\sin x - \sin y + \cos(x - y) = \tfrac{3}{2}\ .$$

68. Определи ги сите парови (x, y) реални броеви за кои важи:

$$\log_2[2\cos^2(xy)+\tfrac{1}{2\cos^2(xy)}]-1=-(y-\tfrac{1}{2})^2 .$$

69. Определи ги сите парови реални броеви (x, y) кои ја задоволуваат равенката
$$\mathrm{tg}^2 x+2y\cos 4x\cdot \mathrm{tg}\, x+y^2=0 .$$

70. Определи го најмалиот природен број a за кој равенката
$$\cos^2 \pi(a-x)-2\cos\pi(a-x)+\cos\tfrac{3\pi x}{2a}\cos(\tfrac{\pi x}{2a}+\tfrac{\pi}{3})+2=0$$
има реални решенија.

71. Реши ја равенката
$$\mathrm{tg}^2(x+y)+\mathrm{ctg}^2(x+y)=1-2x-x^2 .$$

72. На интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$ реши го системот равенки
$$\begin{cases}\frac{\cos x}{\cos y}=2\cos^2 y\\ \frac{\sin x}{\sin y}=2\sin^2 y.\end{cases}$$

73. Реалните броеви x и y се решенија на системот равенки
$$\begin{cases}2\sqrt{2}x\cos t+3y\sin t=6\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2}x\sin t-3y\cos t=0.\end{cases}$$
За кои вредности на параметарот $t\in(0,\pi)$ производот xy е еднаков на 3.

74. Реши го системот равенки
$$\begin{cases}\sin x\cos y=A\\ \cos x\sin y=B\end{cases}$$
за $x, y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

75. Реши ја неравенката
$$x\cos x-1<x-\cos x .$$

76. Реши ја неравенката
$$8\sin x\cos x\cos 2x>1.$$

77. Реши ја неравенката
$$\frac{\sin^2 x-2\sin 2x+3\cos^2 x}{1-\sin 2x}\geq 0 \text{, ако } |x|<\frac{\pi}{2} .$$

78. Реши ја неравенката
$$2011\cos(2x^2-y)\geq x^2+2011 .$$

79. Реши ја неравенката

$$0,2^{\cos 2x} - \frac{1}{25^{\cos^2 x}} > 4 \cdot 125^{-\frac{1}{2}}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

80. Определи ги сите реални броеви x за кои се исполнети неравенствата

$$-1 \leq \frac{\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x} \leq 1.$$

81. Определи ги сите решенија на неравенката

$$\frac{2\sin x - 1}{\cos 2x + \sin^2 x} < 0,$$

на интервалот $[0, 2\pi]$.

82. Определи ги сите парови реални броеви (x, y) такви што

$$\sin(x^2 - 5y) - 1 \geq \frac{x^4}{2016}.$$

83. Реши ја неравенката

$$\cos(2010x + y) \geq y^4 - 2y^2 + 2.$$

84. Определи ја вкупната должина на сите интервали реални броеви кои се решенија на системот неравенки

$$\begin{cases} 12^{\sin 2x} \cdot 14^{\frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}} \geq \sqrt[4]{2016} \\ |x| \leq 2016\pi. \end{cases}$$

85. Во правоаголен триаголник со остри агли α и β важи $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\frac{3\sin\alpha + 2\sin\beta - \sqrt{5}}{3\cos\alpha - 2\cos\beta + \sqrt{5}}.$$

86. Даден е триаголник ABC и точка D на страната BC. Нека $\alpha_1 = \measuredangle DAB$ и $\alpha_2 = \measuredangle CAD$. Докажи, дека

$$\frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\overline{AD}} = \frac{\sin\alpha_1}{\overline{AC}} + \frac{\sin\alpha_2}{\overline{AB}}.$$

87. Нека α, β, γ се агли на триаголник. Ако

$$\frac{\sin^2\gamma + \sin^2\beta - \sin^2\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = \sqrt{3},$$

определи го аголот α.

88. Определи ги острите агли α и β на правоаголен триаголник за кои важи

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{tg}^3\beta = 70.$$

89. За аглите α, β, γ на триаголникот ABC важи
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$
Докажи дека триаголникот ABC е правоаголен.

90. За аглите α, β, γ на $\triangle ABC$ важи $\cos\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta - 1$. Докажи, дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

91. Во триаголник со агли α, β, γ важи
$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin\gamma .$$
Ако аглите α и β се остри, тогаш γ е прав агол. Докажи!

92. Нека ABC е триаголник со тежиште T во кој точките D и E се средини на страните BC и CA, соодветно. Ако триаголникот ATE е рамностран, пресметај $\cos\measuredangle DAB$.

93. Докажи дека во триаголникот ABC со должини на страни a, b, c, агли α, β, γ и полупериметар s важи равенството
$$s^2 b^2\cos^2\tfrac{\gamma}{2} + c^2\cos^2\tfrac{\beta}{2} + 2bc\cos\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\gamma}{2}\cos\tfrac{\beta+\gamma}{2} .$$

94. Нека H е ортоцентарот на остроаголниот триаголник ABC. Докажи дека
$$\overline{BC}\operatorname{ctg}\measuredangle CAB = \overline{AH} .$$

95. Ако за аглите α и β на триаголникот ABC важи $\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$, тогаш триаголникот ABC е рамнокрак или правоаголен. Докажи!

96. Во триаголникот ABC должината на страната BC е 6, косинусот на аголот при темето B е еднаков на $\frac{4}{5}$, а должината на радиусот на впишаната кружница е 1. Определи ги должините на страните AB и AC.

97. Нека D е средната линија на триаголникот наспроти страната AB. Над De како над дијаметар е конструирана кружница која ги сече AC и BC во точките M и N. Докажи дека $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cos\measuredangle BCA$.

98. Даден е триаголник ABC таков што $\overline{AC} \neq \overline{BC}$. Нека M е средина на страната AB, $\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle ABC, \varphi = \measuredangle ACM, \psi = \measuredangle BCM$. Докажи дека
$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)} .$$

99. Даден е $\triangle ABC$, $\alpha = \measuredangle BAC, \beta = \measuredangle CBA$ и нека центар на опишаната кружница S околу $\triangle ABC$. Нека правата CS ја сече правата AB во точка D, која се наоѓа меѓу точките A и B. Докажи, дека

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{SC}} = \left|\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}\right|.$$

100. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ со агли $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ од кои ниту еден не е прав агол. Докажи дека:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta} = \operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\delta .$$

101. Ако a,b,c се должини на страни на триаголник такви што $a+b=3c$ докажи дека

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = 2 .$$

102. Докажи дека во правоаголен триаголник со остри агли α и β, катети a и b и хипотенуза c важи

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \geq \frac{2ab}{c^2} .$$

103. Докажи дека во правоаголен триаголник со катети a и b $(a>b)$ и соодветни спротивни агли α и β важи

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b} .$$

104. Даден е триаголник ABC таков што $\overline{AB}=2a$ и $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=-9$. Определи го геометриското место на темето C.

105. Околу круг со радиус r е опишан трапез чии агли при поголемата основа се α и β. Докажи дека односот на плоштините на трапезот и кругот е еднаков на

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right) .$$

106. Должините на основите на трапезот се a и b $(a>b)$, а неговата висина е h. Дијагоналите на трапезот се заемно нормални, а аголот меѓу краците е α. Докажи дека

$$\frac{1}{h} = \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\operatorname{ctg}\alpha .$$

107. Нека a,b,c се должините на страните на триаголникот, а α,β,γ се соодветните спротивни агли. Докажи дека

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cos\alpha+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cos\beta+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cos\gamma = 3 .$$

108. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник, а α,β,γ се нивните спротивни агли. Докажи дека

$$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma) = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) .$$

109. Ако a,b,c се должините на страните на произволен триаголник, а α е аголот што го зафаќаат страните b и c, докажи дека

$$a^2=(b+c)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+(b-c)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

110. Докажи дека ортоцентарот на остроаголен триаголник ABC со агли α,β и γ ја дели висината повлечена од темето A во однос $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}$.

111. Триаголникот ABC со агли α,β,γ е впишан во правоаголник $APQR$ така што точката B лежи на страната PQ, а точката C на страната QR. Докажи дека

$$\operatorname{ctg}\alpha\cdot P_{BCQ}=\operatorname{ctg}\beta\cdot P_{ACR}+\operatorname{ctg}\gamma\cdot P_{ABP}.$$

112. За кои триаголници важи равенството

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}(\beta-\gamma)+\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)=0,$$

ако α,β,γ се аглите на триаголникот.

113. Нека P е точка во внатрешноста на триаголникот ABC таква што

$$\measuredangle PAB=\measuredangle PBC=\measuredangle PCA=\varphi.$$

Ако α,β,γ се аглите на триаголникот ABC докажи дека

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

114. На краците на остар агол α со теме A дадени се точки D и E такви што $\overline{AD}=m$ и $\overline{AE}=n$. Во точките D и E се повлечени нормали на краците на аголот на кои точките лежат. Ако овие две нормали се сечат во точка F внатрешна за аголот, докажи дека

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{EF}}=\frac{n-m\cos\alpha}{m-n\cos\alpha}.$$

115. Нека $ABCD$ е паралелограм, со должини на страни $\overline{AB}=a\,cm$ и $\overline{BC}=b\,cm$, $a>b$ и остар агол α. Плоштината на четириаголникот кој се добива како пресек на симетралите на внатрешните агли на паралелограмот е еднаква на , $48\,cm^2$, а $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$. Определи ја разликата $a-b$.

116. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AD}=\overline{CD}$ и $\measuredangle ADC=90^\circ$. Ако $\overline{AB}=a,\ \overline{BC}=b,\ \overline{BD}=d$ и $\measuredangle ABC=\beta$, докажи дека

$$2d^2=a^2+b^2+2ab\sin\beta.$$

117. Дадени се три колинеарни точки A,B и M такви што M е меѓу A и B. На кружницата k со дијаметар AB земена е точка N различна од A и B.

Докажи, дека вредноста на изразот $\frac{\operatorname{tg}\measuredangle ANM}{\operatorname{tg}\measuredangle MAN}$ не зависи од изборот на точката N.

118. Во правилен петаголник вписан е квадрат така што едната страна е паралелна со една страна на петаголникот. Докажи дека должината на страната на квадратот е еднаква на $\frac{a\operatorname{ctg}18^\circ}{a+2\cos 18^\circ}$, каде a е должината на петаголникот.

119. Должините на страните на шестаголникот $ABCDEF$ се
$$\overline{AB}=b,\ \overline{BC}=\overline{CD}=a,\ \overline{DE}=b,\ \ \overline{EF}=\overline{FA}=a,\ \ a\neq b\ .$$
Околу шестаголникот е опишана кружница со радиус 8 и центар O. Ако $\cos\measuredangle ERO=\frac{\sqrt{2}}{4}$, определи ги периметарот и плоштината на овој шестаголник.

120. Определи ја плоштината на триаголникот чиј збир на квадрати на должините на неговите страни е 2016, а збирот на котангенсите на неговите агли е 18.

121. Нека AB и CD се две заемно нормални тетиви на кружница со радиус $10cm$. Дијаметрите на кружницата низ точките A и B ја делат тетивата CD на три еднакви дела/ Должината на тетивата AB е $16\,cm$. Определи ја вредноста на функцијата $\sin$ за периферниот агол над тетивата CD.

122. Во триаголник со страни a,b,c и спротивни агли α,β,γ со формулата
$$m=\operatorname{ctg}\omega=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma\ .$$
е дефиниран таканерачен Брокаров агол ω.
а) Користејќи ја формулата
$$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=16P^2,$$
каде P е плоштината на триаголникот, со помош на m и P изразиги ги броевите
$$a^2+b^2+c^2,\ a^4+b^4+c^4 \text{ и } b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\ .$$
б) Докажи дека $m\geq 3$. Што значи ова за аголот ω? За кои триаголници важи знак за равенство?
в) Докажи дека не постои триаголник кај кој a,b,c,m не се цели броеви.

123. а) Користејќи ги познатите формули $a=2R\sin\alpha$ и $s-a=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ за триаголник ABC со радиуси R и r на опишаната и вписаната кружница, соодветно, и полупериметар s и изразувајќи ги $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ со помош на $\cos\alpha$ докажи дека бројот $\cos\alpha$ е решение на равенката
$$4R^2x^3-4R(R+r)x^2+(s^2+r^2-4R^2)x+(2R+r)^2-s^2=0\ .$$
б) Изрази ги $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$ и $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ со помош на R,r и s.

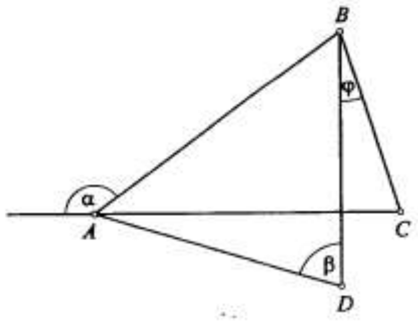
в) Докажи дека збирот на ориентираните растојанија од центарот O на опишаната кружница на триаголникот ABC до правите BC, CA, AB е еднаков на $R+r$, ако ориентираното растојание на точката O до на пример правата BC се зема позитивно или негативно во зависност од тоа дали точките O и A се од иста или различни страни на BC.

г) Ако конвексен тетивен $n-$аголник произволно се подели на $n-2$ триаголници со помош на $n-3$ дијагонали, кои не се сечат во внатрешноста на многуаголникот, докажи дека збирот на радиусите на впишаните кружници во тие триаголници е не зависи од поделбата на многуаголникот.

9. ПЛАНИМЕТРИЈА

9.1. ТРИАГОЛНИК

1. Во рамнината се дадени четири точки A, B, C, D такви што
$$\overline{AB} = \overline{AC} \text{ и } \overline{AD} = \overline{BD}.$$
За аглите α и β означени на цртеж десно важи $\alpha + \beta = 200^\circ$. Одреди го $\varphi = \measuredangle CBD$.



2. На железничка пруга долга $56\,km$ има 11 станици $A_1, A_2, ..., A_{11}$. Растојанијата од видот $d(A_i, A_{i+2})$, $i = 1, 2, ..., 9$ не се поголеми од $12\,km$, а растојанијата од видот $d(A_i, A_{i+3})$, $i = 1, 2, ..., 8$ не се помали од $17\,km$. Определи го растојанието $d(A_2, A_7)$.

3. Висината и тежишната линија од темето A на триаголникот ABC го делат $\measuredangle A$ на три еднакви дела. Определи ги аглите на триаголникот.

4. Определи ги аглите на триаголникот ABC во кој тежишната линија, симетралата на аголот и висината во темето C го делат $\measuredangle ACB$ на четири еднакви делови.

5. Определи ги аглите на рамнокрак триаголник чиј ортоцентар припаѓа на неговата вписана кружница.

6. Определи ги острите агли на правоаголен триаголник кај кој радиусите на опишаната и вписаната кружница се однесуваат како $5:2$.

7. Отсечките кои го поврзуваат центарот на вписаната кружница на триаголникот со неговите темиња го делат триаголникот на три триаголници, од кои едниот е сличен со почетниот триаголник. Определи ги аглите на почетниот триаголник.

8. Должините на страните на триаголникот се a, b, c, а R е должината на опишаната кружница околу триаголникот. Определи ги аглите на триаголникот ако важи $R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}$.

9. Во триаголникот ABC е вписана кружница. Допирната точка на страната AB ја дели оваа страна во однос $2:3$. Радиусот на кружницата е еднаков на петтина од должината на страната AB. Определи го $\measuredangle ACB$.

10. Должините настраните на триаголникот ABC се $\overline{AB}=5\,cm, \overline{BC}=13\,cm$ и $\overline{AC}=12\,cm$. На страната BC се избрани точки D и E такви што $\overline{BD}=1\,cm$ и $\overline{CE}=8\,cm$. Определи го $\measuredangle DAE$.

11. Во триаголникот ABC познати се аглите $\measuredangle ABC=75^\circ$ и $\measuredangle BCA=45^\circ$. Ако P е точка на страната BC таква што $\overline{BP}=2\overline{PC}$, определи го $\measuredangle APB$.

12. На страната BC на триаголникот ABC се наоѓаат редоследно точките N, L, M при што AN е висина, AL симетрала на $\measuredangle CAB$ и AM тежипна линија. Ако $\measuredangle NAB=\measuredangle LAN=\measuredangle MAL=\measuredangle CAM$, определи ги аглите на триаголникот ABC.

13. Кружницата впишана во триаголникот ABC ги допира неговите страни BC, CA, AB во точките M, N, P. Изрази ги аглите на триаголникот MNP преку аглите на триаголникот ABC.

14. Нека K е средината на хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC и M е точка на катетата BC таква што $\overline{BM}=2\overline{MC}$. Докажи дека $\measuredangle MAB=\measuredangle MKC$.

15. Даден е триаголник ABC. Нека B_1 е точка на висината на триаголникот повлечена од темето B таква што $\measuredangle AB_1C=90^\circ$, а C_1 е точка на висината на триаголникот повлечена од темето C таква што $\measuredangle AC_1B=90^\circ$. Докажи дека $\overline{AB_1}=\overline{AC_1}$.

16. Во правоаголен триаголник ABC точката K е средина на хипотенузата AB. Точката M припаѓа на страната AC и важи $\overline{AM}=2\overline{MC}$. Докажи дека $\measuredangle MBA=\measuredangle MKC$.

17. Точките F, G, H припаѓаат на страната AB на триаголникот ABC и се такви што F е меѓу A и G, а H е меѓу G и B. Ако
$$\overline{BH}=\overline{BC}, \overline{HG}=\overline{HC}, \overline{GF}=\overline{GC}, \overline{FA}=\overline{FC} \text{ и } \measuredangle CAB=5^\circ,$$
определи го $\measuredangle ABC$.

18. Од тежишните линии на $\triangle ABC$ е конструиран $\triangle A_1B_1C_1$, а од неговите тежишни линии е конструиран $\triangle A_2B_2C_2$. Докажи дека $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$ и определи го коефициентот на сличност.

19. Од темето A на паралелограмот $ABCD$ се повлечени нормали AM и AN на правите BC и CD. Докажи дека триаголниците ABC и MAN се слични.

20. Дадени се рамностран триаголник ABC и во рамнината на тој триаголник вектор $\vec{v}$. Нека $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ се ортогоналните проекции на векторот $\vec{v}$ на правите $AB.BC, CA$, соодветно. Докажи дека $\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3} = \frac{3}{2}\vec{v}$.

21. Нека O е центарот ма опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Со P, Q, R да ги означиме средините на лаците AB, BC, CA кои не ги содржат точките C, A, B, соодветно. Ако за точката X важи $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$, докажи дека X е центар на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

22. Во рамнината се дадени триаголниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, чии тежипта се T_1 и T_2 соодветно. Докажи дека
$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3\overrightarrow{T_1T_2}.$$

23. Во триаголникот ABC се дадени висините AD, BE, CF при што важи
$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}.$$
Докажи дека триаголникот ABC е рамностран.

24. Во остроаголен триаголник ABC се повлечени висините BB' и CC'. Низ ортоцентарот H е повлечена права која ги сече страните AB и AC во точките M и N, соодветно. Нека M' е подножјето на нормалата од M на BB', а N' е подножјето на нормалата од N на CC'. Докажи дека $M'C' \parallel N'B'$.

25. Пабло тргнал на прошетка и од дома прво одел 400 метри према исток, па 200 метри према југо-запад и 400 метри према југ, каде се одморил под стариот даб. Потоа тој тргнал кон својата куќа по права линија. Колкав пат вкупно изодел Пабло?

26. Нека ABC е тапоаголен триаголник со тап агол во темето B, нека D и E се средините на страните AB и AC соодветно, F е точка на страната BC таква што $\measuredangle BFE$ е прав и G е точка на отсечката DE таква што $\measuredangle BGE$ е прав. Докажи, дека точките A, F и G лежат на иста права ако и само ако $2\overline{BF} = \overline{CF}$.

27. За должините на страните на триаголникот важи $a \le b \le c$ и $a^3 + b^3 = c^3$. Дали овој триаголник е остроаголен, правоаголен или тапоаголен?

28. Должините на катетите на правоаголен триаголник се еднакви на $6\,cm$ и $8\,cm$. Определи ги радиусите на впишаната и опишаната кружница на овој триаголник.

29. Нека ABC е правоаголен триаголник и CN е негова висина. Ако $\overline{AC} = \overline{BN} = 1$, определи ја должината на хипотенузата AB.

30. Во правоаголен триголник од темето на правиот агол се повлечени висината и тежишната линија. Односот на нивните должине 12:13. Определи го односот на должиниоте на катетите на тој триаголник.

31. Во правоаголен триаголник ABC, со прав агол при темето C, должината на страната BC е a, а спротивниот агол е еднаков на 30°. Нека S е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC, а D е средината на хипотенузата. Докажи дека $\overline{CS} = \overline{DS}$ и определи го радиусот на впишаната кружница.

32. Должините на страните на триаголникот се $a = t^2 + t + 1, b = t^2 + 2t$ и $c = 2t + 1$, каде t е позитивен реален број.
а) подреди ги должините по големина,
б) докажи дека $\alpha = 60^\circ$,
в) пресметај ги радиусите на опишаната и впишаната кружница R и r и најди ја најмата можна вредност на односот $\frac{R}{r}$,
г) определи ги сите вредности на t за кои триаголникот е правоаголен.

33. Ако a, b, c должините на страните на правоаголен триаголник, тогаш
$$(a^4 + b^4 + c^4)^2 = 2(a^8 + b^8 + c^8).$$
Докажи!

34. Во правоаголен триаголник ABC точката D е подножје на висината повлечена од темето C на хипотенузата AB, точката E е средина на отсечката CD, а точката E е пресек на правите AE и BC. Ако $\overline{AD} = 4$ и $\overline{BD} = 9$, определи ја должината на отсечката AF.

35. Во правоаголен триаголник ABC точката D е подножје на висината повлечена од темето C кон хипотенузата AB. На катетата BC е избрана точка E така што $\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{BD}$, а на отсечката AE точка F таква што $\overline{EF} = \overline{CE}$. Докажи дека $\overline{AF} = \overline{AD}$.

36. Нека ABC е триаголник со прав агол во темето C. Нека D е точка на страната AC и E е точка на отсечката BD таква што
$$\measuredangle ABC = \measuredangle DAE = \measuredangle AED.$$
Докажи дека $\overline{BE} = 2\overline{CD}$.

37. Висината CD го дели правоаголниот триаголник ABC на два дела во кои се впишани кружници со центри S и S'. Паралелната права со висината CD низ центрите S и S' ги сече катетите AC и BC во точките M и N, соодветно. Ако $\overline{AC} = 8, \overline{BC} = 6$, определи ги должините на отсечките CM и CN.

38. Даден е триаголник ABC. Ако должината на тежишната линија повлечена од темето C е еднаква на половина од должината на страната AB, докажи дека триаголникот ABC е правоаголен.

39. Должината на хипотенузата на правоаголен триаголник е c, а должината на симетралата на еден од острите агли е $\frac{c\sqrt{3}}{3}$. Определи ги должините на катетите на овој триаголник.

40. Во разностран триаголник ABC се повлечени тежишната линија CT и висината CH на страната AB (точките T и H припаѓаат на AB). Ако $\measuredangle ACT = \measuredangle HCB$, докажи дека триаголникот е правоаголен.

41. Во правоаголен триаголник ABC, со прав агол во темето C, точките D и E ја делат страната BC на три еднакви дела (точката D е поблиску до точката B). Ако $\overline{BC} = 3\overline{AC}$, докажи дека $\measuredangle AEC + \measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 90^\circ$.

42. Даден е триаголник ABC со прав агол во темето C. На хипотенузата определи точка M таква што

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 - \overline{MC}^2 = \tfrac{1}{4}\overline{AB}^2.$$

43. Нека ABC е правоаголен триаголник со катети со должини a и b, хипотенуза со должина c и $\measuredangle BCA = 90^\circ$. Со k да ја означиме опишаната кружница околу триаголникот ABC, со k_1 кружницата која ја допира хипотенузата, висината CD и лакот BC на кружницата k, а k_2 е кружницата која ја допира хипотенузата, висината CD и лакот AC на кружницата k. Ако r_1 и r_2 се радиусите на кружниците k и k_2, докажи дека $r_1 + r_2 = a + b - c$.

44. Должините на катетите на правоаголен триаголник се a и b, а должината на неговата хипотенуза е c. Ако едниот остар агол е 75°, докажи дека $c^2 = 4ab$.

45. Во триаголникот ABC важи $\overline{AC} = 6, \overline{BC} = 2$ и $\measuredangle ACB = 120^\circ$. Симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече страната AB во точката D. Определи ја должината на отсечката CD.

46. Точка M е внатре во квадратот $ABCD$. Со A_1, B_1, C_1, D_1 да ги означиме вторите пресечни точки на правите AM, BM, CM, DM, во овој редослед, со кружницата опишана околу квадратот. Докажи $\overline{A_1B_1} \cdot \overline{C_1D_1} = \overline{A_1D_1} \cdot \overline{B_1C_1}$.

47. На страните BC и CD на квадратот $ABCD$ дадени се точки P и Q такви што

$$\overline{BP}:\overline{PC}=\overline{CQ}:\overline{QD}=1:3.$$

Ако должината на страната на квадратот е a, определи ги должините на најдолгата и најкратката висина на триаголникот APQ.

48. Во триаголникот ABC имаме

$$a=\overline{BC}, b=\overline{AC}, c=\overline{AB}, \alpha=\measuredangle CAB, \beta=\measuredangle ABC, \gamma=\measuredangle BCA.$$

а) Ако $\alpha=3\beta$, докажи дека $(a^2-b^2)(a-b)=bc^2$.

б) Дали важи обратното тврдење?

49. Нека I е точка на симетралата на $\measuredangle BAC$ на триаголникот ABC, а M и N се точки на страните AB и AC, соодветно и такви што $\measuredangle BAI=\measuredangle NIC$ и $\measuredangle ACI=\measuredangle MIB$. Докажи дека I е центар на впишаната кружница на триаголникот ABC ако и само ако точките M,N и I се колинеарни.

50. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\overline{AC}>\overline{AB}$. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Симетралата на $\measuredangle CAB$ ја сече страната BC во точка D. Правата која минува низ точката B и е нормална на правата AD ја сече правата AO во точката E. Докажи, дека точките A,B,D и E лежат на иста кружница.

51. Во $\triangle ABC$ симетралата на аголот при темето C ја сече страната AB во точката D. Нека $\overline{BC}=a$ и $\overline{AC}=b$ и $\overline{CD}=\frac{ab}{a+b}$. Определи го $\measuredangle ACB$.

52. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Тангентите во точките A и B на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ се сечат во точка M. Правата која минува низ M и е паралелна со страната BC ја сече страната AC во точката N. Докажи, дека $\overline{BN}=\overline{CN}$.

53. Даден е остроаголен $\triangle ABC$. Точката B' е осносиметрична слика на точката B во однос на правата AC, а точката C' е осносиметрична слика на точката C во однос на правата AB. Опишаните кружници околу триаголниците ABB' и ACC' се сечат во точките A и P. Докажи, дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ лежи на правата AP.

54. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ земени се точки S и T такви што растојанијата на точката S до правите AB, BC и CA се 10, 7 и 4, соодветно, а растојанијата на точката T до правите AB, BC и CA се 4, 10 и 16, соодветно. Определи го радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

55. Триаголникот ABC е рамнокрак ($\overline{AB}=\overline{AC}$), а точката D е на оној лак BC на опишаната кружница околку триаголникот ABC кој не го содржи темето

A. Понатаму, точката E е подножјето на нормалата повлечена од темето A на правата CD. Докажи дека важи

$$\overline{BD}+\overline{DC}=2\overline{DE}.$$

56. Во рамнината се дадени точките A, B, C. Нека D, E, F, G, H, I се точки во истата рамнина такви што триаголниците $ABD, BAE, CAF, DFG, ECH, GHI$ се позитивно ориентирани рамнострани триаголници. Докажи дека точката E е средина на отсечката AI.

57. Во рамнокрак триаголник едниот агол е еднаков на 108°. Докажи дека односот на должините на основата и кракот на овој триаголник е еднаков на $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

58. Во правоаголен триаголник ABC должината на хипотенузата е $\overline{AB}=c$, а на катетата е $\overline{AC}=\frac{3}{5}c$.Определи ја оддалеченоста на темето C до вписаната кружница во триаголникот ABC.

59. Во правоаголен триаголник $ABC\ (\measuredangle C=90^\circ)$, центарот на вписаната кружница од темињата A, B, C е оддалечен $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{2}\ cm$, соодветно. Определи го радиусот на вписаната кружница.

60. Даден е правоаголен триаголник со катети 6 и 8 метри. Кружница со радиус 1 метар се наоѓа внатре во триаголникот и допирајќи една негова страна почнува да се тркала по страните (внатре во триаголникот и секогаш во иста насока), така што секогаш допира најмалку една страна на триаголникот. Определи ја должината на патот што го минува центарот на кружницата се додека не се врати во почетната положба. .

61. Во рамнокрак триаголник ABC со краци AB и AC, точката D е средина на основата BC. Нека точката E е подножјето на нормалата повлечена од точката D на страната AB, а F е средина на отсечката DE. Докажи дека $AF \perp EC$.

62. Околу рамнокракиот триаголник ABC ($\overline{AB}=\overline{AC}$) и опишана кружница. Тангентите на кружницата во точките A и C се сечат во точката D. Ако $\measuredangle DBC=30^\circ$, докажи дека триаголникот ABC е рамностран.

63. Во триаголникот ABC аглите при темињата A и B се еднакви на 38° и 52°, соодветно. Определи го аголот што го зафаќа симетралата на надворешниот агол во темето B и правата на која лежи страната AC.

64. За должините на страните на еден триаголник важи

$$a^2+2b^2+3c^2=2ac+4bc.$$

Определи ги аглите на овој триаголник.

65. Во $\triangle ABC$ една средна линија има поголема должина од една тежишна линија. Докажи, дека $\triangle ABC$ е тапоаголен.

66. Во триаголникот ABC важи $\overline{AB}=\overline{AC}$, а симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече страната AC во точката D така што $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{AD}$. Определи ги аглите на овој триаголник.

67. Во триаголникот ABC важи $\overline{AB}=\overline{AC}$. На страната AC се наоѓа точка D таква што $\overline{AD}<\overline{CD}$, а на отсечката BD точка P таква што $\measuredangle APC=90^\circ$. Ако $\measuredangle ABP=\measuredangle BCP$, определи го односот $\overline{AD}:\overline{CD}$.

68. Во триаголникот ABC важи $\measuredangle ACB=90^\circ+\frac{1}{2}\measuredangle CBA$, а M е средина на отсечката BC. Кружница со центар во точката A ја сече правата BC во точките M и D. Докажи дека $\overline{MD}=\overline{AB}$.

69. Нека точката N е подножјето на висината повлечена от точката A во остроаголниот триаголник ABC, точките P и Q се соодветно подножјата на нормалите повлечени од точката N кон страните AB и AC, а точката O е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Докажи дека, ако $\overline{AC}=2\overline{OP}$, тогаш $\overline{AB}=2\overline{OQ}$.

70. Нека A',B',C' се точките во кои симетралите на аглите на $\triangle ABC$ ги сечат страните BC,CA,AB соодветно и нека S е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Ако $\overline{AS}:\overline{SA'}=3:2, \overline{BS}:\overline{SB'}=4:3$ и $\overline{AB}=12$, определи ги должините на останатите страни на $\triangle ABC$.

71. Во остроаголен триаголник ABC точката M е подножје на висината повлечена од темето A, а точката N е подножје на висината повлечена од темето B. Ако $\overline{AN}=\overline{MN}$, докажи дека центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC припаѓа на висината BN.

72. Во рамнокрак триаголник ABC со основа со должина $18\,cm$ и крак со должина $41\,cm$ впиши рамнокрак триаголник DEF со максимална плоштина, така што основите на двата триаголника се паралелни, а врвот на впишаниот триаголник е во средината на основата на дадениот триаголник. Определи ги должините на триаголникот DEF.

73. Основата BC на рамнокрак триаголник ABC има должина a, а аголот при врвот е еднаков на α. Кружницата k ги допира краците AB и AC на три-

аголникот и кружницата опишана околу триаголникот ABC. Определи го периметарот на кружницата k.

74. Ако за должините на страните на триаголникот важи $a-b=b-c\geq 0$ докажи дека вториот по големина агол не е поголем од 60°. Кога овој агол е еднаков на 60°?

75. Даден е рамнокрак триаголник со основа $6\,cm$ и крак $5\,cm$. Кружницата чиј дијаметар е еден од краците на триаголникот ги сече останатите две страни во точките E и F. Определи ја фолжината на отсечката EF.

76. Од едното теме на остроаголен триаголник е повлечена висината, од второто тежишната линија и од третото симетралата на аголот. Овие три прави не минуваат низ иста точка и нивните пресеци се темиња на нов триаголник. Докажи дека новиот триаголник не може да биде рамностран.

77. Во остроаголен триаголник ABC должината на тежишната линија BM е еднаква на должината на висината CN. Нека P е пресечната точка на CN и BM. Докажи дека $\overline{BP}=2\overline{PN}$.

78. Во остроаголен триаголник ABC растојанијата од темето A до центарот на опишаната кружница и ортоцентарот се еднакви. Пресметај го $\measuredangle BAC$.

79. Во рамностран триаголник е дадена точка T која од страните на триаголникот е оддалечена 1, 2 и 3. Определи ја должината на страната на триаголникот.

80. Страните на триаголникот имаат должини a,b,c такви што
$$a+b-c=2 \text{ и } 2ab-c^2=4.$$
Докажи дека триаголникот е рамностран.

81. Даден е триаголник ABC. Нека L и M се точки во кои симетралите на внатрешниот и надворешниот агол во темето C ја сечат правата AB. Ако $\overline{CL}=\overline{CM}$, докажи дека
$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=4R^2$$
каде R е должината на радиусот на опишаната кружнива околу триаголникот ABC.

82. Впишаната кружница на остроаголен триаголник ABC ги допира страните BC, CA, AB редоследно во точките D,E,F. Центарот на кружницата е S, а правата DS ја сече отсечката EF во точката P. Ако M е средината на страната BC, докажи дека точките A,P и M се колинеарни.

83. Радиусот на опишаната кружница на рамнокрак триаголник со основа a и крак b изнесува R. Докажи дека важи равенството $a^2R^2 + b^4 = 4b^2R^2$.

84. Впишната кружница во триаголникот ABC ги допира страните AB и AC во точките M и N. Нека P е пресекот на правата MN и симетралата на $\measuredangle ABC$. Докажи дека $BP \perp CP$.

85. Нека S е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC, а симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точката D. Докажи, дека $\overline{AS} : \overline{SD} = 2:1$ ако и само ако важи $\overline{CA} + \overline{AB} = 2\overline{BC}$.

86. Точката T е тежиште на триаголникот ABC, а точката D е средина на неговата страна BC. Ако должината на страната на рамностраниот триаголник BDT е еднаква на $1\,cm$, определи ги должините на страните на триаголникот ABC и радиусот на кружницата опишана околу него.

87. Две кружници со еднакви радиуси ρ се вписани во триаголникот ABC така што се допираат меѓу себе, едната ги допира страните AB и AC, с другата страните AB и BC на триаголникот ABC. Докажи дека

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{r}$$

каде r е радиусот на впипанат кружница во триаголникот ABC.

88. Во триаголникот ABC важи $\overline{BC} = 4, \overline{AC} = 5, \measuredangle BCA = 2\measuredangle CAB$. Определи ги радиусите на опишаната и впишаната кружница на триаголникот ABC.

89. Во внатрешноста на триаголникот ABC се наоѓа точката P за која важи

$$\measuredangle PAC = 40^\circ, \measuredangle PCA = 70^\circ, \measuredangle PBC = 20^\circ, \measuredangle PCB = 10^\circ.$$

Определи ги аглите на триаголникот ABC.

90. На полуправите p и q со заедничка почетна точка O се дадени точки A и C на p, B и D на q. Ако правата CD е паралелна со тежишна линија на триаголникот OAB, докажи дека правата AB е паралелна со тежишна линија на триаголникот OCD.

91. Во внатрешноста на триаголникот ABC се наоѓа точката S. Докажи дека производот на растојанијата од точката S до страните на триаголникот ABC е најголем кога S е тежиште на триаголникот.

92. Центарот U на впишаната кружница на триаголникот ABC со отсечки е поврзан со неговите темиња. Нека O_1, O_2, O_3 се центрите на опишаните кружници околу триаголниците BCU, CAU, ABU, соодветно. Докажи дека центрите на опишаните кружници околу триаголниците ABC и $O_1O_2O_3$ се совпаѓаат.

93. Во триаголникот ABC со агол $\measuredangle BAC = 120^{\circ}$ симетралите на $\measuredangle BAC$, $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle BCA$ ги сечат спротивните страни во точките D, E, F, соодветно. Докажи дека кружницата со дијаметар EF ја содржи точката D.

94. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните AC, BC, AB во точките M, N, R, соодветно. Нека S е точка на помалиот од двата лаци MN и t е тангентата на тој лак во точката S. Тангентата t ги сече NC и MC во точките P и Q, соодветно. Докажи дека правите AP, BQ, SR и MN се сечат во една точка.

95. Во триаголник ABC должината на страната AC е еднаква на $5\,cm$, а должината на страната BC е $6{,}5\,cm$. На страната AB избрана е точка D таква што $\measuredangle ACD = \measuredangle ADC = 75^{\circ}$. Определи ги должините на отсечките AB и CD.

96. На страната AB на триаголникот ABC е дадена точка D. Нека T' и T'' се тежиштата на триаголниците CAD и CDB. Определи ја должината на остсечката $T'T''$ ако $\overline{AB} = 6\,cm$.

97. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} > \overline{AC}$. Нека t е тангентата во точката A на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Кружницата со центар во точката A и радиус $\overline{AC}$ ја сече страната AB во точката D, а правата t ја сече во точките E и F така што C и E се од иста страна на правата AB. Докажи, дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ лежи на правата DE.

98. Во $\triangle ABC$ аголот при темето A е двапати поголем од аголот при темето B. Нека симетралата на аголот при темето C ја сече страната AB во точката D. Докажи, дека важи
$$\overline{BC} = \overline{AD} + \overline{AC}\,.$$

99. Рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC}$ е впишан во кружница k. Нека D е точка на основата BC на $\triangle ABC$, k_1 е опишаната кружница околу $\triangle ABD$ и E е точка на кружницата k_1 таква што правата AE ја сече кружницата k во точките A и F, при што F е меѓу A и E. Ако правите DE и BF се сечат во точката G, докажи дека важи $\overline{EG} = \overline{GF}$.

100. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} < \overline{AC}$. Точката D припаѓа на страната BC. Нормалата во точката B повлечена кон правата AD ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABD$ во точките B и E. Ако правите DE и AC се заемно нормални, докажи дека AD е симетрала на $\measuredangle BAC$.

101. Даден е триаголник ABC. Кружницата k надворешно ја допира страната BC во точката K и продолженијата на страните AB и AC преку точките

B и C редум во точките L и M. Кружницата со дијаметар BC ја сече отсечката LM во точките P и Q така што точката P лежи меѓу L и Q. Докажи дека правите BP и CQ се сечат во центарот на кружницата k.

102. Даден е триаголник $ABC, \overline{AB}=7, \overline{BC}=8, \overline{AC}=9$. Точката D припаѓа на страната AC и важи $\measuredangle CDB = 45^\circ$. Определи ги должината на отсечката BD и односот на плоштините на триаголниците ABC и DCB.

103. Даден е остроаголен триаголник ABC со висини AD, BE, CF и ортоцентар H. Отсечките EF и AD се сечат во точката G. Отсечката AK е дијаметар на кружницата опишана околу триаголникот ABC и ја сече страната BC во точката M. Докажи дека правите GM и HK се паралелни.

104. Даден е триаголник ABC ($\measuredangle BAC = 60^\circ$ и $\overline{AB} > \overline{AC}$). Нека H е ортоцентарот на триаголникот ABC. Докажи дека симетралата на $\measuredangle BAC$ е нормална на правата OH.

105. Ако должините на две висини на триаголникот се 10 и 6, докажи дека должината на третата висина е помала од 15.

106. Нека ABC е остроаголен триаголник и H е негов ортоцентар. Правата која минува низ точката A и е нормална на AC и правата која минува низ точката B и е нормална на BC се сечат во точката D. Кружницата $k(C, \overline{CH})$ ја сече опишаната кружница околу триаголникот ABC во точките E и F. Докажи дека $\overline{DE} = \overline{DF} = \overline{AB}$.

107. Даден е остроаголен триаголник ABC, $\overline{AB} > \overline{AC}$. Нека O е центар на кружницата опишана околу триаголникот ABC, а OQ е дијаметар на кружницата опишана околу триаголникот BOC. Правата паралелна на правата BC низ A ја сече правата CQ во точката M, а правата паралелна со правата CQ низ A ја сече правата BC во точката N. Нека T е пресек на правите AQ и MN. Докажи дека точката T припаѓа на кружницата опишана околу триаголникот BOC.

108. Нека ABC е остроаголен триаголник со $\measuredangle BAC = 75^\circ$ Нека P е средина на страната BC, а M и N се подножјата на висините повлечени од темињата B и C, соодветно. Определи го $\measuredangle MPN$.

109. Над страните на остроаголниот триаголник ABC кон неговата надворешност се нацртани рамнострани триаголници BCD, ACE, ABF. Нека M е средината на страната BD, а O е центарот на триаголникот ACE. Докажи дека $\overline{AM} : \overline{OF} = \sqrt{3} : 2$.

110. Од произволна точка M во внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC на страните AB, BC, CA се повлечени нормали MH, MK, MP, соодветно. Докажи:

$$\overline{AH}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{HB}^2 + \overline{KC}^2 + \overline{PA}^2$$
$$\overline{AH} + \overline{BK} + \overline{CP} = \overline{HB} + \overline{KC} + \overline{PA}.$$

111. Нека ABC е триаголник за кој важи $\overline{AB} < \overline{AC}$ и нека D е средината на лакот BC на кружницата опишана околу триаголникот и на кој лежи точката A. Докажи дека за подножјето E на нормалата повлечена од D на страната AC важи $\overline{AB} + \overline{AE} = \overline{EC}$.

112. Околу триаголникот ABC со должини на страни a, b, c е опишана кружница. Тангентата на таа кружница во точката C е нормална на страната AB. Докажи дека $(a^2 - b^2)^2 = c^2(a^2 + b^2)$.

113. Точките B и C се фиксни, а точката A е променлива но таква што $\measuredangle BAC$ е константен. Средините на отсечките AB и AC се точките D и E, соодветно. Токите F и G се такви што $DF \perp AB$ и $EG \perp AC$, а BF и CG се нормални на BC. Докажи дека производот $\overline{BF} \cdot \overline{CG}$ не зависи од положбата на точката A.

114. Од некоја точка на хипотенузата на правоаголен триаголник се повлечени нормали на катетите. Нека N_1 и N_2 се подножјата на тие нормали. Кога отсечката N_1N_2 ќе биде најкратка. Ако должините на катетите се a и b определи ја најкратката должина на N_1N_2.

115. Кружница со центар O ги допира страната BC и продолженијата на страните AB и AC на триаголникот ABC во точките K, P, Q, соодветно. Отсечките OB и OC ја сечат тетивата PQ во точките M и N. Докажи дка

$$\frac{\overline{QN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{CA}}.$$

116. Даден е правоаголен триаголник ABC. Точката D е средина на хипотенузата AB, F е средина на страната AC, E е средина на CF и G е средина на FA. Отсечката CD ги сече BE, BF, BG во точките P, Q, R, соодветно. Определи го односот $\overline{PQ} : \overline{QR}$?

117. Определи ги должините на катетите на правоаголен триаголник со должина на хипотенуза c и должина на раиус на впишана кружница r.

118. Од сите правоаголни триаголници со даден радиус на опишаната кружница r определи го триаголникот со најголем радиус на впишаната кружница.

119. На хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC избрана е точка P таква што $\overline{PA}=m, \overline{PB}=n, \overline{PC}=d$. Ако $\overline{BC}=a, \overline{AC}=b, \overline{AB}=c$, докажи дека

$$a^2m^2+b^2n^2=c^2d^2 .$$

120. Краците на рамнокракиот триаголник ABC ја допираат кружницата чиј центар е на основата BC на триаголникот ABC. Точките P и Q се наоѓаат на страните AB и AC , соодветно. Докажи дека

$$\overline{PB}\cdot\overline{CQ}=(\tfrac{1}{2}\overline{BC})^2$$

ако и само ако PQ е тангента на разгледуваната кружница.

121. Во правоаголен триаголник ABC со хипотенузата c и висина h_c е впипан квадрат $DEFG$ така што темињата D и E припаѓаат на хипотенузата AB, а темињата F и G припаѓаат на катетите BC и CA, соодветно. Определи ја должината x на страната на овој квадрат и докажи дека $\overline{AD}\cdot\overline{BE}=x^2$.

122. На страните AB и BC на квадратот $ABCD$ се избрани точки E и F , соодветно такви што $\overline{BE}=\overline{BF}$. Нека BN е висина на триаголникот BCE . Докажи дека триаголникот DNF е правоаголен.

123. Докажи дека отсечката која го поврзува темето на правиот агол во правоаголниот триаголник со центарот на квадратот конструиран од надворешната страна над хипотенузата и отсечката која ги поврзува центрите на квадратите конструирани од надоворешните страни над катетите се заемно нормални и имаат еднаква должина.

124. Во рамностран триаголник ABC на страните AB и BC се земени точки D и E , соодветно така што $\overline{AD}=\frac{1}{3}\overline{AB}, \overline{BE}=\frac{1}{3}\overline{BC}$. Правите AE и CD се сечат во точката P . Определи го $\measuredangle BPC$.

125. Во триаголникот ABC со должините на страните се $\overline{AB}=20, \overline{AC}=21$ и $\overline{BC}=29$. Точките D и E припаѓаат на страната BC и се такви што $\overline{BD}=8$ и $\overline{EC}=9$. Определи го $\measuredangle DAE$.

126. Даден е триаголник со агли $\alpha=60^\circ$ и $\beta=75^\circ$, а неговиот периметар е $10\,cm$. Определи ги должините на страните на овој триаголник.

127. Нека L и M се соодветно точките во кои симетралите на внатрешниот и надворешниот агол повлечени во темето C на триаголникот ABC ја сечат правата AB. Ако $\overline{CL}=\overline{CM}$, докажи дека $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=4R^2$, каде R е должината на радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC .

128. Во остроаголен триаголник ABC ортоцентарот ја полови висината повлечена од темето A, додека висината од темето B ја дели во однос $2:1$ така што ортоцентарот е поблеску до подножјето отколку до темето. Во кој однос ја дели ортоцентарот висината повлечена од темето C?

129. Во триаголникот ABC аглите $\alpha = \measuredangle BAC, \beta = \measuredangle CBA$ се остри. Од надворешните страни на страните AC и BC, како над основи се конструирани рамнокраки триаголници ACD и BCE со агли при врвовите $\measuredangle ADC = \beta$ и $\measuredangle BEC = \alpha$. Нека O е центарот на кружницата опишана околу триаголникот ABC. Докажи дека збирот $\overline{DO} + \overline{EO}$ е еднаков на периметарот на триаголникот ABC ако и само ако $\measuredangle ACB$ е прав.

130. Во внатрешноста на триаголникот ABC со $\measuredangle ABC = 45^\circ$ земена е точка D таква што $\measuredangle DAB = \measuredangle DCB = 45^\circ$. Докажи дека правата BD е нормална на правата AC.

131. Во триаголникот DEF должините на страните се еднакви на должините на тежишните линии на триаголникот ABC. Ако триаголникот DEF е тапоаголен, докажи дека неговиот најмал агол е помал од 45°.

132. Ако за триаголникот ABC важи $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{AC}}$, докажи дека $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC$.

133. Нека CH е висина на остроаголен триаголник ABC, а точката O е центар на неговата опишана кружница. Ако T е подножјето на нормалата повлечена од точката C на правата AO, докажи дека правата TH минува низ средината на отсечката BC.

134. Должината на основата на рамнокрак триаголник ABC е $12\,cm$, а должината на кракот е $10\,cm$. Точките P и Q се средини на краците AC и BC, а S и R се нивните ортогонални проекции на AB. Определи ја оддалеченоста на подножјата на нормалите повлечени од P и R на правата SQ.

135. Ако збирот на должините на две страни на разностран триаголник е два пати поголем од должината на третата страна, докажи дека правата која минува низ центарот на впишаната кружница и тежиштето на триаголникот е паралелна со страната која е средна по должина.

136. Должините на висините на триаголникот ABC се однесуваат како
$$h_a : h_b : h_c = 6 : 2\sqrt{3} : 3,$$
а периметарот на опишаната кружница е $8\pi\,cm$. Определи ги должините на страните и големините на аглите на триаголникот ABC.

137. Во рамнокрак триаголник ABC ($\overline{AC}=\overline{BC}$) точката D е средина на основата AB, отсечката DE е висина на триаголникот DBC, а M е средина на отсечката DE. Докажи дека правите AE и CM се заемно нормални.

138. Над страните AB и BC на триаголникот ABC се конструирани рамнострани триаголници ADB и CBE. Ако T е тежиштето на триаголникот CBE, а P е средината на отсечката AC, докажи дека $\measuredangle DPT = 90^\circ$.

139. Докажи дека еден триаголник е рамностран ако и само ако збирот на должините на неговите висини е девет пати поголем од радиусот на неговата впишана кружница.

140. За триаголникот ABC познати се должините на страните $b=\overline{AC}, c=\overline{AB}$ и важи $\measuredangle ABC = 3\measuredangle BCA$. На страната AC се избрани точки D и E такви што $\measuredangle ABD = \measuredangle DBE = \measuredangle EBC$. Со помош на b и c изрази ги должините на отсечките AD, DE и EC.

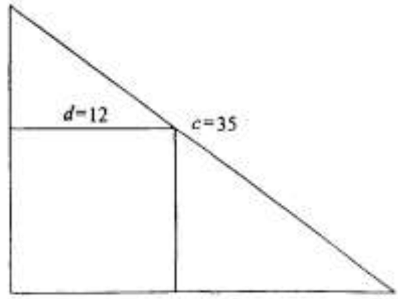
141. Кој од рамнокраките триаголници впишани во дадена кружница со радиус R има најголем збир на должината на основата и висината повлечена на основата. Изрази ја најголемата вредност на овој збир со помош на R.

142. а) Во триаголникот ABC е впишана кружница која ги допира страните $BC, CA.AB$ во точките D, E, F, соодветно. Докажи дека правите AD, BE, CF се сечат во една точка P.
б) Докажи дека ниту еден од аглите $\measuredangle APB, \measuredangle BPC, \measuredangle CPA$ не е прав.

143. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C. На катетата BC е земена произвона точка A', а на катеата AC е земена произвона точка B'. Докажи дека
$$\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{A'B'}^2 .$$

144. Во триаголникот ABC се повлечени симетралите на аглите AD и BE (B и E се точки на страните BC и AC). Определи го аголот $\gamma = \measuredangle BCA$ ако $\overline{AD}\cdot\overline{BC} = \overline{BE}\cdot\overline{AC}$ и $\overline{AC} \neq \overline{BC}$.

145. Во правоаголен триаголник со хипотенуза со должина $c=35$ впишан е квадрат со должина на страна $d=12$ (цртеж десно). Определи ги должините на катетите на правоаголниот триаголник.



146. Должините на страните на триаголникот се $a=b-\frac{r}{4}$, b, $c=b+\frac{r}{4}$, каде r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот. Изрази ги должините на страните на триаголникот во зависност од r.

147. Висината CD повлечена кон хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC е дијаметар на кружница k која ги сече катетите AC и BC на тој триаголник во точките E и F, соодветно. Ако G е пресекот на правите CD и EF и ако важи

$$\overline{CG}^2=\overline{CE}\cdot\overline{CF}$$

Определи ги острите агли на триаголникот ABC.

148. Нека O е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC. Докажи дека

$$\overline{AO}^2\cdot\overline{BC}+\overline{BO}^2\cdot\overline{AC}+\overline{C0}^2\cdot\overline{AB}=\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}.$$

149. Во внатрешнсота на даден триаголник, чија опишана и впишана кружница имаат центри O и I и радиуси R и r, нацртани се четири еднакви кружници со радиус x. Три од нив допираат по две страни на триаголникот о однадвор ја допираат четвртата кружница чиј центар е во точката S. Докажи дека точката S лежи на правата определна со точките O и I. Определи го радиусот x.

150. Сите точки од рамнината се поделени на две дисјунктни множества. Докажи дека постои триаголник чии темиња припаѓаат на исто множество, најмалата страна му е со должина 1 и аглите му се однесуваат како $1:2:3$.

151. Ако за триаголниците со должини на страни a,b,c и a',b',c' и спротивни агли α,β,γ и α',β',γ', соодветно, важи $\alpha+\alpha'=\pi$ и $\beta=\beta'$, докажи дека $aa'=bb'+cc'$.

152. Триаголникот ABC е остроаголен. За било која точка T од внатрешноста или работ на триаголникот, точките T_a,T_b,T_c се подножјата на нормалите повлечени од T кон страните BC,CA,AB. Ако

$$f(T)=\frac{\overline{AT_a}+\overline{BT_b}+\overline{CT_c}}{\overline{TT_a}+\overline{TT_b}+\overline{TT_c}},$$

докажи дека $f(T)$ не зависи од изборот на точката T ако и само ако триаголникот ABC е рамностран.

153. Во внатрешноста на триаголникот ABC со должини на страни a,b,c и соодветни агли α,β,γ постојат точки P и Q такви што важи

$$\measuredangle BPC=\measuredangle CPA=\measuredangle APB=120^\circ,$$

$$\measuredangle BQC=60^\circ+\alpha,\ \ \measuredangle CQA=60^\circ+\beta,\ \ \measuredangle AQB=60^\circ+\gamma.$$

Докажи дека

$$(\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CP})^3\cdot\overline{AQ}\cdot\overline{BQ}\cdot\overline{CQ}=(abc)^3.$$

154. Ако за должините на станите на триаголникот важи $\frac{a+b}{b+c}=\frac{c}{a-b}$, определи го наголемиот агол на триаголникот.

155. За должините на страните a,b,c на триаголникот се точни равенствата

$$\frac{b}{a}=\frac{|b^2+c^2-a^2|}{bc}$$
$$\frac{c}{b}=\frac{|c^2+a^2-b^2|}{ca}$$
$$\frac{a}{c}=\frac{|a^2+b^2-c^2|}{ab}.$$

Определи ги сите можнио вредности на аглите на триаголникот.

156. Должините на страните на триаголникот се три последователни природни броеви, а еден од аглите е два пати поголем од еден од преостанатите два агли. Определи ги должините на страните на триаголникот.

157. Должините на страните на триаголникот се a,b и $c=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{{}^2+b^2}}$, $a>b$. Докажи дека за аглите α и β кои се спротивни на страните a и b важи $\alpha-\beta=90^\circ$.

158. Должините на страните на триаголникот се a,b,c, а големините на спротивните агли на страните b и c се $\beta=50^\circ$ и $\gamma=100^\circ$. Докажи дека

$$ac=c^2-b^2.$$

159. Нека ABC е рамностран триаголник. На правата AB избрана е точка P така што точката A лежи меѓу точките P и B. Нека a е должината на страната на триаголникот ABC, r_1 е радиусот на впишаната кружница во триаголникот PAC и r_2 е радиусот на припишаната кружница на триаголникот PBC во однос на страната BC. Збирот r_1+r_2 изрази го како функција од a.

160. Во триаголникот ABC точкта D ја дели страната BC на делови со должини $u=\overline{BD}$ и $v=\overline{DC}$.

а) Ако $\measuredangle BDA=\varphi$ и $\overline{AD}=t$, изрази ги b и c преку t,u,v и φ.

б) Изрази ја должината на t со помош на b,c,u,v.

161. Должините на страните на триаголникот се три последователни непарни броја, а едниот агол е со големина $\frac{2\pi}{3}$. Определи ги должините на страните на тој триаголник.

162. Ако a,b,c се должините на страните на триаголникот и α,β,γ се соодветно спротивните агли, тогаш $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$ ако и само ако $\beta=2\alpha$. Докажи!

163. Определи ги должините на стрелките на часовникот, кај кој нивните крајни точки во 9 часот се оддалечени $8,5\ cm$, а во 10 часот се оддалечени $6,5\ cm$.

9.2. ЧЕТИРИАГОЛНИК

164. Даден е квадрат $ABCD$. Точките M и N припаѓаат на страните BC и CD, соодветно и се такви што $\measuredangle BMA=\measuredangle NMC=60^\circ$. Определи го $\measuredangle MAN$.

165. На страните AC и BC на остроаголен триаголник ABC од надворешната страна се конструирани квадрати $ACXE$ и $CBDY$. Докажи дека правите AD и BE се сечат на висината повлечена од темето C на триаголникот ABC.

166. Над страните AB и BC од надвор од триаголникот ABC се конструирани квадрати $ABKL$ и $BCMN$.
а) Ако D е точка таква што $ABCD$ е паралелограм, докажи дека триаголниците ABD и BKN се складни.
б) Докажи дека средините на отсечките AC, KN и центрите на квадратите $ABKL$, $BCMN$ се темиња на квадрат.

167. Точката M е средина на страната CD на квадратот $ABCD$, а точката P е точка од дијагоналата AC за која важи $d(P.C)=3d(P,A)$. Определи го $\measuredangle BPM$.

168. Дијагоналите на квадратот $ABCD$ се сечат во точката S, а P е средината на страната AB. Нека M е пресекот на AC и PD, а N е пресекот на BD и PC. Докажи дека четириаголникот $PMSN$ е тангентен и радиусот на впишаната кружница е еднаков на $\overline{MP}-\overline{MS}$.

169. Две соседни темиња на квадратот се наоѓаат на кружница со радиус 1. Определи го максималното растојание на центарот на кружницата до едно од преостанатите две темиња.

170. Нека $ABCD$ е паралелограм, а M е средина на страната CD. Ако точката M припаѓа на симетралата на $\measuredangle DAB$, определи го $\measuredangle AMB$.

171. Квадрат е поделен на конечен број помали квадрати чии периметри се природни броеви. Дали мора и периметарот на почетниот квадрат да е приеоден број.

172. Ако $ABCD$ е квадрат и P е произволна точка во неговата рамнина, докажи дека нормалите од точките B, C, D, A на правите AP, BP, CP, DP, соодветно се сечат во една точка.

173. Должината на страната на квадратот е еднаква на 2, а точката P е средина на страната CD. Точката S е пресек на кружницата со центар P и радиус 1 и кружницата со центар B и радиус 2. Определи го растојанието од точката S до правата AD.

174. Нека P е произволна точка на страната AB на квадратот $ABCD$, а точката B е пресекот на страната AD и симетралата на $\measuredangle DCP$. Докажи дека

$$\overline{DR} + \overline{PB} = \overline{CP}.$$

175. Во паралелограм должините на страните се $\overline{AB} = a$ и $\overline{BC} = b$, а агол меѓу дијагоналите е $\measuredangle AOB = \alpha$ (O е пресекот на дијагоналите). Определи го растојанието меѓу страните AB и CD.

176. Во паралелограм со тап агол 120°, должините на дијагоналите се однесуваат како $\sqrt{109} : \sqrt{39}$. Определи го односот на должините на страните на паралелограмот.

177. Нека $ABCD$ е паралелограм и нека S е пресекот на неговите дијагонали. Симетралата на $\measuredangle ADC$ ја полови отсечката AS и ја сече правата BC во точката E. Определи ги односите $\overline{BE} : \overline{BC}$ и $\overline{AB} : \overline{BC}$.

178. Точките M и N припаѓаат соодветно на страните AB и AD на паралелограмот $ABCD$. Притоа важи

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{2}{3} \text{ и } \frac{\overline{AN}}{\overline{AD}} = \frac{3}{4}.$$

Отсечките MN и AC се сечат во точката P. Определи го односот $\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}$.

179. Даден е правоаголник $ABCD$. На страната BC земена е точка E таква што $\overline{EC} = 4\overline{BE}$, а на страната CD земена е точка F таква што $\overline{FD} = 4\overline{CE}$. Ако аголот $\measuredangle EAF$ е најголем можен, определи го односот $\overline{AB} : \overline{BC}$.

180. Нека E и F се средините на страните AB и BC на паралелограмот $ABCD$, соодветно, а G е пресекот на отсечките AF и DE. Во кои односи точката G ги дели отсечките AF и DE.

181. Ако $ABCD$ е конвексен четириаголник за кој важи

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2,$$

докажи дека тој е паралелограм.

182. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник. Страните AD, CD и дијагоналата BD се со еднакви должини, $\measuredangle ADB = \measuredangle DCA$ и $\measuredangle CBD = \measuredangle BAC$. Определи ги аглите на четириаголникот $ABCD$.

183. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ е земена точка P. Од точката A е повлечена нормала на правата BP, од B нормала на CP, од C нормала на DP и од D нормала на AP. Докажи дека овие четири нормали се сечат во една точка.

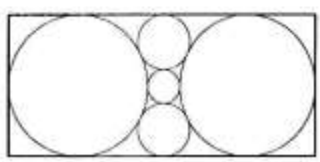
184. Нека S е центарот на кружницата k со радиус 1. Темињата A и B на квадратот $ABCD$ лежат на кружницата k, а страната CD минува низ точката S. Определи ја должината на страната на квадратот.

185. Нека $ABCD$ е квадрат и P е точка на кружницата опишана околу квадратот на лакот AB кој не ја содржи точката C. Кои вредности може да ги има изразот: $\frac{\overline{AP}+\overline{BP}}{\overline{CP}+\overline{DP}}$?

186. Тетивата AB го дели кругот со радиус r на два дела чии должини на лаци се однесуваат како $1:2$. Во поголемиот дел е вписан квадрат чија една страна лежи на тетивата. Определи ја должината на страната на овој квадрат.

187. Даден е правоаголникот $ABCD$ чија подолга страна е отсечката AB. Нормалата повлечена од темето B кон дијагоналата AC ја сече правата AD во точка E, а кружницата со центар во точката A и радиус $r = \overline{AB}$ ја сече страната CD во точка F. Докажи дека $AF \perp EF$.

188. Пет кружници се впишани во правоаголник како што е прикажано на цртежот десно. Должината на помалата страна ма правоаголникот е еднаква на 1. Определи ја должината на поголемата страна на правоаголникот.



189. Должините на страните на еден четириаголник се природни броеви, а секоја од нив е делител на збирот на преостанатите три должини. Докажи дека најмалку две должини на страните на овој четириаголник се еднакви.

190. Нека $ABCD$ е правоаголник и k е кружница со центар во пресекот на дијагоналите на правоаголникот. Кружницата k ја сече страната AB во тоќките K и L, а страната CD во точките M и N. Притоа важи $LN \perp AC$. Ако средината на отсечката AN припаѓа на кружницата k, определи го односот на должините на страните на правоаголникот.

191. Од девет складни правоаголници чија должина и ширина се природни броеви составен е правоаголник 20×9. Определи ги димензиите на складните правоаголници.

192. Нека H е ортоцентар на остроаголниот триаголник ABC. Кружницата опишана околу триаголникот ABH има центар S и ја сече отсечката BC во точките B и D. Нека P е пресекот на правата DH и отсечката AC, а нека Q е центар на опишаната кружница околу триаголникот ADP. Докажи дека четириаголникот $BDQS$ е тетивен.

193. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Симетралата на страната BC ја сече страната AB во точка E. Кружницата која минува низ точката E, темето C и средината F на странта BC ја сече страната CD во точката G. Докажи дека правите AD и FG се заемно нормални.

194. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи

$$\measuredangle BAC = 48^\circ, \measuredangle CAD = 66^\circ, \measuredangle CBD = \measuredangle DBA.$$

Определи го $\measuredangle BDC$.

195. Докажи дека разликата на квадратите на должините на страните на произволен паралелограм е помала од производот на должините на неговите дијагонали.

196. Во рамнината се дадени две различни точки O и P. Избираме паралелограм $ABCD$ за кој точката O е центар. Со M и N да ги означиме средините на отсечките AP и BP, соодветно. Точката Q е пресек на отсечките MC и ND. Докажи дека точките O, Q, P лежат на иста права и дека точката Q не зависи од изборот на паралелограмот $ABCD$.

197. Нека a, b, c, d се редоследно должините на страните во конвексниот четириаголник $ABCD$. Докажи дека ако $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, тогаш дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се заемно нормални.

198. На дијагоналите AC и BD на конвексен четириаголник $ABCD$ се избрани соодветно точките M и N така што $MB \| AD$ и $NA \| BC$. Докажи дека $MN \| CD$.

199. Во конвексен четириаголник $ABCD$ точките G_1, G_2, G_3, G_4 се редоследно тежишта на триаголниците BCD, ACD, ABD, ABC, а точките A_1, B_1, C_1, D_1 се централно симетрични на точките A, B, C, D во однос на G_1, G_2, G_3, G_4, соодветно. Докажи дека $ABCD$ е паралелограм ако и само ако $A_1B_1C_1D_1$ е паралелограм.

200. Даден е паралелограм $ABCD$ со остар агол во темето A. На правата AB избрана е точка G различна од B таква што $\overline{BC} = \overline{CG}$, а на правата BC точка H различна од B таква што $\overline{AB} = \overline{AH}$. Докажи, дека триаголникот DGH е рамнокрак.

201. Рамнокрак трапез кој нема прави агли поделен е со својата дијагонала на два рамнокраки триаголника. Определи ги аглите на трапезот.

202. Разликата на основите на рамнокрак трапез е $10\,cm$. Должината на неговиот крак е аритметичката средина на должините на основите. Определи ги должините на страните на трапезот ако односот на должината на висината на основите и поголемата основа е 2:3.

203. Во трапезот $ABCD$ со заемно нормални дијагонали познати се должините на осноите $\overline{AB}=4$ и $\overline{CD}=3$. Кракот BC со основата AB зафаќа агол од 60°. Определи ја неговата должина.

204. Даден е трапез со основи AB и CD. Докажи дека краците BC и AD се заемно нормални ако и само ако збирот на квадратите на должините на дијагоналите на трапезот е еднаков на збирот на квадратите на должините на основите на трапезот.

205. Даден е трапез $ABCD$ чии агли на основата AB се остри, а дијагоналите му се заемно нормални и се сечат во точката O. Полуправата OA ја сече кружницата со дијаметар BD во точката M, а полуправата OB ја сече лружницата со дијаметар AC во точката N. Докажи дека точките M, N, C и D лежат на една кружница.

206. Нека $ABCD$ е тангентен четириаголник во кој $\measuredangle DAB = \measuredangle ABC = 120^\circ$ и $\measuredangle CDA = 90^\circ$. Ако $\overline{AB}=1$, определи го периметарот на четириаголникот $ABCD$.

207. Нека P е точка во внатрешноста на триаголникот ABC. Нека D, E и F се подножјата на нормалите повлечени од P на правите BC, CA и AB соодветно. Ако четириаголниците $AEPF, BFPD$ и $CDPE$ се тангентни, докажи дка P е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC.

208. Околу четириаголник $ABCD$ е опишана кружница чиј дијаметар е дијагоналата AC. Докажи дека ортогоналните проекции на страните AB и CD врз дијагоналата BD имаат еднакви должини.

209. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$. Правите AB и CD се сечат во точката T (A е меѓу B и T, D е меѓу C и T). Аголот $\measuredangle ATC$ е еднаков на половина од разликата на централните агли кои припаѓаат над тетивите BC и DA. Докажи!

210. Пресекот на дијагоналите на конвексен четириаголник ги дели дијагоналите на четири отсечки. Докажи дека должините на овие отсечки рационални броеви ако должините на страните и должините на дијагоналите се рационални броеви.

211. Околу кружница се опишани триаголник и квадрат. Докажи дека должината на делот од периметарот на квадратот кој е внатре во триаголникот е поголема од должината на делот на квадратот кој е надвор од триаголникот.

212. Должината на едната дијагонала е еднаква на геометриската средина од должината на другата дијагонала и должината на страната на ромбот. Определи ги аглите на ромбот.

213. Точките E, F, G се соодветно средини на страните CD, DA, AB на паралелограмот $ABCD$. Кружницата опишана околу триаголникот DEF ја допира страната AB во точката G. Определи го однсот на должините на двете соседни страни на паралелограмот.

214. Нека a и b се должините на основите на трапезот. Докажи:
а) должината на паралелната отсечка на основите која трапезот го дели на два дела со еднакви плоштини е еднаква на $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$,
б) должината на средната линија на трапезот е еднаква на $\frac{a+b}{2}$,
в) должината на отсечката која е паралелна со основите и трапезот го дели на два слични трапези е еднаква на $\sqrt{ab}$,
г) должината на отсечката која минува низ пресекот на дијагоналите, е паралелна со основите и чии крајни точки се на краците на тапезот е $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

215. Должината на средната линија на трапезот е 4, а аглите при поголемата основа се 40° и 50°. Определи ги должините на основите ако растојанието меѓу нивните средини е еднакво на 1.

216. Над страните на триаголникот ABC се конструирани слични триаголници ABD, BCE и CAF ($k = \overline{AD} : \overline{DB} = \overline{BE} : \overline{EC} = \overline{CF} : \overline{FA}$, $\alpha = \measuredangle ADB = \measuredangle BEC = \measuredangle CFA$. Докажи дека средините на отсечките AC, BC, CD, EF се темиња на паралелограм, чиј еден агол е еднаков на α, а односот на должините на соодветните страни е k.

217. Дијагоналите на тетивниот четириаголник се заемно нормални и го делат на четири триаголници. Докажи дека висината на секој од тие триаголници и тежишната линија на нему спротивниот триаголник, повлечени од пресекот на дијагоналите, лежат на иста права.

218. Четири браќа живеат на имот во форма на рамнокрак трапез чија должина на поголемата основа е a, аголот при озновата е 50°, а голот меѓу дијагоналите е 76°. Нивните куќи се во темињата на трапезот. Решиле да направат бунар кој ќе биде еднакво оддалечен ос ите четири куќи, т.е. од темињата на трапезот. Колку треба бунарот да биде оддалечен од куќите? Дали бунарот може да се направи на имотот на браќата?

219. Во трапез $ABCD$ е впишана кружница. Односот на висината на трапезот и радиусот на опишаната кружница е еднаков на $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Определи ги аглите на овој трапез.

220. Острият агол на ромбот е еднаков на α. Под кој агол се гледа страната на ромбот од средината на спротивната стана? За кој ромб овој агол е најголем?

221. Во ромбот $ABCD$ аголот $\measuredangle BAD$ е остар. Подножјето на бисината од темето D ја дели страната AB на две отсечки со дожини x и y. Изрази ги должините на дијагоналите на ромбот $ABCD$ со помош на x и y.

222. Во ромб со должината на страната a и остар агол α е впишана кружница. Докажи дека збирот на квадратите на растојанијата од произволна точка на кружницата до темињата на ромбот е константен. Определи го овој збир?

223. Конвексен четириаголник со дијагоналите е поделен на четири триаголници чии впишани кружници се складни. Докажи, дека четириаголникот е ромб.

224. Во кружница со радиус 1 е впишан четириаголник $ABCD$, така што AD е дијаметар на кружницата. Докажи дека

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CD}=4.$$

9.3. КРУЖНИЦА И КРУГ

225. Де кружници надворешно се допираат во точката T. Едната заедничка надворешна тангента ги допира кружниците во точките A и B, а BC е дијаметарот на кружницата на која лежи точката B. Докажи дека точката T припаѓа на отсечката AC.

226. Кружниците k_1 и k_2 со радиуси r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$) внатрешно се допираат во точката P. Нека q е тангента на k_1, која ја допира во R и е паралелна со заедничкиот дијаметар на дадените кружници. Нека M и N се пресеците на q со k_2. Докажи дека PR е симетрала на $\measuredangle MPN$.

227. На дијаметарот AB на полукружница со центар O е избрана точка C, различна од A, B и O. Од точката C се повлечени две полуправи под еднакви агли на AB кои ја сечат полукружницата во точките D и E, различни од A и B. Во точката D е повлечена нормала ма полуправата CD која ја сече полукружницата во точката K. Докажи дека ако $D \neq E$, тогаш правите KE и AB се паралелни.

228. Даден е полукружница со дијаметар AB и на неа точки C и D такви што:

а) точката C припаѓа на лакот AD,
б) $\measuredangle CSD$ е прав, каде S е средина на отсечката AD.
Нека E е пресекот на правите AC и BD, а F е пресек на правите AD и BC. Докажи дека $\overline{EF} = \overline{AB}$.

229. Отсечката AD со точките B и C е поделена на три еднакви дела. Отсечките AB, BC, CD редоследно се дијаметри на кружниците k_1, k_2, k_3, со центри $P.R.S$, соодветно. Од точката A е повлечена тангента на кружницата k_3 и допирната точка е G. Тангентата AG отсекува на кружницата k_2 тетива EF. Определи ја dолжината на тетивата EF ако $\overline{AD} = 90\ cm$.

230. Точките A и B припаѓаат на кружницата k, а точката P припаѓа на помалиот лак AB. Нека Q и R се точки од k, различни од P, такви што $\overline{AP} = \overline{AQ}$ и $\overline{BP} = \overline{BR}$. Нека T е пресекот на правите AR и BQ. Докажи, дека правите PT и AB се заемно нормални.

231. Должините на страните на правоаголникот се однесуваат како $12:5$. Дијагоналите на правоаголникот го делат правоаголникот на четири триаголници. Во два од овие триаголници, кои имаат заедничка стрна се впишани кружници со радисуси r и r'. Определи го односот $r:r'$.

232. Точките A, B, C, D, E во дадениот редослед лежат на кружница чиј дијаметар е AE. Пресметај $\measuredangle ABC + \measuredangle CDE$.

233. Две прави допираат кружница во точките A и B. Ако радиусот на кружницата е еднаков на $20\ cm$, а $\overline{AB} = 10\ cm$, определи го аголот меѓу двете прави.

234. Допирните точки на тангентите повлечени од точката T на кружницата k се A и B. Нека C е точка на кружницата k, различна од B и таква што $\overline{AB} = \overline{AC}$. Докажи дека $\measuredangle TCB < 30^\circ$.

235. Дадена е отсечка AD со должина 3. Нека B и C $(C \neq A)$ се точки на кружницата со дијаметар AD такви што $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$. Пресметај ја должината на отсечката CD.

236. Нека k е кружница со дијаметар AB и t е тангентата на k во точката A. Нека $P \in k$ и N е ортогоналната проекција на точката P на правата t. Определи го $\measuredangle ABP$ за кои изразот $\overline{PN} + \overline{PB}$ има најголема можна вредност.

237. Дадена е кружница k со дијаметар AB и точка C која лежи на AB. Над отсечките AC и CB како над дијаметри се конструирани кружници k_1 и k_2. Нека p е права низ точката C, која кружницат k ја сече во точките M и N,

а кружниците k_1 и k_2 по втор пат ги сече во точките P_1 и P_2, соодветно. Докажи дека $\overline{P_1M} = \overline{P_2N}$.

238. Нека OA е дијаметар и OB е тетива на кружница k со радиус R , C е пресекот на правата OB и тангентата на k во точката A , T е точка на отсечката OB таква што $\overline{OT} = \overline{BC}$ и T' е проекцијата на T на OA . Изрази го $y = \overline{TT'}$ како функција од $x = \overline{OT'}$.

239. По внатрешната страна на обрач со радиус $2r$ се тркала без лизгање тркало со радиус r . Докажи дека дадена фиксна точка на тркалото опишува еден дијаметар на обрачот.

240. Кружниците k_1 и k_2 се сечат во точките A и B . Тангентата на кружницата k_2 повлечена во точката A ја сече кружницата k_1 во точката C , а тангентата на кружницата k_1 во точката A ја сече кружницата k_2 во точката D . Полуправа низ точката A која лежи внатре во $\measuredangle CAD$ ја сече кружницата k_1 во точка M , кружницата k_2 во точка N и кружницата опишана околу триаголникот ACD во точка P . Докажи дека $\overline{AM} = \overline{NP}$.

241. Две кружници не се сечат. Правата која минува низ нивните центри редоследно ги сече кружниците во точките A, A', B', B . Ако t е должината на делот од заедничката тангента меѓу допирните точки со кружниците, определи ја релацијата која ги поврзува должините $t, d(A,B)$ и $d(A',B')$. Определи ја аналогната врска за надворешната заедничка тангента.

242. Дадени се две кружници k_1 и k_2 кои немаат заедниччки точки. Заедничките надворешни тангенти t_1 и t_2 ја допираат кружницата k_1 во точките A_1 и A_2, а кружницата k_2 во точките B_1 и B_2. Заедничките внатрешни тангенти p_1 и p_2 ја допираат кружницата k_1 во точките C_1 и C_2, а кружницата k_2 во точките D_1 и D_2. Докажи дека растојанието меѓу правите A_1A_2 и C_1C_2 е еднакво на растојанито меѓу правите B_1B_2 и D_1D_2 .

243. Нека A е една од пресечните точки на кружниците k и k' . Од центарот O на кружницата k е повлечена полуправа која ја сече кружницата k' во точките P и P', редоследно. Нека AA' е дијаметар на кружницата k' .Докажи дека

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} .$$

244. Дадена е кружница и во неа тетива AB која е паралелна со дијаметарот MN . Нека t е тангента на кружницата во точката M и нека точките C и D се пресеците на правите NA и NB со правата t , соодветно. Докажи, дека

$$\overline{MC}\cdot\overline{MD}=\overline{MN}^2 .$$

245. Дадени се кружница k и тетива која ја дели нејзината внатрешност на два кружни отсечоци. Во нив се впишани кружници k_1 и k_2 кои однатре ја допираат кружницата k и дадената тетива ја допираат во иста точка од различните нејзини страни. Докажи дека односот на радиусите на кружниците k_1 и k_2 е константен, т.е. дека не зависи од положбата на заедничката допирна точка.

246. Нека AB е четвртина лак на кружница со центар во точката O и нека C , D се точки на тој лак, $\varphi=\measuredangle AOC$ и $\phi=\measuredangle AOD$. Нека E и F сеподножјата на нормалите повлечени од точките C и D на OB и OA, соодветно, а G е пресекот на правата OC со нормалата повлечена од D на OB, а H е пресекот на правите OB и FG. Ако H е средина на отсечката OE, определи го односот $\varphi:\phi$.

247. Во рамнината се дадени две кружници k_1 и k_2 на кои се повлечени двете заеднички внатрешни тангенти u,u' и двете надворешни заеднички тангенти v,v'. Докажи дека пресечните точки на тангентите $u\cap v, u\cap v', u'\cap v, u'\cap v'$ припаѓаат на иста кружница.

248. Нека AB и CD се дијаметри на кружница k со центар S и нека $\measuredangle BAD=28^\circ$. Кружницата со центар A која минува низ точката S ја сече кружницата k во точките E и F, така што точките D и F се на иста страна на правата AB. Определи го $\measuredangle CFS$.

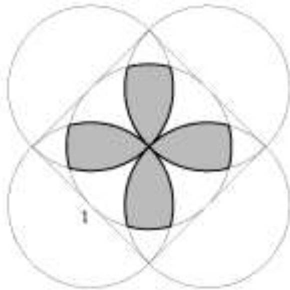
249. Точките A,B,C се центри на три кружници кои се допираат надворешно. Притоа $\overline{AB}=13\,cm$, $\overline{BC}=8\,cm$ и $\overline{CA}=9\,cm$. Во допирните точки на кружниците се повлечени заедничките тангенти. Докажи дека центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC е пресекот на овие три тангенти. Определи го растојанието од пресекот на тангентите до точката A.

250. Даден е четириаголник $ABCD$. Опишаната кружница околу триаголникот ABC ги сече страните CD и DA соодветно во точките P и Q, а опишаната кружница околу триаголникот CDA ги сече страните AB и BC соодветно во точките R и S. Правите BP и BQ ја сечат правата RS во точките M и N, соодветно. Докажи дека точките M,N,P,Q припаѓаат на иста кружница.

251. Точките A,B,C се колинеарни и точката B е меѓу точките A и C. Од иста страна на правата AC се конструирани три полукружици со дијаметри $\overline{AB}=2R$, $\overline{BC}=2r$ и $\overline{AC}$. Определи го радиусот на кружницата која ги допира овие три полукружници.

252. Во рамнината се дадени кружница k и точка K. За било кои различни точки P и Q на k, кружницата k' минува низ P,Q и K. Нека M е пресекот на тангентата на кружницата k' во точката K и правата PQ. Опиши го геометриското место на точки M кога P и Q се менуваат на кружницата k.

253. Нека OAB е четвртина од круг со центар O и радиус 1. Над отсечките OA и OB како над дијаметри се конструирани полукружници во внатрешната страна на дадената четвртина од кругот. Определи го радиусот на кружницата која ги допира двете полукружници и лакот AB.

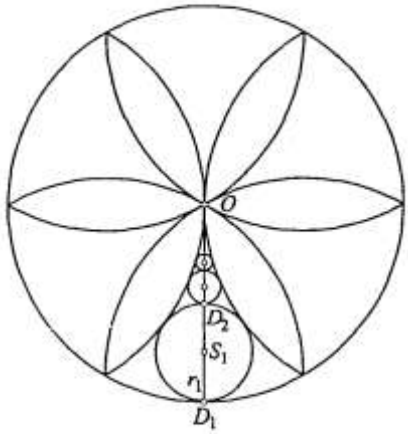


254. Во квадрат со должина на страна 1 е впишана кружница, а над неговите страни како над дијаметри се конструирани четири кружници (цртеж десно). Определи го периметарот на сивата фигура прикажана на дадениот цртеж.

255. Кружниците k_1 и k_2 со радиуси $r_1 = 6$ и $r_2 = 3$ се допираат надворешно. Двете кружници внатрешно ја допираат кружницата k со радиус $r = 9$. Заедничката надворешна тангента на крижниците k_1 и k_2 ја сече кружницата k во точките P и Q. Определи ја должината на тетивата PQ.

256. Кружниците k_1 и k_2 со радиуси r и R соодветно ($r < R$) внатрешно се допираат во точката A. Нека p е права паралелна со нивната заедничка тангента, B е едната пресечна точка на p и k_1 и C е пресечната точка на p и k_2 така што B и C се наоѓаат на иста страна на правата која ги поврзува центрите на кружниците. Докажи, дека радиусот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$ не зависи од правата p и изрази го овој радису со помош на r и R.

257. На цртежот десно внатре во кружница со центар O и радиус 1 се нацртани лаци на уште шест кружници со ист радиус. Во делот меѓу два соседни „листа“ е впишана низа кружници со радиуси $r_1, r_2, \ldots$ кои со почетната кружница и соседните кружници се допираат редоследно во точките D_1, $D_2, \ldots$ За секој n пресметај го радиусот r_n и должината $d_n = \overline{OD_n}$.



258. Околу кружница со радиус 1 се нацртани шест кружници со радиус r та-

ка што секоја од нив ги допира централната кружница (со радиус 1) и две соседни кружници со радиус r. Околу овие кружници се нацртани уште шест кружници со радиус R така што секоја од нив надворешно допира две кружници со радиус r и две кружници со радиус R. Определи ги радиусите r и R.

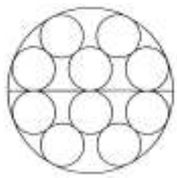
259. Нека k_1 и k_2 се кружници со дијаметри AP и AQ и T е втората пресечна точка на k_1 и k_2. Нека Q' е втората пресечна точка на кружницата k_1 и правата AQ, а P' е втората пресечна точка на кружницата k_2 и правата AP. Кружницата k_3 минува низ точките T, P и P', а кружницата k_4 минува низ точките T, Q и Q'. Докажи дека правата на која лежи заедничката тетива на кружниците k_3 и k_4 минува низ точката A.

260. На горната половина на кружница со центар O се наоѓаат точките A, B, C, D, E така што

$$\measuredangle AOB = 60^\circ,\ \measuredangle AOC = 90^\circ,\ \measuredangle AOD = 120^\circ,\ \measuredangle AOE^\circ = 180.$$

Ако P е точка на OA таква што $\overline{OP} : \overline{PA} = \overline{PA} : \overline{OA}$, определи ги меѓусебните односи на

$$\overline{PA}^2, \overline{PB}^2, \overline{PC}^2, \overline{PD}^2, \overline{PE}^2.$$



261. Десет кружници со радиус 1 се поставени внатре во кружница со радиус R како што е прикажано на цртежот десно. Определи го радиусот R.

9.4. ПЛОШТИНИ НА РАМНИНСКИ ФИГУРИ

262. Докажи дека два правоаголни триаголници со еднакви плоштини и еднакви периметри имаат еднакви соодветни катети.

263. Во внатрешноста на триаголникот ABC е дадена точка T. Правите AT, BT, CT го делат дадениот триаголник на шест мали триаголници. Докажи дека најмалку два од овие триаголници имаат плоштина која не е поголема од една шестина од плоштината на триаголникот ABC.

264. Докажи дека триаголник чии должини на страни се прости броеви не може да има целобројна плоштина.

265. Периметарот на правоаголен триаголник изнесува 18, а неговата плоштина 9. Колкава е должината на хипотенузата на тој триаголник?

266. Тежишните линии го делат триаголникот на шест триаголници. Околу секој од овие триаголници е опишана кружница. Ако со $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ ги озна-

чиме плоштините на триаголниците почнувајќи од произволен триаголник и одејќи во насока на движењето на стрелката на часовникт, тогаш

$$\frac{P_1}{P_2}\cdot\frac{P_3}{P_4}\cdot\frac{P_5}{P_6}=1.$$

Докажи!

267. Во правоаголник $ABCD$ се дадени точка E на страната BC и точка F на страната CD. Ако триаголникот AEF е рамностран, докажи дека

$$P_{ECF}=P_{ABE}+P_{AFD}.$$

268. Триаголник со плоштина $1,5\,cm^2$ е вписан во кружница со радиус $1,25\,cm$ и притоа една страна на триаголникот е дијаметарот на кружницата. Определи ги должините на страните на овој триагоилник.

269. Докажи дека плоштината на правоаголниот триаголник е еднаква на производот на растојанијата на крајните точки на хипотенузата до нејзината допирна точка со вписаната кружница во триаголникот.

270. Околу кружница со радиус $r=3\,cm$ е опишан рамнокрак триаголник со агол при врвот еднаков на 120°. Определи ја плоштината на овој триаголник.

271. За природните броеви a,b,c,d важи

$$a+b=c \text{ и } a+d=2c.$$

Докажи, дека постои правоаголен триаголник со плоштина $abcd$ и чии должини на страни се изразени со природни броеви.

272. Должината на едната страна на триаголникот ABC е еднаква на $20\,cm$, а должините на тежишните линии кои соодветствуваат на другите две страни се $24\,cm$ и $18\,cm$. Определи ја плоштината на триаголникот ABC.

273. Докажи дека секоја права која минува низ центарот на вписаната кружница на триаголникот ги дели периметарот и плоштината во еднаков однос.

274. Должините на катетите на правоаголен триаголник се $8\,cm$ и $6\,cm$. Во внатрешноста на триаголникот е дадена точка T која од пократката катета е оддалечена $1\,cm$, а од подолгата $2\,cm$. Определи ја оддалеченоста на точката T до хипотенузата? Определи ја должината на висината над хипотенузата.

275. Даден е триаголник ABC $(\overline{AC}>\overline{BC})$. Изрази ја плоштината на триаголникот определен со страната AB, симетралата на страната AB и симетралата на $\measuredangle ACB$ со помош на должините на страните на триаголникот.

276. Страните AB,BC,CA на триаголникот ABC се продолжени редоследно преку точките A,B,C до точките D,E,F, соодветно. Така што

$$\overline{BD} = 2\overline{AB}, \ \overline{CE} = 2\overline{BC}, \ \overline{AF} = 2\overline{CA}.$$

Определи го односот на плоштините на триаголниците ABC и DEF .

277. Над страните на триаголникот ABC се конструирани полукругови чии плоштини се еднакви на $9\pi, 16\pi$ и 25π. Определи ја плоштината на триаголникот ABC.

278. Нека R е точка во внатрешноста на триаголникот ABC. Правата низ R паралелна на страната AB соодветно ги сече страните AC и BC во точките M и N, правата низ R паралелна на страната AC соодветно ги сече страните BC и AB во точките E и F, а правата низ R паралелна на BC соодветно ги сече страните AB и AC во точките K и P. Плоштините на триаголниците NER, PMR и FKR се a^2, b^2 и c^2, соодветно. Определи ја плоштината на триаголникот ABC.

279. Нека S е точка на страната AB на остроаголниот триаголник ABC и нека P и Q се центрите на кружниците опишани околу триаголниците ASC и BSC. Определи ја положбата на точката S (на страната AB) така што триаголникот PQS има најмала можна плоштина.

280. Во триаголник ABC аголот при темето A е еднаков на 60°, а аголот при темето B е еднаков на 45°. Ако должината на страната AB е еднаква на $8\,cm$ определи ги периметарот и плоштината на триаголникот ABC.

281. Точката M припаѓа на катетата BC на правоаголниот триаголник ABC така што важи $\overline{BM} = 2\overline{MC}$. Ако K е средината на хипотенузата AB докажи дека $\measuredangle BAM = \measuredangle MKC$. Определи го односот на плоштините на триаголниците MKC и ABC.

282. Во триаголникот ABC е впишана кружница со центар S, која ги допира страните BC, CA, AB во точките D, E, F, соодветно. Ако $\overline{AE} = 3\,cm$, $\overline{CS} = 2\sqrt{7}\,cm$ и аголот при темето A е еднаков на 60°, пресметај ја плоштината на триаголникот.

283. Определи ја максималната плоштина која може да ја има триаголник со периметар $20\,cm$ и должина на една страна $8\,cm$.

284. Нека E е средина на страната CD на квадратот $ABCD$. Точката F е подножје на нормалата повлечена од темето B на AE. Докажи дека должините на страните на триаголникот EFB се однесуваат како $3:4:5$. Растојанието од темето C до правата BE е еднакво на $4\,cm$. Определи ја плоштината на квадратот $ABCD$.

285. Нека n е природен број. Квадратот $ABCD$ е поделен на n^2 правоаголници со правите $p_1, p_2, ..., p_{n-1}$ кои се паралелни на страната AB и правите $q_1, q_2, ..., q_{n-1}$ кои се паралелни на страната BC. Страните AB и CD припаѓаат на правите p_0 и p_n, соодветно, а страните BC и AD припаѓаат на правите q_0 и q_n, соодветно. Правата p_i е меѓу правите p_{i-1} и p_{i+1}, а правата q_i е меѓу правите q_{i-1} и q_{i+1}, за $i = 1, 2, ..., n-1$. Нека A_{ij} е правоаголникот ограничен со правите $p_{i-1}, p_i, q_{j-1}, q_j$, за $1 \le i, j \le n$.

Ако е познато дека правоаголниците A_{ij} и A_{ji} имаат еднакви плоштини за секој пар индекси (i, j), $1 \le i < j \le n$, докажи дека A_{ii} е квадрат за секој $i = 1, 2, ..., n$.

286. Нека $ABCD$ е правоаголник со центар O и нека точките P и Q се на дијагоналата AC и се такви што $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$. Ако правата PB ја сече страната AD во точката M, а правата BQ ја сече страната CD во точката N, докажи дека плоштините на триаголниците MPO и NQO се еднакви.

287. Симетралата на хипотенузата на правоаголниот триаголник отсекува триаголник чија плоштина е три пати помала од плоштината на почетниот триаголник. Определи ги острите агли на почетниот триаголник.

288. Даден е рамнокрак триаголник ABC чиј агол при врвот A е еднаков на 120°. Нормалата од A на кракот на триаголникот го дели триаголникот на два триаголника од кои тапоаголниот има радиус на впишана кружница 1. Определи ја плоштината на триаголникот ABC.

289. Во рамнокрак триаголник радиусот на впишаната кружница е еднаков на R, а радиусот на кружницата која ја допира впишаната кружница и двата крака е r. Определи ги периметарот и плоштината на триаголникот.

290. Даден е рамнокрак правоаголен триаголник чии катети се со должина 10. Определи ја најголемата можна плоштина на правоаголникот чија една страна лежи на хипотенузата, а темињата на спротивната страна припаѓаат на катетите.

291. Должината на една висина на триаголникот е еднаква на збирот на должините на другите две висини. Изрази ја должината на најкратката страна на триаголникот со помош на должините на другите две страни.

292. На страните AB и AD на паралелограмот $ABCD$ редоследно се земени точки E и R такви што $EF \parallel BD$. Докажи дека триаголниците BCE и CDF имаат еднакви плоштини.

293. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ кој не е паралелограм. Нека правата која минува низ средините на дијагоналите на четириаголникот ги сече страните AB и CS во точките M и N, соодветно. Докажи дека триаголниците ABN и CDM имаат еднакви плоштини.

294. Во паралелограмот $ABCD$ точките $P.Q.R.S$ се средини на страните AB, BC, CD, DA, соодветно. Правите AE, BS, CP, DQ се сечат и формираат четириаголник.
а) Докажи дека овој четириаголник е паралелограм.
б) Определи го односот на плоштините на овој паралелограм и паралелограмот $ABCD$.

295. Во трапез $ABCD$ со плоштина 25 и основи AB и CD, точката P е пресек на дијагоналите. Ако плоштината на триагоникот CDP е еднаква на 9, определи ја плоштината на триаголникот ABP.

296. Во рамнокрак триаголник должината на основата е a, должината на кракот е b, должината на висината на основата е h и важи $\frac{a}{2}+h \geq b\sqrt{2}$. Определи ги аглите на триаголникот. Определи ја плоштината на триаголникот ако $b=8\sqrt{2}$.

297. Во рамнината се дадени различните точки A и B. Докажи дека множеството точки M такви што

$$|\overline{MA}^2-\overline{MB}^2|=kP_{\triangle MAB}$$

каде $k>0$ е дадена константа се состои од две прави.

298. Паралелно на страните на рамностран триаголник се повлечени прави кои триаголникот го делат на три складни ромба, три складни трапези и еден рамностран триаголник. Определи го односот на плоштината на почетниот триаголник и плоштината на едниот трапез, ако се знае дека плоштината на добиениот триаголник е трипати поголема од плоштината на еден од ромбовите.

299. Во триаголникот $A_1A_2A_3$ нека a_1, a_2, a_3 се должините на неговите страни спротивни на темињата A_1, A_2, A_3 соодветно и h_1, h_2, h_3 се должините на висините повлечени од темињата A_1, A_2, A_3, соодветно. Ги разгледуваме сите броеви од видот $a_1h_i+a_2h_j+a_3h_k$ каде (i, j, k) е произволна пермутација на множеството $\{1,2,3\}$. Определи го најмалиот од овие броеви и изрази го со помош на плоштината P на триаголникот $A_1A_2A_3$.

300. Даден е правоаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB}:\overline{AD}=2:3$. Нека E е точка на страната AD таква што $\overline{AE}=\overline{AB}$. Точката F припаѓа на полуправата AB и

е таква што триаголникот AFE и четириаголникот $CDEF$ имаат еднакви плоштини. Определи го односот $\overline{AB}:\overline{BF}$.

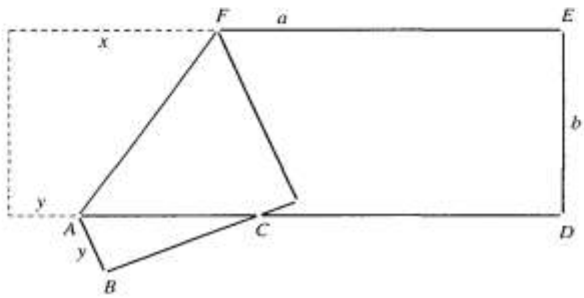
301. Должините на страните и дијагоналите на еден правоаголник се изразени со природни броеви. Докажи, дека неговата плоштина е изразена со природен број делив со 12.

302. Точките M и N припаѓаат соодветно на страните AC и BC на триаголникот ABC . Точката O е пресек на отсечките AN и BM . Определи ја плоштината на триаголникот CMN ако плоштините на триаголниците $OMA, OAB,$ OBN се еднакви на 2, 3, 4, соодветно.

303. Квадрат и рамностран триаголник се впишани во кружница со радиус 1 така што имаат едно заедничко теме. Определи ги плоштината и периметарот на заедничкиот дел на квадратот и триаголникот.

304. Плоштината на правоаголникот е $12\,cm^2$. Ако остриот агол меѓу неговите дијагонали се преполови, плоштината изнесува $7{,}5\,cm^2$. Определи ја должината на дијагоналата на правоаголникот.

305. Лист хартија со страни со должини a и b е превиткан како на цртежот десно. Определи ја плоштината на триаголникот ABC , ако $a=8, b=3, x=3$ и $y=1$.



306. Даден е квадрат $ABCD$. Во рамнината на овој квадрат определи множество S од точки T такви што

$$P_{\triangle ABT}+P_{\triangle CDT}=P_{\triangle BCT}+P_{\triangle DAT} .$$

307. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна a . Темињата A и C се центри на две кружници кои минуваат низ точките B и D . Нека M и N се пресечните точки на овие кружници со дијагоналата AC . Определи ја плоштината на четириаголникот $BMDN$.

308. Докажи дека од сите четириаголници со зададени должини на страни a,b,c,d најголема плоштина има четириаголникот околу кој може да се опише кружница.

309. Во надворешноста на квадратот $ABCD$ земена е точка O таква што $\overline{OA}=\overline{OB}=5\,cm$ и $\overline{OD}=\sqrt{13}\,cm$. Определи ја плоштината на квадратот $ABCD$.

310. Определи ја плоштината на ромб со должина на страна $8\,cm$ и тап агол еднаков на 150°.

311. Во круг со центар S и радиус $r=2\,cm$ се повлечени два радиуси SA и SB, кои зафаќаат агол од 45°. Нека K е пресекот на правата AB и нормалата повлечена на правата AS во точката S, а точката L е подножјето на висината на триаголникот ABS повлечена од темето B. Определи ја плоштината на трапезот $SKBL$.

312. Во рамнокрак трапез должината на средната линија е m, а дијагоналите се заемно нормални. Определи ја плоштината на трапезот.

313. Висината на рамнокрак трапез е еднаква на h, а плоштината на трапезот е h^2. Под кој агол се сечат дијагоналите на трапезот?

314. Околу кружница е опишан рамнокрак трапез и во неа е впишан правоаголен рамнокрак триаголник. Определи го односот на должината на кракот на трапезот и должината на хипотенузата на триаголникот, ако односот на нивните плоштини е 8.

315. Докажи дека множеството точки во рамнината за кои односот $k, (k>0, k\neq 1)$ на оддалеченоста од две фиксни точки T_1 и T_2 е константен, е кружница. Изрази го радиусот на оваа кружница како функција на растојанието меѓу точките T_1 и T_2 и бројот k.

316. Хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC има должина 6. Квадрат е впишан во овој триаголник така што двете темиња лежат на хипотенузата, а другите две на катетите на триаголникот.
а) Докажи дека плоштината на квадратот не е поголема од 4.
б) За каков триаголник оваа плоштина е еднаква на 4?

317. Нека E и F се точки на страната AB на правоаголникот $ABCD$ такви што $\overline{AE}=\overline{EF}$. Нормалата на AB во точката E ја сече дијагоналата AC во точка G, а отсечките DF и BG се сечат во точка H. Докажи дека плоштините на триаголниците FBH и GHD се еднакви.

318. На страната AB на квадратот $ABCD$ е дадена точка E таква што $\overline{AE}=3\overline{EB}$, а на страната AD е дадена точка F таква што $\overline{AF}=5\overline{FD}$. Нека K е пресекот на правите DE и CF, L е пресекот на правите DE и BF, а M е пресекот на правите BF и CE. Докажи дека збирот на плоштините на триаголниците EML и CDK е еднаков на збирот на плоштините на триаголниците FLK и BCM.

319. Во внатрешноста на триаголникот ABC со плоштина P избрана е точка T. Правите кои минуваат низ точката T и се паралелни со страните на триаголникот го делат овој триаголник на три паралелограми и три триаголници со плоштини P_1, P_2, P_3. Изрази ја плоштината P со помош на плоштините P_1, P_2, P_3.

320. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник и нека P и Q се соодветно точки на страните BC и CD такви што $\measuredangle BAP = \measuredangle DAQ$. Докажи дека триаголниците ABP и ADQ имаат еднакви плоштини ако и само ако отсечката која ги поврзува нивните ортоцентри е нормална на правата AC

321. Во рамнокрак трапез е впишан квадрат така што пократката основа на трапезот е страна на квадратот, а двете други темиња на квадратот лежат на поголемата основа на трапезот. Квадратот покрива 25% од површината на трапезот. Определи го односот на основите на трапезот.

322. Во делтоид со должини на дијагонали $24\,cm$ и $8\,cm$ е вписан правоаголник чии страни се паралелни со дијагоналите. Определи ги димензиите на така вписаниот правоаголник кој има најголема плоштина.

323. Нека $A_1A_2A_3A_4$ е конвексен четириаголник и S е пресекот на неговите дијагонали. Со s_k да ги означиме плоштините на триаголниците A_kSA_{k+1}, $(A_5 = A_1),\ k = 1,2,3,4$. Докажи дека

$$s_2^2 = s_1s_3 \text{ и } 2s_4 = s_1 + s_4$$

ако и само ако $A_1A_2A_3A_4$ е паралелограм.

324. Во крукружница со центар S и радиус $r = 2\,cm$ се повлечени радиусите SA и SB, така што аголот меѓу нив е еднаков на 45°. Нека K е пресекот на правата AB и нормалата повлечена на правата AS во точката S, а точката L е подножјето на висината на триаголникот ABS повлечена од темето B. Определи ја плоштината на трапезот $SKBL$.

325. На страните AB и BC на триаголникот ABC се дадени точките P и Q, соодветно. Отсечките AQ и CP се сечат во точката O. Плоштините на триаголниците $COP,\ AOC,\ APO$ се $1\,cm^2,\ 2\,cm^2,\ 3\,cm^2$, соодветно. Определи ја плоштината на четириаголникот $OPBQ$.

326. Должината на страната на квадратот е $6\,cm$. На страните AB и AD се дадени точки K и L такви што $\overline{AK} = 2\,cm$ и $\overline{AL} = 3\,cm$. Во квадратот е вписан трапез со основа KL. Определи ја најголемата можна плоштина на вписаниот трапез.

327. Два складни правоаголници се поставени така што нивните страни се сечат во 8 точки. Докажи дека плоштината на нивниот пресек е поголема од половина плоштината на секој од правоаголниците.

328. Четирите кружници со радиус a со центри во темињата на квадратот со страна a, го делат тој квадрат на девет области. Определи ја плоштината на секој од делбените делови ако е дадена плоштината Q на квадратот со страна a, плоштината K на кругот со радиус a и плоштината T на рамностран триаголник со страна a.

329. Конвексните четириаголници $ABCD$ и $AECF$ се впишани во иста кружница. Изрази го односот на нивните плоштини со помош на должините на нивните страни.

330. Старите Египќани плоштината на четириаголникот ја пресметувале според формулата $P=\frac{(a+c)(b+d)}{4}$, каде a,b,c,d се редоследно должините на страните AB,BS,CD,DA на четириаголникот $ABCD$. Докажи дека оваа формула дава резултат кој е поголем или еднаков на вистинската плоштина на четириаголникот. Во кој случај оваа формула е точна?

331. Даден е четириаголник $ABCD$ со агли $\alpha=60^\circ$, $\beta=90^\circ$, $\gamma=120^\circ$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точка S при што ажи $2\overline{BS}=\overline{SD}=2d$. Од средината P на дијагоналата AC повлечена е нормала PM на дијагоналата BD, а од точката S нормала SN на PB. Докажи дека:
а) $\overline{MS}=\overline{NS}=\frac{d}{2}$
б) $\overline{AD}=\overline{DC}$,
в) $P_{ABCD}=\frac{9d^2}{2}$.

332. Нека E е средината на страната AB на квадратот $ABCD$ и нека P е пресекот на отсечката DE и дијагоналата AC. Определи ја плоштината на триаголникот AEP, ако должината на страната на квадратот е $2\,cm$.

333. Периметарот на правоаголен триаголник е $14\,cm$. Над секоја страна кон надвор е конструиран квадрат. Збирот на плоштините на сите квадрати ее еднаков на $72\,cm^2$. Определи ја плоштината на правоаголниот триаголник.

334. За паралелограмот $ABCD$ важи $\overline{AB}=8\,cm$, $\overline{AC}=8\sqrt{3}\,cm$ и $\measuredangle CAB=30^\circ$. Определи ја плоштината на паралелограмот $ABCD$.

335. На отсечката AB е избрана точка M, а потоа од иста страна на отсечката AB се конструирани рамнострани триаголници AMD и MBC. Докажи дека

четириаголникот $ABCD$ има најмала плоштина ако M е средина на отсечката AB.

336. Нека $ABCD$ е паралелограм и нека P и Q се средините на страните BC и CD, соодветно. Докажи дека плоштината на триаголникот APQ е еднаква на $\frac{3}{8}$ од плоштината на паралелограмот.

337. Околу даден правоаголник со должини на страни a и b сакаме да опишеме правоаголник со плоштина m^2. За кои вредности на m задачата има решение?

338. Даден е разностран триаголник со должина на една страна $\overline{AB}=16\,cm$ и висина повлечена кон таа страна $12\,cm$. Во триаголникот впиши правоаголник со максимална плоштина така што едната негова страна ќе лежи на страната AB, а другите две темиња ќе лежат на другите две страни на триаголникот.

339. Во кружница со радиус $r=10\,cm$ се повлечени две паралелни тетиви со должини $16\,cm$ и $12\,cm$. Ако центарот на кружницата се наоѓа внатре во трапезот определен со дадените тетиви, определи ги неговите плоштина и периметар.

340. Над страните на $\triangle ABC$ со плоштина P се конструирани ромбови $ABDE$, $BCGF$ и $CAIH$ така што

$$\measuredangle ABE=\measuredangle BAC,\ \measuredangle BCG=\measuredangle CBA,\ \measuredangle CAI=\measuredangle ACB\,.$$

Докажи, дека збирот на плоштините на трите ромба е поголем или еднаков на $6P$ и дека знак за равенство важи ако и само ако $\triangle ABC$ е рамностран.

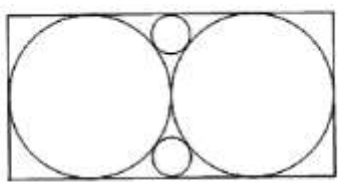
341. Во делтоид со дијагонали $24\,cm$ и $8\,cm$ е вписан правоаголник чии страни се паралелни со дијагоналите на делтоидот. Определи ги должините на страните на правоаголникот кој има најголема можна плоштина.

342. Во круг е вишан четириаголник $ABCD$ чии дијагонали се заемно нормални. Докажи дека плоштината на кругот е

$$P=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2)\pi\,,$$

каде a,b,c,d се должините на отсечките од пресекот на дијагоналите до темињата A,B,C,D, соодветно.

343. Во правоаголник се впишани две мали и две големи кружници како што е прикажано на цртежот десно. Радиусот на големата кружница е еднаков на $10\,cm$. Определи ја плоштината на делот од правоаголникот кој не е покриен со круговите.



344. Над тетивата AB на кружницата $k(S,r)$ од иста страна на тетивата се конструирани два рамнокраки триаголници чија заедничлка основа е тетивата AB. На едниот третото теме е S, а на другиот точка C на кружницата. Ако односот на нивните плоштини е $3:(2\sqrt{3}+3)$, определи го аголот при врвот на триаголникот ABS.

345. Во круг се повлечени два дијаметри кои се сечат под агол од 30°. Крајните точки на тие радиуси определуваат две тетиви (различни од дијаметрите) кои се разликуваат за $2\sqrt{2}$. Определи ја плоштината на кругот.

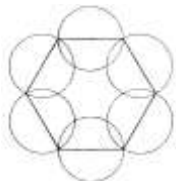
346. Две кружници со дијаметри $6\,cm$ и $18\,cm$ надворешно се допираат. Определи ја плоштината на фигурата ограничена со кружниците и една нивна надворешна заедничка тангента.

347. Седум кружници со еднакви радиуси се сместени во поголема кружница како на цртежот десно. Ако радиусот на малата кружница е 1, определи ја плоштината на осенчениот дел.

348. Тангентите повлечени од точката B на кружница со радиус r ја допираат кружницата во точките A и C. Определи ја плоштината на фигурата определена со тангентите BC, BA и помалиот кружен лак AC ако $\measuredangle ABC = 60^\circ$.

349. На цртежот десно се прикажани три кругови, правилен шестаголник и рамностран триаголник.
а) Определи ги односите на плоштините на трите кругови.
б) Определи го односот на плоштините на шестаголникот и триаголникот.

350. Пресметај ја плоштината на делот од правилниот шестаголник прикажан на цртежот десно кој се наоѓа надвор од кружниците.



351. Во кружен исечеок е впишан круг. Определи го односот на плоштините на кружниот исечок и впишаниот круг ако однсот на нивните радиуси е $3:1$.

352. За должините a,b,c на страните на триаголникот важи $a \geq b \geq c$. Темињата на триаголникот се центри на три круга со ненегативни радисуи. Никои два круга немаат заеднички внатрешни точки, ниту пак опфаќаат некое од преостанатите две темиња на триаголникот. Определи ја најголемата можна плоштина која ја покриваат овие три круга.

353. Квадрат е впишан во кружен исечок OAB со централен агол $\alpha < \frac{\pi}{2}$ така што две темиња му лежат на радиусот OA, третото на лакот AB и четвртото на

радиусот OB. Определи го односот на плоштините на квадратот и кружниот исечок.

354. За точката P во внатрешноста на триаголникот ABC ќе велиме дека е сјајна ако од неа може да се повлечат точно 27 полуправи кои ги сечат страните на триагоникот ABC така што со нив триаголникот е поделен на 27 помали триаголници со еднакви плоштини. Определи го бројот на сите сјајни точки на триаголникот ABC.

355. Плоштината на триаголникот ABC е $3+\sqrt{3}$. Определи ја плоштината на кругот опишан околу триаголникот ABC, ако должините на лаците AB, BC, CA се однесуваат како $5:3:4$.

356. Цветна леа во облик на круг е поделена со три тетиви на четири дела. Тетивите формираат правоаголен триаголник кај кој еден агол е еднаков на 30°. Во секој дел е засаден друг вид цвеќе – лалиња, нарциси, каранфили и ружи. Во делот со најмала плоштина се засадени ружи. Определи ја плоштината на делот засаден со ружи ако најмалата тетива е со должина $6\,m$.

9.5. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЧИ

357. Во внатрешноста на $\measuredangle ABC$ е дадена кружница k_1. Конструирај кружница k_2 која ги допира краците на $\measuredangle ABC$ и кружницата k_1.

358. Дадена е кружница и еден нејзин дијаметар AB. Нека T е произволна точка која припаѓа на надворешноста на кружницата. Само со помош на еден линијар повлеи нормала од точката T на дијаметарот AB.

359. Три кружници со непознати центри, во парови се допираат во точките A, B, C. Само со помош на линијар конструирај ги центрите на овие кружници.

360. Конструирај правоаголен триаголник за кој се познати висината h_c повлечена кон хипотенузата и радиусот на вписаната кружница.

361. Контруирај триаголник ABC ако се дадени периметарот $a+b+c$, аголот α и висината h_a.

362. На страната AC на $\triangle ABC$ е дадена точка T таква што $\overline{CT} \leq \frac{1}{3}\overline{AC}$. Конструирај две прави кои минуваат низ точката T и кои $\triangle ABC$ го делат на три дела со еднакви плоштини.

363. Во рамнината се дадени три неколинеарни точки A, M, N. Конструирај квадрат така што едно негово теме е точката A, а две страни кои не го содржат лежат на прави кои минуваат низ точките M и N.

364. Конструирај трапез $ABCD$ ако се дадени збирот на должините на основите $\overline{AB}+\overline{CD}$, должините на дијагоналите $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ и аголот при темето A.

365. Даден е триаголник ABC. Во неговата внатрешност определи точка T таква што производот на растојанијата од T до страните на триаголникот е максимален.

366. Дадена е кружница $k(S,r)$ и точка T во нејзината внатрешност. Определи го геометриското место на средините на тетивите кои минуваат низ точката T.

9.5. МНОГУАГОЛНИК

367. Точно три агли на конвексен многуаголник се тапи. Колку најмногу страни може да има овој многуаголник?

368. За кој $n \in \mathbb{N}$ постои агол α и конвексен $n-$аголник со агли $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, ..., n\alpha$.

369. Даден е правилен 2013-аголник $A_1A_2...A_{2013}$. Нека S е пресекот на дијагоналите A_1A_4 и A_3A_5. Определи го $\measuredangle A_3SA_4$.

370. Во конвексен петаголник точките K, L, M, N се средини на страните AB, BC, CD, DE, соодветно. Докажи дека отсечката определена со средините на отсечките KM и LN е паралелна на страната AE и нејзината должина е еднаква на една четвртина од должината на AE.

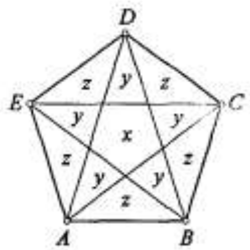
371. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник. Со транслации за векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ добиваме четири нови петаголници. Докажи дека меѓу овие пет петаголници постојат два кои имаат барем една заедничка внатрешна точка.

372. Даден е правилен петаголник $ABCDE$. Правите BC и DE се сечат во точката F. Определи го $\measuredangle BEF$.

373. На цртежот е даден правилен петаголник во кој се повлечени дијагоналите. Докажи дека задебелените отсечки имаат еднаква должина.

374. Даден е конвексен петаголник $ABCDE$. Нека M, N, P, Q се средините на страните AB, BC, CD, DE, соодветно и нека R и S се средините на отсечките MP и QN. Докажи дека $\overline{SR} = \frac{1}{4}\overline{AE}$.

375. Одделни делови на правилен петаголник $ABCDE$ имаат плоштини означени со x, y, z (види цртеж десно). Ако е даден плоштината x, определи ги плоштините y и z. Колкава е плоштината на петаголникот $ABCDE$?



376. Од средината на секоја страна на остроаголен триаголник се повлечени нормали на другите две страни. Докажи дека плоштината на шестаголникот ограничен со овие нормали е еднаква на половина од плоштината на триаголникот.

377. Нека $ABCDEF$ е правилен шестаголник со центар O. Нека M и N се средините на страните CD и DE, а L е пресекот на правите AM и BN. Докажи
а) $P_{ABL} = P_{DMLN}$,
б) $\measuredangle ALD = \measuredangle OLN = 60^\circ$,
в) $\measuredangle OLD = 90^\circ$.

378. Ако во правилен шестаголник $ABCDEF$ ги повлечеме шесте негови пократки дијагонали, тие определуваат шестаголник $GHIJKL$. Докажи дека шестаголникот $GHIJKL$ исто така е правилен и пресметај колку неговата плоштина и пеиметар се помали од плоштината и периметарот на почетниот шестаголник $ABCDEF$.

379. Должината на страната на правилен шестаголник $ABCDEF$ е еднаква на a. Правите AB и CD се сечат во точката T. Определи ја должината на отсечката FT.

380. Даден е шестаголник $ABCDEF$ чии дијагонали AD, BE, CF се сечат во една точка која е средина секоја од овие дијагонали. Докажи дека плоштината на шестаголникот $ABCDEF$ е двапати поголема од плоштината на триаголникот ACE

381. Над страните AC и BC на рамностран триаголник ABC кон надворешноста се конструирани квадрати $ACDE$ и $BCFG$. Ако должината на страната на триаголникот е a, определи го периметарот на шестаголникот $ABGFDE$.

382. Нека $ABCDEF$ е шестаголник впишан во кружница. Отсечката BE ја сече отсечката AC во точката G, а отсечката DF во точката H. Ако

$$\overline{CG} = \overline{HG} = 3, \overline{BG} = \overline{HD} = 2, \overline{HF} = 5,$$

пресметај ја $\overline{AC}$.

383. Даден е шестаголник $ABCDEF$ таков што

$$AB \perp BC, BC \perp CD, AD \perp DE, AE \perp EF .$$

Ако должините на страните на овој шестаголник се природни броеви, докажи дека не е можно сите да бидат непарни.

384. Определи го најголемиот можен број пресеци на дијагоналите на конвексен 50-аголник.

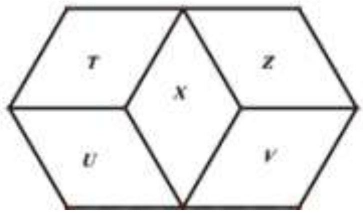
385. Докажи дека во внатрешноста на конвексен $2n-$аголник не постојат две различни точки низ кои минуваат по n дијагонали на тој $2n-$аголник.

386. Докажи дека постои барем една права која истовремено ги полови и плоштината и периметарот на даден конвексен многуаголник.

387. Во внатрешноиста на квадрат со должина на страна 1 се нацртани сите рамнокраки триаголници чија основа е страна на квадратот, а врвот е средината на спротивната страна. Определи ја плоштината на осумаголникот кој е пресек на овие четири триаголници.

388. Во трапезот $ABCD$ пократката основа CD има должина 3. Права паралелна со дијагоналата BD ги сече кракот AD и поголемата основа AB во точки F и E, соодветно. Ако $\overline{AE}=5$ и $\overline{BE}=2$, во кој однос се плоштините на триаголникот AEF и петаголникот $EBCDF$.

389. Во една сложувалка треба да се состави шестаголник од 5 делови во облик на ромб, како што е прикажано на цртежот десно. Деловите T,U,V,Z се складни и секој има плоштина $\sqrt{2017}$. Делот означен со X се загубил и Андреј сака да направи нов. Заради прецизност и полесна изработка на плоштината на тој дел е цел број P. Колку различни вредности може да прими бројот P? Од сите такви делови определи го оној со најголема плоштина, а чии должини на дијагонали се рационални броеви.



390. Рамностран триаголник со плоштина P околу неговото тежиште е заротиран во неговата рамнина за агол 30°. Определи ја плоштината на пресекот на почетниот триаголник и триаголникот добиен по ротацијата.

391. Даден е правилен осумаголник $A_1A_2...A_8$ и точка F во неговата внатрешност. Точката F ја поврзуваме со темињата на осумаголникот со што добиваме осум триаголници чии плоштини одејќи во насока на движењето на стрелката на часовникот се $P_1, P_2, P_3, ..., P_8$. Докажи дека

$$P_1+P_3+P_5+P_7=P_2+P_4+P_6+P_8 .$$

392. Определи го збирот на должините на сите дијагонали на правилен осумаголник со должина на страна 1.

393. Даден е правилен деветаголник со должина на страна a. Определи ја разликата на должините на најдолгата и најкратката дијагонала на деветаголникот.

394. Во воден парк има голем базен во облик на осумаголник околу кој може да се опише кружница со радиус $15\,m$. Познато е дека секоја втора страна на базенот има должина $9\,m$, а за преосанатите страни се знае дека се еднакви, но не се знае колкава е нивната должина. Сопствениците на паркот треба да нарачаат платно со кое ќе се покрие базенот. Определи ја најмалата плоштина која треба да ја има платното и определи ја непознатата должина на страната на базенот.

395. Надвор од правилен многуаголник $A_1A_2...A_n$ се наоѓа точка B таква што триаголникот A_1A_2B е рамностран. Определи ги сите природни броеви n за кои точките B, A_2 и A_3 се последователни темиња на правилен многуаголник.

396. Нека $P_1, P_2, ..., P_{2n}$ е пермутација на темињата на правилен $2n-$аголник. Докажи дека затворената полигонална линија која се состои од отсечките $P_1P_2, P_2P_3, ..., P_{2n-1}P_{2n}, P_{2n}P_1$ содржи барем еден пар паралелни отсечки.

10. СТЕРЕОМЕТРИЈА

10.1. РАБЕСТИ ТЕЛА

1. Во просторот се дадени шест различни точки $O, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$. Докажи дека постојат индекси $i, j, 1 \le i < j \le 5$ такви што $\measuredangle T_i O T_j \le 90^\circ$.

2. Определи го множеството од сите точки на триедарот такви што збирот на нивните растојанија од страните на триедарот е еднаков на даден позитивен број a.

3. Коцка со должина на раб a е пресечена со рамнина која содржи една просторна дијагонала на коцката. Определи ја најмалата можна вредност на плоштината на пресекот на коцката и рамнината.

4. Нека се S_1 и S_2 се два спротивни ѕида, а S_3 е еден од преостаните ѕидови на коцка со должина на раб a. Средините на рабовите $S_1 \cap S_3$ и $S_2 \cap S_3$ се врвови на четиристрани пирамиди со основи S_2 и S_1, соодветно. Определи го волуменот на пресекот на овие пирамиди.

5. Волуменот на коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е еднаков на V. Определи го волуменот на зедничкиот дел на тетраедрите AB_1CD_1 и A_1BC_1D.

6. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$ со должина на раб a. Ако P е ортогоналната проекција на темето B на просторната дијагонала AC', определи го волуменот на пирамидата $ABCDP$.

7. Коцката $ABCDA'B'C'D'$ е пресечена со рамнина која ја содржи посторната дијагонала на коцката BD' и има најмала можна плоштина на пресекот со коцката. Определи го аголот меѓу таа рамнина и рамнината $ABCD$.

8. Квадар е пресечен со рамнина така што пресекот е правилен шестаголник. Докажи дека тоа е можно ако и само ако квадарот е коцка.

9. Од коцка со должина на раб $3\,cm$ се отсечени сите осум темиња така што новото тело со 24 темиња има рабови со еднакви должини. Определи ги плоштината и волуменот на новодобиеното тело.

10. Должините на рабовите на квадар се природни броеви. Збирот на волуменот, половината од плоштината и должините на рабовите е еднаков на 1779. Определи ги должините на рабовите на квадарот.

11. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$ со должина на раб a. Низ темињата A и C' и средината на работ BB' е повлечена рамнина. Определи ја плоштината на пресекот на коцката со рамнината.

12. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$ со должина на раб 1. На рабовите $AB, AD, C'D'$ и $B'C'$ избрани се точки P, Q, R и S соодветно, такви што $PQRS$ е квадрат со центар во центарот на коцката. Определи ја должината на страната на квадратот $PQRS$.

13. Во коцката $ABCDA'B'C'D'$ точката P е средина на работ BC, а точката Q е центар на квадратот $CC'D'D$. Рамнината низ точките A, P и Q ја дели коцката на два дела. Определи ги односот на нивните волумени и на нивните плоштини.

14. Определи ги должините на рабовите на правилна права четиристрана призма ако тие се природни броеви, а плоштината на призмата е еднаква на збирот на должините на рабовите.

15. Дадена е правилна тристрана призма. Определи го аголот меѓу дијагоналата на еден од ѕидовитет на омотачот и правата која минува низ тежиптето на основата и средината на спротивниот бочен раб. Познато е дека должината на страната на основата и должината на висината се однесуваат како $1:\sqrt{3}$.

16. Нека $ABCA'B'C'$ е права правилна тристрана призма. Должината на работ на основата е еднаква на $10\,cm$, а должината на висината на призмата е $10\sqrt{2}\,cm$. Точката D е средина на работ AB. Определи го $\measuredangle DA'C$.

17. Должините на рабовите на основата на права тристрана призма се 6, 8 и $4\sqrt{6}\ cm$. Низ темето на најголемиот агол на основата е повлечена рамнина така што пресекот на призмата и рамнината е рамностран триаголник. Определи ја плоштината на тој пресек.

18. Должината на страната на рамностран триаголник е $6\,cm$. Низ неговото тежиште е повлечена права паралелна на една од страните. Определи го волуменот на права призма чија основа е добиениот трапез, а должината на висината на призмата е еднаква на должината на висината на трапезот. Определи го аголот кој што просторната дијагонала на призмата го зафаќа со рамнината на основата.

19. Радиус векторот на тежиштето T на тетраедарот $ABCD$ е
$$\overrightarrow{r_T} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}).$$
Ако тежиптето е еднакво оддалечено до темињата A и B докажи дека
$$\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2.$$

20. На дијагоналите AB_1 и CA_1 на бочните ѕидови ABB_1A_1 и CAA_1C_1 на тристрана призма $ABCA_1B_1C_1$ се дадени точки E и F такви што $EF \parallel BC_1$. Определи го односот на отсечките EF и BC_1.

21. Во тетраедар $SABC$ познати се аглите $\measuredangle BSC = \alpha, \measuredangle CSA = \beta, \measuredangle ASB = \gamma$. Определи ги аглите меѓу ѕидовите.

22. Определи го аголот меѓу тежишните линии BD и CE на ѕидовите ABC и SAC на правилен тетраедар $SABC$.

23. Рамнина минува низ еден раб на правилен тетраедар и ја дели плоштината на тетраедарот во однос $3:5$. Определи ги тангенсите на аглите α и β на кои оваа рамнина го дели аголот кој го зафаќаат ѕидовите на тетраедарот кои се сечат во овој раб.

24. Квадрат со должина на страна $6\sqrt{2}$ е заедничка основа на две правилни пирамиди. Околу така добиеното тело може да се опише сфера која минува низ неговите темиња. Ако висината на едната пирамида е 9, определи го волуменот на добиеното тело.

25. Нека T е тежиштето на тетраедарот $ABCD$, а P произволна точка во неговата внатрешност. Нека правата TP ги сече рамнините BCD, CDA, DAB, ABC во точките A', B', C', D', соодветно. Докажи дека
$$\frac{\overline{A'P}}{\overline{A'T}} + \frac{\overline{B'P}}{\overline{B'T}} + \frac{\overline{C'P}}{\overline{C'T}} + \frac{\overline{D'P}}{\overline{D'T}} = 4 .$$

26. Даден е тетраедар $ABCD$ таков што
$$\overline{CD} = 3 \text{ и } \overline{AB} = \overline{AD} = \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{BD} = 2 .$$
Пресметај го волуменот на тетраедарот $ABCD$.

27. Даден е тетраедар $ABCD$ чии спротивни рабови се еднакви, т.е.
$$\overline{AB} = \overline{CD},\ \overline{AC} = \overline{BD},\ \overline{AD} = \overline{BC} .$$
Докажи дека ѕидовите на тетраедарот се остроаголни триаголници.

28. Должината на страната на квадратот е еднаква на $12\,cm$. Од квадратот се отсечени четири рамнокраки триаголници чии основи се страните на квадратот, а висините им се еднакви на $3\,cm$. Преостанатиот дек од квадратот е мрежа на четиристрана пирамида. Определи ги волуменот и плоштината на оваа пирамида.

29. Низ средината на секој раб на тетраедарот е повлечена рамнина која е нормална на спротивниот раб. Докажи дека сите шест рамнини се сечат во точката која е симетрична на центарот на опишаната сфера околу тетраедарот во однос на неговото тежиште.

30. Нека во тетраедарот $ABCD$ плоштините на ѕидовите ABD, ACD, BCD, BCA се еднакви на S_1, S_2, Q_1, Q_2, соодветно, просторниот агол меѓу ѕидовите ABD и ACD е еднаков на α, а просторниот агол меѓу ѕидовите BCD и BCA е β. Докажи дека

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha = Q_1^2 + Q_2^2 - 2Q_1Q_2\cos\beta\,.$$

31. Основата на пирамидата $ABCV$ е правоаголен триаголник ABC со хипотенуза $\overline{AB} = c$ и $\measuredangle A = \alpha$. Бочните рабови се еднакво наклонети кон рамнината на основата, а рамнината BCV со рамнината ABC зафаќа агол β. Определи го волуменот на пирамидата.

32. Основата ABC на пирамидата $ABCV$ е рамностран триаголник со должина на страна $2\sqrt{2}$. Работ CV има должина 1 и е нормален на рамнината на основата. Определи го аголот кој го формираат правите од кои едната минува низ V и средината на страната BC, а другата минува низ C и средината на страната AB.

33. Сите агли на ѕидовите на тетраедарот при темето D се еднакви на α, а аглите меѓу два ѕида на тетраедарот чие едно теме е D се еднакви на φ. Докажи дека постои еден агол α за кој $\varphi = 2\alpha$.

34. Основата на пирамида е правоаголен триаголник со должини на страни $1, a, a^2,\ a > 1$. Врвот на пирамидата ортогонално се проектира во темето на правиот агол на основата. Остриот агол наспроти работ со должина 1 е аголот под кој еден бочен ѕид е наклонет кон основата. Определи го волуменот на пирамидата.

35. Основата на тристрана пирамида е триаголник со должини на страни a, b, c, а спротивните рабови имаат должини m, n, p, соодветно. Докажи дека растојанието на врвот на пирамидата до тежиштето на основата е еднакво на

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{3(m^2 + n^2 + p^2) - (a^2 + b^2 + c^2)}\,.$$

36. На ѕидот ABC на тристрана пирамида $ABCD$ е дадена точка O низ која се повлечени отсечките OA_1, OB_1, OC_1 паралелни на рабовите DA, DB, DC до пресеците A_1, B_1, C_1 со ѕидовите на пирамидата. Докажи дека

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{DA}} + \frac{\overline{OB_1}}{\overline{DB}} + \frac{\overline{OC_1}}{\overline{DC}} = 1\,.$$

37. Должините на рабовите на основата на тристрана пирамида се a, b, c. Сите агли меѓу рабовите при врвот на пирамидата се прави. Определи и волуменот и плоштината на оваа пирамида.

38. Лист во форма на квадрат со темиња F, B, H, D има должина на страна a. На неговите страни FB и BH се означени точки G и A, односно E и C, такви што $\overline{FG} = \overline{GA} = \overline{AB}$ и $\overline{BE} = \overline{EC} = \overline{CH}$. Хартијата е превиткана по отсечките DG, DA, DC, AC така што точката G се поклопува со точката B,

а точките F и H со точката E. Определи го волуменот од така добиената тристрана пирамида $ABCD$.

39. Бочниот раб на правилна тристрана пирамида е $b=1$, а нејзиниот волумен е $V=\frac{1}{6}$. Определи го аголот при врвот на бочниот ѕид.

40. Во тристрана пирамида должината на точно еден раб е еднаква на 1. Докажи дека нејзиниот волумен не е поголем од $\frac{1}{8}$.

41. Аголот меѓу два соседни раба на омотачот на правилна шестстрана пирамида е еднаков на аголот меѓу бочниот раб и основата на пирамидата. Определи го овој агол.

42. Нека се a и b должините на два разминувачки раба на тристрана пирамида кои се заемно нормални и нека растојанието меѓу нив е d. Определи го волуменот на оваа пирамида.

43. Во правилна тристрана пирамида аголот меѓу бочниот раб и основата е еднаков на рамнинскиот агол при врвот на пирамидата. Определи го волуменот на пирамидата ако должината на работ на основата е a.

44. Аголот меѓу висината и апотемата на правилна четиристрана пирамида е $\delta=30^\circ$. Разгледај рамнина која минува низ еден раб на основата и е нормална на спротивната апотема. Определи го односот на волумените на деловите на кои оваа рамнина ја дели пирамидата.

45. Правилна четиристрана пирамида е пресечена со рамнина која минува низ едно теме на основата и е нормална на спротивниот бочен раб. Плоштината на пресекот е двапати помала од плоштината на основата. Определи го аголот меѓу бочниот раб и основата.

46. Рамнина ги сече бочните рабови $SA.SB,SC,SD$ на правиална четиристрана пирамида во точките M,N,P,Q соодветно. Докажи дека

$$\frac{1}{\overline{SM}}+\frac{1}{\overline{SP}}=\frac{1}{\overline{SN}}+\frac{1}{\overline{SQ}}.$$

47. Нека T е точка во внатрешноста на тристрана пирамида $ABCD$ и нека точките A',B',C',D' се пресеците на правите AT,BT,CT,DT со спротивните рамнини на пирамидата, соодветно. Ако

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TA'}}=\frac{\overline{BT}}{\overline{TB'}}=\frac{\overline{CT}}{\overline{TC'}}=\frac{\overline{DT}}{\overline{TD'}}=\lambda$$

која вредност може да ја прими λ.

48. Основата на пирамида е триаголник со должини на страни a,b,c. Притоа $c=7\,cm$, $a-b=5\,cm$, а аголот наспроти страната c е $\gamma=60^\circ$. Ѕидот кој го

содржи најдолгиот раб на основата е нормален на рамнината на основата и е складен на основата. Определи ги волуменот на пирамидата и плоштината на најголемиот ѕид на пирамидата.

49. Основата на пирамидата е конвексен многуаголник, а плоштините на сите бочни ѕидови се еднакви. Докажи дека збирот на растојанијата на било која точка на основата до рамнините на бочните ѕидови на пирамидата е константен, т.е. не зависи од изборот на точката.

50. Основата на пирамидата $ABCDV$ е правоаголник $ABCD$ чии должини на страни се $\overline{AB}=a, \overline{BC}=b$, а сите бочни рабови се со должина c. Определи ја плоштината на пресекот на оваа пирамида со рамнината која минува низ дијагоналата BD и е паралелна со бочниот раб VA.

51. Од секое теме на конвексен полиедар излегуваат по 4 рабови. Докажи дека секоја рамнина која не минува низ ниту едно теме на полиедарот го сече овој полиедар по многуаголник со парен број темиња.

52. Две пирамиди имаат заедничка основа – квадрат со должина на страна a. Двете пирамиди се од иста страна на квадратот, висините им имаат еднакви должини, а подножните точки на висините им се во средините на спротивните страни на квадратот. Определи го волуменот на заедничкиот дел на двете пирамиди.

53. Правилен октаедар е тело составено од ве правилни четиристрани пирамиди со заедничка основа, а преостанатите две темиња се симетрични во однос на таа основа, така што сите 12 рабови се со еднаква должина. Определи го односот на волумените на впишаната и опишаната топка на правилен октаедар.

54. Определи го волуменот на правилна дванаесетстрана потсечена пирамида ако R и r $(R>r)$ се радиусите на кружниците опипани околу основите и ако бочните рабови се наклонети под агол од 60° кон рамнините на основите.

55. Во $n-$страна пирамида може да се впише сфера. Секој од бочните ѕидови на пирамидата го ротираме околу соодветниот раб на основата до поклопување со рамнината на основата така што сликата на бочниот ѕид има заеднички внатрешни точки со основата на пирамидата. На тој начин се добиени n слики на врвот на пирамидата. Докажи дека овие n слики припаѓаат на една кружница

56. Висините на тристрана пирамида се сечат во една точка. Докажи дека таа точка, тежиштето на еден ѕид на пирамидата, подножјето на висината на тој ѕид и трите точки кои ги делат останатите три висини воодност 2:1, почнувајќи од врвот на пирамидата, лежат на иста сфера.

10.2. ВАЛЧЕСТИ ТЕЛА

57. Должината на висината на прав конус е два пати поголема од радиусот на основата. Определи го односот на волуменот на топката опишана околу конусот и волуменот на топката впишана во конусот.

58. Низ врвот на прав кружен конус минуваат две рамнини. Едната од нив е наклонета спрема основата на конусот под агол α и основата ја сече во тетива со должина a. Другата е наклонета према основата под агол $\beta, \beta \neq \alpha$ и основата ја сече во тетива со должина b. Определи го волуменот на конусот.

59. Во правоаголен триаголник ABC збирот на должините на катетите и трикратната вредност на висината над хипотенузата е еднаов на 12. Триаголникот ротира околу правата на која лежи хипотенузата и така се добива тело со најголема плоштина. Определи го волуменот на ова тело.

60. Центрите на две сфери чии радиуси се еднакви R и r $(r < R)$ се оддалечени a $(R - r < a \leq R + r)$. Изрази го волуменот на правилен кружен конус опишан околу овие сфери, во зависност од a, R и r.

61. Топка е опишана околу прав конус. Рамнината која минува низ центарот на топката, а е паралелна со основата на конусот, го дели конусот на два дела со еднакви волумени. Определи го аголот кој изводницата на конусот го зафаќа со рамнината на неговата основа.

62. Околу прав кружен конус е опишана сфера. Рамнината која го содржи центарот на таа сфера и е паралелна со основата на конусот го дели конусот на два дела со еднакви долумени. Опрдели го косинусот на аголот при темето на оскиниот пресек на конусот.

63. Топка е впишана во потсечен конус чии основи се централни пресеци на други две топки. Определи ја плоштината на конусот, ако збирот на плоштините на сите три топки е S.

64. Околу полутопка со радиус r е опишан конус со висина H, така што основите на конусот и полутопката се концентрични кружници. Определи го волуменот на оној делод конусот кој не припаѓа на полутопката, т.е. изрази го тој волумен со помош на r и H.

65. Во конус е впишана полусфера чија кружна основа лежи на основата на конусот. Односот на плоштината на конусот (вклучувајќи ја и основата) и плоштината на полусферата (без кружната основа) е $k = \frac{18}{5}$. Определи го аголот при врвот на дијагонаниот пресек на конусот.

66. Во свера со радиус r е впишан тетраедар. Ако должините на висините на тетраедарот се h_1, h_2, h_3, h_4, докажи дека

$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}=\frac{1}{r}.$$

67. Сфера минува н темињата на долната основа на коцка и ги допира сите четири рабови на горната основа. Должината на работ на коцката е a. Определи го радиусот на сферата.

68. Околу иста топка се опишани рамностран цилиндар и рамностран конус. Докажи дека односите на плоштините на овие три тела се еднакви на односите на нивните волумени.

69. Должината на страната на ромбот $ABCD$ е a. Ромбот прво ротира околу правата на која лежи страната AB, а потоа околу правата на која лежи подолгата дијагонала AC. На тој начин се добиени две тела. Односот на волумените на овие тела е $V_1:V_2=9:\sqrt{3}$. Определи го остриот агол на ромбот и односот на плоштините на добиените тела.

70. Во триаголникот ABC важи

$$a=\overline{BC}=\sqrt{21}\ cm,\ b=\overline{AC}=4\ cm \text{ и } \alpha=\measuredangle BAC=120^\circ.$$

На страната BC определи точка D така што волуменот на телото кое се добива со ротација на триаголникот ABD околу страната AB ќе биде еднаков на волуменот на телото кое се добива со ротација кое се добива со ротација на триагоникот ACD околу страната AC. Во кој однос точката D ја дели страната BC.

71. Над страните BC, CD, DA на квадратот од надворешната страна се конструирани рамнострани триаголници BCE, CDF, DAG. Определи го, како функција од должината a на страната на квадратот, волуменот на телото кое се добива со ротација на фигурата $BECFDGA$ околу правата AB.

72. Три топки се допираат меѓу себе и ја допираат рамнината во три дадени точки. Определи ги радиусите на топките, ако растојанијата меѓу допирните точки се a, b, c.

73. Нека R е радиусот на топката опишана околу правилна четиристрана пирамида, а r радисуот на топката впишана во таа пирамида. Докажи дека $\frac{R}{r}\geq\sqrt{2}+1$.

74. Определи го најмалиот можен количник на волуменот на прав кружен конус и волуменот на топката впишана во него.

75. Определи ја најголемата можна вредност на односот на волуменот на прав конус и волуменот на топката која е впишана во овој конус.

76. Топка со радиус R е пресечена со две паралелни рамнини така што центарот на топката е надвор од слојот определен со овие рамнини. Нека P_1 и P_2 се

плоштините на пресеците и d е растојанието меѓу рамниите. Определи ја плоштината на пресекот на топката со рамнината која е паралелна со дадените рамнини и е еднакво оддалечена од нив.

77. Секоја од четири сфери со радиус R ги допира останатите три сфери. Определи го радиусот на сферата која може да се впише меѓу нив.

78. Сфера ги содржи темињата на долната основа на коцка со раб $a=8\,cm$ и ја допира горната основа. Определи го нејзиниот радиус.

79. Цилиндричен сад со радиус на основата $r=4\,cm$ и висина $H=16\,cm$ е наполнет со вода. Определи го аголот под кој треба да се наклони садот кон рамнината на основата така што ќе истече половина од водата.

80. Во сфера S со радиус R е впишан прстен составен од осум еднакви сфери со помал радиус, од кои секоја ги допира двете соседни, а сите ја допираат сферата S по должината на иста кружница со радиус R. Сферата S' ги допира сите осум мали кружници и сферата S. Определи го радиусот на сферата S' во функција од R. Конечното решение запиши го без да користиш тригонометриски функции.

81. Страните на триаголникот со должини $a=14, b=13, c=15$ допираат сфера со радису $r=5$. Определи го растојанието на центарот на сферата до рамнината на триаголникот.

82. Околу рамнокрак триаголник со крак $b=10\,cm$ и агол при врвот $\alpha=30^\circ$ е опишана кружница k. Нека t е тангента на таа кружница која е паралелна со висината повлечена кон основата на триаголникот. Определи го волуменот на телото кое се добива со ротација на триаголникот околу тангентата t.

83. Темињата на коцка во просторен координатен систем со координатен почеток O се во точките
$$A(1,1,1),\ A'(-1,-1,-1),\ B(-1,1,1),\ B'(1,-1,-1),$$
$$C(-1,-1,1),\ C'(1,1,-1),\ D(1,-1,1),\ D'(-1,1,-1).$$
Точката O е центар на сферата опишана околу коцката. Нека точката T не припаѓа на таа сфера и $d=\overline{OT}$. Ако
$$\alpha=\measuredangle ATA', \beta=\measuredangle BTB', \gamma=\measuredangle CTC', \delta=\measuredangle DTD'$$
докажи дека
$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma+\operatorname{tg}^2\delta=\frac{32d^2}{(d^2-3)^2}.$$

84. Во просторот се дадени точките $A(2,1,3), B(3,1,5), C(3,3,1), D(3,0,-2)$. Определи го растојанието меѓу разминувачките прави AB и CD.

11. АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

11.1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Нека S е множеството точки во рамнината кои во даден координатен систем имаат целобројни координати. Докажи дека не постојат три точки на множеството S кои се темиња на рамностран триаголник.

2. Нека P е многуаголник во кординатен систем во рамнината и неговата плоштина е поголема од 1. Докажи дека постојат две различни точки (a,b) и (c,d) од P такви што $a-c$ и $b-d$ се цели броеви.

3. Отсечката AB е поделена со почнувајќи од точката A со точките $T_1, T_2, ...,$ T_{2016} на 2017 еднакви делови. Ако се познати координатите на точките $T_3(5,-1)$ и $T_4(8,-3)$, определи ги координатите на точките A и B. Дали може разликата на координатите за некоја од точките $T_1, T_2, ..., T_{2016}$ да биде 2016? Ако такви точки постојат, определи ги нивните координати.

4. Определи ја врската меѓу координатите x и y така што за точките $A(-3,0)$, $B(3,0), C(x,y)$ важи $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC$.

5. Определи ја равенката на правата p која минува низ точката $T(-1,1)$, а средината на отсечката која на p ја отсекуваат правите $x+2y-1=0$ и $x+2y-3=0$ лежи на правата $x-y-1=0$.

6. Во рамнината се дадени A и B. Докажи дека геометриското место на точки M такви што $\overline{AM}^2 - \overline{BM}^2 = k$, k е даден број е права која е нормална на правата AB.

7. Марко на позитивниот дел на $x-$оската нацртал рамнокрак триаголник со основа A_1A_2 со должина a, со теме A_1 во кординатниот почеток и агол при озновата α. До него на ист начин нацртал втор рамнокрак триаголник со основа A_2A_3 со должина $\frac{2}{3}a$, потоа до него на ист начин го нацртал следниот рамнокрак триаголник со основа A_3A_4 со должина еднаква на $\frac{2}{3}$ од должината на A_2A_3 итн (сите нацртани триаголници се слични). Докажи дека врвовите на нацртаните триаголници припаѓаат на правата
$$x\operatorname{tg}\alpha + 5y - 3a\operatorname{tg}\alpha = 0.$$

8. Точката A припаѓа на прввиот квадрант, лежи на правата $y=\frac{4}{3}x$ и е 5 единици оддалечена од координатниот почеток. Точката B е пресек на правата

$y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$ и правата која минува низ точката A и е нормална на правата $y=\frac{4}{3}x$. Точката C припаѓа на правата $x-2y-10=0$ и е таква што абирот на растојанијата од неа до точките A и B е најмал можен. Определи ги координатите на тежиштето на триаголникот ABC.

9. Во правоаголен координатен систем се дадени точките $A(-\frac{17}{2},0), B(2,0)$ и $C(-1,0)$. Определи ги сите точки од правата $y=x-3$ од кои отсечките AC и BC се гледаат по ист агол.

10. На кривата со равенка $y=x^4-2x^2$ се наоѓаат четири различни точки $T_k(x_k,y_k)$, $k=1,2,3,4$. Ако точките $T_k, k=1,2,3,4$ лежат на една права, докажи дека $x_1+x_2+x_3+x_4=0$.

11. Во рамнината е даден квадрат со темиња $T_1(1,0), T_2(0,1), T_3(-1,0), T_4(0,-1)$. За секој $n\in\mathbb{N}$ нека T_{n+4} е средината на отсечката T_nT_1. При претпоставкја дека низата точки $\{T_n\}$ има граница, определи ги нејзините координати.

12. Векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$ се единечни и зафаќаат агол со големина $\frac{\pi}{3}$. Определи ја плоштината на паралелограмот определен со векторите $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n},\ \vec{b}=\vec{m}-\vec{n}$.

11.2. КРУЖНИЦА И ПАРАБОЛА

13. Определи го геометриското место на центрите на кружниците кои на $x-$ оската отсекуваат отсечка со должина $2a$, а на $y-$ оската отсекуваат отсечка со должина $2b$.

14. На правата $x=r$ најди точка T така што трапезот кој го определуваат двете тангенти повлечени од оваа точка на кружницата $x^2+y^2=r^2$ и координатните оски има најмала плоштина.

15. Правите $x+y+4=0$ и $7x-y+4=0$ се тангенти на кружница чиј центар лежи на правата $4x+3y-2=0$. Определи ја равенката на оваа кружница.

16. Определи ја должината на заедничката тетива на кружниците
$$x^2+y^2-2x-4y-4=0 \text{ и } x^2+y^2-3x+4y=0.$$
Колку заеднички тангенти постојат? Определи ги нивните равенки, како и растојанијата меѓу нивните допирни точки со кружниците.

17. Определи го множеството центри на кружниците кои надворешно ги допираат кружниците
$$x^2+y^2=9 \text{ и } (x-5)^2+y^2=4.$$

18. Низ точката $M(6,-2)$ на кружницата k: $(x-3)^2+(y-4)^2=36$ е повлечена тетива AB со должина $6\sqrt{3}$. Определи ја равенката на правата на која лежи оваа тетива. Определи ја плоштината на триаголникот ABS, каде S е центарот на кружницата k.

19. Низ центарот на кружницата
$$2x^2+2y^2-4x+8y-20=0$$
минуваат правите
$$mx-y+2=0 \text{ и } x-ny+2=0.$$
Определи го аголот кој го зафаќаат овие прави.

20. Определи ја равенката на кружницата која има центар на апсцисната оска, радиус $5\sqrt{10}$, а на правата $3x-4y+24=10$ отсекува тетива со должина 10.

21. Параболата $y=x^2+ax+b$ ги сече кординатните оски во точките A, B и C. Центарот на кружницата опишана околу триаголникот ABC припаѓа на правата $y=x$. Докажи дека $a+b+1=0$.

22. Нека a и b се реални броеви. Познато е дека параболата $y=ax^2+b$ ја сече кривата $y=x+\frac{1}{x}$ во точно три точки. Докажи, дека $3ab<1$.

23. Правата p го сече графикот на квадратната функција $y=ax^2+bx+c$ во точките A и B. Правата p' е паралелна со правата p и го сече истиот тој график во точките C и D. Докажи дека збирот на апсцисите на точките A и B е еднаков на збирот на апсцисите на точките C и D.

24. Во точките на параболата $y^2=12x$ со ординати $2, 6, -3$ се повлечени тангенти. Определи го односот на плоштината на триаголникот чии темиња се овие три точки и плоштината на триаголникот чии темиња се пресеците на повлечените тангенти.

25. Нека A и B се точки на параболата со теме во точката O такви што тетивите OA и OB се заемно нормални, а ϕ е аголот меѓу OA и оската на параболата. Докажи дека $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\operatorname{ctg}^3\phi$.

26. Четирите пресечни точки на параболата $y=x^2+px+q$ и правите $y=x$ и $y=2x$ се наоѓаат во првиот квадрант. Да ги разгледаме двата дела на пара-

болите кои лежат меѓу дадените прави. Докажи дека разликата на должините на нивните ортогонални проекции на $x-$оската е еднаква на 1.

27. Нека p и q се реални броеви. Графикот на функцијата $f(x)=x^2+px+q$ ги сече кординатните оски во три различни точки A,B,C. Докажи, дека кружницата опишана околу триаголникот ABC ја сече $y-$оската во точка со ордината 1.

28. Докажи дека сите тетиви на параболата $y^2=4ax$ кои се хипотенузи на правоаголен триаголник со прав агол во кординатниот почеток минуваат низ иста точка.

29. Низ средината на тетивата на параболата $y^2=\frac{8}{3}x$, која лежи на правата $4x-3y-12=0$, е повлечена паралела со $x-$оската. Низ пресекот на таа паралела и параболата е повлечена тангентата на параболата. Докажи дека тангентата е паралелна со дадената тетива.

30. Определи ја заедничката тангента на параболите $y=x^2$ и $x=y^2$.

31. Определи ги равенките на заедничките тангенти на параболите $y=2x^2-1$ и $y=(x-1)^2$.

32. Определи ги заедничките тангенти на параболите
$$y=x^2-6x+12 \text{ и } y=-x^2+8x-17.$$

33. Во Декартовиот координатен систем определи го геометриското место на точки такви што тангентите повлечени од точка M на параболата $y=x^2$ се заемно нормални.

34. Точката P е средина на тетива на параболата $\mathcal{P}$ во чии краеви се повлечени тангенти на параболата $\mathcal{P}$. Нека T е пресекот на тие тангенти. Докажи дека средината на отсечката PT припаѓа на параболата $\mathcal{P}$.

35. На параболата $\mathcal{P}$ со равенка $y^2=2px$ е дадена точка T_0 и точката $T_0^{'}$ е таква што средината на отсечката $T_0T_0^{'}$ е на оската на параболата $\mathcal{P}$. За променливата точка T на $\mathcal{P}$ различна од T_0 нормалата од точката $T_0^{'}$ на правата T_0T ја сече паралелата со оската на параболата низ точката T во точка T' (цртеж десно). Кое е геометриското место на точката T'?

36. Дадена е функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ определена со $f(x)=x^2+(a+1)x+1, a\in\mathbb{R}$.

а) Определи го a ако $\left|\frac{f(x)}{x^2+x+1}\right|<3$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

б) Определи ги условите за кои графикот на функцијата $y=|f(x)|$ е парабола.

в) Определи го геометриското место на темињата на сите параболи $y=|f(x)|$.

37. Точката $(0,3)$ припаѓа на параболата $f(x)=x^2+px+q$. Тангентата на параболата во оваа точка има коефициент на правец $k=-1$. Определи ја равебката на параболата.

38. Три тангенти на параболата определуваат триаголник. Докажи дека опишаната кружница околу тој триаголник минува низ фокусот на параболата.

39. Дадена е парабола $y^2=2px,\ p>0$. На параболата се дадени точки A,B,C (A има најголема, а C најмала ордината) такви што симетралата на $\measuredangle ABC$ е паралелна со $x-$оската. Ако должината на проекцијата на отсечката AC на $y-$оската е еднаква на $4p$, определи ја ординатата на средината на отсечката BC.

40. Дадено е множеството параболи $y=(k-2)x^2-2kx+k+2$, каде $k\neq 2$ е реален број.
а) Определи го геометриското место на точки на кое припаѓаат темињата на даденото множество параболи.
б) Дали дадените параболи имаат заедничка точка.

41. Во рамнината е даден рамностран триаголник ABC. Определи го множеството точки T од рамнината за кои важи
$$\overline{TA}^2+\overline{TB}^2=\overline{TC}^2.$$
Која крива ја доби и во каква положба е таа во однос на точките A,B,C ?

42. Точката T се движи во кординатната рамнина така што производот на нејзините растојанија до правите $4x-3y+11=0$ и $4x+3y+3=0$ е еднаков на $\frac{144}{25}$. Определи ја равенката на геометриското место на точки T и скицирај го тоа множество во координатната рамнина.

43. Права низ точката $P(a,0), a>0$ ги сече симетралите на квадрантите на координатниот систем во точките A и B. Определи го геометриското место на средината на отсечките AB.

44. Во координатен систем се дадени точките $A(a,0), B(b,0), C(0,h)$ при што $a>0, b<0, h>0$. Определи го геометриското место на точки на средините на сите правоаголници кои се впишани во триаголникот ABC и чии две темиња се наоѓаат на страната AB, а по едно на другите две страни.

11.3. ХИПЕРБОЛА И ЕЛИПСА

45. Нека кружница со радиус r ја сече хиперболата $xy=1$ во точките $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2), P_3(x_3,y_3), P_4(x_4,y_4)$. Докажи дека
а) $x_1x_2x_3x_4 = y_1y_2y_3y_4 = 1$,
б) $\sum_{k=1}^{4} \overline{P_kO}^2 = 4r^2$, O е координатниот почеток.

46. Точките A,B,C припаѓаат на хиперболата $xy=1$. Докажи дека ортоцентарот на триаголникот ABC исто така припаѓа на хиперболата $xy=1$.

47. Правата t ја допира левата, а на неа паралелната права t' десната гранка на хиперболата $x^2-y^2=1$. Правите t и t' ја сечат $x-$оската под агол од 60°. Определи го растојанието меѓу овие две прави.

48. Определи го множеството точки од кои хиперболата $16x^2-25y^2=400$ се гледа под прав агол.

49. Нека A е точка на хиперболата $xy=4$, а B е точка на елипсата $x^2+4y^2=4$. Докажи дека $\overline{AB} > \frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

50. На хиперболата $3x^2-4y^2=12$ определи точка која е најблиску до точката $A(0,7)$.

51. Докажи дека за различните точки A,B,C,D на рамнострана хипербола од $AB \perp CD$ следува $AC \perp BD$ и $AD \perp BC$.

52. Определи ги равенките на сите тангенти на елипсата $x^2+4y^2=20$ чии допирни точки ги половат отсечките кои на тие тангенти ги отсекуваат координатните оски. Определи ја плоштината на фигурата која ја определуваат овие тангенти.

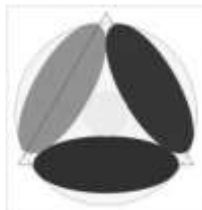
53. Определи ја плоштината на квадратот чии две темиња се во фокусите на елипсата $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{b^2}=1$, а другите две темиња се во крајните точки на една од оските. Фокусите на елипсата припаѓаат на $x-$оската.

54. Во елипсата $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ е впишан триаголник ABC така што тангентата на елипсата во секое негово теме е паралелна со спротивната страна на триаголникот. Определи ја плоштината на триаголникот, ако $C \equiv (0,b)$.

55. Нека M_1 и M_2 се две точки од една гранка на хиперболата $y=\frac{a^2}{x}$ и A_1 и A_2 се ортогоналните проекции на точките M_1 и M_2 на $x-$оската, а B_1 и B_2 се ортогоналните проекции на M_1 и M_2 на $y-$оската. Дали плоштините на криволиниските трапези $A_1A_2M_1M_2$ и $B_1B_2M_1M_2$ се еднакви.

56. Ако на елипсата $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ повлечеме тангента t_1 под агол 45° према позитивниот дел на $x-$оската, нејзиниот отсечок на $y-$оската ќе биде 4. Ако повлечеме тангента t_2 под агол 60° према позитивниот дел на $x-$оската, нејзиниот отсечок на $y-$оската ќе се зголеми за 2. Определи ја плоштината на четириаголникот $F_1T_1F_2T_2$, каде F_1,F_2 се фокусите и T_1,T_2 се соодветно пресеците на тангентите t_1,t_2 со $y-$оската.

57. Три елипси со полуоски a и b ($a>b$) лежат во рамнината така што по парови надворешно се допираат, а главните оски им лешат на страните на еден рамностран триаголник (види цртеж). Две концентрични кружници, поголема со радиус R и помала со радиус r ($R\neq r$), ги допираат трите елипси. Изрази ги R и r со помош на a и b.



58. Во рамностран триаголник се впишани кружница и елипса така што малата полуоска на елипсата лежи на една висина на триаголникот. Определи го радиусот на кружницата ако должините на полуоските на елипсата се $4\sqrt{3}$ и 5.

59. Определи го тангенсот на аголот кој го зафаќаат заедничките тангенти на кривите $x^2+2y^2=2$ и $y^2=4x$.

60. Определи го геометриското место на точки од кои на елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ може да се повлечат две заемно нормални тангенти.

61. Определи ја плоштината на четириаголникот определен со заедничките тангенти на кривите
$$x^2+2y^2=2 \text{ и } 4x^2-9y^2=36.$$

62. На елипса со центар O се наоѓаат точки A и B такви што $\measuredangle AOB=90^\circ$. Докажи дека растојанието од точката O до правата AB зависи само од должината на полуоските на елипсата.

12. НЕРАВЕНСТВА

12. 1. ЕЛЕМЕНТАРНИ И КОШИЕВИ НЕРАВЕНСТВА

1. Докажи дека за секои три реални броеви x,y,z е исполнето неравенството:
$$|x|+|y|+|z|-|x+y|-|y+z|-|z+x|+|x+y+z|\geq 0.$$

2. Еден од броевите x^2 и $(1-x)^2$ е помал од 1, а другиот е поголем од 1. Докажи, дека $0<x^2-x<2$.

3. За кои $x\in\mathbb{R}$ бројот $\sqrt[3]{4+4x}$ е поголем од бројот $1+\sqrt[3]{x}$?

4. Определи ја најголемата вредност која може да ја прими изразот $\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$, ако k,m,n се природни броеви такви што
$$\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1.$$

5. Дадени се реалните броеви $a<b<c<d$. Определи ги сите можни избори на броевите p,q,r,s за кои $\{a,b,c,d\}=\{p,q,r,s\}$, а вредноста на изразот
$$(p-q)^2+(q-r)^2+(r-s)^2+(s-p)^2$$
е најмала.

6. Докажи го неравенството
$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+...+\frac{n}{4^n}<\frac{4}{9},\ n\in\mathbb{N}.$$

7. Докажи дека за секој природен број n е точно неравенството
$$\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{5}+\frac{\sqrt{12}}{7}+...+\frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}<\frac{n}{2}.$$

8. Докажи дека за секој природен број n важи
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\geq\sqrt{n}.$$

9. Докажи дека за секој природен број n поголем од 2 важи
$$\frac{1}{2}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}<1.$$

10. Нека p е реален број, $0<p<1$, а n е природен број. Докажи дека
$$1+2p+3p^2+...+np^{n-1}<\frac{1}{(1-p)^2}.$$

11. Дадени се реалните броеви $x_0>x_1>...>x_n$. Докажи дека

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq 2n .$$

Кога важи знак за равенство?

12. Определи ги сите природни броеви n за кои важи

$$2^n (n!)^2 < (2n)! .$$

13. Нека x и y се реални броеви за кои важи $x + y \geq 0$. Докажи дека

$$2^{n-1}(x^n + y^n) \geq (x+y)^n \text{, за секој } n \in \mathbb{N} .$$

14. Броевите a, b, c, d го задоволуваат условот $a+b+c+d=0$. Нека

$$S_1 = ab + bc + cd \text{ и } S_2 = ac + ad + bd .$$

Докажи дека

$$5S_1 + 8S_2 \leq 0 \text{ и } 8S_1 + 5S_2 \leq 0 .$$

15. Нека $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{2n-3}{2n} a_{n-1}$, $n \geq 2$. Докажи дела

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < 1 \text{, за секој } n \in \mathbb{N} .$$

16. Нека a, b, c се реални броеви такви што $a + 2b + c < 0$ и $a - 2b + c > 0$. Докажи, дека важи $b^2 > ac$.

17. Нека a е реален број таков што $a^5 - a^3 + a = 2$. Докажи дека

$$3 < a^6 < 4 .$$

18. Определи ги сите реални броеви a и b такви што за секој $x \in [-1,1]$ точно е неравенството

$$| 2x^2 + ax + b | \leq 1 .$$

19. Докажи дека $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$ за секој реален број x.

20. Докажи дека за секој реален број x, $x > -1$ важи

$$\frac{x + x^2 + x^3 + x^4}{1 + x^5} \leq 2 .$$

21. Докажи дека за секои $x, y > 0$ важи

$$x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2} xy .$$

22. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Докажи, дека

$$x^2+y^2+z^2>x^5+y^5+z^5+2x^2y^2z^2(x+y+z).$$

23. Нека a,b,c,d,e,f се по парови различни цели броеви. Докажи дека
$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-e)^2+(e-f)^2+(f-a)^2\geq 18.$$

24. Ако $x_1=1$ и $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$, за $n\in\mathbb{N}$, докажи дека
$$x_{994}^2+x_{1994}<1.$$

25. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека
$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\geq x+y+z.$$

26. Нека $x,y,z\geq 0$ и $x+y+z=6$. Докажи дека $x^2+y^2+z^2\geq 12$.

27. Докажи дека за секои $m,n\in\mathbb{N}$ важи
$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}>1.$$

28. Ако $a,b\in\mathbb{R}^+$, тогаш $a^ab^b>a^bb^a$. Докажи!

29. Нека $0<x<1, a>0, b>0$. Докажи дека
$$a^xb^{1-x}<a+b.$$

30. Докажи дека за позитивните реални и различни броеви a,b,c важи
$$a^ab^bc^c>a^bb^cc^a.$$

31. Нека $0<a<b<c<d$. Докажи дека
$$a^bb^cc^dd^a\geq b^ac^bd^ca^d.$$

32. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека
$$a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}\leq 1.$$

33. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c и секој ненегативен број p важи
$$a^{p+2}+b^{p+2}+c^{p+2}\geq a^pbc+b^pca+c^pab.$$

34. Нека x и y се реални броеви такви што $x^2+y^2=1$. Докажи дека
$$-\sqrt{2}\leq x+y\leq\sqrt{2}.$$

35. Докажи дека за секои реални броеви a,b,c важи

$$\frac{1}{3}(a+b+c)^2 \le a^2+b^2+c^2+2(a-b+1)\ .$$

36. Нека $a,b,x,y>0$ и $a\le b$. Докажи дека

$$\frac{x}{ax+by}+\frac{y}{ay+bx}\ge\frac{2}{a+b}\ .$$

37. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a и b важи

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)\ge 9ab\ .$$

38. Докажи, дека за позитивните рални броеви a,b,c такви што $a+b+c\le 3$ важи

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}\ge 2\ .$$

39. Нека a и b се ненегативни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}+b}{4}\le\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3}\ .$$

40. Докажи дека за секои ненегативни реални броеви a,b,c важи

$$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(c+a-2b)\ge 0\ .$$

41. Производот на позитивните реални броеви x,y,z днаков на 1. Ако

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge x+y+z$$

Докажи дека

$$\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k}\ge x^k+y^k+z^k\ ,$$

за секој природен број k

42. Нека a,b,c се различни природни броеви и k е природен број таков што

$$ab+bc+ca\ge 3k^2-1.$$

Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3\ge 3abc+9k\ .$$

43. Ако се a,b,c позитивни реални броеви такви што

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$$

докажи дека

$$(a-1)(b-1)(c-1)\ge 8\ .$$

44. а) Ако некои два реални броеви се разликуваат за 1, тогаш збирот нанивните квадрати не е помал од $\frac{1}{2}$. Докажи!

б) Определи го бројот на паровите цели броеви кои се разликуваат за 1, а чиј збир на квадрати не е поголем од 41.

45. За реалните броеви x и y важи $2x+4y=1$. Докажи дека
$$x^2+y^2 \geq \frac{1}{20}.$$

46. Нека a и b се позитивни реални броеви такви што $a>b$ и $ab=1$. Докажи дека
$$\frac{a-b}{a^2+b^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}.$$
Ако важи знак за равенство, определи ја вредноста на збирот $a+b$.

47. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xyz=1$. Докажи, дека
$$\frac{x^6+2}{x^3}+\frac{y^6+2}{y^3}+\frac{z^6+2}{z^3} \geq 3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right).$$

48. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека
$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

49. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што
$$ab+bc+ca=1.$$
Докажи дека
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3}+\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}.$$

50. За позитивните броеви $a_1,a_2,...,a_n$, $n \geq 2$ нека $s=a_1+a_2+...+a_n$. Докажи дека
$$\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+...+\frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

51. Нека x_i, $i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви такви што $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Докажи дека
$$\frac{x_1^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_2+x_3}+...+\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n^2}{x_n+x_1} \geq \frac{1}{2}.$$

52. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}$. Докажи, дека
$$\frac{1-a^2+c^2}{c(a+2b)}+\frac{1-b^2+a^2}{a(b+2c)}+\frac{1-c^2+b^2}{b(c+2a)} \geq 6.$$

53. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=3$. Докажи дека
$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}.$$

54. Нека a и b се позитивни реални броеви. Докажи дека
$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \le \sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})} .$$
Кога важи знак за равенство?

55. Нека x, y, z се позитивни броеви такви што $xyz = 1$. Докажи дека
$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2} \ge 2 .$$

56. Докажи дека за секој позитивни реални броеви a,b,c важи
$$\frac{ab+c^2}{a+b}+\frac{bc+a^2}{b+c}+\frac{ca+b^2}{c+a} \ge a+b+c .$$

57. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека
$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2} \ge \frac{1}{2} .$$

58. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=abc$. Докажи, дека
$$a^5(bc-1)+b^5(ca-1)+c^5(ab-1) \ge 54\sqrt{3} .$$

59. Ако $2x+3y=1$, определи ја најмалата можна вредност на x^2+y^2.

60. Определи ја најголемата вредност на реалната константа λ таква што за секои позитивни реални броеви u,v,w за кои $u\sqrt{vw}+v\sqrt{uw}+w\sqrt{uv} \ge 1$ важи
$$u+v+w \ge \lambda .$$

61. Ако за реалните броеви x, y важи $|x+y|+|x-y|=2$, определи ја најголемата можна вредност на изразот x^2-6x+y^2.

62. Определи го ненегативниот реален број a за кој изразот $a^3-a^2-2\sqrt{a}$ достигнува најмала можна вредност.

63. Определи ги сите природни броеви $n>1$ такви што за произволни позитивни реални броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ толно е неравенството
$$(x_1+x_2+...+x_i+...+x_n)^2 \ge n(x_1x_2+x_2x_3+...+x_ix_{i+1}+...+x_nx_1) .$$

64. Ако n и k се природни броеви и $k \le n$, докажи дека
$$\frac{n^k}{k^k} \le \binom{n}{k} \le \frac{n^k}{k!} .$$

65. Докажи дека за секој природен број $n>5$ важи
$$(\tfrac{n}{3})^n < n! < (\tfrac{n}{2})^n .$$

66. Нека $n \in \mathbb{N}$ и $a_i, i = 1, 2, ..., n$ се позитивни реални броеви за кои важи

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}.$$

Докажи дека за секој $m \in \{1, 2, ..., n\}$ постојат m броеви од множеството $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ чиј збир е поголем или еднаков на m.

12.2. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ, ЛОГАРИТАМСКИ И ТРИГОНОМЕТРИСКИ НЕРАВЕНСТВА

67. Нека $n \geq 2$ и $a, x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни реални броеви. докажи дека

$$\frac{a^{x_1 - x_2}}{x_1 + x_2} + \frac{a^{x_2 - x_3}}{x_2 + x_3} + ... + \frac{a^{x_{n-1} - x_n}}{x_{n-1} + x_n} + \frac{a^{x_n - x_1}}{x_n + x_1} \geq \frac{n^2}{2(x_1 + x_2 + ... + x_n)}.$$

Кога важи знак за равенство?

68. Нека a, b, c се реални броеви поголеми од 1. Докажи дека:

$$\log_a(\frac{b^2}{ac} - b + ac)\log_b(\frac{c^2}{ab} - c + ab)\log_c(\frac{a^2}{bc} - a + bc) \geq 1.$$

69. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ важи

$$\sum_{k=2}^{n} (\log_{\frac{3}{2}}(k^3 + 1) - \log_{\frac{3}{2}}(k^3 - 1)) < 1.$$

70. Дадени се реалните броеви $a, b, c > 1$. Докажи дека

$$\log_a bc + \log_b ca + \log_c ab \geq 4(\log_{ab} c + \log_{bc} a + \log_{ca} b).$$

71. Ако a, b, c се реални броеви поголеми од 1, докажи дека за секој реален број r важи

$$(\log_a bc)^r + (\log_b ca)^r + (\log_c ab)^r \geq 3 \cdot 2^r.$$

72. За бројот $x \in (1, 2)$ е определена низата $a_0 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}}{\log_x 2} + 1, n \in \mathbb{N}$. Докажи дека $a_n < \log_{\frac{2}{x}} 2$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

73. Нека a е позитивен реален број, а x_1, x_2, x_3 се реални броеви такви што $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Докажи дека

$$\log_2(1 + a^{x_1}) + \log_2(1 + a^{x_2}) + \log_2(1 + a^{x_3}) \geq 3.$$

74. Докажи, дека меѓу било кои четири броја од интервалот $(0, \frac{\pi}{2})$ можеме да избереме два броја, да ги наречеме x и y такви што

$$8\cos x\cos y\cos(x-y)+1>4(\cos^2 x+\cos^2 y).$$

75. Докажи дека

$$\sin x-\sin y\le \tfrac{3}{2}-\cos(x-y),\ \ x,y\in\mathbb{R}.$$

76. Докажи дека за секој $x\in\mathbb{R}$ важи

$$\sin^5 x+\cos^5 x+\sin^4 x\le 2.$$

Кога важи знак за равенство.

77. Нека $x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\cos(x_i-x_j)\ge 0.$$

78. Докажи дека за секој реален број x и за секој природен број n важи

$$|\cos x|+|\cos 2x|+|\cos 2^2 x|+...+|\cos 2^n x|\ge \tfrac{n}{2\sqrt{2}}.$$

79. Докажи:

а) ако $x_1,x_2\in(0,\frac{\pi}{2})$, тогаш

$$\tfrac{\cos x_1+\cos x_2}{2}\le\cos\tfrac{x_1+x_2}{2},$$

б) ако $x_1,x_2,...,x_{2^k}\in(0,\frac{\pi}{2})$, тогаш

$$\tfrac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k}\cos x_j\le\cos\Big(\tfrac{1}{2^k}\sum_{j=1}^{2^k}x_j\Big),\ \ k\in\mathbb{N},$$

б) ако $x_1,x_2,...,x_n\in(0,\frac{\pi}{2})$, тогаш

$$\tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\cos x_j\le\cos\Big(\tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j\Big),\ \ k\in\mathbb{N},$$

80. Докажи дека

$$|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}|\le\sqrt{2}.$$

81. Определи ја најголемата можна вредност која може да ја прими изразот

$\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\cos z$, каде $x,y,z\in\mathbb{R}$.

82. Докажи дека за секои реални броеви x,y,z важи

$$\sin^2 x\cos y+\sin^2 y\cos z+\sin^2 z\cos x<\tfrac{3}{2}.$$

83. Нека x и y се реални броеви такви што $\sin x+\sin y=\frac{1}{3}$. Докажи, дека

$$\sin 3x+\sin 3y\le\tfrac{26}{27}.$$

84. Определи го најмалиот реален број кој не е помал од ниту еден од збировите

$$\operatorname{arctg}\tfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\tfrac{1}{8}+...+\operatorname{arctg}\tfrac{1}{2n^2},\ n\in\mathbb{N}.$$

85. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a така што за секој реален број x важи
$$\sin^2 x+a\cos x+a^2\geq 1+\cos x.$$

86. За кои вредности на параметарот a неравенството
$$\sin^6 x+\cos^6 x+a\sin x\cos x\geq 0$$
е исполнето за секој реален број x.

12. 3. ГЕОМЕТРИСКИ НЕРАВЕНСТВА

87. Дадени се 7 отсечки чии должини се поголеми од $10\,cm$, а се помали од $1\,m$. Докажи дека меѓу дадените отсечки има три со кои може да се конструира триаголник.

88. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи дека $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ се исто така должини на страни на триаголник.

89. Над страните на триаголникот ABC се конструирани произволни паралелограми $ABB_2A_1, BCC_2B_1, CAA_2C_1$. Дали може да се конструира триаголник чии должини на страни се $\overline{A_1A_2}, \overline{B_1B_2}$ и $\overline{C_1C_2}$?

90. Даден е триаголник ABC. Симетралата на $\measuredangle CAB$ ја сече страната BC во точката D, а симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече страната AC во точката E. Ако $\measuredangle ACB\geq 60^\circ$, докажи дека
$$\overline{AE}+\overline{BD}\leq\overline{AB}.$$

91. Нека a и b се должините на катетите, а c е должината на хипотенузата на правоаголен триаголник. Докажи, дека
$$(1+\tfrac{c}{a})(1+\tfrac{c}{b})\geq 3+2\sqrt{2}.$$

92. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи дека
$$\tfrac{2}{b+c-a}+\tfrac{2}{c+a-b}+\tfrac{2}{a+b-c}>\tfrac{2}{a}+\tfrac{2}{b}+\tfrac{2}{c}.$$

93. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи го неравенството
$$abc\geq(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

94. Даден е триаголник ABC со висини h_a,h_b,h_c. Нека D,E,F се пресечните точки на симетралите на аглите со страните BC,CA,AB, соодветно, а расто-

јанијата од точките D,E,F до правите AB,BC,CA нека се d_a,d_b,d_c, соодветно докажи дека

$$\frac{d_a}{h_a}+\frac{d_b}{h_b}+\frac{d_c}{h_c}\ge\frac{3}{2}.$$

95. Нека h_1,h_2,h_3 се висините на триаголникот ABC повлечени на страните $BC.CA,AB$, соодветно, а u,v,w се растојанијата од внатрешната точка M на триаголникот до страните $BC.CA,AB$, соодветно. Докажи дека

$$\frac{h_1}{u}+\frac{h_2}{v}+\frac{h_3}{w}\ge 9$$
$$h_1h_2h_3\ge 27uvw$$
$$(h_1-u)(h_2-v)(h_3-w)\ge 8uvw.$$

96. Нека R и r радиусите на опишаната и впишаната кружница во правоаголен триаголник. Докажи дека

$$R\ge r(1+\sqrt{2}).$$

97. Околу кружница со радиус r е опишан рамнокрак трапез. Докажи дека должината на дијагоналата на трапезот не е помала од $2\sqrt{2}r$.

98. Ако a,b се катетите, а c е хипотенузата на правоаголен триаголник, докажи дека

$$a^4+a^2b^2+b^4\ge\frac{3}{4}c^4.$$

99. Остроаголен триаголник ABC за кој точките $A',B'.C'$ се средини на страните BC,CA,AB, соодветно е впишан во кружница со центар O и радиус 1. Докажи дека

$$\frac{1}{\overline{OA'}}+\frac{1}{\overline{OB'}}+\frac{1}{\overline{OC'}}\ge 6.$$

100. Нека T е точка во внатрешноста на триаголникот ABC и нека A_1,B_1,C_1 се пресеците на правите AT,BT,CT со страните BC,CA,AB. Докажи дека

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{A_1T}}\cdot\frac{\overline{BT}}{\overline{B_1T}}\cdot\frac{\overline{CT}}{\overline{C_1T}}\ge 8.$$

101. Нека a,b,c се должините на страните на триаголник со плоштина P. Докажи, дека

$$P<\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2).$$

102. Нека L и P се периметарот и плоштината на правоаголникот. Докажи, дека важи

$$L\ge\frac{24P}{L+P+1}.$$

103. Нека a е должината на страната на ромбот, h е должината на висината и e и f се должините на неговите дијагонали. Докажи дека $e+f<2a+h$.

104. Нека $n\geq 3$ е природен број. Во кружница е впишан $n-$аголник $A_1A_2...A_n$. Докажи, дека постојат три темиња $A,B,C\in\{A_1,A_2,...,A_n\}$ за кои важи

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2\geq\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_2A_3}^2+...+\overline{A_iA_{i+1}}^2+...+\overline{A_nA_1}^2.$$

105. Во круг со радиус 1 се наоѓаат n различни точки $A_1,A_2,A_3,...,A_n$ $(n>1)$. За $i=1,2,...,n$ нека со d_i е означено растојанието на A_i до најблиската од преостанатите точки. Докажи дека важи

$$d_1^2+d_2^2+...+d_n^2\leq 1\grave{}6.$$

106. Нека ABC е триаголник со должини на страни a,b,c и нека P е точка во неговата внатрешност. Нека правата AP по втор пат ја сече кружницата опишана околу триаголникот BCP во точката A' и нека точките B' и C' се аналогно определени. Докажи дека за периметарот O на шестаголникот $AB'CA'BC'$ важи

$$O\geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}).$$

107. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C. Нека точката M е средина на катетата BC. Докажи, дека $\sin\measuredangle MAB\leq\frac{1}{3}$. Кога важи знак за равенство?

108. Во правоаголен триаголник ABC страната AB е хипотенуза, T е тежиште и AA',BB' се тежишни линии. Докажи дека $\cos\measuredangle ATB'\geq\frac{4}{5}$ и дека знак за равенство важи ако и сако триаголникот ABC е рамнокрак.

109. Даден е остроаголен триаголник ABC со агли α,β,γ. Докажи го неравенството

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma>2\pi.$$

110. Ако α и β се агли на триаголник, доки дека $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}\geq\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{3}$.

111. Ако a,b,c се страни на триаголник со спротивни агли α,β,γ, соодветно докажи дека

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 4(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}).$$

112. Докажи дека во секој триаголник важи $\frac{\cos\alpha}{a^3}+\frac{\cos\beta}{b^3}+\frac{\cos\gamma}{c^3}\geq\frac{3}{2abc}$, каде a,b,c се должините на страните, а α,β,γ соодветните агли.

13. КОМБИНАТОРИКА

13.1. БИНОМНИ КОЕФИЦИЕНТИ, БИНОМНА ФОРМУЛА

1. Докажи дека:

   а) $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$ б) $C_n^k = \frac{n}{n-k} C_{n-1}^{k}$

   в) $C_n^k C_k^s = C_n^s C_{n-s}^{k-s}$ г) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

2. Докажи дека за секои ненегативни цели броеви m и n важи
$$C_{n+m}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0 .$$

3. Докажи дека за секои природни броеви n, k ($n \geq k$) важи
$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1} = C_n^k .$$

4. Докажи дека за секои природни броеви n, k, важи
$$C_{n-1}^{k-1} C_n^{k+1} C_{n+1}^k = C_{n-1}^k C_{n+1}^{k+1} C_n^{k-1} .$$

5. Пресметај го збирот
$$\sum_{k=0}^{1005} (-3)^k \binom{2010}{2k} .$$

6. Докажи дека најголемиот коефициент во развојот $(a+b)^n$ е парен број.

7. Докажи дека за секој природен број n вредноста на изразот
$$(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n$$
е цел број кој не е делив со 5.

8. Докажи дека
$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$
непарен број за секој природен број n.

9. Колку рационални членови има во развојот на биномот
$$(\sqrt[6]{20} - \sqrt[4]{17})^{2016} .$$

10. Определи го бројот на рационалните членови во развојот на биномот
$$(\sqrt{2013} + \sqrt[3]{2013})^{2012} .$$

11. За кои вредности на реалниот број x во развојот на биномот $\left(\sqrt{5^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{25^x}}\right)^6$ третиот член изнесува 75?

12. Во развојот на биномот $(\sqrt{6^x}+\frac{1}{\sqrt{6^{x+1}}})^n$ односот на коефициентите на третиот и вториот член е $7:2$. Определи го x така што четвртиот член во развојот на биномот е еднаков на 2016.

13. Определи го оној член на развојот на биномот
$$(\sqrt[3]{\frac{2x}{\sqrt{y}}}-\sqrt{\frac{y}{2\sqrt[3]{x}}})^{21},\ x,y>0$$
кој ги содржи x и y на ист степен.

13.2. ПРЕБРОЈУВАЊА

14. На колку начини може да се поделат 7 исти книги на три ученици така што секој од нив да добие барем по една книга.

15. Определи го збирот на шестцифрените броеви кои се добиваат со пермутација на на цифрите на бројот 123456.

16. Определи го збирот на сите седумцифрени броеви формирани од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, при што цифрите не се повторуваат.

17. Определи го збирот на сите парни трицифрени броеви составени од цифрите од множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$.

18. На колку начини можат да се наредат броевите $1,2,...,2n$ во ред така што сите парни броеви се наоѓаат на парни места?

19. За даден број ќе велиме дека е „шарен“ ако е запишан со еднаков број парни и непарни цифри. Да се определи бројот на сите четирицифрени „шарени“ броеви запишани со различни цифри?

20. На колку начини можеме да избереме два различни броја од множеството $\{1,2,3,...,2001\}$ така што нивниот збир ќе биде парен?

21. Колку има петцифрени природни броеви со парен број парни цифри?

22. Определи го бројот на деветцифрените броеви чии цифри се 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, а некои три последователни цифри не се ниту 123 ниту 246 ниту 678.

23. Во една држава има 20 градови, така што секој град со секој останат е поврзан со пат. Колку патишта има во државата.

24. Код е петцифрен број, кој може да почнува и со 0. Определи го бројот на кодови чии цифри формираат растечка низа од броеви.

25. Код е петцифрен број, кој може да почнува и со 0. Определи го бројот на кодови кои во својот декаден запис имаат точно една цифра еднаква на 1.

26. Код е петцифрен број, кој може да почнува и со 0. Определи го бројот на кодови, кои во својот декаден запис имаат барем една цифра еднаква на 1.

27. Определи го збирот на сите шестцифрени броеви, кои се формирани од цифрите 4, 5, 5, 6, 6, 6.

28. Определи го бројот на n-цифрените броеви запишани само со цифрите 0, 1 и 2, така што цифрите 0, 1 и 2 се јавуваат барем по еднаш.

29. Колку разместувања на броевите 0, 1, ..., 9 постојат кои не завршуваат со 8 и не започнуваат со 3.

30. Даден е правоаголник со димензии $m \times n$, кој со хоризонтални и вертикални линии, е поделен на mn единечни квадрати. Колку различни правоаголници постојат, чии темиња се некои четири пресечни точки на овие прави (вклучувајќи ги и пресеците со страните на правоаголникот).

31. Дадени се n точки во рамнината така што никои три не се колинеарни.
а) Определи го бројот на сите отсечки со краеви во дадените точки?
б) Определи го бројот на сите триаголници со темиња во дадените точки?

32. На колку начини може да се изберат две дисјунктни непразни подмножества од дадено n-елементно множество.

33. На колку начини може да се разбие дадено n-елементно подмножество на две множества.

34. На правата p означени се 10 точки, а на правата $q \parallel p$, 11 точки. Определи го бројот:
а) на сите триаголници со темиња во дадените точки,
б) на сите четириаголници со темиња во дадените точки.

35. Оделението каде што учат Андреј и Пабло брои 31 ученик. На колку начини може да се избере фудбалска екипа од 11 ученици така што Андреј и Пабло не се истовремено во екипата.

36. Одделението на Горјан брои 30 ученици.
а) На колку начини може да се избере екипа за натпревар од 4 ученици.
б) На колку начини може да се избере екипа од 4 ученици ако Горјан е член на екипата.

37. На колку начини може да се изберат:
а) од 12 ученици две екипи од по 6 члена,
б) од 24 ученици две екипи од по 6 члена?

38. Од 12 девојчиња и 10 момчиња треба да се избере екипа од 7 ученици така што екипата да брои најмалку 4 момчиња. На колку начини може да се направи бараниот избор?

39. Колку четирицифрени броеви деливи со 4, можат да се формираат од цифрите 1, 2, 3, 4 така што
а) цифрите да не се повторуваат,
б) дозволено е повторување на цифри.

40. Колку четирицифрени броеви деливи со 9, може да се формираат од цифрите 1, 2, 3, 4?

41. Дадена е правоаголна мрежа $(m-1)\times(n-1)$. Определи го бројот на правоаголници, составени од клетките на мреѓата, кои ја содржат точката со координати (p,q), која е во внатрешноста на правоаголникот.

42. На колку начини броевите $1,2,...,n$ можат да се наредат во ред така што:
а) Броевите 1 и 2 не се на соодветните редни места.
б) Броевите 1, 2 и 3 не се на соодветните редни места.

43. Колку пермутации на броевите $1,2,...,n$ постојат така што ниеден од броевите $1,2,...,n$ не се наоѓа на соодветното редно место?

44. На колку начини може да се разместат n топчиња во 5 различни кутии така што најмалку една кутија да остане празна.

45. Адресирани се 8 плика и се напишани исто толку писма. Потоа писмата се сместуваат во пликата. Колку разместувања на писмата постојат такви што
а) ниту едно,
б) најмалку едно,
в) најмалку две,
писма се наоѓаат во своите плика.

46. На колку начини може да се наредат во ред 2 бели, 3 црни и 4 црвени топчиња?

47. Пресметај го збирот на сите четирицифрени броеви запишани со цифрите 1, 2, 3 и 4.

48. Кои броеви се повеќе на број? Седумцифрени броеви во чиј декаден запис учествува цифрата 1 или седумцифрени броеви во чиј декаден запис не учествува цифрата 1.

49. Во конвексен n-аголник повлечени се сите дијагонали. Ако не постојат три дијагонали кои се сечат во една иста точка, да се пресмета бројот на триаголници со темиња во пресечните точки на дијагоналите и темињата на дадениот n-аголник.

50. Дадени се $2n$-бели, $2n$-црни, $2n$-црвени топчиња. На колку начини може да се разместат топчињата во две кутии така што во секоја од кутиите да има по $3n$ топчиња.

51. Даден е ред со n столици, на секоја од кои седи по еден ученик. Секој ученик може да се помести за најмногу една столица. Определи го бројот на сите вакви поместувања.

52. Во круг се распоредени n столици и на секоја седи по еден ученик. Секој ученик може да се помести за најмногу една столица. Да се определи бројот на сите вакви поместувања.

53. Дали е можно да се нумерираат рабовите на коцка со броевите 1,2,...,12 така што збировите на броевите кои се запишани на рабовите кои градат едно исто теме се еднакви за сите темиња на коцката.

54. Бројот кој е запишан само со цифрите 2 и 3 ќе го нарекуваме весел. Значи, веселите броеви се редоследно 2, 3, 2, 23, 32, 33, ... Определи го 2050-тиот по ред весел број.

55. Шест другари Ацо, Бане, Ване, Гоце, Диме и Ерол треба да одат летовање, а можни одредишта се Охрид, Струга, Дојран и Крани. На колку начини тоа може да го направат ако секој од нив може да отиде на само едно место, а секое место мора да биде посетено барем од еден од другарите?

56. На колку начини може од множеството $\{1,2,...,n\}$ да се изберат множества A,B,C такви што

$$A\cap B\cap C=\emptyset,\ A\cap B\neq\emptyset,\ A\cap C\neq\emptyset\,?$$

57. Нека $A=\{n\,|\,n\in\mathbb{N},\, n<101\}$. Определи го бројот на четириелементните подмножества на множеството A кај кои разликата на најголемиот и најмалиот елемент е 12.

58. Нека n и k се природни броеви и $S=\{1,2,...,n\}$.

а) Определи го бројот на сите подредени $k-$торки $(A_1,A_2,...,A_k)$ каде A_i, $1,2,...,k$ се по парови дисјунктни подмножества од S такви што $\bigcup_{i=1}^{k} A_i=S$.

б) Определи го бројот на сите подредени $k-$торки $(A_1,A_2,...,A_k)$ каде A_i, $1,2,...,k$ се подмножества (не задолжително дисјунктни) од S такви што $\bigcup_{i=1}^{k} A_i=S$.

59. Определи го бројот на најкратките патишта од точката $(0,0)$ до дадена точка (p,q), каде $p\leq q$, по отсечките на целобројната квадратна мрежа така што

поголемиот дел од патот ќе биде во затворената лента ограничена со правите $y = x + q - p - 1$ и $y = x + q - p + 1$.

60. Определи ја аритметичката средина на сите четирицифрени броеви запишани со цифрите 1, 3, 5 и 7, такви што во записот на секој број се употребени сите дадени цифри.

61. а) Определи го бројот на пермутациите на множеството $\{1, 2, 3, ..., n\}$ кај кои броевите 1 и 2 не се соседни.
б) Определи го бројот на пермутациите на множеството $\{1, 2, 3, ..., n\}$ кај кои никои два елементи од множеството $\{1, 2, 3\}$ не се соседни.

62. Нека n е непарен број и $a_1, a_2, ..., a_n$ е пермутација на броевите $1, 2, ..., n$. Докажи дека бројот $p = (a_1 - 1)(a_2 - 2)...(a_n - n)$ е парен.

63. Нека $a_i, i = 1, 2, ..., 2003$ се цели броеви и $(b_1, b_2, ..., b_{2003})$ е нивна пермутација. Докажи дека производот
$$(b_1 + a_1)(b_2 + a_2)...(b_{2003} + a_{2003})$$
е парен број.

64. Нека n е природен број поголем од 1. Колку има пермутации $(a_1, a_2, ..., a_n)$ на броевите $1, 2, ..., n$ такви што постои точно еден индекс $i \in \{1, 2, ..., n\}$ за кој $a_i > a_{i+1}$.

65. Секоја страна на триаголникот ABC е разделена на 8 еднакви дела. Колку триаголници со темиња во дадените делбени точки (A, B, C не можат да бидат темиња на триаголник) постојат, така што ниту една страна на триаголниците не е паралелна со страните на триаголникот ABC.

66. Нека k е природен број. Определи го бројот на нескладни триаголници чии темиња се во темињата на правилен $6k-$аголник.

67. Определи го бројот на строго растечки аритметички низи чии членови се природни броеви, а збирот на првите 37 членови е еднаков на 1998.

68. На математички натпревар учествувале девет ученици. Определи колку задачи се поставени, ако секоја задача ја решиле точно три ученици и ако за секој пар ученици постои точно една задача кои двајцата ја решиле.

69. На страните на квадратот $ABCD$ се земени $4n$ точки: сите четири темиња и уште по $n-1$ точка на секоја страна на квадратот. Определи го бројот на сите недегенирани триаголници чии темиња се овие точки.

70. Имаме три картончиња такви што на страните на едното се запишани броевите 1 и 4, на другото 2 и 4, а на третото 3 и 4. Колку различни трицифрени

броеви може да се состават со помош на дадените картончиња. Определи го нивниот збир.

71. Секоја страна на конвексен шестаголник со точки е поделена на n делови. Делбените точки се темиња на триаголници. Колку триаголници се определени на овој начин?

13.3. ИГРИ И СТРАТЕГИИ

72. На еден автомат кој работи со жетои од по 1, 10 и 25 денари може да се игра следнава игра: ако ставиш жетон од 1 денар, добиваш еден жетон од 10 денари; ако ставиш жетон од 10 денари, добиваш еден жетон од 1 денар и еден жетон од 25 денари; ако ставиш жетон од 25 денари, добиваш два жетона од по 10 денари. На почетокот си имал еден жетон од 10 денари. По определено време си утврдил дека имаш точно 100 жетони од 1 денар и неколку други жетони. Која е најмалата вредност на жетоните кои до тогаш си можел да ги освоиш?

73. Во секое поле на табела $m\times n\,(m,n\in\mathbb{N})$ е запишана една од буквите A или B така што во две соседни полиња не е запишана иста буква (соседни се полиња кои имаат заедничка страна). Во еден чекор се избираат две соседни полиња и двете букви во тие полиња се заменуваат со нови букви според следниве правила:
- на местото на A се запишува B,
- на местото на B се запишува C,
- на местото на C се запишува A.

За кои m и n по конечен број чекори можеме да постигнеме во сите полиња во кои на почетокот била буквата A да е запишана буквата B, а во сите полиња во кои на почетокот била буквата B да е запишана буквата A.

74. На табла со димензии 10×10 се поставени 50 жетони така што на исто поле нема два жетони. Притоа 25 жетони се поставени на долната лева четвртина на таблата, а преостанатите 25 жетони на горната десна четвртина на таблата. Нека X,Y,Z се три последователни полиња на таблата (хоризонтално, вертикално или дијагонално). Ако два жетони се наоѓаат на полињата X и Y и ако полето Z е слободно, тогаш жетонот од полето X се преместува на полето Z, прескокнувајќи го жетонот на полето Y. Дали може со конечна низа такви чекори (потези) да се преместат сите 50 жетони на долната половина на таблата.

75. Лицата A и B наизменично повлекуваат дијагонали во конвексен 2008-аголник. Тие можат да формираат дијагонала од било кои две темиња на 2008-аголникот ако добиената дијагонала не пресекува ниту една од претходно повлечените дијагонали. Губи оној кој не може да повлече дијагонала. Кој од и има победничка стратегија?

76. A и B имаат 40 бонбони. Тие наизменично јадат по најмалку еден а најмногу шест бонбони. Победник е оној кој ќе го изеде последниот бонбон. Кој од играчите има победничка стратегија?

77. Два играчи A и B ја играат следнава игра: играчот A кажува број x, $1 \leq x \leq 10$. Играчот B на бројот x му додава број $y, 1 \leq y \leq 10$ и го соопштува збирот S на двата броја. Потоа играчот A на S додава број $z, 1 \leq z \leq 10$ и го соопштува новиот збир итн. Победник е играчот кој прв може да каже збир 100. Играчот A го кажал бројот 2. Дали постои стратегија со која играчот B сигурно победува?

78. Даден е $\triangle PQR$ со плоштина 1. A избира точка $X \in PQ$, потоа B избира точка $Y \in QR$ и повторно A избира точка $Z \in PR$. Целта на A е да ја максимизира плоштината P_{XYZ}. Која е најголемата плоштина што може да си ја обезбеди играчот A при правилна игра на играчот B.

79. Дадена е равенката $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Лицата A и B наизменично избираат по еден коефициент од a, b, c и го заменуваат со цел број. Да се докаже дека може да „игра“ така што сите три корени на добиената равенка се цели броеви.

80. Играчот A поставува коњ на шаховска табла 8×8. Потоа B прави (правилен) коњски потег, и така натаму. Притоа тие можат да го поместат коњот само на поле кое претходно не било „посетено“. Губитник е оној кој не може да направи потег. Кој од играчите има победничка стратегија.

81. Играчите A и B имаат на располагање две купчиња со по p и q монети. Тие играат наизменично, најпрво A па потоа B, така што во секој чекор е дозволено да се земе една монета од едно од купчињата, да се земе по една монета од секое од двете купчиња или да се премести една монета од едно во друго куче. Победник е оној играч кој ќе ја земе последната монета. Кој од играчите во зависност од p и q има победничка стратегија?

82. На масата има 1234 камчиња. Пабло и Горјан ја играат следнава игра: прво Пабло зема парен број камчиња, најмалку две, но не повеќе од 100, а потоа Горјан зема непарен број камчиња, најмалку едно, но не повеќе од 99. Потезите се прават наизменично, почитувајќи ги дадените услови. Играчот победува ако ги земе сите камчиња или ако другиот играч не може да го одигра својот потез. Кој има победничка стратегија, т.е. кој може да победи без разлика како ќе игра противникот.

83. На табла се напишани $n \geq 12$ последователни природни броеви. A и B наизменично бришат по еден број од таблата, се додека на таблата не останат само два броја a и b. Играчот A е победник ако $\text{NZD}(a,b) = 1$, ако пак

$\mathrm{NZD}(a,b) > 1$ победник е играчот B. Кој од играчите има победничка стратегија?

84. Двајца играчи A и B ја играат следнава игра: A и B наизменично запишуваат по една цифра се додека не запишат шестцифрен број, при што ниту една цифра не смее да се повтори. Првата цифра мора да биде различна од нула. Играчот A игра прв, а цифрите се пишуваат реоследно од лево кон десно. Играчот A победува ако запишаниот број е делив со 2, 3 или 5, а во спротивно побдува играчот B. Докажи дека играчот A има победничка стратегија, т.е. може да бжпобеди бржез разлика како игра B.

85. Играчите A и B наизменично ставаат еден од знаците $+$, $-$ или $\cdot$ на празните места меѓу броевите 1 2 3 ... 99 100. Докажи дека играчот A секогаш може да го направи крајниот резултат:
а) парен б) непарен

86. Почнувајќи од $n = 2$, двајца играчи A и B наизменично на дадениот број (добиен во претходниот чекор) му додаваат негов вистински делител. Победува оној играч по чиј потег добиениот број ќе биде поголем или еднаков на 2010. Кој од двајцата играчи има победничка стратегија?

87. Играчите A и B, наизменично на табла запишуваат природни броеви помали или еднакви на даден природен број n. Притоа не е дозволено да се запишуваат броеви кои се делители на броевите кои веќе се запишани на таблата. Играта ја губи играчот кој не може да направи правилен чекор. Кој од играчите има победничка стратегија за $n = 10$.

88. Играчите A и B имаат на располагање две купчиња со по p и q монети. Тие играат наизменично, а прв игра играчот A. Еден чекор се состои во отстранување на едно од купчињата и поделба на останатото купче на две купчиња. Играта ја губи оној кој не може да направи чекор. Кој од играчите во зависност од p и q има победничка стратегија?

89. Двајца играчи A и B имаат купче со n монети. Тие играат наизменично, прво A, па B. Во првиот чекор A зема s, $0 < s < n$ монети. Во секој нареден чекор играчот што е на потег може да земе било кој број на монети од купчето, ако тој број е делител на бројот на земени монети во претходниот чекор. Играта ја губи играчот кој не може да направи правилен чекор. Кој од играчите, во зависност од n, има победничка стратегија?

90. Даден е полиномот $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Двајца играчи A и B наизменично, (прво A, па B) еден од коефициентите a,b,c,d (по свој избор) го заменуваат со цел број. Играчот A е победник ако добиениот полином по четвртиот чекор нема целобројни решенија, во спротивно победник е играчот B. Кој од играчите има победничка стратегија?

91. Даден е квадрат со димензии 9×9. Киро и Ласте ја играат следнава игра. Киро го расекува квадратот на правоаголници со целобројни димензии, така што на секој правоаголник барем една од димензиите е еднаква на 1. Потоа Ласте избира природен број $k\in\{1,2,...,9\}$ и Киро ќе му даде толку денари колку што изнесува вкупната плоштина на сите правоаголници со димензии $1\times k$ и $k\times1$. Ласте го избира k така што од Киро добива што е можно повеќе денари, а Киро сака да заштеди и притоа на Ласте да му даде што е можно помалку денари. Определи го најмалиот можен број денари кои Киро ќе му ги даде на Ласте.

92. Двајца играчи ставаат жетони на табла со димензии 2001×2001. Играчот може да стави жетон на празно место на таблата ако и само ако во соодветните ред и колона заедно има повеќе од 1000 слободни полиња. Играта ја губи играчот кој не може да стави жетон. Кој играч има победничка стратегија?

93. Дора, Магдалена и Ласте играаат „игра зборови“. Дора је започнала играта така што рекла еден збор. Магдалена го повторила тоа што рекла Дора и додала нов збор. Ласте ги повторил зборовите кои ги кажале Дора и Магдалена и додал нов збор. Последователно Дора, Магдалена и Ласте ја продолжиле игрта се додека еден од нив на згрешил. Тој што згрешил, кога дошол на ред да игра, успешно повторил 10 збора, а тогаш заборавил кој е следниот збор, така што не ја продолжил реченицата. Определи кој згрешил и колку зборови требало точно да повтори за да играта може да продолжи, ако вкупниот број точно изговорени зборови за време на оваа игра бил 4960.

94. Ана и Томи играат игра. Томи прво бира природен број меѓу 0 и 999, вклучувајќи ги и ови броеви, а потоа го удвојува и го соопштува добиениот број. Ана на добиениот број му додава 50 и го соопштува добиениот број. Потоа Томи го удвојува добиениот број, а Ана на добиениот број му додава 50 итн. Победник е оној кој последен ќе соопшти број помал од 1000. Определи го најмалиот почетен број кој Томи го води до победа.

95. Ана е Неда играат игра така што во секој потез, откако едната ќе каже број n, другата мора да каже некој број од облик ab каде a и b се природни броеви за кои важи $a+b=n$. Потоа играта продолжува на ист начин со последниот кажан број. Определи ги сите броеви со кои може да започне играта ако после извесен број чекори едната од нив го кажала бројот 2018.

96. Во едно теме на коцката се наоѓаат два пајаци, а во спротивното теме мува. Пајаците и мувата се движат исклучиво по рабовите на коцката со еднакви константни брзини. Во секој моментна пајаците им е позната положбата на муваат и на мувата и се познати положбите на пајаците. Докажи дека пајаците може да ја фатат мувата. Се смета дека муваат е фатена ако се најде во иста точка како и еден од пајаците.

13.4. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

97. Во сфера со радиус 1 летаат 9 муви. Да се докаже дека постојат две муви кои се наоѓаат на растојание не поголемо од $\sqrt{3}$.

98. Точките во рамнината се обоени во една од две бои. Докажи дека постојат две точки кои се на растојание 1 и се обоени во иста боја.

99. Докажи дека од произволно избрани 7 природни броеви, секогаш постојат два броја такви што или нивниот збир или нивната разлика завршува на нула.

100. 51 ученик решавале тест со 10 задачи. Филип имал најмногу точно решени, решил 7 задачи. Да се докаже дека постојат 8 ученици кои решиле ист број задачи.

101. Во табла 8×8 со полиња со должина на страна 1 произволно се распоредени 70 точки така што никои три не лежат на иста права. Докажи дека постојат 3 точки кои формираат триаголник чија плоштина не е поголема од 1.

102. Множеството броеви $\{1,2,...,20\}$ е разбиено на четири подмножества. Докажи дека постои група чиј збир на броеви не е помал од 53.

103. Дадени се $n+1$ точки во рамнината. Докажи дека при било кое нивно поврзување со отсечки, секогаш постојат две точки од кои поаѓаат еднаков број на отсечки.

104. Докажи дека од 65 произволно избрани цели броеви, секогаш може да се изберат 9 броеви чиј збир е делив со 9.

105. Дадени се n природни броеви. Докажи дека може да се изберат неколку броеви од нив така што нивниот збир е делив со n .

106. Во квадрат со страна 2, на случаен начин распоредени се 49 точки. Докажи дека постојат 13 од дадените точки кои можат да се покријат со круг со радиус $\frac{3}{4}$.

107. Во рамностран триаголник со должина на страна $2\,cm$ се избрани 33 точки. Докажи дека постојат 3 точки кои може да се покријат со круг со радиус $r=\frac{3}{10}\,cm$.

108. Во рамностран триаголник со должина на страна $3\,cm$ се наоѓаат 20 точки. Докажи дека постои круг со радиус $\frac{3}{5}\,cm$ кој покрива најмалку 3 од дадените точки.

109. Во коцка со страна 7 произволно се сместени 344 точки. Докажи дека меѓу дадените точки постојат две кои се на растојание не поголемо од $\sqrt{3}$.

110. Во рамнината се дадени 5 точки со целобројни координати. Докажи дека постои отсечка со краеви меѓу дедените точки така што и нејзината средина е со целобројни координати.

111. Докажи дека во круг со радиус $9\,cm$, не можат да се распоредат 400 точки така што растојанието меѓу било кои две точки да биде не помало од $1\,cm$.

112. Да се докаже дека помеѓу било кои $n+1$ природни броеви не поголеми од $2n$, постојат два броја такви што едниот број е делител на другиот.

113. Во рамнина се дадени 30 точки такви што меѓу било кои три постојат две кои се на растојание не поголемо од 1. Да се докаже дека постојат најмалку 15 точки кои можат да се покријат со круг со радиус 1.

114. Во внатрешноста на квадрат со должина на страна 38 се сместени 100 конвексни многуаголници такви што плоштината на секој од нив е најмногу π, а периметарот е најмногу 2π. Докажи дека во внатрешноста на овој квадрат постои круг со радиус 1 кој не сече ниту еден од дадените 100 многуаголници.

115. Дали е можно во квадратна таблица 2009×2009, да се разместат броевите 1, 2 и 3 така што сумите на броевите во секоја колона, секоја редица и на двете дијагонали бидат меѓусебно различни?

116. Во рамнината се дадени 2008 точки, така што меѓу било кои три точки постојат две чие растојание е помало од 1. Докажи дека сите точки можат да се покријат со два круга со радиус 1.

117. Секоја точка од Декартов координатен систем со целобројни координати е обоена во една од три бои. Докажи дека постои правоаголник со страни паралелни со координатните оски, чии темиња се обоени во иста боја.

118. Дадени се 51 различни двоцифрени броеви (едноцифрените броеви ги сметаме за двоцифрени со прва цифра 0). Докажи дека меѓу тие броеви постојат 6 броја така што секои два од нив имаат различни цифри на соодветни места, т.е. нивните цифри на единици и нивните цифри на десетки се различни.

119. Во кутија се наоѓаат десет топчиња означени со броевите од 1 до 10. Петар извлекува едно топче и на таблата го запишува збирот на редниот број на извлекување и бројот запишан на топчето. Докажи дека по извлекувањето на сите топчиња, меѓу броевите запишани на таблата постојат барем два броја чии цифри на единиците се еднакви.

120. Докажи дека меѓу било кои 13 реални броеви, постојат два броја a и b за кои важи $|a-b|\leq(2-\sqrt{3})|1+ab|$.

121. Во внатрешноста на коцка со раб 21 произволно се избрани 342 точки. Докажи дека во внатрешноста на дадената коцка може да се смести топка со волумен 42 која во својата внатрешност не содржи ниту една од дадените точки.

122. Во просторот се дадени 9 точки со целобројни кординати. Докажи дека постои отсечка со краеви во некои две од дадените точки така што нејзината средишна точка исто така има целобројни координати.

123. Од броевите 1, 2, 3, ..., 100 избрани се 51 број. Докажи дека еден од избраните броеви е делител на другиот.

124. Докажи дека во произволен конвексен четириаголник со плоштина P и периметар L може да се смести круг со радиус $\frac{P}{L}$.

125. Дадени се 34 произволно избрани природни броеви, кои не се поголеми од 50. Докажи дека секогаш може да се изберат два од нив така што едниот број е двапати поголем од другиот број.

126. Дадена е аритметичката прогресија $1,4,7,...,100$. Докажи дека од произволно избрани 20 броеви секогаш постојат два од нив чиј збир е 104.

127. Произволно е избрано множество од 10 броеви, сите помали од 100. Докажи дека постојат две непразни подмножества од ова множество чии збирови на елементи се еднакви.

128. Група од 7 луѓе имаат вкупно 332 години. Докажи дека постојат три члена на групата чиј збир на години не е помал од 143.

129. Да се докаже дека меѓу било кои 52 природни броја, постојат два броја такви што разликата на нивните квадрати се дели со 100.

130. Во таблица 10×10 запишани се природни броеви така што разликата на било кои два броја запишани во две соседни полиња не е поголема од 5, (две полиња се соседни ако имаат заедничка страна). Докажи дека меѓу дадените броеви постојат два еднакви броја.

131. Еден ученик се подготвувал 77 дена за натпревар по математика. Тој решавал најмалку по една задача на ден, и вкупно решил не повеќе од 132 задачи. Докажи дека постојат неколку последователни денови во кои тој решил точно 21 задача.

132. Нека a е природен број кој е заемно прост со 2 и 5. Докажи дека постои степен на бројот a кој завршува на $\underbrace{00...01}_{2008}$.

133. Докажи дека од кои било 10 двоцифрени броеви секогаш може да избереме две дисјунктни подмножества броеви чии суми на елементи се еднакви.

134. Шест точки произволно се разместени во правоаголник со димензии 3×4. Докажи дека меѓу дадените точки постојат две кои се наоѓаат на растојание не поголемо од $\sqrt{5}$.

135. Докажи дека меѓу било кои 70 природни броеви не поголеми од 200, постојат два броја чија разлика е или 4 или 5 или 9.

136. Во квадрат со страна 1 на произволен начин сместени се 15 точки. Да се докаже дека во внатрешноста на квадратот може да се смести круг со радиус $\frac{1}{8}$ кој не содржи ниту една од дадените 15 точки.

137. На некое туристичко патување вкупно имало 17 туристи. Познато е дека било кои двајца од нив или се пријатели, или се непријатели или воопшто не се познаваат. Докажи дека меѓу овие 17 луѓе постојат барем тројца кои се пријатели или постојат барем тројца кои се непријатели или постојат барем тројца кои меѓусебно не се познаваат.

138. Во рамнината се дадени 1997 точки. Докажи дека има најмалку 32 различни растојанија меѓу дадените точки.

139. Во координатната рамнина се земени 20 точки со целобројни координати, при што некои три точки не се колинеарни. Докажи дека постои триаголник чии темиња се меѓу означените точки и чие тежиште исто така има целобројни координати.

140. Дадена е табла со димензии 10×10. За две полиња велиме дека се пријателски ако имаат барем едно заедничко теме. Во секое поле од таблата е запишан природен број помал или еднаков на 10, така што броевите во пријателските полиња се заемно прости. Докажи дека постои број кој на таблата е запишан најмалку 17 пати.

141. Дадени се десет сложени природни броеви помали од 840. Докажи дека меѓу нив постојат најмалку два броја кои не се заемно прости.

13.5. БОЕЊЕ И ПОКРИВАЊЕ

142. Секоја од 25 дадени прави е обоена во една од трите бои: црвена, бела или сина. Ако секоја од овие прави го дели дадениот квадрат на два четириаголници чии плоштини се однесуваат како $2:3$, докажи дека барем 3 прави со иста боја минуваат низ иста точка.

143. Во рамнината се означени 15 точки. Некои точки се обоени црвено, некои сино, а останатите точки се обоени зелено. Познато е дека бројот на црвените точки е поголем и од бројот на сините и од бројот на зелените точки. Збирот на должините на сите отсечки чија една крајна точка е црвена, а другата

крајна точка е зелена е еднаков на 31. Збирот на должините на сите отсечки чија една крајна точка е зелена, а другата крајна точка е сина е еднаков на 25. Збирот на должините на сите отсечки чија една крајна точка е сина, а другата крајна точка е црвена е еднаков на 5.
Определи по колку точки се обоени во секоја од боите црвена, сина и зелена.

144. Дадени се 27 точки, распоредени во 9 колони и 3 реда. Секоја точка е обоена црвено или сино. Докажи дека постои правоаголник со истобојни темиња меѓу дадените точки.

145. Докажи дека меѓу кои било 6 луѓе секогаш постојат тројца кои меѓу себе се познаваат или постојат тројца кои меѓу себе не се познаваат.

146. Шест точки се поврзани со отсечки кои се произволно обоени во две бои (црвена и сина). Докажи дека постои затворена патека од четири отсечки кои се обоени во една иста боја.

147. Нека C е природен број помал од 2017. Точно C темиња на правилен 2017-аголник се црвени, а сите останати темиња се сини. Докажи дека бројот на рамнокраки триаголници чии темиња се истобојни не зависи од распоредот на сините и црвените темиња.

148. Нека $n \in \mathbb{N}$. Темињата на правилен $2n-$аголник наизменично се обоени црвено и сино, па се повлечени сите негови страни и дијагонали. Ако бројот на отсечките кои поврзуваат истобојни темиња е еднаков на 3192, определи го бројот на отсечките кои поврзуваат разнобојни темиња.

149. Секој природен број е обоен во една од две бои, црна или бела. Збирот на било кои два различно обоени броеви е обоен во црна боја, додека нивниот производ е број кој е обоен во бела боја. Во каква боја е обоен производот на два бело обоени броја. Определи ги сите вакви боења?

150. Рамнината е поделена на еднакви квадратчиња, некои од кои се обоени со црвена боја. Во секој 2×3 правоаголник има точно две црвени квадратчиња. Разгледај произволен 9×11 правоаголник. Колку квадратчиња во него се црвени?

151. Полињата на табла со димензии $N\times N$ се обоени во црна и бела боја така што полињата кои имаат заедничка страна се различно обоени и барем едно поле во аглите на таблата е обоено во црна боја. Во еден чекор се избира квадрат со димензија 2×2 и сите четири полиња во внатрешноста на тој квадрат ја менуваат бојата така што белите полиња стануваат црни, а црните полиња стануваат бели. Определи ги сите природни броеви $N>1$ за кои во конечна низа од опишаните чекори може да се постигне сите полиња кои на почетокот биле црни да бидат бели и сите полиња кои на почетокот биле бели да бидат црни.

152. Полињата на табла 2×50 треба да се обојат во две бои, црвена и сина, така што ќе бидат исполнети следниве услови:
   1) На таблата се појавуваат двете бои,
   2) Со отстранување на сите црвени полиња таблата останува сврзана,
   3) Со отстранување на сите сини полиња таблата останува сврзана.
   Таблата е сврзана ако од секое поле може да се дојде до секое друго поле, преминувајќи во секој чекор од поле на нему соседно поле. Соседни се полињата кои имаат заедничка страна.
   На колку начини може да се обои таблата?

153. Ги разгледуваме сите правоаголни табли, поделени на единечни полиња, чии полиња може да се обојат така што во секој ред има точно 14 сини полиња, во секоја колона има точно 10 црвени полиња и на целата табла има точно 3 полиња кои не се ниту црвени ниту сини. Определи ги димензиите на таква табла која има најмал вкупен број полиња.

154. Дали е можно секое поле на квадратна 8×8 табла да се обои во една од 16 бои така што за секои две бои постојат две соседни полиња обоени во тие две бои? Две полиња се соседни ако имаат заедничка страна.

155. Конечен број полиња на бесконечна квадратна мрежа се обоени со црна боја Докажи дека во таа рамнина може да се изберат конечно многу квадрати кои ги задоволуваат следниве услови:
   1) Внатрешностите на секои два квадрати се дисјунктни,
   2) Секое црно обоено поле лежи во некој од тиие квадрати.
   3) Плоштината на црните полиња во секој од одбраните квадрати е најмалку $\frac{1}{5}$, а најмногу $\frac{4}{5}$ од плоштината на тој квадрат.

156. Темињата на правилен 2005-аголник се обоени со црвена, бела и сина боја. Дозволено пребојување е пребојувањето во кое две соседни темиња, кои се обоени со различни бои, ги боиме во третата боја.
   а) Докажи дека постои конечна низа дозволени пребојувања по која сите темиња на многуаголникот се истобојни.
   б) Дали крајната боја е еднозначо определена со почетниот распоред на боите на темињата?

157. Дадена е табла со димензии 1000×1000. Дали може на таблата да се обојат точно 125 полиња така што секое од обоените полиња има непарен број обоени соседи? За две полиња сметаме дека се соседни ако имаат заедничка страна.

158. Секое поле на 1000×1000 табла е обоено со црна или бела боја. Вкупниот број црни полиња е за 2012 поголем од вкупниот број бели полиња. Докажи дека постои квадрат 2×2 кој содржи три полиња од една боја и едно поле од друга боја.

159. Полињата на единечна квадратна мрежа со големи димензии се обоени како шаховската табла, наизменично црно и бело. Од оваа мрежа е исечен многу-

аголник чии страни лежат на линиите на квадратната мрежа. Нека многуаголникот се состои од B бели и C црни полиња, а негиот раб од b бели и c црни единечни отсечки. Докажи, дека важи $c-b=4(C-B)$.

160. Во еден град има M улици и N плоштади, $M,N\in\mathbb{N}$ и $M>N$. Секоја улица поврзува два плоштади и не минува низ други плоштади. Градоначалникот сака да го смени изгледот на градот. Оваа година за прв пат секоја улица ќе биде обоена црвено или сино. Договорено е секоја година да се избере еден плоштад, и на сите улици кои водат до тој плоштад истовремено да им се смени бојата од црвена во сина и обратно. Докажи дека градоначалникот може да ги избере боите на улиците така што во иднина не може да се случи сите улици да бидат обоени со иста боја.

161. а) Докажи дека табла 4×4 може да се обои во две бои така што за секој избор на два реда и две колони четирите полиња кои се пресекот на избраните редови и колони не се обоени со иста боја.
б) Докажи дека горенаведеното својство не важи за табла 5×5.

162. Дадена е таблица $5\times n$ на која секое поле е обоено во црвена или сина боја. Определи го најмалиот n за кој секогаш можат да се изберат три реда и три колони такви што сите девет полиња во нивниот пресек се обоени со иста боја.

163. Нека n е природен број, $n>1$. Квадратчињата на $2n\times2n$ табла се обоени во црвена или сина боја така што за секои два реда постојат точно n колони со својство да двете квадратчиња во пресекот на двата реда и една од колоните се обоени со иста боја. Докажи дека n е парен број.

164. Во табела $n\times n, n>1$ треба да се запишат броевите 1, 2, 3 и 4 така што секои четири полиња кои имаат заедничко теме содржат четири различни броја. На колку начини тоа може да се направи?

165. Даден е $n\times p$ правоаголник со np единечни квадратчиња. На почетокот m квадратчиња се црни, а останатите се бели. Дозволена е следнава операција. Бело квадратче кое има заедничка страна со најмалку две црни квадратчиња може да се обои во црно. Определи го најмалиот можен m тако шо постои почетна положба од која со примена на дозволената операција може сите квадратчиња да станат црни.

166. Две еднакви шаховски табли (8×8) имаат заеднички центар и едната целосно ја покрива другата. Едната табла ја ротираме околу центарот за агол 45°. Определи ја плоштината на пресекот на сите црни полиња на едната табла со сите црни полиња на другата табла, ако плоштината на едно поле е 1.

167. Елеонора има многу коцки чии сите страни се бели. Прво одвои една коцка и ја стави во празна кутија. Потоа зема една по една коцка и бои некои нејзини

страни со зелена боја, но така што таа коцка се разликува од сите коцки кои се веќе во кутијата, па истата ја става во кутијата. Колку најмногу коцки може да има во кутијата.

168. Горјан од n^3 единечни коцки составил коцка со должина на раб n и потоа некои од шесте страни на големата коцка ги обоил, а некои не ги обоил. Кога ја раставил големата коцка открил дека точно 1000 единечни коцки немаат ниту една обоена страна. Докажи, дека ова е навистина можно и определи го бројот на страните кои Горјан ги обоил.

169. Од 512 мали сиви коцки составена е коцка $8\times8\times8$, а потоа три страни на оваа коцка се обоени бело, а другите три страни се обоени црвено. Ако секоја од осумте мали коцки во темињата на големата коцка има барем една бела и барем една црвена страна, определи го вкупниот број мали коцки кои имаат барем една бела и барем една црвена страна.

170. а) Докажи дека темињата на $3n-$ страна призма може да се обојат со три бои така што секое теме ќе биде поврзано со рабови со темиња обоени во сите три бои.
б) Докажи дека ако темињата на $n-$ страна призма може да се обојат во три бои така што секое теме ќе биде поврзано со рабови со темиња обоени во сите три бои, тогаш $3|n$.

171. Имаме 8 коцки со должина на раб 1 чии 24 страни се обоени сино, а преостанатите 24 страни се обоени црвено. Докажи дека од овие коцки може да се состави коцка $2\times2\times2$ на чија површина ќе има еднаков број сини и црвени 1×1 квадрати.

172. Секоја точка од страните на даден рамностран триаголник ABC е обоена во една од две бои. Дали постои правоаголен триаголник чии темињата се некои три точки од страните на триаголникот (вклучувајќи ги и темињата на дадениот триаголник), кои се обоени во една иста боја.

173. Секоја точка на една права е обоена во една од две бои, сина или црвена. Докажи дека постои отсечка така што нејзините крајни точки и нејзината средна точка се обоени во иста боја.

174. Секоја точка од рамнината е обоена во една од две бои, сина и црвена. Докажи дека во рамнината постои рамностран триаголник чии темиња се обоени во една иста боја.

175. Секоја точка од рамнината е обоена во една од трите бои: црвена, бела или сина. Докажи дека во рамнината постојат две еднобојни точки кои се оддалечени $1cm$.

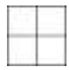
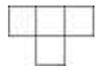
176. Докажи дека секој многуаголник со периметар 1 може дасе покрие со круг со радиус $\frac{1}{4}$.

177. Во внатрешноста на кружница со радиус R се наоѓаат n мали кружници со радиуси $r_1, r_2, ..., r_n$ такви што $r_1 + r_2 + ... + r_n > 4R$. Докажи дека постои права која сече најмалку 5 мали кружници.

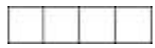
178. Во рамнината се дадени 1997 точки, распоредени така што секои три точки определуваат триаголник со плоштина помала или еднаква на 1. Докажи дека постои круг со плоштина 4 кој ги содржи дадените точки.

179. Докажи дека рамностран триаголник не може да се покрие со два помали рамнострани триаголници.

180. Дали шаховска табла со димензии 8×8 , може да се покрие со 15 T -тетрамина и едно квадратно тетрамино (цртеж десно).

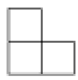
181. Дали табла 11×11, од која е отстрането едно аглово поле, може да се покрие со прави тетрамина (цртеж десно)?



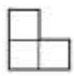
182. Во квадратна мрежа 8×8 , една аглова клетка е обоена во црна боја. Додека останатите 63 клетки се обоени во бела боја. Дозволено е пребојуваење на даден ред или колона. Дали може после конечен број пребојувања сите клетки на мрежата да бидат обоени во бела боја.

183. Шаховска табла 8×8 е разделена на 13 правоаголници со страни паралелни на страните на таблата. Дали овие правоаголници можат да бидат сите различни меѓу себе?

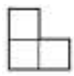
184. Квадратна табла со димензии 5×5 поделена е на единечни полиња. На таблата се поставени аголни тримина (види цртеж), така што само едно поле на таблата останало непокриено. Определи ги сите полиња на таблата кои може да останата непокриени при поставување на тримина.



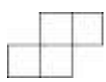
185. За кои природни броеви правоаголна $9\times n$ табла може да се покрие со аголни тримина, кои не се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата?



186. На колку начини во две бои може да се обојат полињата на табла со димензии 2×2016 така што да не постојат три еднобојни полиња кои истовремено може да се покријат со тримино од обликот прикажан на цртежот десно? Тетраминото може да се ротира.



187. Дали е можно во квадратна таблица 6×6 да се разместат броевите од 1 до 36, така што збирот на броевите кои се наоѓаат во секое *S-тетрамино* (во било која позиција) е делива со 9?



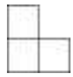
188. На табла се поставени a бели, b црни и c црвени топчиња. Во еден чекор , можеме да избереме било кои две топчиња со различна боја и секое од нив да

го замениме со топче обоено во преостанатата боја. Определи го условот кој треба да го задоволуваат a, b и c така што по конечене број чекори, сите топчиња на таблата да бидат обоени во една иста боја.

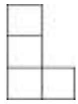
189. Дадена е шаховска табла, на која е отстрането горното лево аголно квадратче. Дали може оваа табла да се препокрие со прави тримина?

190. Дали може табла 50×50, да се покрие со T -тетрамина?

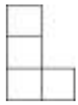
191. На секое поле на шаховска табла, запишан е број. Познато е дека збирот на броевите на секои три полиња кои можат да се покријат со L -тримино (во било која позиција) е еднаков на 3. Да се докаже дека сите броеви на таблата се еднакви на 1.



192. Дали може квадратна 8×8 плоча од која се отстранети аголните полиња да се покрие со L-тетрамина (цртеж десно).



193. Дадена е табла $n\times n$ така што четирите аглови полиња се отстранети. За кои природни броеви n, дадената табла може да се покрие со L -тетрамина?



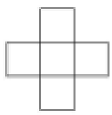
194. Квадрат 23×23 целосно е покриен со 1×1, 2×2 и 3×3 фигури. Колку најмалку 1×1 фигури е потребно за да постои даденото покривање?

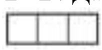
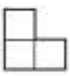
195. Табла со димензии 6×6 е покриена со домина. Да се докаже дека меѓу 5-те хоризонтални и 5-те вертикални прави со кои е поделена таблата постои права која не пресекува ниту едно домино.

196. Дали табла со димензии 10×10, може да се покрие со прави тетрамина?

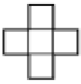
197. Под во форма на правоаголник е поплочен со плочки со димензии 2×2 и 1×4. Една плочка случајно се скршила, но постои една плочка вишок од останатата форма. Дали може со прередување, подот да се покрие со дадените плочки.

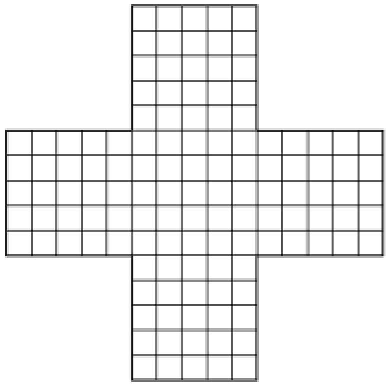
198. Дадена е табла со 2016 редови и 2017 колони. Дали е можно во последната колона на оваа табла да се отстранат две полиња така што преостанатиот дел од таблата без преклопување може да се покрие со фигурите прикажани на цртежот десно? Дозволено е фигурите да се ротираат.



199. Од квадратна плоча $n\times n$ се отстранети два дисјунктни квадрати 2×2. Дали може остатокот од плочата да се покрие со фигури од облиците  и  без тие да се преклопуваат или излегуваат надвор од плочата?

200. Дефектна шаховска $d \times d$ табла е шаховска $d \times d$ табла од која е отстрането едно поле (било кое). Докажи дека секоја дефектна $2^n \times 2^n, n \in \mathbb{N}$ шаховска табла може да се покрие со аголни тримина.

201. Фигурата  која е составена од пет единечни квадратлиња ја нарекуваме *плус*. На колку начини плусот може да се постави на табла со ист облик која е составена од $5 \cdot 5^2$ единечни квадратчиња, така што таа ќе покрива точно пет единечни квадратчиња.



13.6. РАЗБИВАЊЕ НА БРОЕВИ

202. Определи го бројот на решенија на равенката $x + y + z = 24$, за кои важи $1 \le x \le 5$, $12 \le y \le 18$, $-1 \le z \le 12$.

203. Бројот на решенија на равенката $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$ во множеството природни броеви е C_{n-1}^{k-1}. Докажи!

204. Бројот на решенија на равенката $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$ во множеството $\mathbb{N}_0$ е C_{n+k-1}^{k-1}, т.е. C_{n+k-1}^{n}. Докажи!

205. Бројот на решенија на равенката $x_1 + x_2 + ... + x_k = n \quad ...(1)$ во множеството $\mathbb{N}_0$, при што $x_1 \ge 1$ е C_{n+k-2}^{k-1}, т.е. C_{n+k-2}^{n-1}. Докажи!

206. Бројот на целобројни решенија на равенката $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$, при што се задоволени условите $x_1 > a_1$, $x_2 > a_2, ...,$ $x_k > a_k$ е $C_{n-(a_1+a_2+...+a_k)}^{k-1}$. Докажи!

207. Определи го бројот на решенија на равенката $x_1 + x_2 + x_3 = 7$.
а) Во множеството природни броеви.
б) Во множеството ненегативни цели броеви.

208. Определи го бројот на целобројни решенија на равенката $x + y + z = 20$, при што $x > 1$, $y > 2$ и $z > 3$.

209. Определи го бројот на решенија на равенката $a+b+c+d+e=30$.
а) Во множеството природни броеви.
б) Во множеството ненегативни цели броеви.

210. Докажи дека равенките $x_1+x_2+...+x_7=13$ и $x_1+x_2+...+x_{14}=6$ имаат еднаков број на решенија во множеството ненегативни цели броеви.

211. На колку начини 20 топчиња може да се распоредат во 7 кутии.

212. Да се определи бројот на петцифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 8.

213. Да се определи бројот на сите броеви поголеми од 732, кои имаат најмногу 5 цифри и чиј збир на цифри е еднаков на 7.

214. Во множеството природни броеви да се определи бројот на решенија на равенката $x+y+z=7$, каде $x\leq 3$, $y\leq 4$, $z\leq 5$.

215. Во еден сад има 9 бели, 4 црвени и 7 црни топчиња. На колку различни начини може да се изберат 5 од нив.

216. Множеството природни броеви $\{1,2,...,9\}$ е разбиено на три групи (Разбивање значи поделба на дадено множество на подмножества кои меѓу себе се дисјунктни а нивната унија е самото множество). Докажи дека постои барем една група чиј производ на броеви е помал од 72.

217. Во еден парламент секој пратеник има најмногу три непријатели. Докажи дека парламентот може да се подели на две групи така што секој пратеник има најмногу еден непријател во групата во која што се наоѓа.

218. Колку природни броеви има меѓу 100 и 1000000 кои имаат збир на цифри еднаков на 5.

219. На колку начини 20 топчиња може да се распоредат во 7 кутии, така што во секоја од кутиите да има барем по едно топче.

220. На колку начини 20 топчиња може да се распоредат во 7 кутии, така што во секоја од кутиите да има барем по две топчиња.

221. Определи бројот на целобројни решенија на равенката $a+b+c+d=30$, при што $a,b,c,d>5$.

222. Андреј, Пабло и Горјан треба да поделат 30 бонбони. На колку начини може да се направи поделба на бонбоните ако:
а) Андреј треба да добие најмалку 4 , а Пабло најмалку 10 бонбони.
б) Секој од нив треба да добие по најмалку 5 бонбони.

223. Во множеството природни броеви определи го бројот на решенија на равенката $x+y+z=15$, каде $x\leq 5$, $y\leq 6$, $z\leq 8$.

224. Определи го бројот на решенија на равенката $x+y+z=24$, за кои важи $1\leq x,y,z\leq 9$.

225. Определи го бројот на рамнокраките трапези, чии основи се со различни должини, чии должини на страни се природни броеви, а периметарот им е еднаков на 2010.

226. Определи го бројот на точки $T(x,y)$ со целобројни координати x и y за кои важи неравенството

$$|x|+|y|\leq 20.$$

227. Колку различни целобројни решенија има неравенката

$$|x|+|y|<100.$$

13.7. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

228. Дадена е табла со димензии 10×9. Колку квадрати се содржани на оваа табла.

229. Марко нацртал правоаголник со димензии 20×15 и го поделил на единечни квадрати. Колку квадрати добил Марко?

230. На кружница се означени 3000 точки. Во една од овие точки се наоѓа скакулец. Со секој свој скок скакулецот прескокнува една или две точки во насока на движењето на стрелката на часовникот и застанува на следната означена точка. Определи колку најмалку скокови направил скакулецот ако на секоја означена точка застанал барем еднаш и се вратил во почетната точка.

231. На некои полиња на табла со димензии 2017×2017 се наоѓа по една бубамара, а останатите полиња се празни. Бубамарите се поместуваат на таблата, никогаш не ја напуштаат, според следниве правила. Секоја бубамара секоја секунда се поместува на соседно поле (соседни се полињата кои имаат заедничка страна). Бубамарата која се поместува хоризонтално во следната секунда мора да се помести вертикално, а бубамарата која се поместува вертикално во следната секунда мора да се помести хоризонтално. Определи го најмалиот број бубамари така што независно од нивниот почетен распоред и независно од нивните поместувања можеме да бидеме сигурни дека во некој момент две бубамари ќе се најдат на исто поле.

232. Дадени се 300 јаболки, при што не постои јаболка која тежи повеќе од три пати од било која друга јаболка. Да се докаже дека јаболките може да се

разделат во групи од по 4 јаболки така што не постои група која тежи $\frac{3}{2}$ пати повеќе од било која друга група?

233. Природниот број го нарекуваме „среќен“ ако збирот на неговите цифри е 7. Нека $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е низата од „среќни“ броеви подредени во растечки редослед. Ако $a_n = 2005$, да се пресмета a_{5n}.

234. Во секоја клетка на дадена конечна табла запишани се броеви така што секој број е еднаков на аритметичката средина на броевите запишани во нему соседните клетки.(две клетки се соседни ако имаат заедничка страна). Ако сите броеви на таблата се различни меѓу себе, да се докаже дека најголемиот број на таблата е сместен во некоја странична клетка.

235. Даден е квадар со целобројни страни и волумен 2008. Да се определи најмалиот број на коцки со целобројни должини на кој може да се подели дадениот квадар.

236. Дали е можно дадена коцка да се подели на 2008 помали коцки.(коцките не мора да се со исти димензии). Одговорот да се образложи?

237. На кружница запишани се 8 броеви. Потоа меѓу секои два од нив запишан е нивниот збир, а почетните осум броеви се избришани. Дали е можно по оваа постапка на кружницата да останале броевите $11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$.

238. Дали е можно од произволно избрани 10 парни двоцифрени броеви да се изберат два пара броеви такви што нивните разлики се еднакви.

239. Петнаесет рибари уловиле вкупно 100 риби. Докажи дека постојат двајца од нив кои уловиле еднаков број на риби.

240. Дадени се 20 различни природни броеви помали од 70. Да ги разгледаме сите позитивни разлики на по два од тие броеви. Докажи дека меѓу тие разлики постојат барем четири еднакви.

241. Во група од 20 луѓе, постојат 51 различен пар на познаници. Докажи дека меѓу овие луѓе постои човек кој има најмалку 6 познаници.

242. Десет ученици на олимпијада по математика решиле 35 задачи. Познато е дека Андреј решил точно една задача, Пабло точно две задачи и Горјан решил точно три задачи. Докажи дека постои ученик кој решил не помалку од пет задачи.

243. Должините на страните на конвексен четириаголник се помали од 24. Нека P е произволна внатрешна точка за четириаголникот. Докажи дека постои теме на четириаголникот така што растојанието од тоа теме до точката P е помало од 17.

244. Докажи дека во било кој конвексен $2n$-аголник, постои дијагонала која не е паралелна со ниедна од страните на $2n$-аголникот.

245. Дадени се 10 отсечки чии должини се поголеми од 1, а се помали од 55. Докажи дека меѓу овие 10 отсечки, постојат три од кои може да се формира триаголник.

246. На круг со радиус 1, произволно се распоредени 7 точки чие меѓусебно растојание не е помало од 1. Докажи дека центарот на кругот е една од овие 7 точки.

247. Дадени се седум различни природни броеви не поголеми од 1706. Докажи дека постојат три од нив, на пример a, b, c, такви што $a < b + c < 4a$.

248. Дадени се $2n$ различни природни броеви $a_1, a_2, ..., a_{2n}$, не поголеми од n^2, $(n > 2)$. Докажи дека постојат три разлики $a_i - a_j$, $i, j \in \{1, 2, ..., 2n\}$ кои меѓу себе се еднакви.

249. Првите 2010 природни броеви во произволен редослед се запишани во низа, а потоа секој од нив е собран со редниот број во така добиената низа. Докажи дека меѓу добиените збирови постојат два чија разлика е делива со 2010.

250. Дадени се $2n$ топчиња, нумерирани со броевите $1, 2, ..., 2n$. Тие се сместени по едно топче во $2n$ кутии, исто така нумерирани со броевите $1, 2, ..., 2n$. Докажи дека постојат барем две топчиња така што разликата на збировите на редните броеви на топчињата и редните броеви на кутиите во кои што се наоѓаат е делива со $2n$.

251. На дадена права, надворешно за отсечката AB произволно се означени 45 точки. Дали може збирот од растојанијата на овие точки до точката A да е еднаков со збирот на растојанијата на овие точки до точката B.

252. Дали може 53 кутии со димензии $1 \times 1 \times 4$, да се сместат во кутија $6 \times 6 \times 6$.

253. Во група од 5 луѓе, меѓу било кои тројца постојат двајца кои се познаваат меѓу себе и двајца кои не се познаваат меѓу себе. Докажи дека овие 5 луѓе можат да се распоредат околу кружна маса така што секој соседен пар се познава меѓу себе.

254. Дадени се $2n+3$ точки во рамнината така што никои три не се колинеарни и никои четири не лежат на иста кружница. Докажи дека постои кружница која минува низ три од дадените точки и точно n од преостанатите точки се наоѓаат во нејзината внатрешност.

255. Нека $P_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ се произволни точки во внатрешноста на квадратот $ABCD$ со должина на страна 1. Докажи дека барем една од отсечките P_iP_k,

$i \neq k$ има должина помала од $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Докажи дека за секој $d < \frac{\sqrt{2}}{2}$ во внатрешноста на квадратот постојат пет точки такви што растојанието меѓу било две од нив е поголемо или еднакво на d.

256. Во рамнината се дадени пет точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 со целобројни координати. Докажи дека постои барем еден пар (P_i, P_j), $i \neq j$ таков што правата P_iP_j содржи некоја точка Q со целобројни координати која лежи меѓу P_i и P_j.

257. Во полињата на 3×3 квадрат треба да се запишат природни броеви така што производот на броевите во секој ред и во секоја колона биде 270. На колку начини тоа може да се направи?

258. Во квадратна 4×4 табла произволно се запишани броевите 1, 2, 3, ..., 16. Докажи дека постојат две соседни полиња во кои се запишани броеви чија разлика е делива со 4. (Соседни се полиња кои имаат заедничка страна.)

259. За разложувањето на шаховска табла со димензии 8×8 на дисјунктни правоаголници ќе велиме дека е разновидно ако се исполнетои следниве услови:
   - секој правоагоилник во разложувањето содржи еднаков број црни и бели полиња,
   - не постојат два правоаголника кои содржат еднаков број полиња.

   Определи го најголемиот број n за кој постои разновидно разложување на таблата со димензии 8×8 на n правоаголници.

260. На меѓународна конференција присуствуваат по два претставници од 27 земји. Докажи дека учесниците на конференцијата не може да седнат околу тркалезна маса така што меѓу секои два учесника од иста земја седат точно по 9 други учесници на конференцијата.

261. Шест населби се поврзани со трамвај и со тролејбус. Секој пар населби е поврзан или со трамвај или со тролејбус. Докажи дека постојат три населби такви што секои две од нив се поврзани со ист вид превоз.

262. Шест населби се поврзани со линии на трамвајски и тролејбуски јавен превоз. Секои две населби се поврзани во двете насоки само со еден вид линии. Докажи дека е можно циклично да се посетат четири населби користејќи само еден вид превоз, т.е. постојат населби A, B, C, D за кои линиите $A \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow C, C \leftrightarrow D, D \leftrightarrow A$ се сите од ист вид, тролејбуски или трамвајски.

263. Во една држава има повеќе од 7 градови. Докажи дека не постои мрежа од еднонасочни патишта со следниве својства:

   а) меѓу секои два града постои точно еден директен пат,

   б) за секои два града A и B постои точно еден град C во кој директно може да се стигне и од A и од B, и в) за секои два града A и B постои точно еден град D од кој директно може да се стигне и во A и во B.

264. Во некоја земја се наоѓаат три града A, B и C. Меѓу секои два града постојат по неколку патишта (најмалку еден) и сите патишта се двонасочни. Освен директните патни врски меѓу два града постојат и индиректни. Индиректните врски меѓу градовите X и Y се состојат од патиштата кои го поврзуваат градот X со трет град Z и патиштата кои ги поврзуваат градовите Z и Y. Познато е дека постојат вкупно 43 патни врски меѓу градовите A и B, и вкушно 29 патни врски меѓу градовите A и C. Колку вкупно патни врски може да има меѓу градовите A и C?

265. Во рамнината се дадени 1992 точки такви што меѓу нив нема три колинеарни точки. Докажи дека постојат 498 четириаголници чии темиња се дадените точки такви што никои два четириаголници не се сечат.

266. Дали на кружница може да се распоредат броевите 0, 1, 2, ..., 9 така што збирот на секои три последователни броја ќе биде
а) 13, б) 14, в) 15.

267. Докажи дека меѓу секои 79 последователни природни броеви постои барем еден чиј збир на цифри е делив со 13. Најди низа од 78 последователни природни броеви таква што збирот на цифрите на секој од нив не е делив со 13.

268. Дали може од секое деветчлено подмножество од множеството природни броеви да се изберат четири различни елементи a, b, c, d така што броевите $a+b$ и $c+d$ даваат ист остаток при делење со 20?

269. Нека N е природен број. Дадени се N тројки цели броеви r_j, s_j, t_j, за $1 \le j \le N$ такви што барем еден од нив е непарен број. Докажи дека постојат цели броеви a, b, c такви што $ar_j + bs_j + ct_j$ е непарен за најмалку $\frac{4N}{7}$ индекси.

270. На паралелните прави a и b се земени m и n точки, соодветно. Секоја од дадените точки на правата a со секоја од дадените точки на правата b определува отсечка. Определи го бројот на пресеците на така добиените отсечки, кои пресеци не лежат на дадените прави.

271. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ со должина на страна 20, дадени се точките $T_i, i = 1, 2, ..., 2000$ така што никои три точки од множеството $S = \{A, B, C, D\} \cup \{T_i, i = 1, 2, ..., 2000\}$ не се колинеарни. Докажи дека постои барем еден триаголник со темиња во множеството S чија плоштина е помала од $\frac{1}{10}$.

272. На кружницата се запишани $n \ge 3$ природни броеви такви што секој од нив е делител на збирот на неговите два соседни броеви. Да означиме

$$S_n = \frac{a_n + a_2}{a_1} + \frac{a_1 + a_3}{a_2} + \ldots + \frac{a_{n-2} + a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_n}.$$

Определи ја најголемата и најмалата можна вредност на S_n.

273. На еден остров живеат n домородци. Секои двајца се или пријатели или непријатели. Еден ден поглависата наредил на сите жители (вклучувајќи се и себе) да си направат и да носат камени огрлици, така што секои два пријатела во своите огрлици имаат барем по еден камен од ист вид, а сите камења во огрлиците на двајца непријатели се од различни видови. (Огрлицата може да биде и без камења). Докажи дека наредбата на поглавицата може да се изврши користејќи $[\frac{n^2}{4}]$ различни видови камења и дека таа не може да се изврши со помалку камења.

274. Одделение од 28 ученици за домашна добило 8 задачи. Секој ученик решил точно две задачи, но никои три ученици не решиле исти две задачи. Докажи дека секоја задача ја решиле ист број ученици. Колку?

275. Табела со димензии $n \times n$ е пополнета со нули и единици. Познато е дека не постојат четири единици кои се на места на темиња на правоаголник. Докажи дека на таблата има најмногу $\frac{n}{2}(1+\sqrt{4n-3})$ единици.

276. Определи го бројот на четирицифрените природни броеви кои се деливи со 7 и се такви што со замена на цифрите на единиците и илјадитите се добива број (не мора да е четирицифрен) кој е делив со 7.

277. За еден број ќе велиме дека е квазипрост ако е сложен но не е делив со 2, 3 или 5. Трите најмали квазипрости броеви се 49, 77 и 91. Постојат 168 прости броеви кои се помали од 1000. Определи го бројот на квазипростите броеви кои се помали од 1000.

278. Докажи, дека меѓу девет природни броеви, ниту еден од кои нема прост делител поголем од 6, постојат два броја чиј производ е точен квадрат на природен број.

279. Колку има природни броеви $c \le 1000000$ кои може да се запишат во обликот

$$c = a^2 + 3b^2 - 4ab$$

за некои цели броеви a и b различни од 0.

280. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 2016 и се такви што изразот $(n-2)^3 + n^3 + (n+2)^3$ не е делив со 18.

281. Определи го бројот на подредените парови природни броеви (m,k) за кои важи

$$20m = k(m - 15k).$$

282. Правоаголник со димензии 5×6 е поделен на осум правоаголници чии страни се паралелни на почетниот правоаголник, а должините на страните им се природни броеви. Докажи дека барем два од овие осум правоаголници се складни меѓу себе.

283. Дадена е табела со димензии 6×6.
а) Ако се означени било кои 9 полиња на табелата, докажи дека може да се изберат три редови и три колони кои ги содржат сите означени полиња.
б) Во табела означи 10 полиња така било три редови и било кои три колони од табелата да избереме, секогаш постои поле кое не се наоѓа ниту во избраните редови, ниту во избраните колони.

284. Во полињата на табла со димензии 100×100 се запишани броевите 1, 2, ..., 100 така што секој број се појавува 100 пати. Докажи дека постои ред или колона во кој има најмалку 10 различни броеви.

285. Во квадрат со плоштина P се распоредени 2005 фигури чиј збир на плоштини е поголем од $2004P$. Докажи дека постои најмалку една точка која е заедничка за сите фигури.

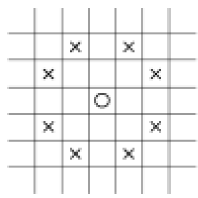
286. Нека n е природен број. На колку начини може табела со димензии $n\times n$ да се пополни со броевите $1, 2, -1, -2$ така што производот на броевите во секој ред биде еднаков на -2 и производот на броевите во секоја колона биде еднаков на -2?

287. На еден натпревар по математика учествувале n ученици и секој уеник решил точно три задачи. За секои два ученика постои точно една задача која ѝ двајцата ја решиле, а секоја задача ја решиле точно k ученици. Определи ги природните броеви n и k за кои ова е можно.

288. Докажи, дека било 2001-елементно подмножество на множеството $\{1, 2, 3, ..., 3000\}$ содржи три елементи такви што секои два од нив се меѓусебно заемно прости.

289. Горната десна четвртина на табла 8×8 е покриена со хартија. Колку најмногу топови можеме да поставиме на преостаниот дел од таблата така што тие меѓусебно нема да се напаѓаат? На колку начини тоа може да се направи? (Два топа меѓусебно се напаѓат ако се наоѓаат во ист ред или иста колона.)

290. Дали може скокач да помине по секое поле на табла со димензии 4×2012 и да се врати на почетното поле така што ќе стапне по еднаш на секое поле. Скокачот е фигура која се движи во шахот така што од полето означено со кругче може да се помести на едно од полињата означени со крвчиња.



291. Во координатен систем се означени сите целобројни точки (x, y) за кои $1 \leq x \leq 200$ и $1 \leq y \leq 100$. Определи го бројот на отсечките со должина $\sqrt{5}$ чии крајни точки се меѓу означените точки.
292. Определи го бројот на квадратните функции со коефициенти од множеството $S = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ и такви што немаат реални нули. .

293. На тениски турнир учествувале 2^n тенисери. Секој тенисер одиграл по еден меч со секој од останатите тенисери. Докажи, дека можеме да избереме $n+1$ тенисери и да ги подредиме во низа така што секој од нив ги победил сите тенисери кои во низата се наоѓаат после него.

294. На еден натпревар имало 30 стрелци. Секој стрелец стрела 16 пати во метата која е поделена на два дела, A и B. Ако го погоди делот A стрелецот добива 10 поени, а ако го погоди делот B добива 5 поени. На крајот на натпреварот е констатирано дека бројот на подоците во делот B е поголем од половината од вкупниот број стрелања, а вкупниот број промашувања е еднаков на вкупниот број погодувања на делот A. Докажи дека барем двајца стрелци освоиле ист број поени.

295. На колку начини дропката $\frac{2017}{2016}$ може да се прикаже како производ на две дропки од видот $\frac{n+1}{n}$, каде n е природен број? Редоследот на множителите не е важен.

296. Дали може квадрат да се подели на 2008 квадрати (не задолжително со исти должини на страни)? Ако може наведи пример, а ако не може докажи!

297. Множеството S содржи 100 природни броеви, секој од кои е помал од 200. Докажи дека постои непразно подмножество T од S такво што производот на броевите од T е точен квадрат.

298. За природниот број велиме дека е палиндром ако во декаден запис од десно на лево се чита исто како и од лево на десно. Определи го 2010-тиот по ред палиндром.

299. Квадратна табела $n \times n$ е пополнета со природните броеви од 1 до n^2, при што во првиот ред од лево на десно последователно се запишани броевите од 1 до n, во вториот ред од лево на десно последователно се запишани броевите од $n+1$ до $2n$, во третиот од $2n+1$ до $3n$ итн. Од оваа таблица се сече квадрат $m \times m, (m < n)$. Докажи дека удвоениот збир на броевите кои се наоѓаат во исечениот квадрат е делив со m^2.

14. РАВЕНКИ ОД ПОВИСОК СТЕПЕН

1. Користејќи погодна замена определи ги решенијата на равенката
$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1$$
кои се наоѓаат во интервалот $[0,1]$.

2. Определи ги реалните броеви a и b така што модулите на сите корени на равенката $x^3+ax^2+bx-1=0$ се еднакви на 1.

3. Во зависност од параметарот a реши ја равенката
$$x^4-2ax^2+x+a^2-a=0\ .$$
За кои реални броеви a сите решенија на равенката се реални?

4. Реши ја равенката: $x^4-x^3-10x^2+2x+4=0$

5. Во множеството реални броеви реши ја равенката
$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{x^8}+\frac{1}{x^{12}}-\frac{4}{x^7}=0\ .$$

6. Во множеството реални броеви реши ја равенката
$$x^3+x^2+x+x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}=6\ .$$

7. Реши ја равенката
$$(x^2+3x-4)^3+(2x^2-5x+3)^3=(3x^2-2x-1)^3\ .$$

8. Реши ја равенката: $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6$.

9. Реши ја равенката
$$\frac{x^4-4x^3+8x^2-16x+16}{x^4-16}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{25\cdot 26}\ .$$

10. Во множеството реални броеви реши ја равенката
$$(\sqrt{x}-2)^4+(\sqrt{x}-3)^4=1\ .$$

11. За кои вредности на реалниот параметар a равенката
$$\sqrt{3+x}+\sqrt{5+x}=a$$
има решенија.

12. Во множеството реални броеви реши ја равенката
$$4x^3-\sqrt{1-x^2}-3x=0\ .$$

13. Реши ја равенката: $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$.

14. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x.$$

15. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$(x+1)^4+(x+2)^4=97.$$

16. Во множеството реални броеви реши ја равенката: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}=24$.

17. Определи ги сите парови заемно прости природни броеви (m,n) такви што равенката $(x+m)^3=nx$ има три различни целобројни решенија.

18. Нека a е реален број. Определи го збирот на решенијата на равенката

$$x^3-a^2x+ax-x+a^2-a=0.$$

19. Определи го реалниот параметар p за кој равенката

$$x^4-(3p+2)x^2+p^2=0$$

има четири реални корени кои се четири последователни членови на аритметичка прогресија.

20. Определи ги сите броеви $z\in\mathbb{C}$ кои се решенија на равенката $z^3+i^{2013}=0$. Определи ја плоштината на многуаголникот чии темиња се определени со решенијата на оваа равенка.

21. Во зависност од вредноста на реалниот параметар, во множеството реални броеви реши ја равенката

$$(a-1)(1+x+x^2)^2=(a+1)(1+x^2+x^4).$$

22. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$(16x^{200}+1)(y^{200}+1)=16(xy)^{100}.$$

23. Определи ги сите парови реални броеви (x,y) за кои важи

$$(2x+1)^2+y^2+(y-2x)^2=\tfrac{1}{3}.$$

24. Определи ги сите тројки реални броеви (x,y,z) за кои важи

$$4xyz-x^4-y^4-z^4=1.$$

25. Нека за реалните броеви x и y важи

$$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1.$$

Докажи дека $x+y=0$.

26. За кои реални броеви a сите решенија на равенката

$$\frac{a^2}{x(x+1)}+\frac{a^2}{(x+1)(x+2)}+\frac{a^2}{(x+2)(x+3)}+\frac{a^2}{(x+3)(x+4)}+\frac{a^2}{(x+4)(x+5)}=1$$

се реални.

27. Реши ја равенката: $\frac{1}{(2n-4)!}=\frac{1}{(2n-3)!}+\frac{8}{(2n-2)!}$.

28. Реши ја равенката: $\frac{1}{C_4^x}-\frac{1}{C_5^x}=\frac{1}{C_6^x}$.

29. Реши ја равенката

$$2^{C_{n+1}^2}-4\cdot 2^{C_{n-1}^2}=7\cdot 2^{C_n^2} .$$

30. Нека a е решение на равенката $x^2-x+1=0$. Определи ја вредноста на изразот $a^{2004}+\frac{1}{a^{2004}}$.

31. Нека

$$\left(\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}-\frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}\right)\left(2+\frac{2}{1+\frac{1}{a-1}}\right)=\frac{1}{504} .$$

Пресметај ја вредноста на изразот $2a+1$.

32. Решенијата на равенката

$$\frac{(a-x)^3+(b-x)^3}{(a-x)^2+(b-x)^2}=a-b \text{, каде } a,b\in\mathbb{R}$$

се последователни содржатели на бројот 6 чиј збир на квадрати е 4068. Определи го производот ab .

33. Определи го реалниот број a така што $x=\frac{1}{2}$ е решение на равенката

$$\left(\frac{x+1}{1-x}-\frac{1-x}{x+1}-\frac{4x^2}{x^2-1}\right)\left(\frac{1}{a^3+a^2}-\frac{1-a}{a^2}-1\right)=\frac{1}{2} .$$

34. Определи ги сите решенија на системот:

$$\frac{x(y+z)}{5}=\frac{y(z+x)}{8}=\frac{z(y+x)}{9}$$

$$yz+zx+xy=\frac{11}{6}xyz.$$

35. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$x^2-y^2=2(xz+yz+x+y)$$

$$y^2-z^2=2(yx+zx+y+z)$$

$$z^2-x^2=2(zy+xy+z+x).$$

36. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 153. \end{cases}$$

37. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0. \end{cases}$$

38. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

39. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 6 \\ x - y + \sqrt{x-y} = 2. \end{cases}$$

40. Во множествоито реални броеви реши го системот равенки:

$$\begin{cases} x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} = 2 \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = 2 \\ x^{2008} + y^{2008} + z^{2008} = 2. \end{cases}$$

41. Реши го системот равенки

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 9$$
$$\tfrac{1}{x_1} + \tfrac{1}{x_2} + ... + \tfrac{1}{x_n} = 1,$$

каде n е природен број, а $x_1, x_2, ..., x_n$ се позитивни реални броеви.

42. Определи ги сите реални решенија на системот равенки

$$x_1 + x_2 + ... + x_{2002} = 2002$$
$$x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{2002}^4 = x_1^3 + x_2^3 + ... + x_{2002}^3.$$

43. Во множеството позитивни реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^3 + 2y^2 + \frac{1}{4z} = 1, \\ y^3 + 2z^2 + \frac{1}{4x} = 1 \\ z^3 + 2x^2 + \frac{1}{4y} = 1. \end{cases}$$

44. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$x_1 + x_2 + ... + x_{2006} = 2006$$
$$x_1^4 + x_2^4 + ... + x_{2006}^4 = x_1 + x_2 + ... + x_{2006}.$$

45. Ако $n \geq 3$ определи ги реалните решенија на системот равенки
$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 x_3 ... x_n = 0 \\ x_2^2 - x_1 x_3 ... x_n = 0 \\ .... \\ x_n^2 - x_2 x_3 ... x_{n-1} = 0. \end{cases}$$

46. Определи го најголемиот природен број n таков што системот
$$(x+1)^2 + y_1^2 = (x+2)^2 + y_2^2 = ... = (x+k)^2 + y_k^2 = ... = (x+n)^2 + y_n^2$$
има барем едно целобројно решение $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$.

47. Во множеството реални броеви реши го системот равенки
$$(x_3 + x_4 + x_5)^5 = 3x_1$$
$$(x_4 + x_5 + x_1)^5 = 3x_2$$
$$(x_5 + x_1 + x_2)^5 = 3x_3$$
$$(x_2 + x_2 + x_3)^5 = 3x_4$$
$$(x_1 + x_3 + x_4)^5 = 3x_5$$

48. Нека $n \geq 2$ е природен број. Колку реални решенија има системот равенки
$$\begin{cases} x_1 + x_n^2 = 4x_n \\ x_2 + x_1^2 = 4x_1 \\ .... \\ x_n + x_{n-1}^2 = 4x_{n-1}\,? \end{cases}$$

49. Определи ги сите тројки реални броеви (x, y, z) такви што
$$\begin{cases} x + y = \sqrt{28} \\ xy - 2z^2 = 7. \end{cases}$$

50. Во множеството природни броеви реши ја неравенката
$$5\binom{n+2}{n-1} > \binom{n+4}{4}.$$

51. Реши ја неравенката
$$x^3 - 3x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1} \geq 0.$$

15. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

15.1. ЗАДАЧИ СО БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Во еден ред последователно се запишани броевите 1, 2, 3, ..., 2016. Во секој следен ред последователно се запишани збировите на два соседни броја. На пример, во вториот ред се запишани броевите 3, 5, 7, ..., 4031. Во последниот ред е запишан еден број. Кој е тој број?

2. Ангел ги запишал природните броеви од 1 до 40, еден по друг без растојанија и интерпукциски знаци со што го добил бројот 1234567891011...383940. Потоа избришал 60 цифри и го добил најголемиот можен број. Кој е тој број?

3. Маја ги запишала по ред сите природни броеви од 100 до 130, еден по друг без празни места и го добила бројот 100101102...129130. Потоа избришала 80 цифри од овој број и го добила најголемиот можен број. Кој број го добила Маја?

4. Пабло ги испишува природните броеви еден по друг во низа:

   123456789101112131415...

   итн. без празни места и интерпукциски знаци. Тој запишал 2020 цифри. Колку пати притоа ја запишал цифрата 7?

5. Определи ги последните две цифри на бројот чиј квадрат завршува на 44.

6. Определи го најмалиот природен број N поголем од 1000 таков што точно половина од броевите од 1 до N во својот декаден запис има најмалку една цифра 1.

7. Ако на двоцифрен број од лево и од десно му се допише цифрата 1 се добива број кој е 21 пат поголем од почетниот број. Определи го почетниот број.

8. Тројца пријатели Ангел, Бојан и Ванчо погаѓаат непознат шестцифрен број кој е сложен, запишан е со цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и цифрите не се повторуваат. Ангел рекол дека бројот е 123456, Бојан 245163, а Ванчо 463215. Ниту еден од нив не го погодил бројот, но Ангел ги погодил местата на три цифри, Бојан исто така на три цифри, а Ванчо само на една цифра. Определи го непознатиот број.

9. Збирот на 2011 последователни цели броеви е еднаков на 2011. Кои се тие броеви?

10. На патот кон спортската сала Марко ја прашал Ивана за бројот на нејзиното седиште. Ивана му одговорила: „Сите цифри на бројот се различни. Ако ги собереш сите шест двоцифрени броеви кои може да се формират од цифрите на тој број, така што на секој од тие двоцифрени броеви цифрите се различни, а потоа добиениот број го поделиш со два, ќе го добиеш бројот на седиштето.“ Кој е бројот на седиштето на Ивана?

11. Со бришење на првите две цифри од лево во декадниот запис на природниот број n се добива 73 пати помал број од n. Определи ги двата најмали такви броја n.

12. Определи ги сите четирицифрени броеви кои се еднакви на квадратот на некој природен број и се такви што цифрите на десетките и илјадитите им се еднакви, а цифрата на стотките е за 1 поголема од цифрата на единиците.

13. Определи го најмалиот природен број n таков што половина од n е квадрат на природен број, третина од n е куб на природен број и петтина од n е петти степен на некој природен број.

14. Ако збирот на цифрите на некој двоцифрен број го додадеме на квадратот на тој збир, ќе го добиеме почетниот двоцифрен број. Определи ги сите такви двоцифрени броеви.

15. Ако двоцифрен број се собере со производот на неговите цифри, се добива квадратот на збирот на тие цифри. Определи ги сите вакви двоцифрени броеви.

16. Нека a,b,c се различни ненулти цифри. Од a,b,c ги формираме трицифрените броеви запишани со различни цифри. Збирот на овие трицифрени броеви е еднаков на 3552. Определи го најмалиот можен број од овие броеви.

17. Определи ги сите тројки последователни непарни природни броеви чиј збир на квадрати е еднаков на четирицифрен број запишан со исти цифри.

18. Определи ги цифрите a,b,c,d така што важи
$$\overline{a3bc}\cdot 45=\overline{37d15b}.$$

19. Определи ги сите трицифрени броеви $\overline{xyz}$ кои се еднакви на изразот
$$x+y+z+xy+yz+zx+xyz.$$

20. Определи ги цифрите $a\neq 0,b,c$ и d така што дропката $\frac{a}{b+c+d}$ има децимален запис $0,abc$.

21. Определи го четирицифрениот број $\overline{aabb}$ кој е точен квадрат.

22. Нека a и b се природни броеви. Бројот $\overline{\overline{a,b}}$ се добива така што после бројот a запишуваме децимална запирка и потоа го запишуваме бројот b. На пример, ако $a=25$ и $b=16$, тогаш $\overline{\overline{a,b}}=25{,}16$. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што $\overline{\overline{a,b}}\cdot\overline{\overline{b,a}}=13$.

23. Во трицифрен број цифрата на стотките е еднаква на 3. Ако таа се премести на местото на стотките, се добива 75% од почетниот број. Кој е тој број?

24. Определи го четирицифрениот број кој е четири пати помал од бројот запишан со истите цифрим, но во обратен редослед.

25. Матеј замислил пет броја. Кога ги пресметал збировите на сите можни парови броеви тој ги добил броевите: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13 и 15. Кои броеви ги замислил Матеј?

26. Ана замислила четири реални броеви и на таблата ги запишала збировите на сите парови на замислените броеви, а потоа избришала еден од тие збирови. На таблата останале броевите $-2, 1, 2, 3$ и 6. Кои броеви ги замислила Ана?

27. Андреј му вели на Пабло: „Имам три броја чиј збир е 2. Збирот на нивните квадрати е 4, а збирот на нивните кубови е 8. Што мислиш, ако продолжам последователнода ги собирам $n-$те степени на овие броеви, дали за некој n може да добијам збир 2^{2017}?" Помогни му на Пабло да даде точен одговор.

28. Збирот на четири броја е 1001. Ако првиот го намалиме за 1, вториот го намалиме за 2, третиот гои зголемиме за 2 и четвртиот го поделиме со 2, добиваме четири еднакви броја. Определи ги почетните броеви.

29. Секоја цифра на природниот број n (освен првата) е строго поголема од цифрата која се наоѓа непосредно лево од неа. Определи го збирот на цифрите на бројот $9n$.

30. Определи ги сите природни броеви помали од 1000 кои се еднакви на збирот на квадратите на своите цифри.

31. Нека x е реален број таков што x^2-x и x^4-x се цели броеви. Докажи, дека x е цел број.

32. а) Нека x и y се реални броеви такви што $x+y, x^2+y^2, x^3+y^3$ и x^4+y^4 се цели броеви. Докажи дека за секој природен број n бројот x^n+y^n е цел број.
б) Најди пример на реални броеви x и y кои не се цели такви што броевите $x+y, x^2+y^2$ и x^4+y^4 се цели.
в) Најди пример на реални броеви x и y кои не се цели такви што броевите $x+y, x^2+y^2$ и x^3+y^3 се цели, но x^4+y^4 не е цел број. .

33. Ако за реалните броеви x, y важи
$$x^2+xy+y^2=4 \text{ и } x^4+x^2y^2+y^4=8$$
докажи дека

$$x^6 + x^3y^3 + y^6$$

е природен број и определи го.

34. За секој од три реални броја важи дека збирот на едниот од нив и производот на останатите два е еднаков на 2. Определи ги сите такви броеви.

35. На секоја страна на коцката е запишан природен број. Секое теме на коцката е означено со бројот кој е еднаков на производот на броевите запишани на страните на коцката на кои припаѓа тоа теме. Збирот на броевите со кои на тој начин се означени темињата е еднаков на 3333. Определи го збирот на броевите со кои се означени страните на коцката.

36. Определи го најголемиот природен број n таков што постои низа од n реални броеви со следниве својства:
а) збирот на секој три последователни членови на низата е позитивен,
б) збирот на секои пет последователни членови на низата е негативен.

37. Во трка учествувале 100 луѓе и никои двајца трката не ја завршиле со исто време. На секој натпрварувач на крајот на трката му е поставено прашање на кое местои ја завршил трката и сите одговориле со број меѓу 1 и 100. Збирот на сите одговори е еднаков на 4000. Кој е најмалиот број грешни одговори кои тркачите можеле да ги дадат?

38. Страниците на една книга се означени со броевите $1,2,3,...,n$. Од книгата е скинат еден лист. Збирот на броевите на преостанатите страници е еднаков на 2013. Колку страници има книгата и кои страници недостасуваат?

15.2. ЗАДАЧИ СО ВРЕМЕ И РАБОТА

39. Бригада за пошумување се состои од определен број работници и соодветна механизација. Три единици пошумиле 100 декари за 10 дена. Колку бригади треба уште да се вклучат за пошумувањето да заврпши по 15 дена ако останале уште 250 декари за пошумување.

40. Група од $2n$ косачи требало да окоси две ливади од кои едната е два пати поала од другата. Откако половина ден сите коселе на првата ливада, половина од косачите продолжиле да косат и ја окосиле првата ливада до крајот на денот. Втората половина косачи отишле да ја косат втората ливада, но не ја окосиле и било потребно еден косач да коси уште еден ден за да се окоси преостанатиот дел. Колку косачи биле во групата? (Се претпоставува дека секој косач за исто време окосува еднаков дел од ливадата.)

41. Томе и Киро можат една работа да ја завршат за 20 дена, но ако Киро работи со Иван, тогаш работата може да ја завршат 5 дена порано. Понатаму, истата

работа Иван и Томе може да ја завршат за петтина пократко време отколку кога заедно работат Иван и Киро.
За колку дена секој од нив самостојно може да ја заврши оваа работа?

42. Андреј и Горјан чистат патека од снег. Прво Андреј изчистил $\frac{3}{5}$ од патеката, а потоа Горјан го исчистил преостанатиот декл од патеката така што целата патека била исчистена за 12 часа. За колку часа заедно ќе ја исчистат патеката, ако се знае дека на Горјан му треба 5 часа повеќе сам да ја исчисти патеката, отколку што му треба на Андреј сам да ја исчисти патеката?

43. Димитар во 2000 година ќе има онолку години колку што е збирот на цифрите на годината во која е роден. Која година е роден Димитар?

44. Тројца браќа се родени еден по друг со иста разлика на години. Кога се родил најмалиот брат, најстариот брат имал шест години помалку отколку што има средниот брат денес. Денес разликата на квадратите на бројот на годините на најстариот и најмалиот брат е 432. Колку години има денес секој од браќата?

45. Ана има четири пати по толку години колку што имал Петар кога Ана имала толку години колку што има Петар сега. Кога Петар ќе има толку години колку што има сега Ана, двајцата заедно ќе имаат 95 години. Колку години има Ана, а колку Петар?

46. Елена на својата роденденска забава повикала определен број деца. Бројот на годините на едно од децата бил еднаков на една осмина од бројот на годините на преостанатите деца. Овој однос не се менувал ниту следните години. Колку деца биле на забавата?

47. Професорот Смиле и професорот Ванчо разговараат. Проф. Смиле: како годините брзо минуваат, ... ја с веќе имам 25% повеќе години, отколку што имаше ти кога јас имав толку години колку што имаш ти сега. Проф. Ванчо: еее ... ако здравјето не послужи, кога јас ќе имам толку години колку што имаш ти сега заедно ќе имаме 168 години. Колку години сега има секој од професорите?

48. Годините на таткото и неговите две деца, кои не се близнаци, се степени на ист прост број. Пред една година броевите на годините на секој од нив биле прости броеви. Колку години има таткото, а колку секое од неговите две деца?

49. Во кој момент меѓу 13:00 и 14:00 часот стрелките на часовникот формираат рамен агол.

50. Од местото A во местото B тргнал автобус. 50 минути покасно од местото A тргнал автомобил кој во местото B стигнал 10 минути пред автобусот. Ако тргнале истовремено едниот од местото A, а другиот од местото B (еден кон друг во пресрет), ќе се сретнеле по 1 час и 12 минути. Ако вози по

истиот пат и со иста брзина, колку време ќе му треба на автобусот да се врати од местото B во местото A?

51. Две парчиња легура од злато и сребро содржат вкупно $a\ kg$ злато. Кога процентот на златото во првата легура би бил еднаков со процентот на златото во втората легура, тогаш две парчиња би содржеле вкупно $b\ kg$ злато. Кога процентот на златото во втората легура би бил еднаков на процентот на златото во првата легура, тога двете парчиња би содржеле $c\ kg$ злато. Колку злато има во првото, а колку во второто парче легура?

15.3. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

52. Кралот Хиерон од Сиагуза дал 16 фунти злато и 4 фунти сребро, за да од овој материјал му се направи круна. Кога круната била готова, таа имала маса 20 фунти, но кралот сепак му дал на големиот Аматематичар Архимед да испита дали определено количество злато е заменето со сребро со иста маса.
Архимед ја измерил круната во вода и констатирал дека таа изгубила на маса $1\frac{1}{4}$ фунти. Знаејќи дека 20 фунти злато во вода губи 1 фунта злато, а 21 фунти сребро гоби 2 фунти од својата маса, Архимед пресметал дека навистина определено количество злато е заменето со сребро со иста маса. Кокаво е тоа количество злато?

53. Во сад кој не е полн до врвот се наоѓа 85% раствор на алкохол. Садот го полниме до врвот со раствот од 21% алкохол и течноста ја мешаме. Ако одлиеме толку течност колку што сме долеале и повторно туриме 21% раствор на алкохол, ќе добиеме 70% раствор на алкохол. Колку алкохол содржи растворот по првото дополнување? Колкав дел од садот бил полн пред првото дополнување?

54. Количеството кофеин во крвотокот опаѓа секои 5 часа за 50%. Продолжено експресо содржи $330\ mg$ кофеин. Да претпоставиме дека целото продолжено експресо е испиено одеднаш. Ако Милан во еден ден испие продолжено експресо во 8,10 и 12 часот, колку mg кофеин ќе има Милан во 20 часот.

55. Бродовите Галеб и Александрија пловат праволиниски и со коснтантна брзина кон исто пристаниште. На пладне положбите на пристаништето и бродовите се определени со темињата на рамностран триаголник. Во моментот кога бродот Галеб поминал $30\ km$, положбите на бродовите и пристаништето се определени со правоаголен триаголник. Кога Александрија впловил во пристаништето, на Галеб до пристаништето му останале уште $12,5\ km$. Колкава била оддалеченоста на бродовите на пладне?

56. Веслајќи рамномерно рибарот узводно поминал онолку километри колку што е решението на равенката

$$\sqrt{5x} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{3x+1},$$

а се вратил, без задржување, во пристаништето за 1час и 20 минути. Брзината на реката е $2km/h$.Со која брзина веслал рибарот?

57. Пешак кој минува $1km$ за 12 минути, го минува патот од A до B за исто време за кое велосипедист минува $10km$ подолг пат, кога за $4,5$ минути минува $1km$. Определи го растојанието од A до B.

58. Два воза тргнуваат истовремено од почетните станици еден кон друг. Возовите возат со константни брзини и се разминуваат во точката M. Едниот воз има два пати поголема брзина од другиот. Ако поспориот воиз тргне 5 минути покасно, тогаш возовите ќе се разминат во точка која е $4km$ оддалечена од точката M .Определи ја брзината на поспориот воз.

59. Три велосипедски патеки со вкупна должина $24km$ формираат правоаголен триаголник. Од темето на правиот агол истовремено тргнуваат двајца велосипедисти со константни брзини. Едниот вози по едната, а другиот по другата патека. Додека едниот минува $5,5km$, другиот за тоа време минува $6,5km$. Ако велосипедистите се сретнале точнои на средината на хипотенузата, определи ги должините на патеките.

60. Туристичкиот брод Галеб плови праволиниски према север. Од ртот „Канео“ двајца млади туристи отпловиле со брз скутер во правец кој зафаќа агол од 120° со правецот на движење на бродот, кон островот кој е оддалечен од ртот $15km$. Ако скутерот има доволно гориво за да помине $40km$, колку најмногу километри може да се приближи до островот за да сигурно може да се врати до бродот, кој додека скутерот минува $40km$ ќе помине $16km$?

15.4. ЗАДАЧИ СО ПАРИ

61. На Пабло му недостасуваат 2900 евра за да купи нов автомоби. Одлучил да штеди. Првиот месец заштедил 50 евра, а потоа секој слчеден месец штедел по 10 евра повеќе. Колку време му било потребно на Пабло за да ги собере потребните пари?

62. Сумата од 18200 денари подели ја на тројца, така што секој следен ќовек ќе добие по 20% повеќе од претходниот. Колку пари ќе добие секој човек?

63. Студентите Марко и Ламбе работеле хонорарно, Марко во туристичко биро, а Ламбе во хотел. Марко за својата работа вкупно добил 2000 денари. Ламбе работел 5 часа помалку од Марко и добил 1250 денари. Ако Марко работел онолку часови колку што работел Ламбе, тогаш Ламбе би добил 1500 денари

повеќе од Марко. Колку часа работел Марко, а колку Ламбе и колку е заработката на час на секој од нив?

64. Трговец решил да набавил суви сливи за натамошна продажба. За половина од парите со кои располагал купил сливи кај произведувач по цена од 30 денари за килограм. Со другата половина пари отишол кај друг произведувач и успеал да купи за половина количество сливи повеќе отколку кај првиот произведувач. Сливите ги измешал. По која цена за килограм треба сегха да ги продава сливите така што ќе заработи по 5 денари по продаден килограм сливи?

65. За купување на автобус кој ќе ги превезува учениците ос четири населени места A, B, C, D се потребни 10500000 денари. Местата во купувањето на автобусот учествуваат пропорционално со бројот на нивните жители. Во местото D бројот на жителите е еднаков на вкупниот број жители во местата A и C, во местото A има 25% помалку жители отколку во местото B, а 20% жители отколку во местото C. Определи колку пари за купување на автобусот ќе даде секое од местата A, B, C, D.

66. Тројца пријатели биле на излет и седнале да јадат. Марко со себе понел три еднакви сендвичи, Ангел понел четири исти такви сендвичи, а Ламбе брзајќи утрината ја заборавил кесата со храна. Но, пријателите сендвичите меѓусебно рамномерно ги поделиле и ги изеле. Ламбе не сакал на пријателите да им остане должен, па извадил 140 денари и им рекол парите да ги поделат праведно. Колку денари добил Марко, а колку Ангел?

67. Трговец на големо продава тениски рекети по цена од 3630 денари за еден рекет, ако бројот на порачаните рекети е 40 или помалку. Ако бројот на порачаните рекети е поголем од 40, цената на еден рекет се намалува за 6 денари по секој порачан рекет над 40. Во една порачка може да се порачаат најмногу 400 рекети. Определи колку треба да биде големината на порачката за да трговецот оствари најголем профит. Колку изнесува максималниот профит и по која цена тогаш купувачот платил еден рекет?
Упатство. Цената на еден рекет се намалува за $6(x-40)$ денари.

68. Училиштето распишало конкурс за надобро уредена училница. Паричната награда треба да се распредели на четирите најдобро пласирани класови така што првопласираниот ќе добие 40% од целиот износ, второпласираниот $\frac{1}{3}$ од вкупниот износ, третопласираниот $\frac{5}{8}$ од преостанатите пари за наградување, а четвртопласираниот 15000 денари. Определи колку вкупно пари биле предвидени за награди и колку пари ќе добие секое од четирите најдобро пласирани одделенија.

69. Пабло и Горјан гу споредуваат своите заштеди. Ниту еден нема повеќе од 100 евра. Секој својата заштеда ја брои во евра и евроценти. Констатирале дека заштедата на Горјан е за 5 евроценти поголема од заштедата на Пабло. Пабло има толку евра колку што Горјан има евроценти, и толку евроценти

колку што Горјан има евра. Определи колку заштеда има Пабло, а колку Горјан.

15.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

70. Елена им поделила определен број јаболка на Андреј, Пабло и Горјан. Андреј добил половина од вкупниот број јаболка и уште две. Пабло добил половина од преостанатите јаболка и уште две. Конечно, Горјан добил половина од преостанатите јаболка и уште две. На крајот останало едно јаболко. Колку јаболка имало на почетокот и колку јаболкка добило секое дете?

71. Андреј и Горјан учествувале во трка. Бројот на тркачите кои трката ја завршиле пред Андреје еднаков на бројот на тркачите кои трката ја завршиле по него. Бројот на тркачите кои трката ја завршиле по Горјан е три пати поголем од бројот на тркачите кои трката ја завршиле пред него. Точно 10 тркачи трката ја завршиле меѓу Андреј и Горјан. Ако сите тркачи ја завршиле трката, при што никои два тркачи истовремено не ја завршиле трката, определи го вкупниот број тркачи.

72. Гаргамел фатил N Штрумфови и ги распределил во три вреќи. Кога Папа Штрумф го преместил од првата во втората вреќа, Муртенко од втората во третата, а Штрумфета од третата во првата, просечната висина на Штрумфовите во првата вреќа се намалила за 8 милиметри, а просечните висини во втората и третата вреќа се зголемиле за 5 и 8 милиметри, соодветно. Во првата вреќа имало девет Штрумфови. Колку Штрумфови фатил Гаргамел?

73. Во езерото живеат црвени и жолти риби. Две петтини од вкупниот број риби се жолти, а останатите се црвени. Три четвртини од жолтите риби се женки. Ако е познати дека во езерото вкупниот број женки е еднаков на вкупниот број мажјаци, колкав е уделот на црвените мажјаци во вкупниот број риби во езерото?

74. На еден остров живеат 5 луѓе и еден мајмун. Еден ден сите заедно собирале кокосови ореви и ги ставиле на купче. Се договориле утредента да ги поделат оревите. Во текот на ноќта еден од петте островјани го зел својот дел така што ги поделил оревите на пет еднакви дела и му останал еден орев кој му го дал на мајмунот. Потоа го скрил својот дел, а останатите четири дела ги собрал во едно купче. Останатите четири островјани еден по друг го направиле истото, при што за да оревите може да се поделат на пет дела секој пат на мајмунот му давале по еден орев. Кој е најмалиот број ореви во полетното купче?

75. Студент во текот на петгодишното студирање положил 31 испит. Секоја година положувал повеќе испити отколку претходната, а петтата година положил три пати повеќе испити отколку првата. Колку испити положил студентот во четвртата година?

76. Во еден град има 10 ресторани и n театри. Група туристи поминала неколку дена во тој град, при што посетувале ресторани и театри. На крајот од престојот констатирале дека секој ресторан го посетиле по 4 туристи, а во секој театар биле по 6 туристи. Ако секој турист посетил точно 5 ресторани и 3 театри, определи колку театри имало во градот.

77. Во секоја од пет кутии се наоѓа определен број топчиња. Од првата кутија префрламе една еттина од топчињата во втората кутија. Потоа од втората кутија префрламе една петтина од топчињата во третата кутија. Потоа од третата кутија префрламе една петтина од топчињата во четвртата кутија, па една петтина од топчињаsa од четвртата кутија префрламе во петтата кутија и на крајот една петтина од топчињат од петтата кутија префрламе во првата кутија. Сега во секојакутија има по 32 топчиња. По колку топчиња имало на почетокот во секоја од кутиите?

78. Професорката Марија за својот роденден решила да ги почести своите уеници кои се 200 во паралелката. Купила 33 чоколади и 101 тортичка. Сите ученици тој ден биле на училиште и секој добил или чоколадо или тортичка. Објасни како е тоа можно? Колку момчињаи колку девојчиња имало во паралелката ако нивните броеви се однесуваат како $3:5$?

Упатство. Разгледај броен систем со основа b .

79. Во едно множество од вкупно 112 ученици секој четврто лице е девојче. Во друго множество има вкупно 53 ученици, а односот на момчињата и девојчињата е 2:1. Во двете множества има еднаков број девојчиња. Како е тоа можно и колку во тој случај има девојчиња во второто множество?

16. НИЗИ

1. За аритметичката прогресија $\{a_k\}$ важи $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$. Докажи дека $\frac{a_m}{a_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$.

2. Дадена е аритметичката прогресија 1995, 1999, 2003, ... Докажи дека оваа прогресија содржи бесконечно многу прости броеви.

3. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се членови на аритметичка и $b_1,b_2,...,b_n$ се членови на геометриска прогресија со позитивни членови. Ако $a_1=b_1$ и $a_n=b_n$, докажи дека збирот на членовите на аритметичката прогресија е поголем од збирот на членовите на геометриската прогресија.

4. Нека p е реален број. Определи ги решенијата x_1,x_2,x_3 на равенката
$$x^3+2px^2-px+10=0$$
ако се знае дека тие се последователни членови на аритметичка прогресија.

5. Првиот член на аритметичка прогресија $\{a_n\}$ чии членови се природни броеви е $a_1=1$. Бројот $4=2^2$ е член, а 2 не е член на прогресијата.
а) Докажи дека постои една и само една таква низа и определи го нејзиниот општ член.
б) Докажи дека квадратот на секој природен број кој не е делив со 3 е член на оваа низа.
в) Провери дека броевите 2002 и 2002^2 се членови на оваа низа и определи ги нивните индекси.
г) Докажи дека квадратот на секој член на низата е член на низата. Дали важи обратното тврдење.

6. Ако $a_1,a_2,...,a_n,a_{n+1}$ се последователни членови на аритметичка прогресија, докажи дека
$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+...+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

7. Докажи дека за секоја аритметичка низа $\{a_n\}$ важи
$$a_1-\binom{n}{1}a_2+\binom{n}{2}a_3-...+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}a_n+(-1)^n a_{n+1}=0,\ n\geq 2.$$

8. а) Нека k е природен број. Докажи дека аритметичката прогресија чија разлика е природен број или не содржи ниту еден $k-$ти степен на природен број или содржи бесконечно многу $k-$ти степени на природен број.
б) Дали постои аритметичка прогресија чија разлика е природен број и е таква што содржи бесконечно многу точни кубови, но не содржи ниту еден точен квадрат на природен број.

9. Разликата на претпоследниот и првиот член на конечната аритметичка прогресија е 24. Збирот на сите членови е 102, а разликата на прогресијата е три пати поголема од првиот член. Определи ја оваа прогресија.

10. Должините на страните на еден триаголник се три последователни членови на артиметичка прогресија, а должините на висините повлечени кон страните во истиот редослед се три последователни членови на геометриска прогресија. Ако должините на страните се двоцифрени природни броеви, кои вредности може да ги има периметарот на тој триаголник?

11. Осум еднакви коцки имаат на две спротивни страни по една точка, на други две спротивни страни по две и на преостанатите страни по три точки. Од нив е направена голема коцка. Ги броиме точките на секоја страна на големата коцка. Дали добиените броеви може да се шест различни членови на аритметичка прогресија?

12. Во растечка аритметичка прогресија производот на двториот и третиот член е 3, а производот на третиот и петтиот член е -3. Колку први членови на прогресијата треба да се собрат за да збирот е најмал. Определи го тој збир?

13. Докажи дека за секој $k \in \mathbb{N}_0$ може да се изберат $4 \cdot 2^k$ различни природни броеви кои не се поголеми од $5 \cdot 3^k$, така што меѓу нив нема три последователни членови на аритметичка прогресија.

14. Три различни реални броеви $a, 2016, b$ се последователни членови на геометриска прогресија. Определи ги броевите a и b така што броевите $a+2016, b+2016$ и $a+b$ се три последователни членови на аритметичка прогресија.

15. Реалните броеви x, y, z се последователни членови на аритметичка прогресија. Определи ги сите можни вредности за y ако броевите $\cos^2 x, \cos^2 y,$ $\cos^2 z$ се меѓусебно различни и се последователни членови на аритметичка прогресија.

16. Нека a и b се позитивни реални броеви такви што броевите $\log_b a$, $\log_{2b}(2a)$ и $\log_{4b}(4a)$, во овој редослед се последователни членови на аритметичка прогресија. Докажи, дека $a = b$.

17. Ако во триаголникот должините на страните a, b, c се три последователни членови на аритметичка прогресија (во овој редослед), докажи дека за неговите соодветни спротивни агли α, β, γ важи

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{3}.$$

18. Нека $\alpha,\beta,\gamma>0$, $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ и броевите $\mathrm{ctg}\,\alpha,\mathrm{ctg}\,\beta,\mathrm{ctg}\,\gamma$ формираат аритметичка прогресија. Пресметај $\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\gamma$.

19. Определи ги сите природни броеви n такви што три последователни коефициенти во развојот $(a+b)^n$ формираат аритметичка прогресија.

20. Големините на аглите $\alpha<\beta<\gamma$ се три последователни членови на аритметичка прогресија, а должините на нивовите страни се a,b,c. Докажи дека
$$(a+c)^2=b^2+3ac.$$

21. Дадена е низата 1, 8, 22, 43, ... во која разликите на последователните членови формираат артиметичка прогресија. Определи го 35351-от член на оваа низа.

22. Должините на страните на пет рамнострани триаголници формираа аритметичка прогресија. Збирот на периметрите на овие триаголници е $120\,cm$. Збирот на плоштинмите на најмалиот и најголемиот триаголник е за $10\sqrt{3}\,cm^2$ помал од збирот на плоштините на преостанатите три триаголници.Определи ги должините на страните на овие триаголници. Колку изнесува збирот на плоштините на сите триаголници?

23. Пабло ја мери својата висина на крајот од секоја школска година. До крајот на деветто одделение основно образование висината растела како аритметичка прогресија, а потоа како геометриска прогресија. Докажи дека Пабло во второ одделение основно образование не бил повисок од $120\,cm$, ако на крајот од осмо одделение имал $154\,cm$, на крајот од прва година средно образование имал $165\,cm$, а ан крајот од трета година средно образование имал $176\,cm$.

24. Три броја формираат растечка аритметичка прогресија. Ако вториот број се зголеми за 1, а третиот за 10, низата станува геометриска. Најмалиот од овие броеви е еднаков на 2. Кои се тие броеви?

25. Нека $1,q,q^2$ $(q>0,\ q\neq 1)$ се првите три члена на геометриска прогресија.

а) Определи ги сите $x\in\mathbb{R}$ така што квадратите на гроевите $1-x,q-x,q^2-x$ формираат аритметилака прогресија, а потоа испитај го знакот на x за различни врености на q.

б) Изрази ја разликата на таа аритметичка прогресија како функција од q. Кој услов го задоволува q ако оваа низа е растечка?

26. Определи ја геометриската прогресија за која збирот на првите четири члена е еднаков на 15, а збирот на нивните квадрати е 85.

27. Од пет броја првите три формираат аритметичка прогресија со разлика 8, а последните четири формираа геометриска прогресија со количник 2. Определи ги овие броеви.

28. Определи ги сите природни броеви кои се поголеми од 1 и чии делители запишани во растечки редослед формираат геометриска прогресија.

29. Нека n е природен број и нека
$$A = 0,1^n \cdot 0,01^n \cdot 0,001^n \cdot 0,0001^n \cdot ... \cdot 0,\underbrace{00...0}_{199}1^n .$$
Бројот A^{-1} има 140701 цифра. Определи го бројот n.

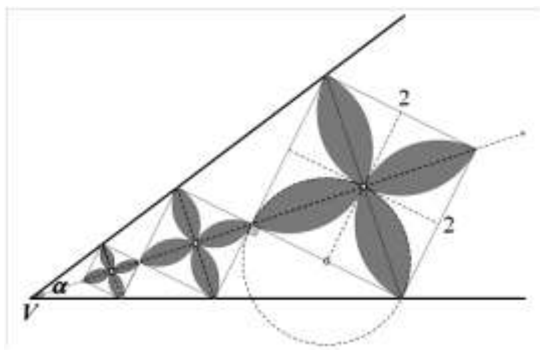
30. Низата броеви 1, 2, 3, 4, 0, 9, 6, 9, 4, 8, 7, ... е конструирана така што секој број почнувајќи од петтиот е еднаков на цифрата на единиците на збирот на претходните четири броја.
а) Дали во оваа низа цифрите 2, 0, 0, 4 може да се појават последователно во овој редослед.
б) Дали во оваа низа повторно може да се појават последователно цифрите 1, 2, 3, 4 во овој редослед.

31. Во изразот
$$2 + a + (a+1)^2 + (a+1)^3 + ... + (a+1)^{2017}$$
определи го коефициентот пред a^4.

32. Андреј замислил некој реален број x, а потоа броевите
$$x, x^2, x^3, ..., x^{2012}$$
ги поделил во 1006 парови. Пабло забележал дека збировите на броевите во паровите се меѓусебно еднакви. Определи кои броеви можел да ги замисли Андреј.

33. Секоја страна на квадрат со должина a е поделена во однос $1 : x\ (x > 1)$. Добиените точки се темиња на нов квадрат вписан во почетниот. Истата постапка се продолжува со секој нов квадрат. Определи го збирот на плоштините на почетниот и сите вака добиени квадрати.

34. Во агол α е вписана бесконечна низа квадрати. Во секој квадрат е вписан цвет со четири еднакви ливчиња. Двете спротивни темиња на квадратот се наоѓаат на краците, а другите две темиња на симетралата на аголот α. Должината на страната на почетниот квадрат е еднаква на 2 (цртеж десно). Опреде-



ли го аголот α ако збирот на сите нацртани цветови е еднаков на $3(\pi-2)$

35. Во остар агол α е впишан круг со радиус r. Понатаму, во рамнината одејќи кон темето на аголот е впишана низа кругови секој од кои го допира претходниот круг и краците на аголот. Определи ги збировите на периметрите и плоштините на добиената низа кругови.

36. Определи ги сите позитивни реални броеви x кои $\{x\},[x]$ и x се три последователни членови на геометрикса прогресија.

37. Дадена е низата 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...
а) Определи го општиот член на оваа низа.
б) Определи го збирот на првите n членови на оваа низа.

38. Определи ги сите природни броеви x за кои
$$1+a+a^2+...+a^x=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)...(1+a^{2^n}),$$
каде $a\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$.

39. Нека $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $n\in\mathbb{N}$. Определи го збирот $\sum\limits_{0\le i<k\le n} a^i a^k$.

40. Низата природни броеви $\{a_n\}$ е определена со $a_0=9$ и $a_{k+1}=3a_k^4+4a_k^3$, за $k\ge 0$. Докажи, дека декадниот запис на бројот a_{11} завршува со најмалку 2018 деветки.

41. Низата $\{a_n\}$ е зададена со
$$a\ \ =1 \text{ и } a_n=\tfrac{4n-2}{n}a_{n-1},\ n\ge 2.$$
Докажи дека сите членови на оваа низа се природни броеви.

42. Определи ги сите членови на низата $\{a_k\}$, зададена со $a_k=7^k+6^k-4$ кои се точни квадрати на природни броеви.

43. Низата $\{a_n\}$ е определена со $a_n=n^4-360n^2+400, n\in\mathbb{N}$. Определи го збирот на сите членови на оваа низа кои се прости броеви.

44. Дадени се низите природни броеви
$$a_n=2^{2n+1}-2^{n+1}+1 \text{ и } b_n=2^{2n+1}+2^{n+1}+1,\ n\in\mathbb{N}.$$
Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ точно еден од броевите a_n и b_n е делив со 5.

45. Низата $\{a_n\}$ е определена со
$$a_1=1,\ a_n=\tfrac{n+1}{n-1}(a_1+a_2+...+a_{n-1}),\ n>1.$$

Определи го a_{1999}.

46. Низата $\{a_n\}$ е зададена со:

$$a_0 = 3,$$
$$a_n = 2 + a_0 a_1 ... a_{n-1},\ n \geq 1$$

а) Докажи дека сите членови на оваа низа се по парови заемно прости.

б) Определи го членот a_{2007}.

47. Низата $\{a_n\}$ е определена со $a_1 = 1$ и

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 3} + 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Определи го членот a_{801}.

48. Низата $\{a_n\}$ е зададена со

$$a_0 = 0,\ \ a_n = n + a_{n-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Пресметај го членот a_{2006}.

49. Низата реални броеви $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е таква што за секои $m \geq n \geq 0$ важи

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \tfrac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}).$$

Определи го a_{2003} ако $a_1 = 1$.

50. Даден е низата

$$a_1 = 1,\quad a_n = 3a_{n-1} + 2^{n-1},\ n > 1.$$

Изрази го општиот член a_n со помош на n.

51. Низата $\{a_i\}$ е определена со

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3 + 5,\ a_3 = 7 + 9 + 11,\ a_4 = 13 + 15 + 17 + 19, ...$$

Определи ги општиот член a_k на низата и парцијалната сума $\sum_{i=1}^{k} a_i$.

52. Низата $\{a_n\}$ е зададена со:

$$a_0 = -1,\quad a_n = \tfrac{2a_{n-1} - 3}{3a_{n-1} - 4},\ n \in \mathbb{N}.$$

Определи експлицитна формула за a_n.

53. Дадена е низата

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + \sqrt{8a_n^2 + 1},\ \text{за}\ n \geq 1.$$

Докажи дека членовите на оваа низа се природни броеви.

54. Дадена е низа позитивни реални броеви $a_0, a_1, a_2, ...$ такви што важи

$$a_1 = 1 - a_0, \quad a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n)\text{, за } n \ge 1.$$

Докажи, дека за секој природен број n важи

$$a_0 a_1 ... a_n (\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}) = 1. \qquad (1)$$

55. Нека $\{a_n\}$ е низа природни броеви таква што $a_1 < a_2$ и $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, за $n \ge 1$. Ако $a_7 = 120$, колку е a_8?

56. Дадена е низата $a_1 = 1, a_2 = 1$ и

$$a_{n+1} = \frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + ... + \frac{a_n^2}{a_{n-1}}\text{, за } n \ge 2.$$

Определи го членот a_{2016}.

57. Дадена е низата $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека секој природен број може да се запише како збир на различни елементи на оваа низа.

58. Низата $\{a_n\}$ е зададена рекурзивно: $a_1 = 2, a_n = 2(n + a_{n-1})$, за $n \ge 2$. Докажи, дека $a_n < 2^{n+2}$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

59. Низата $\{a_n\}$ е зададена со $a_1 = 1$ и

$$a_n = a_1 a_2 ... a_{n-1} + 1\text{, за } n \ge 2.$$

Определи го најмалиот број M таков што

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} < M\text{, за секој } m \in \mathbb{N}.$$

60. Нека $n > 2$ е природен број и

$$a_i = \binom{n}{i} (\tfrac{2}{3})^i (\tfrac{1}{3})^{n-i}\text{, за } i = 1, 2, ..., n.$$

Докажи дека постои природен број k таков што

$$a_1 < a_2 < ... < a_k$$
$$a_{k+1} > a_{k+2} > ... > a_n$$

61. Нека $a_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}$, каде n е природен број. Определи го најмалиот природен број k таков што

$$P_k = a_1 a_2 ... a_k$$

е поголем од 1000.

62. Пресметај го збирот

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + ... + \frac{a_n}{2^n},$$

каде низата $\{a_n\}$ еопределена со

$$a_1 = 1, a_2 = 2,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\text{, за } n > 2.$$

63. Нека

$$a_1 = 1, a_2 = 1 + \tfrac{1}{3},\ a_n = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \dots + \tfrac{1}{2n-1}.$$

Докажи дека важи

$$a_n^2 + 2(a_n - a_1)^2 + 2(a_n - a_2)^2 + \dots + 2(a_n - a_{n-1})^2 = n.$$

64. Нека $a_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$. Докажи дека за секој природен број n важи

$$3a_1 + 5a_2 + 7a_3 + \dots + (2n+1)a_n = (n+1)^2 a_n - \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

65. Дадена е строго растечка низа природни броеви $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ таква што $a_1 = 1, a_2 = 2$ и за сите заемно прости броеви m и n важи $a_m a_n = a_{mn}$. Докажи дека за секој природен број k важи $a_k = k$.

66. Најди експлитна формула за членовите на низата $\{a_n\}$ ако $a_1 = 1, a_2 = 2$ и

$$a_n = (2n+1)a_{n-1} - (n^2 - 1)a_{n-2}, n \geq 3.$$

67. Низите $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ се зададени со:

$$x_1 = 3, y_1 = 1$$
$$x_{n+1} = 3x_n + y_n, n \in \mathbb{N}$$
$$y_{n+1} = x_n + 3y_n, n \in \mathbb{N}.$$

Докажи дека $x_{2017}^2 - y_{2017}^2 = 8^{2017}$.

68. За даден природен број $m \geq 2$ определи ги сите парови $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ такви што во низите

$$x_{k+1} = x_1 x_k - y_1 y_k$$
$$y_{k+1} = x_1 y_k + y_1 x_k, \quad k \in \mathbb{N}$$

важи $x_m = 1, y_m = 0$.

69. Низите реални броеви $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ се определени со $x_1 = 2, y_1 = 4$, z_1 е таков што важи $x_1 y_1 z_1 = x_1 + y_1 + z_1$ и

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{x_n^2 - 1}, y_{n+1} = \frac{2y_n}{y_n^2 - 1}, z_{n+1} = \frac{2z_n}{z_n^2 - 1}.$$

а) Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $x_n^2 \neq 1, y_n^2 \neq 1, z_n^2 \neq 1$.

б) Дали постои $k \in \mathbb{N}$ таков што $x_k + y_k + z_k = 0$.

70. Нека $\{a_n\}, n \in \mathbb{N}$ е растечка низа природни броеви. За членот a_k оваа низа ќе велиме дека е добар ако може да се запише како збир на некои други (зе

задолжително различни) членови на оваа низа. Докажи дека сите членови на низата, освен нив конечно многу се добри.

71. Определи ги сите реални броеви α такви што сите броеви во низата

$$\cos\alpha, \cos 2\alpha, \cos 2^2\alpha, ..., \cos 2^n\alpha$$

се негативни.

72. Определи го општиот член на низата

$$\sqrt{3},\ \sqrt{3\sqrt{3}},\ \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, ..., \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3...\sqrt{3}}}}, ...,$$

а потоа најди ја нејзината граница.

73. Низата $\{a_n\}$ е зададена со формулата

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+b}{2},\ 0 \le b \le 1,\ a_0 = 0.$$

Докажи дека низата $\{a_n\}$ е конвергентна и определи ја нејзината граница.

74. Нека $a > -1$. Низата $\{x_n\}$ е определена со

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = \sqrt{1+x_n},\ n \ge 0.$$

а) Докажи дека за секој позитивен број a низата $\{x_n\}$ конвергира и определи ја нејзината граница.

б) За кои реални броеви оваа низа е константна?

75. Најди формула за пресметување на збирот

$$S_n = \frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + ... + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}.$$

Докажи дека овој збир конвергира и најди ја неговата граница.

17. ПОЛИНОМИ

1. Определи ги сите реални броеви a и b такви што полиномот
$$x^4-2x^3+ax^2+2x+b$$
е делив со полиномот x^2-2x-3.

2. Определи ги коефициентите a и b така што полиномот ax^5+bx^4+1 ќе биде делив со полиномот x^2-x-1.

3. Определи ги реалните броеви a и b за кои полиномот ax^3+bx+2 е делив со полиномот $(x-1)^2$.

4. Определи ги сите природни броеви n за кои полиномот $(x+1)^n-x^n-1$ е делив со x^2+x+1.

5. Збирот на сите коефициенти во полиномот $(1+x)^n+(1+x)^{n+1}$ е еднаков на 1536. Определи го коефициентот пред x^6.

6. Нека $a_0,a_1,...,a_n$ се реални броеви такви што
$$a_0+a_1x+...+a_nx^n=(x+1)^3(x+2)^3...(x+672)^3.$$
Определи го збирот
$$a_2+a_4+...+a_{2016}.$$

7. Определи го реалниот број a ако се знае дека во развојот на полиномот
$$(1+x^4)^{12}+a(x(1-x^2)^2)^{12}$$
коефициентот пред x^{12} е еднаков на 100.

8. Определи го полиномот од трет степен со реални коефициенти за кој важи
$$P(1+i)=3i-4 \text{ и } P(-i)=4i-1.$$

9. а) Определи полином P од четврти степен таков што
$$P(0)=0, \text{ и } P(x)-P(x-1)=x^3,$$
за секој реален број x.
б) Определи формула за збирот
$$1^3+2^3+3^3+...+n^3.$$

10. Нека P е полином со целобројни коефициенти таков што $P(5)=2005$. Дали може $P(2005)$ да биде точен квадрат на природен број.

11. Нека $p(x)$ е полином со целобројни коефициенти кој за три различни вредности на x има вредност 1. Докажи дека $p(x)$ нема целобројни корени.

12. Определи ги сите природни броеви n за кои полиномот
$$P(x) = x^n + (2+x)^n + (2-x)^n$$
има барем еден целоброен корен.

13. Нека a и b се реални броеви такви што сите нули на полиномот
$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 8$$
се реални броеви. Докажи, дека важи $a^2 \geq 2b + 12$.

14. Определи ги корените на полиномот
$$P(z) = 2z^3 - (5+6i)z^2 + 9iz - 3i\,,\ z \in \mathbb{C}$$
ако се знае дека еден од нив е реален број.

15. Нека P е полином од $n-$ти степен чии коефициенти се ненгативни, а водечкиот коефициент е еднаков на 1. Ако сите корени на P се реални броеви, докажи дека за секој $x \geq 0$ важи $P(x) \geq (x+1)^n$.

16. Графикот на полиномот P е централно симетричен во однос на точката $S(a,b)$ ако и само ако постои полином Q таков што
$$P(x) = b + (x-a)Q((x-a)^2)\text{, за секој } x \in \mathbb{R}.$$

17. Определи ги сите цели броеви x за кои полиномот $x^4 - 101x^2 + 100$ има негативна вредност.

18. Докажи дека не постои полином $p(x)$ со целобројни коефциенти таков што $p(1) = 4$ и $p(4) = 9$.

19. Определи ги полиномите $P(x)$ за кои важи
$$(x+1)P(x) = (x-2)P(x+1)\,.$$

20. Определи полином $P(x)$ со реални коефициенти таков да за некој $n \in \mathbb{N}$ важи
$$xP(x-n) = (x-1)P(x)\,,$$
за секој $x \in \mathbb{R}$.

21. Определи ги сите полиноми $P(x)$ такви што
$$P(x^2) = (P(x))^2\,.$$

22. Определи ги сите полиноми $P(x)$ со реални коефициенти такви што за секој $x \in \mathbb{R}$ важи
$$P(x^2) + 2P(x) = (P(x))^2 + 2\,.$$

23. Нека $f(x) = x^{2002} - x^{2001} + 1$. Докажи дека за секој природен број m броевите $m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \ldots$ по парови се заемно прости.

24. Нека $f_n(x) = x^{n+1} + x^n$, за $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. За кои реални броеви x бесконечната сума
$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots$$
има вредности во интервалот $(0, \frac{2}{3}]$.

18. РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

1. Определи за кои непарни природни броеви $n \geq 3$ функцијата $f:\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ определена со $f(x) = x^n - 2x$ е инјекција.

2. Нека $a,b,c,d \in \mathbb{N}_0$ и $d \neq 0$. Функцијата $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ е определена со $f(x) = [\frac{ax+b}{cx+d}]$. Докажи дека f е инјекија ако и само ако $c = 0$ и $a \geq d$.

3. Функцијата $f:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ е зададена со $f(1) = 2,\ f(2) = 3$ и
$$f(n+1)f(n-1) = (f(n))^2 + (-1)^n\ ,\ n \geq 2.$$
а) Докажи дека $f(n) \in \mathbb{N}$, за секој $n \in \mathbb{N}$,
б) Докажи дека функцијата f монотоно расте.

4. Дадена е функцијата $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ за која важи
$$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)},\ x \in \mathbb{Z}.$$
Ако $f(1) = 2$, определи го $f(2004)$.

5. Даден е реален број $k \neq 0$ и функција $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква што за секој $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) \neq 1$, $f(x) \neq 0$ и $f(x+k) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Докажи дека $f(x+4k) = f(x)$ за секој $x \in \mathbb{R}$.

6. За функцијата f и g важи
1) $f(x) = f(\frac{x+y}{2})g(\frac{x-y}{2}) + f(\frac{x-y}{2})g(\frac{x+y}{2})$,
2) f е непарна, а g е парна функција.
Докажи дека
$$(f(x))^2 - (f(x))^2 = f(x+y)f(x-y).$$

7. Нека f е реална функција таква што $f(1) = 1$ и за секои реални броеви x и y важи
$$f(x) + f(y) = f(x+y) - xy - 1\ .$$
За кои природни броеви n важи $f(n) = n$.

8. За функцијата $f:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ важи
а) $f(1) = 1$,
б) $f(1) + 2f(2) + 3f(3) + ... + nf(n) = n(n+1)f(n)$, за $n \geq 2$.
Пресметај $f(1996)$.

9. Ако функцијата f ги задоволува условите:
   а) $f(1)=1$,
   б) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$,
   в) $f(\frac{1}{x})=\frac{f(x)}{x^2}$, за секој $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,
   пресметај $f(\sqrt{1996})$.

10. Ако за функцијата f важи $f(x)+3f(x+1)-f(x)f(x+1)=5,\ f(1)=2017$, пресметај $f(2017)$.

11. Ако
$$f_0(x)=\frac{1}{1-x} \text{ и } f_n(x)=f_0(f_{n-1}(x)), \text{ за } n=1,2,3,...$$
пресметај го $f_{2011}(2011)$

12. За функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ важи
$$f(1)=2 \text{ и } f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1,$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}$. Определи го $f(m)$ за секој цел број m.

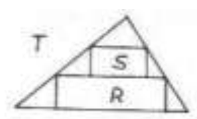
13. За секој природен број n функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ го задоволува условот
$$f(1)+f(2)+...+f(n)=n^2 f(n).$$
Ако $f(1)=1002$, определи го $f(2004)$.

14. Дадена е функцијата $f(x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$ a, каде е позитивен реален број. Определи
$$S=f(\tfrac{1}{2001})+f(\tfrac{2}{2001})+...+f(\tfrac{2000}{2001}).$$

15. Ако $a>0$, определи ја најмалата вредност на функцијата $f(x)=x^5+\frac{a}{x}$, за $x>0$.

16. Определи ја максималната вредност на функцијата $f(x)=\frac{x}{ax^2+b}$, $a,b>0$.

17. Во даден остроаголен триаголник T се впишани два правоаголника R и S (цртеж десно). Определи ја најголемата можна вредност на изразот $\frac{P_R+P_S}{P_T}$, каде P е ознака за плоштина.



18. Докажи дека не постои функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за која важи:
   а) $f(1+f(x))=1-x$, за секој $x\in\mathbb{R}$

б) $f(f(x)) = x$, за секој $x \in \mathbb{R}$.

19. Нека $A = \{1, 2, ..., 2n\}$ и функцијата $g: A \to A$ еопределена со $g(k) = 2n - k + 1$. Дали постои функција $f: A \to A$ таква што $f(k) \neq g(k)$ за секој $k \in A$ и $f(f(f(k))) = g(k)$ за секој $k \in A$, ако
а) $n = 999$, б) $n = 1000$.

20. Функцијата $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ е определена со
$$f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(n+2) = f(n+2 - f(n+1)) + f(n+1 - f(n)),\ n \geq 1.$$
а) Докажи дека $f(n+1) - f(n) \in \{0,1\}$.
б) Ако $f(n)$ е непарен, докажи дека $f(n+1) = f(n) + 1$.
в) За даден природен број k определи ги сите вредности на n за кои $f(n) = 2^{k-1} + 1$.

21. Определи ги сите функции $f: \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \to \mathbb{R}$ за кои важи
$$f(\tfrac{x-3}{x+1}) + f(\tfrac{3+x}{1-x}) = x.$$

22. Определи ги сите функции $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ за кои се исполнети условите
1) $f(n)f(-n) = f(n^2)$, за секој $n \in \mathbb{Z}$,
2) $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn$, за секои $m, n \in \mathbb{Z}$.

23. Определи ги сите функции $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ такви што $f(x+y) = f(x)f(y)$, за секои $x, y \in \mathbb{Q}$ и $f(1) = 2$.

24. Определи ги сите функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што за секои $x, y \in \mathbb{R}$ важи
$$f(xy+1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2.$$

25. Определи ги сите функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што за секои реални броеви x и y важи
$$f(x + f(y)) = f(f(y)) + 2xf(y) + x^2.$$

26. Определи ги сите функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што за секои $x, y \in \mathbb{R}$ важи
$$f(x^2 + f(y)) = y - x^2.$$

27. Определи ги сите функции $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такви што
$$f(x)^{(y)} = f(x^y), \text{ за секои } x, y > 0.$$

28. Определи ги сите функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}}(2xy - f(y)),$$

за секој $x \in \mathbb{R}$.

29. Функцијата $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ е задаена со

$$f(x, y) = (ax - by, bx + ay),$$

каде $a, b \in \mathbb{R}$ се константи. Определи ги a и b така што важи

$$f \circ f \circ f = f.$$

30. Определи ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ кои се непрекинати во нулата и за кои важи

$$f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x^2, \text{ за секој } x \in \mathbb{R},$$

каде $t \in (0,1)$ е даден фиксен број.

31. Пресметај го збирот

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \ldots + 2019 \cdot 2^{2018}.$$

32. Пресметај го збирот

$$s = 1 + 4x + 9x^2 + \ldots + n^2 x^{n-1} + \ldots$$

каде $|x| < 1$.

II НАПРЕДНО НИВО

1. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Докажи дека за секој природен број a постои природен број кој почнува со бројот a и кој се намалува точно a пати кога природниот број a се премести од почетокот на крајот.

2. На која цифра звршува збирот $1+2+...+n$ ако збирот $1^3+2^3+...+n^3$ завршува на цифрата 1.

3. Докажи дека бројот 15^4+4^{15} е сложен.

4. Нека a,b,c,d се природни броеви такви што
$$a^2+b^2+ab=c^2+d^2+cd\ .$$
Докажи дека $a+b+c+d$ е сложен број.

5. Докажи дека постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што
$$n\,|\,3^{n-1}-2^{n-1}\ .$$

6. Дали постои 30-цифрен природен број таков што бројот добиен од било кои 5 последователни цифри од овој број е делив со 13?

7. Нека a,b,c се природни броеви такви што $a+b+c\,|\,a^2+b^2+c^2$. Докаи дека постојат брсконечно многу природни броеви n за кои $a+b+c\,|\,a^n+b^n+c^n$.

8. Ако за природните броеви a,b,c важи
$$a^{2008}+b^{2008}=c^{2008}\ ,$$
докажи дека $30\,|\,abc$.

9. Нека $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ е множество од n природни броеви. Збирот на броевите на секое вистинско непразно подмножество од S не е делив со n . Дали мора сите броеви од множеството S да имаат ист остаток при делење со n ?

10. Дадени се природните броеви m и n такви што бројот $m+n+1$ е прост и важи
$$m+n+1 \mid 2(m^2+n^2)-1.$$
Докажи дека $m=n$.

11. За некои цели броеви x и y бројот
$$A=x^2-1002000y^2$$
е позитивен и не е точен квадрат. Определи ја најмалата можна таква вредност на A.

12. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот p^3-p+1 е точен квадрат.

13. Нека a,b,n се природни броеви, $\frac{n^{4ab+1}-1}{(a+b)^2+1}$ е цел број и $\frac{(n-1)(n^2-1)\dots(n^{4ab}-1)}{(a+b)^2+1}$ не е цел број. Докажи дека $(a+b)^2+1$ е сложен број.

14. Ако x и y се природни броеви поголеми од 1 такви што
$$x+y-1 \mid x^2+y^2-1,$$
докажи дека бројот $x+y-1$ е сложен.

15. Дали постојат по парови заемно прости броеви a,b,c кои се поголеми од 1 и се такви што $b \mid 2^a+1, c \mid 2^b+1, a \mid 2^c+1$.

16. Определи ги сите парови природни броеви (x,y) такви што
$$2^x-1 \mid 2^y+1.$$

17. Нека a и b се природни броеви такви што $2a+1$ и $2b+1$ се заемно прости. Определи ги сите прости броеви p кои истовремено се делители на броевите $2^{2a+1}+2^{a+1}+1$ и $2^{2b+1}+2^{b+1}+1$.

18. Определи ги сите природни броеви $n>1$ такви што за секои два заемно прости природни броја a и b кои се делители на n важи
$$a+b-1 \mid n.$$

19. Дали постои природен број n таков што броевите
$$2n-1,\ 5n-1 \text{ и } 13n-1$$
се точни квадрати.

20. Ако за некој $n \in \mathbb{N}$ бројот 5^n+3^n+1 е прост, докажи дека тој број n е делив со 12.

21. Докажи дека бројот $2^n + n^2$ не е делив со 105 за ниту еден природен број n .

22. Определи ги сите прости броеви p такви што $43 \nmid 7^p - 6^p - 1$.

23. Докажи дека за секој природен број $k \geq 2$ важи

$$2^{3k} \,\|\, C_{2^{k+1}}^{2^k} - C_{2^k}^{2^{k-1}} .$$

24. Нека c е природен број, а p е непарен прост број. Определи го остатокот при делењето со p на бројот

$$\sum_{n=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{2n}{n} c^n .$$

25. Определи ги сите природни броеви n такви што $k+1 \mid C_n^k$ за секој природен број $k, 0 \leq k < n$.

26. Нека $(n+2)-$торката $(a_0, a_1, ..., a_{n+1})$ природни броеви ги задоволува следниве услови: $a_0 = a_{n+1} = 1$, $a_i > 1$ и $a_i \mid a_{i-1} + a_{i+1}$ за секој $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Докажи дека барем еден член од $(n+2)-$торката е еднаков на 2.

27. Низата на Лукас $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ е определена со

$$L_0 = 2, L_1 = 1, L_{n+1} = L_n + L_{n-1}, n > 0 .$$

Докажи дека бројот $L_{\frac{p+1}{2}}^p - 1$ е делив со L_p за секој прост број $p > 2$.

28. Нека $a_1 < a_2 < ... < a_n$ се произволни природни броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_2, a_3]} + ... + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} < 1 ,$$

каде $[x, y] = \mathrm{NZD}(x, y)$.

29. Нека n е природен број. Докажи дека

$$\mathrm{NZS}(1, 2, ..., n) = \mathrm{NZS}(C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n)$$

ако и само ако $n+1$ е прост број.

30. Нека за низата $\{a_n\}$ важи $\mathrm{NZD}(a_i, a_k) = \mathrm{NZD}(i, k)$ за секои два различни природни броја i и k . Докажи дека $a_n = n$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

31. Нека m и n се природни броеви и p е прост број. Ако

$$A = \frac{7^m + 2^n p}{7^m - 2^n p}$$

е природен број, докажи дека тој е прост.

32. Нека $A=\{x^2+2y^2 \mid x,y\in\mathbb{N}\}$ и p е прост број. Ако $p^2\in A$, докажи дека и $p\in A$.

33. Нека n е природен број. Докажи дека
$$(n+1)\cdot \mathrm{NZS}(C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n)=\mathrm{NZS}(1,2,...,n+1).$$

34. Нека x_i, $i=1,2,...,n$ се цели броеви чиј најголем заеднички делител е 1 и нека $s_k=\sum_{i=1}^{n} x_i^k$, за $k\in\mathbb{N}$. Докажи дека
$$\mathrm{NZD}(s_1, s_2, ..., s_n) \mid \mathrm{NZS}(1,2,...,n).$$

35. Определи ги сите природни броеви n за кои важи
$$n+[\sqrt{n}]+1 \mid n^2+n+1.$$

36. Нека $a,b\in\mathbb{N}$ и $d=\mathrm{NZD}(a,b)$. Ако
$$\tfrac{a+1}{b}+\tfrac{b+1}{a}\in\mathbb{N},$$
докажи дека $d^2\le a+b$.

37. Нека со a_n е означен најголемиот непарен делител на бројот n и нека
$$b_n=a_1+a_2+...+a_n.$$
Докажи дека
$$b_n\ge \tfrac{n^2+2}{3}.$$
Кога важи знак за равенство?

38. Нека е даден природен број n. Ги разгледуваме подредените парови природни броеви (u,v) такви што $\mathrm{NZS}(u,v)=n$. Докажи дека бројот на таквите подредени парови природни броеви е еднаков на бројот на позитивните делители на бројот n^2.

39. Нека $p>2010$ е прост број. Докажи дека може да се исфрлат најмногу две цифри од декадниот запис на бројот p така што новодобиениот број ќе биде сложен.

40. Определи ги сите тројки природни броеви (a,b,c) такви што броевите a^2+1 и b^2+1 се прости и
$$(a^2+1)(b^2+1)=c^2+1.$$

41. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$n^3 - 5n + 10 = 2^k.$$

42. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$n^4(n+1) = 7^m - 1.$$

43. Реши ја равенката
$$p(p+1) + q(q+1) = r(r+1),$$
каде p и q се прости, а r е природен број.

44. Определи ги сите парови прости броеви p и q такви што
$$\frac{p^{2n+1}-1}{p-1} = \frac{q^3-1}{q-1}$$
за некој природен број n.

45. Определи ги сите парови $(n, x), n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}$ такви што
$$502(2009^n + 1) = x^2 + x.$$

46. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$a^{2011} = 2010^b + 1.$$

47. а) Докажи дека равенката
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{a}{bc} \qquad (1)$$
има бесконечно многу решенија во множеството природни броеви.
б) Докажи дека меѓу решенијата на (1) има бесконечно многу за кои $\mathrm{NZD}(a, b, c) = 1$.

48. Во множеството цели броеви реши ја равенката
$$x^3 + 3 = 4y(y+1).$$

49. Докажи дека равенката $7^m = n^4 + 2010$ нема решение во множеството природни броеви.

50. Нека n е природен број. Докажи дека равенката
$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3n$$
нема решенија во множеството рационални броеви.

51. Ако p и $2^p + p^2$ се прости броеви, докажи дека бројот $2^{p+1} + p^2$ е точен квадрат.

52. Определи ги сите цели броеви a такви што бројот

$$\frac{a^{8k}-1}{a-1}$$

е точен квадрат за некој природен број k .

53. Определи ги сите природни броеви m и n за кои бројот $6^m + 2^n + 2$ е точен квадрат.

54. Определи ги сите природни броеви n за кои $5^n + 12^n$ е точен квадрат.

55. Дали постои природен број n за кој бројот

$$n^2 + 2n + 2005$$

е точен квадрат.

56. Природниот број n е таков што броевите $2n+1$ и $3n+1$ се точни квадрати. Дали може бројот $5n+3$ да биде прост број?

57. Докажи дека за ниту еден природен број n бројот

$$(n+2)^4 - n^4$$

не е точен куб на природен број.

58. Дали постои природен број n таков што важи
   1) бројот n не е точен степен на природен број,
   2) секој од броевите $n+1, n+2, ..., n+2003$ е делив со некој точен квадрат поголем од 1,
   3) бројот $n+2004$ не е точен степен на природен број.

59. Докажи дека не постојат 2010 последователни природни броеви кои не може да се претставаат како збир на квадрати на два природни броја.

60. Нека A и B се непразни дисјунктни множества за кои важи $A \cup B = \{1, 2, ..., 2026\}$. Докажи дека постојат $a \in A$ и $b \in B$ такви што

$$2027 \mid a^{10} + a^9 b + a^8 b^2 + a^7 b^3 + a^6 b^4 + a^5 b^5 + a^3 b^7 + ab^9 + b^{10}$$

61. Нека p е прост број, а a и n се природни броеви. Ако

$$2^p + 3^p = a^n ,$$

докажи дека $n = 1$.

62. Нека $r_2, r_3, ..., r_{2013}$ се остатоците од делењето на некој број n со броевите 2, 3, ..., 2013. Познато е дека остаоците се по парови различни, при што некој од нив е еднаков на 0. Определи кој статок може да биде еднаков на 0.

63. Определи ги сите природни броеви n кои може да се претставаат како збир на неколку (најмалку два) последователни природни броеви.

64. Определи ги сите парови природни броеви (a,b) такви што
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a}{b+1}$$
е природен број.

65. Реши ја равенката
$$(p+1)^a - p^b = 1,$$
каде p е непарен прост број и a и b се природни броеви.

66. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот p^3+p^2+p+1 е точен квадрат.

67. Дали постојат цели броеви a,b,c,d такви што
$$\begin{cases} abcd-a=1235 \\ abcd-b=235 \\ abcd-c=35 \\ abcd-d=5? \end{cases}$$

68. Определи го најмалиот природен број m за кој важи
$$\underbrace{100^{100^{100^{\cdots^{100}}}}}_{m} = \underbrace{3^{3^{3^{\cdots^{3}}}}}_{100}.$$

69. Нека S е множеството од сите рационални броеви кои ги задоволуваат следниве услови:

1) $\frac{1}{2}\in S$,

2) ако $x\in S$, тогаш $\frac{1}{1+x}\in S,\ \frac{x}{1+x}\in S$.

Докажи дека множеството S ги содржи сите рационални броеви од интервалот $(0,1)$.

70. Нека $n=1000!$. Дали сите природни броеви од 1 до n може да се распоредат на кружница така што ако почнувајќи од некој број во насоката на стрелката на часовникот ги означиме со $a_1,a_2,...,a_n$, за секој $i\in\{1,2,...,n\}$ важи дека $a_{i+1}-a_i$ по модул n е конгруентен со 17 или 28 ($a_{n+1}=a_1$).

71. За даден природен број r со N_r да го означиме најмалиот природен број таков што сите броеви $\frac{N_r}{n+r}\binom{2n}{n}$ се природни. Докажи дека $N_r=\frac{r}{2}\binom{2r}{r}$.

72. Нека $P(x)$ е полином со позитивни целобројни коефициенти и $\deg P\geq 1$. Определи ги сите природни броеви n такви што $P(n)\mid P(P(n)+1)$.

73. Природниот број n може да се претстави како збир од k свои различни делители. Докажи дека n не може да биде заемно прост со $(k-1)!$.

74. Збирот на цифрите на природниот број n е еднаков на 2006. Дали бројот n може да има непарен број делители?

75. Нека $\sigma(n)$ е збирот на сите делители на природниот број n. Ако $\sigma(n)=5n$, докажи дека n има повеќе од пет различни прости делители.

76. Нека претпоставиме дека за природните броеви m и n важи
$$\varphi(5^m-1)=5^n-1,$$
каде $\varphi(x)$ е Ојлеровата функција. Докажи дека $\mathrm{NZD}(m,n)>1$.

77. Нека n и k се природни броеви такви што $n^k>(k+1)!$. Нека
$$M=\{(x_1,x_2,...,x_k)\,|\,x_i\in\{1,2,...,n\}\}.$$
Докажи дека меѓу секои $(k+1)!+1$ елементи на M постојат два елементи $(a_1,a_2,...,a_k)$ и $(b_1,b_2,...,b_k)$ такви што
$$(k+1)!\,|\,(a_1-b_1)(a_2-b_2)...(a_k-b_k).$$

78. Нека $n\geq 2$ е природен број и $A=\{1,2,...,n\}$. За секој $k\in\{1,2,...,n-1\}$ нека
$$x_k=\frac{1}{n+1}\sum_{|B|=k,\,B\subset A}(\min B+\max B).$$
Докажи дека x_i, $i=1,2,...,n-1$ се природни броеви е дека не се сите деливи со 4.

79. Нека n е природен број. Бројот n е магичен ако важи: за секои два броја x и y кои не се заемно прости со n, бројот $x+y$ не е заемно прост со n. Определи ги сите магични броеви.

80. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што збирот на цифрите на бројот 3^n не е помал од збирот на цифрите на бројот 3^{n+1}.

81. Докажи дека $\cos\frac{2\pi}{5}$ е ирационален број.

82. Определи ги сите природни броеви n кои бројот $f(n)$ е рационален
$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\frac{k\pi}{2n+1}.$$

2. НИЗИ

83. Низата $\{a_n\}$ е определена со

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 24 \text{ и } a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-2}a_{n-3}}, \text{ за } n \geq 4.$$

Докажи дека $n!$ е делител на a_n, за секој $n \in \mathbb{N}$.

84. Низата $\{a_n\}$ е определена со

$$a_1 = 43, a_2 = 142 \text{ и } a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ за } n \geq 3.$$

Докажи:
а) за секој n броевите a_n и a_{n+1} се заемно прости,
б) за секој природен број m постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $a_n - 1$ и $a_{n+1} - 1$ се деливи со m.

85. Низата $\{a_n\}$ е определена со

$$a_0 = 1 \text{ и } a_n = a_{n-1} + a_{[n/3]}, \text{ за } n \geq 1.$$

Докажи дека за секој прост број $p \leq 13$ постојат бесконечно многу членови на низата кои се деливи со p.

86. Нека $\{a_n\}$ е низа од различни природни броеви таква што постои константа $a > 0$ за која важи $a_n < an$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека:
а) ако $a < 5$, низата содржи бесконечно многу броеви чиј збир на цифри не е делив со 5,
б) тврдењето под а) не е точно за $a = 5$.

87. Низата $\{x_n\}$ е определена со

$$x_1 = 603, x_3 = 102, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + 2\sqrt{x_{n+1}x_n - 2}, \text{ за } n \geq 1.$$

Докажи дека:
а) сите членови на низата се природни броеви,
б) постојат бесконечно многу членови на низата кои во декаден запис завршуваат на 2003,
в) не постои член на низата кој во декаден запис завршува на 2004.

88. Дадена е низата природни броеви $a_1 > a_0$ и $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$. Докажи дека $a_{2003} \geq 2^{2003}$.

89. Дадена е низата

$$a_1 = a_2 = 1, \; a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{2^n}.$$

Докажи дека сите членови на оваа низа се помали од 3.

90. Нека m е природен број. Дефинираме низа $\{a_n\}_{n\geq 0}$ со

$$a_0=0,\ a_1=m,\ a_{n+1}=m^2a_n-a_{n-1},\ n>0,$$

Докажи дека парот (a,b) ненегативни цели броеви, каде $a\le b$ е решение на равенката

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=m^2$$

ако и само ако парот (a,b) е еднаков на парот (a_n,a_{n+1}) за некој $n\ge 0$.

91. Низата $\{x_n\}_{n\ge1}$ е определена со

$$x_1=1,\ \ x_{n+1}=1+x_1^2+x_2^2+...+x_n^2,\ \text{за}\ n\ge1.$$

Определи ги сите броеви k за кои x_k е точен квадрат.

92. Нека $a_i,\ i=1,2,...,n$ се цели броеви чиј збир е 1. Со N_k да го означиме бројот на позитивните членови во низата

$$a_k,a_k+a_{k+1},...,a_k+a_{k+1}+...+a_n+a_1+...+a_{k-1}.$$

Докажи дека броевите N_k се меѓусебно различни.

93. Најди го најмалиот член на низата природни броеви определена со

$$a_1=1993^{1994^{1995}}\ \ \text{и}\ \ a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n, & 2\mid a_n\\ a_n+7, & 2\nmid a_n.\end{cases}$$

94. Низата $\{x_n\}$ е определена со

$$x_1=1,\ x_{2k}=1+x_k,\ x_{2k+1}=\frac{1}{x_{2k}},\ \ k\in\mathbb{N}.$$

Докажи дека секој позитивен рационален број се јавува точно еднаш во оваа низа.

95. За даден природен број n конечната низа природни броеви $a_1,a_2,...,a_m$ ја нарекуваме $n-$добра ако секој број од множеството $\{1,2,...,n\}$ може да се претстави како зир на неколку (може и еден) последователни елементи на таа низа. Со $f(n)$ да ја означиме должината на најкратката $n-$добра низа. Докажи дека

$$8\cdot8-1\le f(2012)\le 88.$$

96. Нека $n>1$ е природен број. Определи ги сите низи со должина n^2+n чии членови се 0 или 1, такви што за секои $2n$ последователни членови на низата во првите n има помалку единици отколку во последните n членови.

97. Дефинираме низа $\{a_n\}_{n\ge1}$ со $a_{2n}=a_n$ и $a_{2n+1}=(-1)^n$. Точката P се движи во кординатната рамнина на следниов начин:
   1) Нека P_0 е кординатниот почеток. Прво P тргнува од P_0 до $(1,0)$. Оваа точка да ја означиме со P_1.

2) Откако P ќе се помести во P_i, се врти за 90° на лево и се поместува за 1 ако $a_i = 1$, а се врти за 90° и се поместува за 1 ако $a_i = -1$. Оваа точка да ја означиме со P_{i+1}.

Докажи дека P не може да помине по иста отсечка двапати.

3. ФУНКЦИИ

98. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ за кои важи
$$f(f(m)+f(n)) = m+n,$$
за секои $m,n\in\mathbb{N}$.

99. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ такви што $f(1)=1$ и
$$f(m+n)(f(m)-f(n)) = f(m-n)(f(m)+f(n)),$$
за секои $m,n\in\mathbb{Z}$.

100. Ја разгледуваме функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ таква што неравенството
$$f(m+n) \ge f(m)+f(f(n))-1$$
важи за секои $m,n\in\mathbb{N}$. Определи ги сите можни вредности на $f(2007)$.

101. За даден природен број n нека S е множеството од сите непарни природни броеви помали од n и заемно прости со n. За $x\in S$ дефинираме функција $f(x)$ како најголем непарен делител на бројот $n-x$. Докажи:

а) за секој $x\in S$ постои $m\le[\frac{n+1}{4}]$ таков што $f^{(m)}(x) = f(f(...f(x)...)) = x$,

б) ако n е прост број и не е делител на 2^k-1 за ниту еден $k=1,2,...,n-2$, тогаш најмалиот број m од тврдењето под а) е $m=[\frac{n+1}{4}]$.

102. Функцијата $f:\mathbb{N}\setminus\{1\}\to\mathbb{N}$ е определена со
$$f(n) = \mathrm{NZS}(1,2,...,n).$$
Докажи дека постојат 2008 последователни природни броеви во кои функцијата има иста вредност.

103. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{Q}^+$ важи
$$f(x)+f(y)+2xyf(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)}.$$

104. Даден е полином $P(x)$ со целобројни коефициенти. За секој природен број n бројот $P(n)$ е поголем од n. Ја разгледуваме низата

$$x_1 = 1,\ x_2 = P(x_1),\ ...,\ x_n = P(x_{n-1}),\ ... .$$

Познато е дека за секој природен број N постои член на низата кој е делив со N. Докажи дека важи $P(x) = x + 1$.

105. Даден е полиномот

$$P(x) = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + ... + a_1x + a_0,$$

чии сите нули се реални. Докажи дека $P(1) = 2^n$.

106. Ако $P(x)$ е полином од $n-$ти степен таков што $P(k) = \frac{k}{k+1}$, за $k = 0,1,2,...,n$ пресметај $P(n+1)$.

107. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти. Дали задолжително постои природен број n таков што $2011 \mid P(1) + P(2) + ... + P(n)$?

108. Нека $P(x)$ е моничен полином од $n-$ти степен со реални корени за кој важи $|P(0)| = P(1)$. Ако за секој корен λ на полиномот P важи $0 < \lambda < 1$, докажи дека производот на корените на $P(x)$ е помал или еднаков на $\frac{1}{2^n}$.

109. Нека $P(x)$ и $Q(x)$ се полиноми со реални коефициенти, такви што секој од нив има барем една реална нула. Ако

$$P(1 + x + Q(x)^2) = Q(1 + x + P(x)^2),$$

за секој $x \in \mathbb{R}$, докажи дека $P \equiv Q$.

110. Полиномите

$$P_1(x) = x^2 + ax + b,$$
$$P_2(x) = x^2 + ax - b,$$
$$P_2(x) = x^2 - ax + b,$$
$$P_1(x) = x^2 - ax - b,$$

каде a и b се заемно прости природни броеви, формираат дружина ако сите четири имаат целобројни нули. Докажи или оповргни го тврдењето: Постојат бесконечно многу дружини.

111. За полиномот $P(x)$ со комплексни коефициенти важи $P(k) = 2010^k$ за секој $k \in \{1, 2, ..., 2010\}$. Докажи дека $\deg P \geq 2009$.

112. Нека m и n се различни орიродни броеви, $a \geq 3$ е природен број и $p < a - 1$ е прост број. Докажи дека полиномот

$$P(x) = x^m (x-a)^n + p$$

е неразложлив.

113. Определи ги сите полиноми $P(x)$ од $n-$ти степен такви што
   1) множеството коефициенти на $P(x)$ е еднакво на множеството $\{0,1,...,n\}$,
   2) сите нули на полиномот $P(x)$ се реални.

114. Даден е природен број n. Докажи дека постои полином $P(x)$, $\deg P = n$ со реални коефициенти кој има n реални нули и е таков што важи
$$P(x)P(4-x) = P(x(4-x)).$$

115. Определи ги сите природни броеви n такви што постои полином $P(x)$ од $n-$ти степен чии коефициенти припаѓаат на множеството $\{-1,1\}$ и сите нули на $P(x)$ се реални.

116. Определи ја функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за која важи
$$f(\tfrac{x-1}{x+3}) + 2f(\tfrac{x+3}{x-1}) = x,\ \ x\neq 1, x\neq 3.$$

117. Функцијата $f:\mathbb{Q}\to[0,+\infty)$ ги задоволува условите
   1) $f(xy) = f(x)f(y)$, за секои $x,y\in\mathbb{Q}$,
   2) $f(x)\le 1$ повлекува $f(x+1)\le 1$, за $x\in\mathbb{Q}$,
   3) $f(\frac{2003}{2002}) = 2$.

   Определи ги сите можни вредности за $f(\frac{2004}{2003})$.

118. Докажи дека не постојат функции $f(x)$ и $g(y)$ такви што за секои реални броеви x и y важи
$$x^2 + xy + y^2 = f(x) + g(y).$$

119. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција таква што за секој x важи
$$|f(x)|\le 1 \text{ и } f(x+\tfrac{15}{56}) + f(x) = f(x+\tfrac{1}{7}) + f(x+\tfrac{1}{8}).$$
   Докажи дека функцијата f е периодична.

120. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што
$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy)$$
   за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

121. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што
$$f(x+f(x)+f(y)) = f(y+f(x)) + x + f(y) - f(f(y))$$
   за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

122. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ кои го задоволуваат неравенството
$$f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)\geq 3f(x+2y+3z),$$
за секои $x,y,z\in\mathbb{R}$.

123. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што
1) за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи
$$f(x)+f(y)+1\geq f(x+y)\geq f(x)+f(y)$$
2) за секој $x\in[0,1)$ важи $f(0)\geq f(x)$,
3) $f(1)=-f(-1)=1$.

124. Нека функцијата f ги пресликува точките на една рамнина во реални броеви така што кога точките A,B,C,D се темиња на квадрат во таа рамнина, тогаш $f(A)+f(B)+f(C)+f(D)=0$. Докажи дека од тука следува дека $f(X)=0$, за секоја точка X.

125. На секоја точка A во рамнината и е придружен позитивн број $f(A)$. За произволни три неколинеарни точки A,B,C со T_{ABC} и H_{ABC} да ги означиме тежиштето и ортоцентарот на триаголникот ABC.
а) Ако за секои три неколинеарни точки A,B,C кои не формираат правоаголен триаголник важи
$$f(H_{ABC})=\sqrt[3]{f(A)f(B)f(C)},$$
дали мора на секоја точка во рамнината да е придружен ист број?
б) Ако за секој три неколинеарни точки A,B,C важи
$$f(T_{ABC})=\sqrt[3]{f(A)f(B)f(C)},$$
дали мора на секоја точка во рамнината да е придружен ист број?

4. ГЕОМЕТРИЈА

4.1. ТРИАГОЛНИК

126. Даден е рамнокрак триаголник ABC со основа BC. Кружницата со центар во A која минува низ B и C на нејзиниот помал лак BC допира права p во точка D. Правата p ја сече кружницата опишана околу триаголникот ABC во точките E и F. Правата AE ја сече страната BC во точката P. Определи го $\measuredangle APD$.

127. Нека H' и H'' се подножјата на нормалите повлечени од ортоцентарот H на триаголникот ABC на симетралите на внатрешниот и надворешниот агол при темето C, а C' е средината на страната AB. ДОкажи дека точките H',H'',C' се колинеарни.

128. Даден е рамнокрак триаголник ABC. На основата BC е избрана произволна точка P. Низ точката P се повлечени прави паралелни на краците на триаголникот. Со Q и R да ги означиме пресечните точки на овие прави со краците на триаголникот. Нека S е точка симетрична на точката P во однос на правата QR. Докажи дека точката S припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот ABC.

129. Даден е триаголник ABC и околу него е опишана кружница k. Нека AD е симетралата на $\measuredangle BAC\ (D\in BC)$ и нека k' е кружница која одвнатре ги допира k и отсечките AD и BD. Со E да ја означиме допирната точка на k' и симетралата AD. Докажи дека E е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC.

130. Даден е триаголник ABC и кружница со центар O, која ја допира правата AB во точката B, а правата AC во точката D. Нека K е пресечната точка на правата BD со нормалата повлечена од O на BC. Докажи дека правата AK ја полови отсечката BC.

131. На страните AB, BC, CA на триаголникот ABC се избрани соодветно точки D, E, F така што $\overline{DE}=\overline{BE}$ и $\overline{FE}=\overline{CE}$. Докажи дека центарот на опишаната кружница околу триаголникот ADF припаѓа на симетралата на $\measuredangle DEF$.

132. За триаголникот ABC важи $\measuredangle ABC=54^\circ$ и $\measuredangle BAC=84^\circ$. Докажи дека важи $a^2=c(b+c)$.

133. Висините од A, B, C на остроаголниот триаголник ABC ги сечат спротивните страни во точките D, E, F, соодветно. Правата низ D паралелна со EF ги сече AC и AB во Q и R, соодветно, а EF ја сече BC во P. Докажи дека опишаната кружница околу триаголникот PQR минува низ средината на страната BC.

134. Нека M е произволна точка во внатрешноста на триаголникот ABC. Со T_A, T_B, T_C да ги означиме редоследно тежиштата на триаголниците BCM, CAM, ABM и нека T_M е тежиштето на триаголникот $T_AT_BT_C$. Определи го геометриското место на тежиштето T_M, кога точката M се менува во внатрешноста на триаголникот ABC.

135. Во триаголникот ABC е повлечена симетралата AM на $\measuredangle CAB=\alpha, M\in BC$. Во секој од триаголниците ABM и AMC се впишани кружници со радиуси r' и r'', соодветно. Докажи дека $r'=r''$ ако и само ако триаголникот ABC е рамнокрак сп краци AB и AC.

136. Даден е остроаголен триаголник ABC. Нека точката D е средина на лакот BC на опишаната кружница околу триаголникот ABC, кој не ја содржи точката A. Точката E е симетрична на точката D во однос на правата BC, а DF е радиус на опишаната кружница. Нека K и M се средини на отсечките EA и BC, соодветно.
Докажи дека кружницата која минува низ средините на страните на триаголникот ABC ја содржи точката K и дека $AF \perp KM$.

137. Во даден триаголник ABC конструирај точка M таква што збирот на квадратите на растојанијата до правите AB, BC, CA е минимален.

138. Даден е триаголник ABC. Тангентата во темето A на кружницата опишана околу триаголникот ABC ја сече средната линија на триаголникот паралелна со BC во точката A'. Аналогно се определуваат точките B' и C'. Докажи дека точките A', B', C' лежат на една права која е нормална на Ојлеровата права за триаголникот ABC.

139. Нека ABC е триаголник и P е точка во неговата внатрешност. Со D, E, F да ги означиме подножјата на нормалите повлечени од точката P на правите BC, CA, AB, соодветно. Ако
$$\overline{AP}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{PE}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PF}^2,$$
докажи дека точката P е центар на опишаната кружница околу триаголникот $S_aS_bS_c$ каде S_a, S_b, S_c се центрите на припишаните кружници на триаголникот ABC.

140. Нека BD и CE се симетралите на внатрешните агли на триаголникот ABC, при што $D \in AC$ и $E \in AB$. Ако е познато дека $\measuredangle BDE = 24^\circ$ и $\measuredangle CED = 18^\circ$, определи ги аглите на триаголникот ABC.

141. Даден е триаголник ABC. На полуправата AC е избрана точка K, а на полуправата BC е избрана точка L така што важи $\overline{AB} = \overline{AK} = \overline{BL}$. На полуправата AB е избрана точка M и на полуправата CB е избрана точка N така што $\overline{AC} = \overline{AM} = \overline{CN}$. На полуправата BA е избрана точка P и на полуправата CA е избрана точка Q така што $\overline{BC} = \overline{BP} = \overline{CQ}$. Докажи дека правите KL, MN и PQ се паралелни.

142. Нека AK, BL, CM се висините на триаголникот ABC, а P е било која точка во неговата рамнина која не припаѓа на правите кои ги содржат висините. Докажи дека кружниците опишани околу триаголниците AKP, BLP, CMP, совен P имаат уште една заедничка точка.

143. Нека E и F се соодветно точки на страните AC и AB на триаголникот ABC такви што $EF \parallel BC$. Докажи дека пресечните точки нна кружниците

над дијаметрите BE и CF припаѓаат на висината на триаголникот ABC повлечена од темето A.

144. Во остроаголен триаголник ABC, C_0 е подножјето на висината повлечена од темето C, а C_1 е средина на страната AB. Нека E и F се точки на страната AB такви што $\measuredangle ACE = \measuredangle FCB$. Понатаму, нека M и N се подножјата на нормалите од A и B на CE, односно CF. Докажи дека точките M, N, C_0, C_1 припаѓаат на иста кружница.

145. Даден е остроаголен триаголник ABC $(\overline{AB} \neq \overline{AC})$. Нека H е ортоцентар на триаголникот ABC, F е средина на страната BC, точката D е подножје на нормалата од A на отсечката BC, а пресекот на правата AH и опишаната кружница околу триаголникот ABC да го означиме со E. Тангентата на опишаната кружница околу триаголникот DEF во точката D ги сече правите AB и AC во точките M и N, соодветно. Докажи дека $\overline{DN} = \overline{DM}$.

146. Симетралите на внатрешните агли на тетивен четириаголник формираат конвексен четириаголник. Докажи дека дијагоналите на добиениот четириаголник се заемно нормални.

147. На страните AC и BC на триаголникот ABC се избрани точки M и N такви што $\overline{AM} = \overline{BN}$. Докажи дека правата која минува низ средините на отсечките AN и BM е нормална на симетралата на $\measuredangle ACB$.

148. Нека D и E се соодветно средините на страните BC и AC на триаголникот ABC и нека се O и S соодветно центрите на опишаната и впишаната кружница на триаголникот ABC. Докажи дека точките D, E, O, S се конциклични (лежат на една кружница) ако и само ако
$$\overline{AC} + \overline{BC} = 2\overline{AB}.$$

149. Нека E е подножјето на нормалата повлечена од средината D на страната BC кон страната AC на остроаголниот триаголник ABC. Ако точката F е средина на отсечката ED и ако $AF \perp BE$, докажи дека триаголникот ABC е рамнокрак.

150. Нека ABC е остроаголен триаголник и T е точка на помалиот лак BC на кружницата опишана околу овој триаголник. Нека G и K се подножјата на нормалите повлечени соодветно од A и T на BC, а H и L се подножјата на нормалите повлечени соодветнои од B и C на AT. Докажи дека четириаголникот $GHKL$ е тетивен.

151. Даден е триаголник ABC со центар I на впишаната кружница. На страните AB и BC соодветно се избрани точки X и Y така што $\overline{BX} = \overline{BY}$. Нека M е втората пресечна точка на кружниците опишани околу триаголниците AXI

и BYI. Докажи дека кружницата опишана околу триаголникот MXY ги допира правите AB, BC и кружницата опишана околу триаголникот AMC.

152. Припишаната кружница на триаголникот ABC ја допира страната BC во точката K и продолжението на страната AB во точката L. Другата припишана кружница ги допира продолженијата на страните AB и BC во точките M и N, соодветно. Правите KL и MN се сечат во точката X. Докажи дека CX е симетрала на $\measuredangle ACN$.

153. Надворешно припишаната кружница на триаголникот ABC ја допира страната AB и продолженијата на страните CA и CB во точките C_1, B_1, A_1, соодветно. Другата припишана кружница ја допира страната AC и продолженијата на страните BA и BC во точките B_2, C_2, A_2, соодветно. Правите A_1B_1 и A_2B_2 се сечат во точката P, а правите A_1C_1 и A_2C_2 се сечат во точката Q. Докажи дека точките A, P и Q се колинеарни.

154. Нека AC е најмалата страна на остроаголниот триаголник ABC. Точките D и E се избрани соодветно на страните AB и BC така што $\overline{AD} = \overline{CE} = \overline{AC}$. Ако O и I се соодветно центрите на опишаната и впишаната кружница за триаголникот ABC, докажи дека $IO \perp DE$ и дека радиусот на опишаната кружница околу триаголникот BDE е еднаков на $\overline{IO}$.

155. Нека O и H се соодветно центарот на опишаната кружница и ортоцентарот на триаголникот ABC и правата l е нормална на правата OH во точката H. Пресеците на правата l со тангентите на опишаната кружница во точките A, B, C да ги означиме со D, E, F, соодветно. Ако A', B', C' се симетричните точки на точките D, E, F во однос на точките A, B, C, соодветно, докажи дека тие се колинеарни.

156. Во триаголникот ABC симетралата на $\measuredangle BAC$ ја сече страната BC во точката D. Нека k е кружницата која ја содржи точката A и ја допира BC во точката D. Точката M е пресек на k со страната AC. Нека P е втората пресечна точка на отсечката BM со кружницата k. Докажи дека P припаѓа на тежишна линија на триаголникот ABD.

157. Впишаната јружница k во триаголникот ABC ги допира страните BC, CA, AB во точките A', B', C', соодветно. Нека D е дијаметрално спротивната точка на C' на кружницата k, а точката E е пресек на правите $B'C'$ и $A'D$. Докажи дека $\overline{CE} = \overline{CA'} = \overline{CB'}$.

158. Нека ABC е остроаголен триаголник. Правоаголниците $BCKL$ и $ACPQ$ се конструирани надвор од триаголникот и имаат еднакви плоштини. Докажи

дека темето C, центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC и средината на отсечката PK се колинеарни.

159. Нека AD е симетрала на $\measuredangle BAC$ во триаголникот $ABC\ (\overline{AC} < \overline{AB})$. Најди потребен и доволен услов кој треба да го задоволуваат аглите на триаголникот ABC за да постојат точки E и F на страните AB и AC, соодветно, такви што $\overline{BE} = \overline{CF}$ и $\measuredangle BDE = \measuredangle CDF$. Ако E и F постојат изрази ја должината на отсечката BE во функција од должините на страните на триаголникот ABC.

160. На основата BC и краците AB и AC на рамнокрак триаголник ABC соодветно се дадени точки P, Q и R такви што $PQ \parallel AC$ и $PR \parallel AB$. Докажи дека точката симетрична на точката P воодност на правата QR припаѓа на кружницата опишана околу триаголникот ABC.

161. За точката P во внатрешноста на рамностраниот триаголник ABC важи $\overline{PA} = 5,\ \overline{PB} = 12$ и $\overline{PC} = 13$. Определи го $\measuredangle APB$.

162. Нека AK, BL, CM се висините на триаголникот ABC, а H е неговиот ортоцентар. Точката P е средина на отсечката AH. Ако пресекот на правите BH и MK е точката S, а пресекот на правите LP и AM е точката T, докажи дека TS и BC се заемно нормални.

163. На страната BC на рамнокракиот триаголник $ABC\ (\overline{AC} = \overline{BC})$ дадена е точка $D \neq C$ таква што
$$\overline{AD}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BC}.$$
Докажи дека $\overline{AD} = \overline{AB}$.

164. Нека A_1 и B_1 се точки на правата определена со основата AB на рамнокракиот триаголник ABC такви што $\measuredangle A_1CB_1 = \measuredangle ABC$. Кружницата која однадвор ја допира кружницата опишана околу триаголникот A_1B_1C исто така ги допира и правите CA и CB во точките A_2 и B_2, соодветно. Докажи дека $\overline{A_2B_2} = 2\overline{AB}$.

165. Даден е триаголник ABC во кој симетралите на внатрешниот и надорешниот агол во темето A ја сечат правата BC во точките D и E, соодветно. Нека $F\ (F \neq A)$ е пресекот на правата AC со кружницата k над дијаметарот DE. Конечно, нека тангентата во точката A на опишаната кружница околу триаголникот ABF ја сече кружницата k во точките A и G. Докажи дека $\overline{AF} = \overline{AG}$.

166. Во даден триаголник ABC точките A',B',C' се срединина страните BC, CA, AB, соодветно. Нека P е произволна точка на опишаната кружница. Правите PA', PB' и PC'' по втор пат ја сечат опишаната кружница во точките A'',B'' и C'', соодветно. Нека претпоставиме дека точките A,B,C, A'',B'',C'' се различни и дека правите AA'',BB'',CC'' формираат триаголник. Докажи дека плоштината на овој триаголник не зависи од изборот на точката P.

167. Нека M е средината на основата BC на рамнокракиот триаголник ABC. На помалиот лак MA на кружницата опишана околу триаголникот ABM е избрана точка X. Нека T е точка од $\measuredangle BMA$ за која $\measuredangle TMX = 90^\circ$ и $\overline{TX} = \overline{BX}$. Докажи дека разликата $\measuredangle MTB - \measuredangle CTM$ не зависи од изборот на точката X.

168. Нека K и L се соодветно средините на страните AC и AB на триаголникот ABC. Допирните точки на впишаната кружница на триаголникот ABC со страните BC и AC да ги означиме со D и E, соодветно. Докажи дека симетралата на внатрешниот агол во темето B, правата Kl и правата DE се сечат во една точка.

169. Во внатрешноста на триаголникот ABC е земена точка M таква што
$$\measuredangle MAB = \measuredangle MBC = \measuredangle MCA = \varphi .$$
Докажи дека
$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma}$$
каде $\alpha = \measuredangle BAC, \beta = \measuredangle CBA, \gamma = \measuredangle ACB$.

170. Даден е триаголник ABC е точка M која лежи на една од висините на триаголникот. Правата низ M нормална на AM ја сече правата BC во точката A'. Точките B' и C' се дефинираат аналогно. Докажи дека точките A',B', C' се колинеарни.

171. Нека A' е средината на страната BC на триаголникот ABC и $\measuredangle CAA' = 15^\circ$. Определи ја најголемата можна вредност на $\measuredangle ABC$.

172. Нека A',B',C' се проекциите на темињата A,B,C на триаголникот ABC на симетралите на надворешните агли при темињата C,A,B, соодветно. Со d да го означиме дијаметарот на кругот опишан околу триаголникот $A'B'C'$, а со r и p радиусот на впишаната кружница и полупериметарот на триаголникот ABC, соодветно. Докажи дека $r^2 + p^2 = d^2$.

173. Даден е остроаголен триаголник ABC. Нека AD е висината повлечена од темето A, а точката E е пресекот на правата BC и дијаметарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC кој го содржи темето A. Нека

точките M и N се симетрични на точката D во однос на правите AC и AB, соодветно. Докажи дека $\measuredangle EMC = \measuredangle BNE$.

174. Даден е триаголник ABC. На страните AB, BC и CA се избрани точки M, N и P, соодветно, такви што четириаголникот $CPMN$ е паралелограм. Нека $\{R\} = AN \cap MP, \{S\} = BP \cap MN, \{Q\} = AN \cap BP$. Докажи дека плоштината на четириаголникот $MRQS$ е еднаква на плоштината на триаголникот NQP.

175. Даден е разнокрак триаголник ABC. Впишаната кружница k со центар во точката O ги допира страните AB, BC, CA во точките C_1, A_1, B_1, соодветно. Со A_2 и B_2 да ги означиме редоследно пресечните точки на отсечките AA_1 и BB_1 со кружницата k. Нека A_3 е пресекот на симетралата на $\measuredangle B_1A_1C_1$ и отсечката B_1C_1, а B_3 е пресекот на симетралата на $\measuredangle A_1B_1C_1$ и отсечката A_1C_1. Понатаму, со P и Q да ги означиме пресечните точки на кружниците опишани околу триаголниците $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$. Докажи дека A_2A_3 е симетрала на $\measuredangle B_1A_2C_1$ и дека точките P, O, Q се колинеарни.

176. Даден е триаголник ABC таков што $\overline{AC} = 3$ и $\overline{BC} = 1$. Ако P е средина на страната AB, а Q е точка на страната AC таква што $\overline{AQ} = 2$, докажи дека $\measuredangle BQP$ е прав агол.

177. Во остроаголен триаголник ABC, аголот при темето A е еднаков на 60° и $\overline{AB} > \overline{AC}$. Нека BE и CF се висини на триаголникот (точките F и E се на страните AB и AC, соодветно) и H е неговиот ортоцентар. На отсечките BH и HF соодветно се земени точки M и N такви што $\overline{BM} = \overline{CN}$. Ако O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC пресметај ја вредноста на изразот $\frac{\overline{MH}+\overline{NH}}{\overline{OH}}$.

178. Нека O и I се соодветно центрите на опишаната и впишаната кружница во триаголникот ABC. Припишаната кружница кон страната BC ги допира продолженијата на страните AB и AC во точките K и M, соодветно, а страната BC во точката N. Познато е дека средината P на отсечката KM припаѓа на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Докажи дека точките O, N, I се колинеарни.

179. Нека D е точка на страната BC на остроаголниот триаголник ABC, O_1 е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABD, O_2 е центар на опишаната кружница околу триаголникот ACD и O е центар на опишаната кружница околу триаголникот AO_1O_2. Определи го геометриското место на точки кое го опишува точката O кога точката D ја опишува страната BC.

180. Нека I е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC и A_1, B_1, C_1 се произволни точки на отсечките AI, BI, CI, соодветно. Пресечните точки на симетралите на отсечките AA_1, BB_1, CC_1 да ги означиме со A_2, B_2, C_2. Докажи дека центрите на опишаните кружници околу триаголниците $A_2B_2C_2$ и ABC се совпаѓаат ако и само ако I е ортоцентар на триаголникот $A_1B_1C_1$.

181. Нека H е ортоцентар, M средина на отсечката AC, AA_1 и CC_1 се висини на остроаголниот разнокрак триаголник ABC. Симетралата на остриот агол меѓу овие висини ги сече страните AB и BC во точките P и Q, соодветно. Нека симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече правата HM во точката R. Докажи дека четириаголникот $PBQR$ е тетивен.

182. Нека $A_1A_2A_3$ е триаголник и T_1, T_2, T_3 се допирните точки на надворешно припишаните кружници со соодветните страни на триаголникот. Ако H_1, H_2, H_3 се ортоцентрите на триаголниците $A_1T_2T_3, T_1A_2T_3, T_1T_2A_3$, соодветно, докажи дека правите H_1T_1, H_2T_2, H_3T_3 се конкурентни.

183. Даден е триаголник ABC. Симетралата на внатрешниот агол при темето A и симетралата на надворешниот агол при темето B се сечат во точката D.
а) Докажи дека центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABD се наоѓа на опишаната кружница околу триаголникот ABC.
б) Ако и центарот на впишаната кружница на триаголникот ABD се наоѓа на опишаната кружница околу триаголникот ABC, определи го $\measuredangle ACB$.

184. Во остроаголен триаголник ABC точката D е подножје на висината повлечена од темето C и важи $\overline{AD} = \overline{BC}$. Ако K е пресечната точка на висината повлечена од темето A и симетралата на внатрешниот агол при темето B, докажи дека $DK \parallel BC$.

185. На страните BC, AC, AB на триаголникот ABC дадени се точките A', B', C', соодветно, такви што AA', BB', CC' се сечат во точката P. Со Q да ја означиме пресечната точка на правите AP и $B'C'$. Докажи дека важи

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PA'}} = 2\frac{\overline{AQ}}{\overline{QA'}}.$$

186. Нека M и N се произволни точки соодветно на катетите AC и BC на правоаголниот триаголник и L е пресечната точка на отсечките AN и BM. Докажи дека темето C и ортоцентрите на триаголниците AML и BNL се колинеарни точки.

187. Ако едно теме на разнокракиот остроаголен триаголник ABC припаѓа на кружницата опишана околу триаголникот OSH, каде со O, S и H се означени центрите на опишаната и впишаната кружница и пртоцентарот на три-

аголникот ABC, соодветно, докажи дека барем уште едно теме на триаголникот припаѓа на истата кружница.

188. На страните AB и BC на триаголникот ABC земени се точки E и F, соодветно, такви што $\overline{BE} = \overline{CF}$. АКо M и N се средините на отсечките BC и EF, соодветно, докажи дека правата MN е паралелна на симетралата на $\measuredangle BAC$,

189. Даден е триаголник ABC. Нека X, Y, Z се точки соодветно на страните BC, CA, AB такви што триаголникот XYZ е сличен со триаголникот ABC ($\measuredangle X = \measuredangle A, \measuredangle Y = \measuredangle B$). Докажи дека опишаната кружница околу триаголникот AYZ секогаш минува низ фиксна точка различна од A, независно од изборот на точките X, Y, Z.

190. Нека H е ртоцентар, а S центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Понатаму, нека D е точка таква што S е средината на отсечката HD и нека T_1, T_2, T_3 се тежиштата на триаголниците BCD, CAD, ABD, соодветно. Докажи дека
$$\overline{AT_1} = \overline{BT_2} = \overline{CT_3}.$$

191. Нека H е ортоцентар на триаголникот ABC, а P е точка на опишната кружница околу триаголникот, различна од A, B, C. Нека E е подножјето на висината BH на триаголникот ABC, нека $PAQB$ и $PARC$ се паралелограми и нека AQ ја сече HR во точката X. Докажи дека $EX \parallel AP$.

192. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето C, CD е висина на овој триаголник и K е точка која не припаѓа на рамнината на триаголникот таква што $\overline{AK} = \overline{AC}$. Докажи дека дијаметарот на кружницата опишана околу триаголникот ABK, кој ја содржи точката A е нормален на правата DK.

193. Симетралите на внатрешните агли во темињата A, B, C на триаголникот ABC ги сечат спротивните страни во точките A', B', C', соодветно. Ако четириаголникот $AA'B'C'$ е тетивен, докажи дека
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}+\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}+\overline{BC}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}+\overline{BC}}.$$

194. Дадена е права p и на неа точки A, B, C, D, E такви што
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} \text{ и } A - B - C - D - E.$$
Нека F е произволна точка која не е на правата p. Ако G и H се центри на опишаните кружници околу триаголниците AFD и BFE, соодветно, докажи дека $GH \perp CF$.

4.2. ЧЕТИРИАГОЛНИК

195. На страните BC и CD на квадратот $ABCD$ соодветно се избрани точки M и N за кои важи $\overline{CM}+\overline{CN}=\overline{AB}$. Отсечките AM и AN ја делат дијагоналата BD на три дела. Докажи дека од нив секогаш може да се состави триаголник чиј еден агол е еднаков на 60°.

196. Даден е квадрат $ABCD$ и точка E на страната CD. Кружницата впишана во триаголникот ADE ја допира DE во точката F, а кружницата k' која ги допира AB, BC и EA, ја допира AB во точката G. Докажи дека правите AE, BD и FG се сечат во една точка.

197. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ лежи квадрат $PQRS$ така што отсечките AP, BQ, CR, DS не се сечат меѓу себе и не ги сечат страните на квадратот $PQRS$. Докажи дека збирот на плоштините на четириаголниците $ABQP$ и $CDSR$ е еднаков на збирот на плоштините на четириаголниците $BCRQ$ и $DAPS$.

198. Нека $BCLK$ е квадрат конструиран над страната BC од надворешната страна на остроаголниот триаголник ABC. Нека CD ($D\in AB$) е висината во триаголникот ABC и H е ортоцентарот на триаголникот ABC. Ако правите AK и CD се сечат во точката P докажи дека

$$\frac{\overline{HP}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}.$$

199. Во паралелограмот $ABCD$ е избрана точка K таква што средината L на отсечката AD е подеднакво одалечена од точките K и C, а средината M на отсечката CD е подеднакво оддалечена од точките K и A. Нека N е средината на отсечката BK. Докажи дека $\measuredangle NAK=\measuredangle NCK$.

200. Нека K и L се точки од страната AD, односно дијагоналата AC на паралелограмот $ABCD$, такви што $\overline{AK}:\overline{KD}=1:3$ и $\overline{AL}:\overline{LC}=1:4$. Докажи дека точките K, L и B се колинеарни.

201. Во паралелограмот $ABCD$ точката M е средина на страната BC, а N е произволна точка на страната AD. Нека P е пресекот на правите MN и AC, а Q е пресекот на правите AM и BN. Докажи дека триаголниците BDQ и DMP имаат еднакви плоштини.

202. Нека K и N се средини на страните AB и CD на четириаголникот $ABCD$. Правите BN и KC се сечат во точката O. Ако правите AO и DO ја делат отсечката BC на три еднакви дела, докажи дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

203. Во трапез $ABCD$ должината на дијагоналата AC е еднаква на збирот на должините на основите AB и CD. Нека M е средината на страната BC, а B' е точката симетрична на B во однос на правата AM. Докажи дека
$$\measuredangle ABD = \measuredangle CB'D.$$

204. Трапезот $ABCD\,(AB \parallel CD)$ е таков што на краците AD и BC постојат точки P и Q такви што $\measuredangle APB = \measuredangle CPD$ и $\measuredangle AQB = \measuredangle CQD$. Докажи дека точките P и Q се еднакво оддалечени од пресекот на дијагоналите на трапезот.

205. Во трапезот $ABCD$ со основи AD и BC аголот при темето A е прав. Нека E е пресекот на дијагоналите на дадениот трапез, а точката F е подножје на нормалата повлечена од E на кракот AB. Докажи дека $\measuredangle DFE = \measuredangle CFE$.

206. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез таков што $AB \parallel CD$. Нека M е средина на страната BC, а E е подножјето на висината на трапезот повлечена од темето C на основата AB. Во кој однос отсечката DE ја дели отсечката AM ?

207. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Нека P и Q се соодветно точки на страните на BC и CD такви што $\measuredangle BAP = \measuredangle DAQ$. Докажи дека триаголниците ABP и ADQ имаат еднакви плоштини ако и само ако правата која ги содржи нивните ортоцентри е нормална на дијагоналата AC.

208. Конвексниот четириаголник $ABCD$ е тетивен, тангентен и неговите дијагонали се заемно нормални. Докажи дека барем еден негов внатрешен агол е прав.

209. Конвексен четириаголник $ABCD$ е впишан во кружница со центар O. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката P. Кружниците опишани околу триаголниците ABP и CDP по втор пат се сечат во точката Q. Ако точките O, P и Q се ралични докажи дека $OQ \perp PQ$.

210. Нека P е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на конвексниот четириаголник $ABCD$ во кој важи $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BD}$. Нека O и I се центрите на опишаната и впишаната кружница во триаголникот ABP. Докажи дека ако $O \neq I$, тогаш правите OI и CD се заемно нормални.

211. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што AB не е паралелна со CD. Кружницата k минува низ A и B и ја допира правата CD во точката P, а кружницата k' минува низ C и D и ја дипора AB во точката Q. Докажи дека заедничката тетива на кружниците k и k' ја полови PQ ако и само ако AD е паралелна со BC.

212. Определи го најмалиот позитивен реален број k таков што: Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник и нека се A', B', C', D' тоќки на страните AB, BC, CD, DA, соодветно. Нека S е збирот на најмалите две од плоштините на триаголниците $AA'D', BB'A', CC'B', DD'C'$, а S' е плоштината на четириаголникот $A'B'C'D'$. Тогаш важи $kS' \geq S$.

213. Тангентите во точките A и C на кружницата k опишана околу четириаголникот $ABCD$ се сечат во точката $P \notin BD$. Ако важи
$$\overline{PA}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PD},$$
докажи дека BD ја полови AC.

214. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник и точките X и Y соодветно на страните AB и BC се такви што $XBYD$ е паралелограм. Ако M, N се средините на AC, BD, соодветно и L е пресекот на AC и XY, докажи дека точките M, N, L, D лежат на една кружница.

215. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник. Да ги означиме со P, Q, R, S пресеците на симетралите на надворешните агли $\measuredangle ABD$ и $\measuredangle ADB$, $\measuredangle DAB$ и $\measuredangle DBA$, $\measuredangle ACD$ и $\measuredangle ADC$, $\measuredangle DAC$ и $\measuredangle DCA$, соодветно. Докажи дека четириаголникот $PQRS$ исто така е тетивен.

216. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник таков што AB е дијаметар на опишаната кружница со центар O. Точката E е пресек на дијагоналите AC и BD, а правата која минува низ E и е паралелна со AB ја сече опишаната кружница во точките M и N. Правата OE ја сече кружницата опишана околу триаголникот CDE во точка F (различна од E). Докажи дека четириаголникот $OMFN$ е тетивен.

217. Ако дијагоналите на тангентен четириаголник се заемно нормални, докажи дека тој четириаголник е делтоид.

4.3. КРУЖНИЦА И КРУГ

218. Нека l е тангента во точката M на кружницата k со дијаметар MN. На отсечката MN е дадена точка A. Произволна кружница со центар на l ја сече l во точките C и D. Нека правите NC и ND ја сечат кружницата k во точките P и Q. Докажи дека правата PQ минува низ фиксна точка.

219. Кружниците k' и k'' се сечат во точките A и B, а кружницата k надворешно ги допира во точките C и D. Правата AB ја сече кружницата k во точките P и Q. Докажи дека $\measuredangle PKC = \measuredangle QKC$.

220. На отсечката AC е избрана произволна точка B и над отсечките AB, BC и AC како над дијаметри се конструирани кружници k_1, k_2 и k, соодветно. Низ точката B е повлечена произволна права, која кружницата k ја сече во точките P и Q, а кружниците k_1 и k_2 по втор пат ги сече во точките R и S, соодветно. Докажи дека $\overline{PR} = \overline{QS}$.

221. Кружницата k' одвнатре ја допира кружницата k и го допира дијаметарот PQ на k во точката C. Нека A е точка на k, B е точка на PQ таква што AB е тангента на k' која е нормална на PQ. Докажи дека AC е симетрала на $\measuredangle PAB$.

222. Кружниците k и k' надворешно се допираат, при што радиусот на кружницата k е помал. Нека A и D се допирните точки на низната заедничка тангента d_1 со k и k', соодветно и нека d_2, втората тангента на k паралелна со d_1, ја сече k' во точките E и F. Нека точката B припаѓа на отсечката EF и $C \in k'$ е таква што правата BC минува низ D. Докажи дека кружницата опишана околу триаголникот ABC ја допира правата d_1.

223. Кружницата k' внатрешно ја допира кружницата k во точката C. Нека M е произволна точка од кружницата k' различна од C. Тангентата на k' во точката M ја сече k во точките A и B. Докажи дека $\measuredangle ACM = \measuredangle MCB$.

224. Четири кружници со еднакви радиуси се сечат во точката O. Пресечните точки на соседните кружници (во некоја насока) да ги означиме со A, B, C, D. Докажи дека
$$\overline{AB} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{OD} + \overline{CD} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{AD} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{OB} + \overline{BC} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OD}.$$

225. Нека k и k' се две концентрични кружници со центар O и соодветни радиуси $R < R'$. Права низ O ги сече кружниците k и k' во точките A и B, соодветно така што O е меѓу A и B. Полуправа со почеток во O, различна од претходната права, ги сече k и k' во точките E и F, соодветно. Докажи дека опишаните кружници околу триаголниците OEA и OBF и кружниците со дијаметри AB и EF се сечат во една точка.

226. Нека KL и KN се тангенти повлечени од точката K на кружницата k. Точката M е произвона точка на продолжението на отсечката KN (преку N), а точката P е другата пресечна точка на кружницата k и кружницата

опишана околу триаголникот KLM. Точката Q е подножје на нормалата повлечена од точката N на правата ML. Докажи дека $\measuredangle MPQ = 2\measuredangle KML$.

227. Кружниците k и k' со центри O и O' се сечат во точките A и B. Правата OB ја сече k' во точката F, а правата $O'B$ ја сече k во точката E. Ако правата која минува низ B и е паралелна со EF ги сече кружниците k и k' во точките M и N, докажи дека $\overline{MN} = \overline{AE} + \overline{AF}$.

228. Кружниците k и k' внатрешно се допираат во точката N, при што k има поголем радиус. Тетивите BA и BC на кружницата k лежат на тангентите на кружницата k' во точките K и M, соодветно. Нека Q и P се средините на оние лаци AB и BC кои не ја содржат точката N. Ако кружниците опишани околу триаголниците BQK и BPM се сечат во точките B и B', докажи дека четириаголникот $BPB'Q$ е паралелограм.

229. Кружниците k_1 и k_2 надворешно се допираат во точката A и ја допираат кружницата k внатрешно во точките A_1 и A_2, соодветно. Нека P е точка на пресекот на кружницата k со заедничката тангента на кружниците k_1 и k_2 во точката A. Правата PA_1 по втор пат ја сече кружницата k_1 во точката B_1, а правата PA_2 по втор пат ја сече кружницата k_2 во точката B_2. Докажи дека правата B_1B_2 е заедничка тангента на кружниците k_1 и k_2.

230. Кружниците k и k' се сечат во точките A и B. Права p низ точката B ја сече кружницата k во точката K, а кружницата k' во точката M. Тангентата на кружницата k паралелна со AM ја допира k во точката Q. Нека R е втората пресечна точка на правата AQ со кружницата k'.

а) Докажи дека тангентата на кружницата k' во точката R е паралелна со правата AK.

б) Докажи дека овие две тангенти и правта KM се конкурентни.

231. Кружниците $k(O,R)$ и $k'(O',R')$, $R' > R$ надворешно се допираат во точката M. На кружницата k' избрана е точка A таква што A, O, O' не се колинеарни точки. Од точката A се повлечени тангенти AB и AC на кружницата k. Правите MB и MC ја сечат кружницата k' по втор пат во точките E и F, соодветно. Докажи дека правата EF, тангентата на кружницата k' во точката A и заедничката тангента на кружниците k и k' во точката M се конкурентни.

232. Кружниците k и k' се сечат во точките P и Q. Заеничката тангента на овие кружници, која е поблиска до точката P, ги допира кружниците k и k' во точките A и B, соодветно. Тангентата на на кружницата k во точката P

ја сече кружницата k' во точката E различна од P, а тангентата на кружницата k' во точката P ја сече кружницата k во точката F различна од P. Нека H и K се точки на отсечките AF и BE, соодветно, такви што $\overline{AH} = \overline{AP}$ и $\overline{BK} = \overline{BP}$. Докажи дека точките A, H, Q, K, B се конциклични.

233. Кружниците k и k' се сечат во точките P и Q. На кружницата k се избрани точки A и B, различни од P и Q. Правите AP и BP по втор пат ја сечат кружницата k' во точките A' и B', соодветно. Нека C е пресекот на правите AB и $A'B'$. Докажи дека центрите на опишаните кружници околу триаголниците $AA'C$ добиени за различни полошби на точките A и B лежат на фиксирана кружница.

234. Точките A и B лежат на ист дијаметар на дадена кружница. Конструирај две тетиви на кружницата со иста доилжина и со една заедничка крајна точка така што едната тетива ја содржи точката A, а другата ја содржи точката B.

235. Кружниците k и k' се сечат во точките A и B. Произволна права l која ја содржи точката B ја сече кружницата k во точката K, а кружницата k' во точката M (различни од B). Нека правата l' е тангента на кружницата k во точка Q, паралелна на правата AM. СО R да ја означиме пресечната точка (различна од A) на кружницата k' и правата QA. Нека l'' е тангентата на кружницата k' во точката R.
а) Докажи дека правите l'' и AK се паралелни.
б) Докажи дека правите l, l' и l'' се конкурентни.

236. Складни кружници k и k' се сечат во точките A и B. Нека P е произволна точка на лакот AB на кружницата k' кој се наоќа внатре во кружницата k. Правата AP ја сече кружницата k во точката C, а правата CB ја сече кружницата k' во точката D. Симетралата на $\measuredangle CAD$ ја сече кружницата k во точката E и ја сече кружницата k' во точката L. Ако правата LB ја сече кружницата k во точката F, докажи дека точките P, D, E, F се темиња на паралелограм.

237. Складните кружници k и k' со центри O и O' се сечат во точките A и B. Нека P е точка на лакот AB на кружницата k' кој се наоѓа во внатрешноста на кружницата k. Правата AP ја сече кружницата k во точката C, а правата CB ја сече кружницата k' во точката D. Симетралата на $0CAD$ ги сече кружниците k и k' во точките E и L, соодветно. Нека F е симетричната точка на точката D во однос на средината на отсечката PE. Докажи дека постои точка X таква што $\measuredangle XFL = \measuredangle XDC = 90^\circ$ и $\overline{CX} = \overline{OO'}$.

4.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

238. Определи ги сите природни броеви $n>3$ со следново својство: во секој конвексен $n-$аголник постои дијагонала која не е паралелна ниту со една страна на тој многуаголник.

239. Даден е конвексен петаголник $ABCDE$ во кој

$$\overline{BC}=\overline{DE},\ \measuredangle ABE=\measuredangle CAB=\measuredangle AED-90^\circ,\ \measuredangle ACB=\measuredangle ADE.$$

Докажи дека $BCDE$ е паралелограм.

240. Во внатрешноста на остриот $\measuredangle AMB$ се дадени точки C и N при што точките M и C се од една страна, а точката N од друга страна на правата AB. Познато е дека $\measuredangle BAC=\measuredangle AMN, \measuredangle ABC=\measuredangle BMN$ и правата CN минува низ средината на отсечката AB. Докажи дека $\measuredangle ACB=\measuredangle ANB$.

241. Меѓу сите многуаголници впишани во дадена кружница определи го оној со најголем збир на квадратите на должините на страните.

242. Нека $ABCDEF$ е правилен шестаголник со центар O. Точките M и N се средини на CD и DE, соодветно, а L е пресек на правите AM и BN. Докажи дека плоштината на триаголникот ALB е еднаква на плоштината на четириаголникот $DMLN$ и дека $\measuredangle OLD=90^\circ$, $\measuredangle ALO=\measuredangle OLN=60^\circ$.

243. Правите $p_1, p_2,..., p_n$ лежат во една рамнина и се сечат во точката O. Кружниците $k_1,k_2,...,k_{2n}$ се во истата рамнина и се такви што k_1 ги допира правите p_1 и p_2, а секоја од кружниците k_i, $2\le i\le 2n$ ја допира кружницата k_{i-1} и правите p_i и p_{i+1}. На правата p_1 е избрана точка P_1, а точките $P_2,P_3,...,P_{2n+1}$ се конструирани на правите $p_2, p_3,..., p_{2n+1}$ така што правата P_iP_{i+1} е тангента на кружницата k_i, за $2\le i\le 2n$. Докажи дека ако за некоја точка P_1 на правата p_1 точките P_1 и P_{2n+1} се совпаѓаат, тогаш за секоја точка P_1 на правата p_1 точките P_1 и P_{2n+1} се совпаѓаат.
(Индексите на сите прави секаде се земаат по модул n.)

244. Во конвексен $n-$аголник ($n>3$) се повлечени $n-3$ дијагонали, кои не се сечат во внатрешни точки, така што од секое теме на $n-$аголникот излегуваат парен број (може и нула) дијагонали. Докажи дека $3\,|\,n$.

245. Точките M и N се средини на страните CD и DE на конвексниот петаголник $ABCDE$ за кој важи $BC\parallel AD$ и $BD\parallel AE$. Ако O е пресекот на BN и AM, докажи дека четириаголникот $MDNO$ и триаголникот ABO имаат еднакви плоштини.

246. Нека $n \geq 5$ е природен број. Определи го најголемиот број k (во функција од n) таков што постои конвексен $n-$аголник кај кој точно k четириаголници $A_i A_{i+1} A_{i+2} A_{i+3}$ се тангентни. (Се зема дека $A_{i+n} = A_i$.)

3. НЕРАВЕНСТВА

247. Докажи го неравенството

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 2009! < \frac{(1005!)^{4020}}{(1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot 1005!)^4}.$$

248. Докажи дека за $a > 0$ и $0 < b < 1$ важи

$$\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1-b^2} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

249. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a+b+c.$$

Кога важи знак за равенство?

250. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{c+a}{c+b} + \frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{c+a}.$$

251. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Кога важи знак за равенство?

252. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^{2005}}{b+c} + \frac{b^{2005}}{c+a} + \frac{c^{2005}}{a+b} \geq \frac{a^{2004}+b^{2004}+c^{2004}}{2}.$$

253. Дадени се позитивните реални броеви a,b,c,x,y,z. Докажи дека

$$(a+x)(b+y)(c+z) + 4(\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} + \frac{1}{cz}) \geq 20.$$

254. Нека за позитивните реални броеви $a.b.c$ важи

$$abc \geq ab+bc+ca.$$

Докажи дека

$$abc \geq 3(a+b+c).$$

255. Докажи дека за секои позитивни броеви a,b,c,d важи

$$\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{cd} \leq \sqrt[3]{(a+c+b)(a+c+d)}.$$

256. Нека a,b,c се позитивни броеви. Докажи дека
$$\frac{2a^3}{a^2+b^2}+\frac{2b^3}{b^2+c^2}+\frac{2c^3}{c^2+a^2}\geq a+b+c\,.$$

257. Докажи дека за реалните броеви a,b,c важи
$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)\,.$$

258. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се природни броеви такви што не постојат два од кои едниот се состои од почетните цифри на другиот во ист редослед (на пример броевите 12 и 12405 не можи да се меѓу дадените n броеви). Докажи дека
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{9}\,.$$

259. Нека $a,b,c,d\in[0,1]$. Докажи го неравенството
$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}-\frac{1}{4}\leq\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2.$$

260. Нека $x,y,z\in[0,1]$. Докажи дека
$$(x+1)(y+1)(z+1)\geq\sqrt{8(x+y)(y+z)(z+x)}\,.$$

261. Нека $x,y\in[0,1]$. Докажи дека
$$x^4+y^5+(x-y)^6\leq 2\,.$$

262. Нека $x,y,z\in(2,4)$. Докажи дека
$$\frac{x}{y^2-z}+\frac{y}{z^2-x}+\frac{z}{x^2-y}>1\,.$$

263. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $(a+b)(b+c)(c+a)=1$. Докажи дека
$$ab+bc+ca\leq\frac{3}{4}\,.$$

264. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=3$. Докажи дека
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq ab+bc+ca\,.$$

265. Нека a,b,c,d се позитивни реални броеви такви што
$$3(a+b+c+d)+4(abc+bcd+cda+dab)=8\,.$$
Докажи дека
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd\leq 2\,.$$

266. Нека $a,b,c>0$ и $a+b+c\leq 3abc$. Докажи дека
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq a+b+c\,.$$

267. Нека x и y се позитивни броеви такви што
$$xy(x+y+1)=4.$$
Определи ја најмалата можна вредност на изразот $(x+y)(y+1)$.

268. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Докажи дека
$$a+b+c\geq\frac{3}{a+b+c}+\frac{2}{abc}.$$

269. Нека a,b,c се ненулти реални броеви за кои важи
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$
Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи
$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}\geq\frac{1}{a^n+b^n+c^n}.$$
Кога важи занк за равенство?

270. Определи ги сите реални броеви r за кои неравенството
$$r(ab+bc+ca)+(3-r)(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})\geq 9$$
важи за секои позитивни реални броеви a,b,c.

271. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xyz=1$. Ставаме
$$a=x+y+z$$
$$b=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$
$$c=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$$
Определи ја најмалата можна вредност на изразот $2a-6b+c$, како и вредностите на x,y,z за кои истата се постигнува.

272. Нека a и b се различни природни броеви за кои
$$a^2+ab+b^2\mid ab(a+b).$$
Докажи дека
$$|a-b|\geq\sqrt[3]{3ab}.$$

273. Нека S_n е збирот на првите n прости броеви. Докажи дека за секој n постои природен број k таков што
$$S_n<k^2<S_{n+1}.$$

274. Нека a,b,c,x,y,z се позитивни реални броеви такви што $a\geq b\geq c$ и $x\geq y\geq z$. Докажи

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4} .$$

275. Нека a, b, c се реални броеви такви што $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Докажи дека

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3 + \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc} .$$

276. Нека $x, y, z > 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот

$$S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} .$$

277. Позитивните релани броеви a, b, c, d се такви што

$$a + b + c + d < \sqrt{6\sqrt{3}} .$$

Докажи дека

$$((a+b)^2(c^2 - a^2) - 1)^2 + ((a+b)^2(d^2 - b^2) - 1)^2 > 0 .$$

278. Нека $n \geq 4$ е природен број и нека a_i, $i = 1, 2, ..., n$ се позитивни реални броеви такви што

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = 1 .$$

Докажи дека

$$\frac{a_1}{a_2^2+1} + \frac{a_2}{a_3^2+1} + ... + \frac{a_{n-1}}{a_n^2+1} + \frac{a_n}{a_1^2+1} \geq \frac{4}{5}(a_1\sqrt{a_1} + a_2\sqrt{a_2} + ... + a_n\sqrt{a_n})^2 .$$

279. Нека n е природен број и $x_1, x_2, ..., x_{2n}$ се позитивни реални броеви чиј збир е еднаков на 1. Докажи дека

$$x_1^2 x_2^2 ... x_n^2 + x_2^2 x_3^2 ... x_{n+1}^2 + ... + x_{2n}^2 x_1^2 ... x_{n-1}^2 < \frac{1}{n^{2n}} .$$

280. Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви такви што $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Ако $[\sum_{i=1}^{n} x_i] = m$, докажи дека $\sum_{i=1}^{m} x_i \geq 1$.

281. Нека x_i, $i = 1, 2, ..., n$ се реални броеви чиј збир е еднаков на нула. Нека m е најмалиот и M е најголемиот од тиме броеви. Докажи дека

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq -nmM .$$

282. Нека $n > 1$ и $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитивни реални броеви.

а) Докажи дека

$$\frac{a_1^2}{a_1^2+a_2a_3} + \frac{a_2^2}{a_2^2+a_3a_4} + ... + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}^2+a_na_1} + \frac{a_n^2}{a_n^2+a_1a_2} \leq n-1 .$$

б) Дали може во неравенството $n-1$ да се замени со некој помал број.

283. Нека $a_i, i=1,2,...,n$, $n\geq 4$ се ненегативни реални броеви чиј збир е еднаков на 1. Докажи дека

$$a_1a_2+a_2a_3+...+a_{n-1}a_n+a_na_1\leq \tfrac{1}{4}.$$

284. Нека $x_i, i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви такви што $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=1$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geq \frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}.$$

285. Реалните броеви $x_1,x_2,...,x_n$ ги задоволуваат условите

$$x_i\geq -1, \qquad \sum_{i=1}^{n}x_i^3=0.$$

Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\leq \tfrac{n}{3}.$$

286. Нека $n\geq 4$ и нека $x_i, i=1,2,...,n$ се позитивни реални броеви.

а) Докажи дека

$$\frac{x_1}{x_n+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+...+\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}+x_n}+\frac{x_n}{x_{n-1}+x_1}\geq 2. \qquad (1)$$

б) Докажи дека за секој $n>4$ ова е најдобрата оценка, т.е. дека за секој $n>4$ бројот 2 на десната стрна во неравенството (1) не може да се замени со поголем број.

287. Нека $a_1\geq a_2\geq a_3\geq ...\geq a_n\geq a_{n+1}=0$ е низа реални броеви. Докажи дека

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k}\leq \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}).$$

288. Позитивните броеви $p_1,p_2,...,p_n,q_1,q_2,...,q_n$ се такви што $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=\sum\limits_{i=1}^{n}q_i=1$ и

$$(\sum_{i=1}^{k}p_i)q_{k+1}\geq (\sum_{i=1}^{k}q_i)p_{k+1},$$

за секој природен број $k, 1\leq k<n$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{k}p_i\geq \sum_{i=1}^{k}q_i$$

за секој природен број $k, 1\leq k<n$.

289. За реалните броеви $x_i, y_i, i = 1,2,...,n$ важи $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$. Докажи дека

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \le 2\,|1 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\,|.$$

Кога важи знак за равенство?

290. Во табела $n \times n$ се запишани броевите $1,2,...,n^2$ така што во првиот ред се броевите $1,2,...,n$, во вториот броевите $n+1, n+2,...,2n$ итн. во последниот се броевите $(n-1)n+1,(n-1)n+2,...,n^2$. Од табелата се избираат n броеви така што никои два броја не се во ист ред или во иста колона.
а) Докажи дека збирот на избраните броеви не зависи од изборот на броевите.
б) Ако $a_i, i = 1,2,...,n$ е број избран од $i-$тиот ред, докажи дека важи

$$\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + ... + \frac{n^2}{a_n} \ge \frac{n+2}{2} - \frac{1}{n^2+1}.$$

291. Нека $a_1, a_2,..., a_n \in \{1,2,...,n\}$ се такви што

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ и } a_1 a_2 ... a_n = n!.$$

За кои природни броеви $n \ge 2$ од горните услови следува дека сите броеви $a_i, i = 1,2,...,n$ се меѓусебно различни.

292. Дадени се позитивните реални броеви $a_1, a_2,..., a_{2011}, b_1, b_2,..., b_{2011}$ такви што $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < ... < \frac{a_{2011}}{b_{2011}}$. Подреди ги по големина броевите

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}, ..., \frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n}.$$

293. Дијамант од ред n е вертикално симетрично множество од единечни квадрати кои во редовите имаат редоследно

$$1,3,5,...,2n-3,2n-1,2n-3,...,5,3,1$$

квадрати. Нека $A(n,k)$ е бројот на начините на кои може да се поставата k дисјунктни 2×2 квадрати во $(2n-1)\times(2n-1)$ квадратна мрежа, а $B(n,k)$ е бројот на начините на кои може да се постават k дисјунктни домина на дијамант од ред n. СиМетричните поставувања се сметаат за различни. Докажи дека $A(n,k) < B(n,k)$, за $2 \le k \le (n-1)^2$.

294. Нека a,b,c се должините на страните на тапоаголен триаголник, при што $c > a$ и $c > b$. Докажи дека важи

$$c^3 > a^3 + b^3.$$

295. Нека l_a, l_b, l_c се должините на симетралите на аглите на даден триаголник, а s_a, s_b, s_c се должините на нивните делови меѓу центарот на впишаната кружница и соодветните страни. Докажи дека

$$s_a + s_b + s_c \le \tfrac{1}{3}(l_a + l_b + l_c) .$$

296. Даден е триаголник ABC. Нека G е неговото тежиште и точките M, N, P редоследно припаѓаат на страните AB, BC, CA и се такви што

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} .$$

Со G_1, G_2, G_3 да ги означиме тежиштата на триаголниците AMP, BMN, CNP, соодветно. Докажи дека:

а) триаголниците ABC и $G_1G_2G_3$ имаат заедничко тежиште,

б) за секоја точка D во рамнината на триаголникот ABC важи

$$3\overline{DG} < \overline{DG_1} + \overline{DG_2} + \overline{DG_3} < \overline{DA} + \overline{DB} + \overline{DC} .$$

297. Нека P и Q се соодветно пресеците на дијагоналата BF со дијагоналите AE и AC на правилен шестаголник $ABCDEF$. Докажи дека

$$20^\circ < \measuredangle PDQ < 22{,}5^\circ .$$

298. Нека збировите на аглите во темињата A и B на тетраедарот $ABCD$ се по 180°. Докажи дека $\overline{AB} \le \overline{CD}$.

299. Со R_a д го означиме радиусот на кружницата впишана во конвексната фигура определена со опишаната кружница и страните AB и AC на триаголникот ABC. Аaалогно се дефинираат R_b и R_c. Ако r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABC докажи дека

$$R_a + R_b + R_c \ge 4r .$$

300. Во круг со радиус 1 се дадени n различни точки A_i, $i = 1, 2, ..., n$. Докажи дека во кругот постои точка X таква што

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{A_i X} \ge n .$$

6. МНОЖЕСТВА И КОМБИНАТОРИКА

6.1. МНОЖЕСТВА

301. Нека n е природен број. Подмножеството A на множеството $\{1,2,...,n\}$ го нарекуваме генерирачко ако

$$\{|x-y|: x,y\in A\}=\{0,1,2,...,n-1\}.$$

а) Докажи дека постои генерирачко подмножество со најмногу $[2\sqrt{n}]+1$ елементи.

б) Дали за секој n постои генерирачко множество со најмногу $[\sqrt{2n}]+2003$ елементи.

302. Дадени се $n+1$ различно триелементно подмножество на множеството $\{1,2,...,n\}$. Докажи дека меѓу нив постојат две множества чиј пресек е едно-елементно множество.

303. Нека S_0 е конечно множество природни броеви. Дефинираме множества $S_1,S_2,...,S_n,...$ на следниов начин: природниот број припаѓа на множеството S_{n+1} ако и само ако точно еден од броевите a и $a-1$ припаѓа на множеството S_n. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви N такви што

$$S_N=S_0\cup\{a+N \mid a\in S_0\}.$$

304. Множеството $\{1,2,...,3n\}$ е произвоно разбиено на три дисјунктни множества A,B и C, при што во секое има по n броеви. Докажи дека секогаш може да се избере по еден број од секое од множествата A,B и C така што едниот од нив е еднаков на збирот на другите два.

305. Природните броеви од 1 до 999999 се поделени во две групи: во првата се ставени сите броевите чиј најблизок точен квадрат е непарен, а во втората сите броеви чиј најблизок точен квадрат е парен број. Во кое множество збирот на броевите е поголем?

306. Множеството $m=\{1,2,...,30\}$ е разбиено на k подмножества така што важи: за секои $a,b\in M,\ a\neq b$ ако $a+b$ е точен квадрат, тогаш a и b не се во исто подмножество. Определи го најмалиот број k за кој постои такво разбивање?

307. Нека $S_i,\ i=1,2,...,n$ се подмножества од множеството реални броеви секое од кои е унија на два затворени интервали. Ако секои три од овие множества имаат заедничка точка, докажи дека постои точка која припаѓа најмалку на половината од овие множества.

308. Дадено е множеството $X=\{1,2,3,...,n\}$ и m негови триелементни подмножества $A_1,A_2,...,A_m$. Ако пресекот на секои две од мнопжествата $A_1,A_2,...,A_m$ е празен или едноелементно множество, т.е. $|A_i\cap A_k|\leq 1$, за $i\neq k$, докажи

дека постои множество $Y \subseteq X$ кое има најмалку $[\sqrt{2n}]$ елементи и не содржи ниту едно од множествата $A_1, A_2, ..., A_m$.

309. Нека $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ се множества од по n отсечки на дадена права. Докажи дека пресекот $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n$ се состои од најмногу $n^2 - n + 1$ дисјунктни отсечки.

310. Во рамнината е даден непарен број интервали со должина 1. Нека S е множеството од сите броеви од реалната права кои се јавуваат во непарен број интервали. Докажи дека S е унија на дисјунктни интервали чија вкупна должина е поголема или еднаква на 1.

6.2. ПРЕБРОЈУВАЊА

311. На колку начини група од 5 момчиња и 4 девојчиња може да се распоредат во ред ако две девојчиња не смее да бидат едно до друго?

312. Определи го бројот на петцифрените броеви кои се запишани само со парни цифри и кои се деливи со 4, но не се деливи со 5.

313. Определи го бројот на десетцифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 3.

314. Колку има 2010-цифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 10.

315. Определи го бројот на 2012-цифрените броеви чиј збир на цифри е парен број.

316. Докажи дека за секој природен број n важи дека бројот на $2n-$цифрените природни броеви кои во својот декаден запис имаат n цифри еднакви на 1 и n цифри еднакви на 2 е еднаков на бројот на $n-$цифрените природни броеви запишани со цифрите 1, 2, 3, 4 кои во својот декаден запис имаат еднаков број единици и двојки.

317. Капетанот добил задача да распореди 12 војници (различни по височина) во 3 реда од по 4 војници, така што секој војник е понизок од сите војници кои се наоѓаат непосредно зад него (во останатите редови). На колку начини капетанот може да ги распореди војниците?

318. Ана, Бојан, Цветан и Драган репиле да купат 16 тетратки. Ана рекла дека може да купи 1, 2 или 3 тетратки, Бојан рекол дека може да купи 2, 3 или 4 тетратки, Цветан рекол дека може да купи 3, 4 или 5 тетратки, а Драган рекол дека може да купи 4, 5 или 6 тетратки. На колку различни начини може да бидат купени договорените 16 тетратки.

319. Се запишува текот на промената на резултатите во гемови во еден сет на тениски меч (на приме 0:1, 0:2, 1:2, 2:2, ...). Сетот завршува ако едниот играч освои 6 гема, при што мора да има освоено најмалку 2 гема повеќе од другиот играч, или ако двајцата играчи освојат по 6 гема се игра тајбрек и тогаш сетот завршува со резултат 7:6. Определи го бројот на можните различни записи ако е познато дека сетот го освоил првиот играч.

320. На трака $1\times n$ се запишуваат броевите $1,2,...,n$. Во првиот чекор на произволно место се запишува бројот 1. Потоа бројот 2 се запишува во поле кое е соседно со полето во кое е запишан бројот 1. Во секој нареден чекор следниот број се запишува во поле кое е соседно со поле во кое веќе е запишан некој број. Во последниот чекор бројот n се запишва во преостанатото поле. На колку начини може да се направи таквото запишување на броевите.

321. а) Определи го бројот на подредените тројки природни броеви (a,b,c) такви што $abc=2008\cdot 2009$.
б) Определи го бројот на подредените тројки природни броеви (a,b,c) такви што $a,b,c>1$, $abc=2008\cdot 2009$ и броевите a,b,c се по парови заемно прости.

322. Дали постои пермутација на броевите 1, 1, 2, 2, 3, 3, ..., 2006, 2006 таква што за секој $k, 1\le k\le 2006$ меѓу две појавувања на бројот k во таа пермутација се наоѓаат точно k броеви?

323. За пермутацијата $\{a_1,a_2,...,a_n\}$ на броевите $1,2,...,n$ ќе велиме дека е квадратна ако постои барем еден точен квадрат меѓу броевите $a_1, a_1+a_2,...,$ $a_1+a_2+...+a_n$. Определи ги сите природни броеви n такви што секоја пермутација на броевите $1,2,...,n$ е квадратна.

324. Нека $(p_1,p_2,...,p_n)$ е произволна пермутација на броевите $1,2,...,n$. За два броја p_i и p_j на оваа пермутација ќе велиме дека формираат лош пар ако $i<j$, а $p_i>p_j$. Нека $(p_1,p_2,...,p_{20})$ е пермутација на броевите $1,2,...,20$ која има точно 100 лоши парови. Докажи дека пермутацијата
$$(p_{19},p_{20},p_{17},p_{18},...,p_1,p_2)$$
има најмногу 100 лоши парови.

325. Пермутацијата $(a_1,a_2,...,a_{2n})$ на броевите $1,2,...,2n$ е таква што броевите $|a_{i+1}-a_i|$, за $i\in\{1,2,...,2n-1\}$ се по парови различни. Докажи дека $a_1-a_{2n}=n$ ако и само ако $1\le a_{2k}\le n$ за секој $k\in\{1,2,...,n\}$.

326. Правоаголникот $\mathbf{P}$ е поделен на помали правоаголници со страни паралелни на страните на правоаголникот $\mathbf{P}$. Точката ја нарекуваме раскрсница ако таа е теме на четири правоаголници на поделбата. Отсечката на поделбата ја

нарекуваме максимална ако не постои ниту една друга отсечка на поделбата која ја содржи (отсечка на поделба е секоја отсечка составена од страни на правоаголници на поделбата и $\mathbb{P}$). Ако R е бројот на раскрсниците, M е бројот на масималните отсечки и P е бројот на правоаголниците на поделбата, докажи дека

$$R+M=P+3.$$

327. Во држава со шест града некои парови градови треба да се поврзат со двосмерни автопати. На колку начини тоа може да се направи така што по тие автопати може да се стигне од секој град во секој друг град?

328. Нека q е прост број и $\mathbb{M}$ е множеството од сите $n\times n$ матрици со елементи од множеството $\{0,1,2,...,q-1\}$. Определи го бројот на матриците од множеството $\mathbb{M}$ чија детерминанта не е делива со q.

6.3. БОЕЊА, ПОКРИВАЊА И РАСПОРЕДУВАЊА

329. Секој природен број од 1 до 2007 е обоен во една од три бои. Докажи дека постојат два различни еднобојни броја x и y такви што $|x-y|$ е точен квадрат.

330. Темињата на правилен 2003-аголник се обоени црно или бело. Докажи дека постои рамнокрак триаголник чии темиња се обоени во иста боја. Дали истото важи и за правилен осумаголник?

331. Нека S е конвексно множество точки кое содржи барем три неколинеарни точки. Нека точките на множеството S се обоени во p различни бои (секоја точка во точно една од дадените p бои). Докажи дек за секој $n\geq 3$ постојат бесконечно многу складни $n-$аголници такви што темињата на сите тие $n-$аголници се обоени со иста боја.

332. Даден е правилен $2n-$аголник. Произволни n темиња се обоени со сина, а останатите n темиња со црвена боја. Конструирани се две низи броеви: во едната се наоѓаат сите должини на отсечките чии крајни точки се црвени, а во другата сите должини на отсечките чии крајни точки се сини. Докажи дека овие две низи се еднакви.

333. На кружницата се дадени $4k$ точки, кои наизменично се обоени со црвена и бела боја. Секоја од црвените $2k$ точки е поврзана со точно една црвена точка и на тој начин се добиени k црвени тетиви. Истото е направено и со белите точки и се добиени k бели тетиви. Притоа никои три тетиви не се сечат во една точка. Докажи дека постојат најмалку k точки во кои се сечат разнобојни тетиви.

334. Во рамнината се дадени 18 точки кои формираат C_{18}^{3} триаголници со вкупна плоштина P. Шест од овие точки се обоени сино, шест црвено и шест зелено. Докажи дека збирот на плоштините на триаголниците чии темиња се истобојни не е поголем од $\frac{P}{4}$.

335. Во табла 9×9 сите полиња се обоени со бела боја. Определи го најголемиот број n таков што како и да обоиме n полиња од таблата со црвена боја секогаш може да се најде фигура 4×1 или 1×4 која е обоена со бела боја.

336. Нека S е табла составена од оние единечни квадрати чии темиња во координатната рамнина имаат целобројни координати и кои исцело се наоѓаат во кругот со радиус 2006 и центар во координатниот почеток. Во секое поле на S е запишан бројот $+1$. Во еден потез ги заменуваме броевите од некој ред, некоја колона или дијагонала на S со спротивните броеви. Дали може по конечно многу потези само во еден квадрат да е запишан бројот -1?

337. Дадена е 1004×1004 табла. Определи го најмалиот природен број n таков што да за секое боење на n полиња на таблата може да се најдат 3 обоени полиња чии центри се темиња на правоаголен триаголник со катети паралелни на рабовите на таблата.

338. Дали може полињата на правоаголна табла да се обојат во црвена и бела боја така што на целата табла има еднаков број црвени и бели полиња, а во секој ред и секоја колона полињата обоени во една боја се повеќе од $\frac{3}{4}$ од полињата во тој ред, односно во таа колона?

339. Даден е 2008-аголник таков што никои три дијагонали не се сечат во една точка. Секоја од неговите дијагонали е обоена во една од 1003 бои. Докажи дека постои триаголник чии страни лежат на дијагонали кои се обоени со иста боја.

340. Во правилен $6n-$аголник по $2n$ темиња се обоени во една од три дадени бои. Потоа секоја отсечка која поврзува темиња со иста боја е обоена со таа боја (останатите отсечки не се обоени). Докажи дека постојат две отсечки со еднаква должина кои се обоени во различни бои.

341. Квадрат $(n-1)\times(n-1)$ со прави паралелни на неговите страни е поделен на $(n-1)^2$ единечни квадрати. Секој од n^2 јазли на добиената квадратна мрежа е обоен црвено или сино. Определи го бројот на различните боења такви што секој единечен квадрат има точно два црвени јазли. (Две боењасе сметаат за различни ако се разликуваат во боењето на најмалку еден јазол.)

342. Во табла со димензии 2010×2010 секое квадратче е обоено црно или бело, при што точно три од четирите аголни квадратчиња се обоени во иста боја.

Докажи дека на оваа табла постои 2×2 квадрат во кој триквадратчиња се обоени со една боја, а четвртото е обоено во спротивната боја.

343. Секоја точка од рамнината е обоена во сина или црвена боја. Докажи дека постојат две сини точки на растојание е, или четири колинеарни црвени точки A_1, A_2, A_3, A_4 такви што $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}=1$.

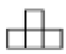
344. Дадени се 8 единечни коцки такви што 24 страни се обоени во црвена и 24 страни се обоени во сина боја. Докажи дека од нив може да се состави коцка со димензии $2\times2\times2$ која има еднаков број сини и црвени единечни квадрати на површината.

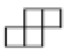
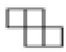
345. Два круга со различни радиуси се поделени на 200 еднакви кружни исечоци од кои 100 се обоени со црвена и 100 со сина боја. Потоа помалиот круг е поставен на поголемиот така што центрите им се совпаѓаат. Докажи дека малиот круг може да се заротира така што исечоците ќе се поклопат и барем 100 исечоци на малиот круг се наоѓаат на исечоци на големиот круг кои се обоени со иста боја.

346. Нека $A_1, A_2, ..., A_{2011}$ се точки на една кружница, земени во овој редослед. Определи го бројот на можните боења на овие точки со $p\geq2$ бои такви што секои две соседни точки се обоени во различна боја.

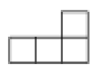
347. Броевите 1, 2, 3, ..., 2011 се обоени така што секои два различни броја a и b за кои важи $a\,|\,b$ се обоени во различни бои. Определи го најмалиот број потребни бои за ваквото боење.

348. Дали е можно 8×8 табла да се пополни со броевите 1, 2, .., 64 (секој број се појавува само еднаш) така што збирот на броевите во секоја фигура F е делив со 4?

а) фигурата F е ,

б) фигурата F е  или .

349. Докажи дека табла со димензии $m\times n$ може да се покрие со $L-$ тетрамина ако и само ако $m,n>1$ и $8\,|\,mn$.



350. Дадена е табла 8×10 од која се отсечени четирите аголни 2×2 квадрати. Остатокот е покриен со правоаголници 1×4 и 1×5 (во покривањето учествуваат двата вида правоаголници). Колкав е вкупниот број правоаголници кои се употребени за покривањето?

351. Определи го најголемиот број квадари со димензии $4\times1\times1$ кои може да се сместат во коцка со должина на раб 2010.

352. Во правоаголна рамка со димензии 8×5 е поставено без преклопување неколку еднакви кружни жетони, чиј дијаметар не е поголем од 1. Дали сите овие жетони и кружен жетон со дијаметар 2 може да се поставaт без преклопување во квадратен рам со димензии 7×7.

353. Дали е можно броевите од 1 до 25 да се распоредат на кружница така што секои пет последователни броеви даваат остаток 1 или 4 по модул 5?

354. Определи ги сите природни броеви n за кои табела $n\times n$ може да се пополни со броевите $-1, 0, 1$ така што секои $2n$ збирови по редици и колони на табелата се различни.

355. Во полињата на бесконечна квадратна табела се запишани природни броеви така што важи следново својство: ако во некое поле на табелата е запишан некој број a, тогаш збирот на броевите запишани во полето под и во полето десно од разгледуваното поле е $2a+1$. Докажи дека на секоја дијагонала паралелна на правата $x=y$ сите броеви се различни.

356. Волшебникот од Оз прави замок во форма на квадрат со 2005×2005 соби. Тој сака да постави врата меѓу соседни соби така што секоја соба ќе има точно две врати. Дали тоа може да се направи?

357. Андреј на табла 2005×2005 поставил 2005 топови кои не се напаѓаат. Тој му рекол на Пабло дека секој топ може да го помести за еден скок на коњот во жахот и дека во новодобиениот распоред ќе постојат два топа кои меѓусебно ќе се напаѓаат. Дали е Андреј во право?

358. Во секое поле на табела 2005×2005 запишан е еден од броевите $+1$ или -1. За секој ред и секоја колона пресметан е производот на сите броеви во редот, односно колоната. Дали може збирот на така добиените 4010 броеви да биде еднаков на 0?

6.4. ИГРИ И СТРАТЕГИИ

359. Круг е поделен на шест исечоци и броевите 1, 0, 1, 0, 0, 0 се запишани во исечоците во насока на движењето на стрелката на часовникот. Во еден чекор е дозволено за 1 да се зголемат броевите во два последователни исечоци. Дали по конечен број чекори може да се добијат шест еднакви броја?

360. Болва на почетокот се наоѓа во точката со координати $(1,\sqrt{2})$. Во секој потег болвата од полето (x,y) може да скокне во една од точките

$$(x,2x+y),\ (x,y-2x),\ (x-2y,y),\ (x+2y,y)$$

но не смее да се врати во точка во која била непосредно пред тоа. Дали болвата по конечна низа потези може да се врати во почетната точка?

361. На таблата е запишан бројот 2011. Во секој чекор бројот кој е запишан на таблата се брише и на негово место се запишува збирот на тој број о неговите цифри. Докажи дека со помош на опишаната постапка на таблата никогаш нема да биде запишан бројот $25\cdot 12\cdot 2011$.

362. На таблата е напишан зборот ВВАВВААВААВАВ. Во секој чекор е дозволено на било кое место во зборот да се избришат две соседни букви ВА или да се додадат две соседни букви АВ. Дали на овој начин дадениот збор може да се претвори во зборот:
а) ВВААВВАВААВВА,
б) АВВАВАААВВААВ,
в) ВАВААВААВВАВВ?

363. Во збор составен од букците a и A можеме да менуваме блокови на следниве начини:
1) aAa со A и обратно,
2) AAa со a и обратно.
Дали со дадените трнасформации тргнувајќи од зборот $\underbrace{aa...a}_{2009}A$ може да се добие зборот $A\underbrace{aa...a}_{2009}$?

364. Нека $A_1A_2...A_n$ е конвексен $n-$аголник, $n\geq 3$. На почетокот во темето A_1 е запишан бројот 1, а во останатите темиња бројот 0. Дозволена е следнава операција: се избира теме A_i во кое е запишан бројот 1 и се заменуваат броевите a, b и c во темињата A_{i-1}, A_i и A_{i+1} со $1-a, 1-b$ и $1-c$, соодветно ($A_0=A_n$, $A_{n+1}=A_1$). Дали може по конечен број вакви операции во сите темиња да е запишан бројот 0, ако:
а) $n=2007$, б) $n=2008$?

365. Дадено е множеството $S=\{1,3,5,7,-8,-12,13,-14,-16,21\}$. Андреј и Пабло ја играат следнава игра: наизменично земаат по еден број од множеството S. Победник е играчот кој на крајот има поголема апсолутна вредност на збирот на избраните броеви. Андреј е прв на потез. Дали тој има победничка стратегија?

366. Двајца играчи A и B од купче еден по друг земаат бонбони. Во купчето на почетокот има n бонбони. Дозволен потез е од купчето да се земе 1 или било кој прост број бонбони, т.е. 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... бонбони. Победник е играчот кој ќе ја земе последната бонбона. Определи ја победничката стратегија на играчите во зависност од бројот n.

367. На кружници се распоресени 40 фигури, бели и црвени. Двајца играчи ја играат следнава игра: првиот ги зема сите црвени фигури кои имаат бел сосед, потоа вториот ги зема сите бели фигури кои имаат црвен сосед, па повторно првиот ги зема сите црвени фигури кои имаат бел сосед итн. Играта се завр-

шува кога на кружницата остануваат само фигури со иста боја. Дали е можно на крајот да остане само една црвена фигура? Дали е можно на крајот да останат две бели фигури?

368. Дадени се $2n$ карти означени со броевите од 1 до $2n$, секоја карта со различен број. Играчите A и B ја играат следнава игра: картите се мешаат и секој добива по n карти. Наизменично фрлаат по една карта на масата. Играта зрвршува ако збирот на броевите фрлени на масата е делив со $2n+1$. Играчот кој последен ќе фрли карта е победник. Кој играч има победничка стратегија?

369. Екипаж од n пирати нашла ковчег со богатство во кој се наоѓаат одреден број златници. Во тој екипаж пиратите се распоредени по сила од најјакиот до најслабиот и сите се запознаени со тој редослед. Според пиратските правила најјакиот предлага поделба на пленот која се прифаќа ако за неа гласаат барем половината од сите пирати. Ако поделбата не се прифати пиратот кој го дал предлогот се елиминира (со одење по штица) и должноста за поделба на пленот преминува на следниот по сила и така по ред се додека не се усвои некој предлог. Во гласањето и предлагањето на поделбата на пленот пиратите се однесуваат рационално и знаат дека и другите пирати се однесуваат рационално. На секој пират листата на приоритети е иста:
1) Пиратот пред се има за цел да остане жив.
2) Ако првиот услов е задоволен пиратот ќе гласа и ќе предлага тако што ќе освои што поголемо количество златници.
3) Ако на пиратот по претходните две точки му е сеедно, тој ќе гласа против поделбата со цел елиминирање на своите ривали.

Кој ќе биде првиот по силе кој ќе остане жив и каква ќе биде конечната поделба на пленот ако во ковчегот има 100 златници, а бројот на пиратите е:
а) 100, б) 2004.

370. Маѓионичар и негов помошник го изведуваат следниот трик: некој од публиката извлекува 5 карти од стандарден шпил од 52 карти, ги покажува на помошникот, а потоа од тие пет карти избира една која маѓионичарот треба да ја определи. Помошникот потоа преостанатите четири карти ги распоредува во низа на масата, при што може да ги постави сите карти свртени со сликата кон масата или сите карти свртени наопаку. Маѓионичарот врз основа на поставените карти определува која карта ја избрала публиката, при што ако картите се завртени со сликата кон масата може да ги сврти. Докажи дека помошникот и маѓионичарот трикот секогаш може успешно да го направат (без разлика на картите кои ги избрала публиката). (Помошник и маѓионичарот не може да комуницираат во текот на трикот, но може пред тоа.) Картите се симетрични, нема никакви мали ротации при поставувањето на картите и слично. Единствено е важен распоредот на картите и ништо повеќе.

6.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

371. Ана, Билјана, Весна и Гордана ја минувале реката со чамец на следниов начин.
Имало три возења од левиот на десниот брег, при што секој пат во чамецот имало по две девојки од кои едната веслала. Во двете возења од десниот на левиот брег во чамецот имало само една девојка. Познато е дека Ана може да весла само ако е сама во чамецот, а Билјана ако е сама или со Весна. Се знае дека секоја девојка веслала барем еднаш. Која девојка веслала два пати?

372. Дадени се 2013 броеви кои го имаат следново својство: ако секој од дадените броевисе замени со збирот на преостанатите броеви, ги добиваме истите 2013 броеви. Докажи дека производот на дадените броеви е еднаков на 0.

373. Кошаркарот Павел Тројкоски шутира слободни фрлања и води статистика $s(n)$ - бројот на погодоци во првите n фрлања. На почетокот на сезоната $s(n)$ бил помал од 80% од n, а на крајот од сезоната бил поголем од 80% од n. Дали во некој момент $s(n)$ бил еднаков на 80% од n?

374. На таблата е запишан природен број. Во секој чекор над запишаниот број ја вршиме следнава операција: ја брипеме последната цифра и му ја додаваме петкратната вредност на таа цифра. Дали на опишаниот начин од бројот 7^{2008} може да се добие бројот 2008^7?

375. На шаховски турнир учествуваат определен број шахисти. Секој шахист игра една партија со секој друг шахист. За победа се добива 1 поен, за пораз 0 поени, а во случај на нерешен резултат двајцата шахисти добиваат по 0,5 поени. Нека $k \in \mathbb{N}$. Определи го најмалиот n во зависност од k така што на турнирот учествуваат n шахисти и играчот кој на крајот на турнирот освоил најмалку поени има k поени, а исте останати шахисти освоиле повеќе од k поени.

376. Во ходникот се наоѓаат n угасени светилки нумерирани со броевите од 1 до n. Секој од n ученици по ред минува ни ходникот и ја менува состојбата на светилките на следниов начин: $k-$тиот ученик го притиска прекинувачот на светилките кои се означени со редни броеви кои се деливи со k (ако светилката била запален таа се гаси, а ако била изгасната таа се пали). Определи го бројот на запалените светилки по поминувањето на последниот ученик.

377. Броевите $0,1,2,...,n$ се запишани на табла. Во секој чекор можеме да избришеме некој број кој е аритметичка средина на два различни броја кои уште се запишани на таблата. Постапката ја повторуваме се додека постои број кој можеме да го избришеме. Нека $f(n)$ е најмалиот можен број на преостанатите броеви на таблата. Определи го $f(n)$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

378. Во едно одделение на некое училипте има 35 ученици кои имаат 10 предмети. Просечната оценка по секој предмет на полугоди е $4\frac{2}{3}$. Докажи дека има најмалку 5 ученици кои немаат ниту единици ниту двојки.

379. Осум ученици решавало осум задачи. Се покажало дека секоја задача ја решиле повеќе од половина од учениците. Докажи дека постојат два ученика кои заедно ги решиле сите задачи.

380. Горјан има 77 дена да се подготви за натпреварот по математика. Тој сака да решава најмалку една задача на ден, но не сака вкупно да реши повеќе од 132 задачи. Докажи дека постои низа од последователни денови во кои Горјан вкупно решил точно 21 задача.

381. Докажи дека постои природен број n таков што бројот 3^n во својот запис има 2005 последователни нули.

382. Познато е дека меѓу било кои 4 учесници на еден натпревар најмалку еден ги познава останатите тројца. Докажи дека најмалку еден учесник на натпреварот ги познава сите останати учесници на тој натпревар.

383. Во група од $2n+1$ луѓе за секои n луѓе постои човек кој не е меѓу нив и сите ги познава. Докажи дека во таа група постои човек кој ги познава сите останати.

384. Дадени се $2n$ идентични монети, од кои n имаат маса a, а преостанатите n имаат маса b $(a<b)$. Ако имаме вага со чија помош можеме да ја мериме масата на било кои n монети, докажи дека со помош на најмногу $n+1$ мерење може да се определат броевите a и b.

385. Имаме два сада A и B со волумени a и b литри, соодветно, славина за вода и одвод за вода. Садовите може да се полнат со вода од или славината (до врв), или со претурање од другиот сад и тоа така што при претурањето или садот во кој се тура се полни до врв или садот од кој се тура останува празен. Водата од садот може да се празни во другиот сад или во одводот за вода (при што садот се празни). Користејќи ги само овие операции, ако садовите на почетокот се празни, определи ги оние m за кои можеме да постигнеме во садот B по неколку операции да има точно m литри вода.

386. Околу тркалезна маса седат 2005 витези, а еден од нив кај себе има $z \le 2005$ златници, кои треба да ги подели така што на ниту еден витез не смее да му припадне повеќе од еден златник. Неговата замисла е во секој чекор еден од витезите кои имаат повече од еден златник (ако такви упте има) на секој од своите соседи да му даде по еден златник.
а) Докажи дека ваквата распределба може да се заврши ако $z<2005$.
б) Дали распределбата може да се заврши ако $z=2005$.

387. Даден е шпил од 52 картички нумерирани со броевите од 1 до 52. Дозволено е точно еднаш да се пресече шпилот и да се заменат местата на блоковите добиени со тоа пресекување. Докажи дека тоа може да се направи така што по оваа операција најмалку две карти се најдат на своите места, т.е. дека за барем две различни вредности i картата нумерирана со i се најде на $i-$тото место.

388. На кружна патека се поставени n канти со бензин со различен волумен. Познато е дека вкупното количество бензин во кантите е доволно за точно да се помине целиот круг. Докажи дека постои место на патеката од кое може да се тргне и да се помине цел кру, земајќи го бензинот од кантата на која ќе се наиде.

389. Околу градот е изграден кружен пат. Сите улици на градот имаат почеток и крај на кружниот пат и меѓу улиците не постојат две кои се сечат повеќе од еднаш. Деловите на кои улиците и патот го делат градот ги нарекуваме квартови. Во градот сите улици и кружниот пат се едносмерни. Докажи дека најмалку еден кварт може да се обиколи движејќи се правилн, т.е. движејќи се правилно да се помине по сите делови на улиците кои го ограничуваат.

390. Правнукот на баронот Минхаузен тврди дека во неговата земја има $n \geq 3$ поголеми градови, така што секои два се поврзани со авионска линија во еден правец, но и дека од секој град може во секој град да се стигне со најмногу едно прекачување. За кои вредности на $n \geq 3$ е можно правнукот на баронот Минхаузен да ја говори вистината?

391. Во секое теме на правилен $n-$аголник се наоѓа по една врана. Одеднаш сите врани одлетуваат и по некое време сите се враќаат, по една врана во секое теме, но не обавезно во истото теме. Определи го бројот n за кој можеме секогаш да најдеме три врани така што триаголникот формиран од нивните почетни позиции е од ист тип (остроаголен; правоаголен, тапоаголен) како и триаголникот формиран од нивните крајни позиции?

392. Во рамнината се дадени $n \geq 9$ точки такви што како и да избереме 9 од дадените точки постојат две кружници на кои се наоѓаат избраните 9 точки. Докажи дека постојат две кружници на кои се наоѓаат сите n точки.

393. Даден е правилен 980200-аголник. Избрани се некои негови 100 темиња кои определуваат 100-аголник A. Докажи дека постои 100 темиња од истиот правилен 980200-аголник кои определуваат 100-аголник B чија ниту една дијагонала не е со еднаква должина како и некоја дијагонала на 100-аголникот A. Страните исто така се сметаат за дијагонали.

394. Во рамнината е даден конвексен $n-$аголник P. Триаголникот формиран од темињата на P го нарекуваме добар ако сите негови страни имаат единечна должина. Докажи дека постојат најмногу $\frac{2}{3}n$ добри триаголници.

395. Нека $S=\{-2,-1,0,1,2\}$ и нека во Декартов координатен систем произволно се означени 17 точки од множеството $S\times S$. Докажи дека меѓу означените точки постојат три такви што една од нив е средина на отсечката чии крајни точки се другите две точки.

396. Нека n е природен број и $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ се вектори со должина на поголема од 1. Докажи дека во изразот
$$\pm\overrightarrow{a_1}\pm\overrightarrow{a_2}\pm...\pm\overrightarrow{a_n}$$
Знаците може да се изберат така што интензитетот на добиениот вектор ќе биде помал или еднаков на $\sqrt{2}$.

397. Нека претпоставиме дека $A_i,\, i=1,2,...,n$ се точки во рамнината и дека на секоја од нив е придружен реален број λ_i таков што $\overline{A_iA_j}=\sqrt{\lambda_i+\lambda_j}$, за $i,j\in\{1,2,...,n\},\, i\neq j$. Докажи дека $n\leq 4$ и дека ако $n=4$, тогаш
$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\lambda_i}=0.$$

398. Дали во кружница со радиус 1 може да се смести определен број кружници така што никои две кружници немаат внатрешна заедничка точка и збирот на нивните радиуси да е еднаков на 2009?

399. Бубамара шета по рабовите на полиедар тргнувајќи од темето A. Таа поминала по сите рабови на полиедарот точно два пати. Докажи дека точката во која бубамарата се нашла на крајот не зависи од патот.

400. Дали е можно триаголник да се разбие на конечен број
а) петаголници, б) шестаголници.

401. Дали постои конвексен многуаголник кој може да се расече на неконвексни четириаголници?

402. Квадратот $ABCD$ е расечен на правоаголници. Ако збирот на плоштините на сите опишани кругови околу сите правоаголници е еднаков на плоштината на опишаниот круг околу квадратот $ABCD$, тогаш сите правоаголници се квадрати. Докажи!

403. Единечен квадрат е поделен на $n>1$ правоаголници чии страни се паралелни со страните на квадратот. Нека секоја права која ја сече внатрешноста на квадратот и која е паралелна на некоја страна на квадратот ја сече и внатрешноста на некој од правоаголниците. Докажи дека во оваа поделба постои правоаголник кои нема заеднички точки со границата на квадратот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aczél, J., Dhombres, J.: Functional Equations Containing Several Variables. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1985
2. Aczél, J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York, Birkhäuser, 1966
3. Alexanderson, G. L., Klosinski, L. F., Larson, L. C.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1938–1964. Mathematical Association of America,Washington, DC, 1985
4. Alfonsin, J. L. R.: The Diophantine Frobenius Problem, Oxford Lecture Series, 2005
5. Amini, A. R.: Fibonacci Numbers a Long Division Formula, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
6. Anderson, J. A.: Diskretna matematika sa kombinatorikom, CET, Beograd, 2005
7. Andreescu, T., Andrica, D., Feng, Z.: 104 Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser, 2007
8. Andreescu, T., Andrica, D.: Complex Numbers from A to ...Z, Birkhauser, 2006
9. Andreescu, T., Andrica, D.: Number Theory – Structures, Examples and Problems, Birkhauser, 2009
10. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
11. Andreescu, T., Gelea, R.: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000
12. Archibald, R. G.: An Introduction to the Theory of Numbers, Merrill, Publishing and Co., Columbia, OH, 1970.
13. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., Govedarica, V.: Zbirka zadataka sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini 1981-1991, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
14. Arslanagić, Š.: Matematička čitanka 9, Grafičar promet, Sarajevo, 2017
15. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene (drugo izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
16. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije, Beograd, 1986
17. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
18. Batchedder, P. M.: An Introduction to linear difference equations, Dover Publications, 1967
19. Becheanu, M., Enescu, B.: Inegalitati elementare. Bucurest: Gil., 2002
20. Beklekamp, E. , Rodgers, T.: Math Puzzles, Springer-Verlag, New York, Inc., 1992
21. Benjamin, A. T., Quinn, J. J.: Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof, MAA, 2003
22. Bilinski, S.: Problem parketiranja, Matematičko-fizičko list, 196, Zagreb, 1999
23. Bottema, O. and oth.: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
24. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
25. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
26. Burton, D. M.: Elementary Number Theory, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1994
27. Cerone, P.; Dragomir, S. S.: Mathematical Inequalities, CRC Press, London – New York, 2011
28. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
29. Cull P., Elahive M., Robson R.: Difference equations: From rabbits to chaos, Springer, 2005
30. Cvetkovski, Z.: Inequalities, Springer, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2012
31. Djukić,. D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium, Springer, 2011
32. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
33. Dye R. H.; Nickakalls R.W. D.: A new algorithm for generating Pythagorean triples, Mathematical Gazette; 1998
34. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
35. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
36. Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1965–1984. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984
37. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, ZUNS, Sarajevo, 2007
38. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnik O.: Concrete Mathematics: A foundation for computer science, Second edition, Addison-Wesley Professional, 1994
39. Green D. H., Knuth D.E.: Homogeneous equations, Mathematics for the analysis of algorithms, Birkhäuser, 1982
40. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N. Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
41. Grozdev, S.: For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE, 2007

42. Hatch G.: Pythagorean triples and triangular square numbers, Mathematical Gazette; 1995
43. Herman, J.; Kučera, R.; Šimša, J.: Equations and Inequalities, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2000
44. Hung, P. K.: Secrets in Inequalities, GIL Publishing Hause, Zalau, 2007
45. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
46. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
47. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
48. Landau, E.: Elementary number theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1966
49. Lee, H.: Topics in Inequalities - Theorems and Techniques, 2007
50. Lozansky, E., Rouseau, C.: Winning solutions, Springer-Verlag, Inc., New York, 1996
51. Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V.: Inequalities, Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000
52. Mićić, V., Kadelburg, Z.: Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd, 1989
53. Mitrinović, D. S., Barnes, E. S., Marsh, D. C. B., Radok, J. R. M.: Elementary Inequalities, P. Noordhoff, Groningen, 1964
54. Mitrinović, D. S.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
55. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
56. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
57. Nardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1951
58. Nathanson, M. B.: Elementary Methods in Number Theory, Springer, 1993
59. Nesbitt, A. M.: Problem 15114, Educational Times, 3, 1903
60. Neville, R. Beginning: Number Theory, 2nd ed. Sudbury, Mass.: Jones and Bartlett, 2006.
61. Niven, I., Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
62. Palman, D.: Planimetrija, Element, Zagreb, 1998
63. Pavković, B., Dakić, B., Hajnš, Ž., Mladinić, P.: Male teme iz matematike, Hrvatsko matematičko društvo, Knjiga 2., Element, Zagreb, 1994
64. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
65. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna Matematika 2, Školska kniga, Zagreb, 1995
66. Pečarić, J. E.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996
67. Riordan, J.: Combinatorial Identities, John Willey & Sons, 1968
68. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
69. Small, C. G.: Functional Equations and How to Solve Them, Springer, New York, 2007
70. Specht, E.: Geometria-Scientiae Atlantis, Magdeburg, 2001
71. Stark, H. M.: An introduction to Number Theory, Markh. Publis. Comp., Chicago, 1970
72. Stevanović, D., Milošević, M., Baltić, V. Diskretna matematika, DMS, Beograd, 2004
73. Tripathi, A.: The Coin Exchange Problem for Arithmetic Progressions, American Mathematical Monthly,1994
74. Veljan, D.: An Analogue of the Pythagorean Theorem, El. Math. 51 (1996)
75. Vo Quoc B.: On a class of three-variable Inequalities, 2007
76. Volenc, V.: Analitička geometrija u kompleksnim koordinatima I, II, III, Matematičko-fizički list, 186, 187,188, Zagreb, 1996/97
77. Vrećica, S.: Konveksna analiza, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993
78. Wells, D.: Prime numbers. The most mysterious figures in Math, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005
79. Wilf, H. S.: A Circle-of-lights Algorithm for the Money-changing Problem , American Mathematical Monthly, 1978
80. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
81. Алексиев, К., Бангачев, К., Бойваленков, П.: 640 задачи или Теория на числата за олимпиади, УНИМАТ СМБ, София, 2017
82. Аневска, К.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
83. Арноль, И. В.: Теория чиесл, Учиедгиз, Москва, 1939
84. Арсеновић, М., Драговић, В.: Функционалне једначине, ДМС, Београд, 1999
85. Арсланагић, Ш. За подобрувањето на неравенствата, Сигма, Скопје
86. Арсланагић, Ш., Зејнулаху, Ф.: Две условни алгебарски неравенства, Сигма, Скопје

87. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ , А.: Повеќе докази на едно познато геометриско неравенство, Сигма, Скопје
88. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе решенија на една геометриска задача, Сигма, Скопје
89. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
90. Арсланагиќ, Ш.: Едно неравенство во врска со симетралата на внатрешен агол на триаголник, Сигма, Скопје
91. Арсланагиќ, Ш.: Неравенства со факториели, Сигма, Скопје
92. Арсланагиќ, Ш.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје
93. Арсланагиќ, Ш.: Несбитовото неравенство и едно негово подобрување, Сигма, Скопје
94. Арсланагиќ, Ш.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
95. Арсланагиќ, Ш.: Подобрување на едно алгебарско неравенство, Сигма, Скопје
96. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Едно интересно равенство за триаголник и негови последици, Сигма, Скопје
97. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
98. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
99. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
100. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
101. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
102. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
103. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
104. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
105. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
106. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
107. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
108. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
109. Брсаковска, С., Малчески, С.: Некои последици на Питагоровата теорема, Нумерус, Скопје, 2019
110. Василевска, В.: Степен на точка во однос на кружница, Сигма, Скопје
111. Велинов, Д.: Полиномни равенки, Сигма, Скопје
112. Велинов, Д.: Некои методи за решавање на Диофантови равенки, Сигма, Скопје, 2018
113. Велинов, Д.: Рекурентни релации, Сигма, Скопје
114. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
115. Гаврилов, М, Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1976
116. Гарднер, М.: Математически развлечения. Том 2. София, Наука и изкуство, 1977
117. Главче, М.: Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
118. Гроздев, С., Лесов, Х.: Квадратни параметарски неравенки, Сигма, Скопје
119. Гроздев, С., Ненков, В.: Магични квадрати, Сигма, Скопје
120. Гроздев, С., Стефанова, Д., Иванов, И.: Планиметрични задачи за триъгълник с тригонометрични функции, Светлина, София, 2016
121. Гроздев, С.: Минимален прост делител, Сигма, Скопје
122. Гроздев, С.: Примена на едно обопштување на теоремата на Птоломеј, Сигма, Скопје
123. Гуревич, Е.: Тайна древнего талисмана. Москва, Наука, 1969
124. Давидов, Љ.: Генераторни функции, Сигма, Скопје
125. Давидов, Љ.: Принципот на Дирихле и некои комбинаторни проблеми, Сигма, Скопје
126. Давидов, Љ.: Функционални уравнения, Народна Просвета, София, 1977
127. Давыдов, У. С.: Задачи и упражниния по теоретической арифметике целых чисел, ГУНИМИ БССР, Минска, 1963
128. Димитров, С., Личев, Л., Чобанов, С.: 555 задачи по геометрия (решения по Геометрия в картинки на А. В. Акопян), УНИМАТ СМБ, 2015

129. Димовски, Д., Малчески, Р., Тренчевски, К., Шуниќ, З.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
130. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
131. Димовски, И.: Врска меѓу биномните коефициенти и пермутациите со повторување, Сигма, Скопје
132. Димовски, И.: Неограниученост на низата совршени и низата прости броеви, Сигма, Скопје
133. Димовски, И.: Теорема на Дезарг, Сигма, Скопје
134. Дирихле, П. Г. Л.: Лекции по теория на числата, Наука и изкуство, София, 1980
135. Докоска, М.: Некои карактеристични неравенства во врска со триаголник, Сигма, Скопје
136. Дуденков, С., Чакърян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
137. Ђукић, Д.: Задаци о скуповима, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
138. Ђукић, Д.: Задаци са распоредима бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
139. Ђукић, Д.: Инваријанте, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
140. Ђукић, Д.: Инверзија, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
141. Ђукић, Д.: Комбинаторна геометрија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
142. Ђукић, Д.: Комбинаторна теорија бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
143. Ђукић, Д.: Математичке игре погађања, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
144. Ђукић, Д.: Микелова тачка и Симсонова права, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
145. Ђукић, Д.: Партиције природног броја, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
146. Ђукић, Д.: Паскалова теорема, пол и полара, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
147. Ђукић, Д.: Полиноми по једној промењљивој, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
148. Ђукић, Д.: Полиномске једначине, Београд, 2006 (www.imo.org.yu/sc)
149. Ђукић, Д.: Потенција тачке, Београд, 2012 (www.imo.org.yu/sc)
150. Ђукић, Д.: Холова теорема, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
151. Ђукић, Д.: Хомотетија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
152. Ерусалимский, Я. М.: Дискретная математика, Везувская книга, Москва, 2004
153. Избраные задачи из журнала American Mathematical monthly, Мир, Москва, 1977
154. Јанев, И.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
155. Јанев, И.: Варијации на иста тема, Сигма, Скопје
156. Јанев, И.: Метод на неодредени коефициенти, Сигма, Скопје
157. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П. Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
158. Јегоров, А.: Логаритамски равенки, Сигма, Скопје
159. Каделбург, З.; Ђукић, Д.; Лукић, М.; Матић, И.: Неједнакости, ДМС, Београд, 2003
160. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
161. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Адициони теореми, Сигма, Скопје
162. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Паскаловиот триаголник и бројот е, Сигма, Скопје
163. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Геометриски решенија на некои задачи поврзани со аркустангенсите, Сигма, Скопје
164. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Геометрски докази на некои тригонометриски равенства, Сигма, Скопје
165. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Суперзлатен четириаголник, Сигма, Скопје
166. Карстенсен, Ј., Муминагиуђ, А.: Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје
167. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
168. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, 2012
169. Кудреватов, Г. А.: Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970
170. Кючуков, М.; Недевски, П.: Функционални и диференциални уравнения, Проф. Марин Дринов, София, 1995
171. Лидский В. Б. и др.: Задачи по элементарной математике, Москва, 1962
172. Лихтарников, Л. М.: Элементарное введение в функциональные уравнения, Лань, Санкт-Петербург, 1997
173. Лукић, М.: Инверзија, Београд, 2005 (www.imo.org.yu/sc)
174. Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.: Збирка задачи по геометрија, Просветно дело, Скопје, 1981
175. Макарова, Н.: Волшебный мир магических квадратов. Саратов, 2009
176. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни I, Сигма, Скопје
177. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни II, Сигма, Скопје

178. Малчески, А. Манова-Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсаковска. С.: Сигмина ризница (конкурсни здачи 1-192), СММ, Скопје, 2012
179. Малчески, А.: Регресивна индукција, Сигма, Скопје
180. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
181. Малчески, А., Малчески, Р.: Разбивање на броеви, Математика$^+$, Софија, 1997
182. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма, Скопје, 2018
183. Малчески, А., Малчески, С.: Теорема на Птоломеј, Сигма, Скопје
184. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсакоска, С.: Сигмина ризница (рубрика подготвителни задачи), СММ, Скопје, 2012
185. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
186. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје, 2012
187. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 1, Сигма, Скопје
188. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 2, Сигма, Скопје
189. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 3, Сигма, Скопје
190. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 4, Сигма, Скопје
191. Малчески, Р., Аневска, К.: Теорема на Стјуарт, Сигма, Скопје, 2018
192. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Атанасов, Р., Манова – Ераковиќ, В., Јанев, И.: Меѓународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000
193. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
194. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
195. Малчески, Р., Докоска, М.: Математика 2, Просветно дело, Скопје, 2002
196. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 1 – алгебарски структури (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
197. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 2 – векторска и линеарна алгебра (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
198. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 3 – калкулус 1 (трето изадние), ФОН универзитет, Скопје, 2011
199. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 4 – калкулус 2 (трето издание), ФОН универзитет, Скопје, 2011
200. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика (второ издание), ФОН универзитет , Скопје, 2011
201. Малчески, Р., Малчески, А. Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1994
202. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
203. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
204. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви I, Сигма, Скопје, 2000
205. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви II, Сигма, Скопје, 2000
206. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви III, Сигма, Скопје, 2001
207. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви IV, Сигма, Скопје, 2001
208. Малчески, Р., Малчески, А.: Теорема на Helly за конвексните множества, Математика, Софија, 1997
209. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки, СММ, Скопје, 2016
210. Малчески, Р., Малчески, А.: Херонови триаголници, Сигма, Скопје, 1994
211. Малчески, Р., Малчески, С.: Белешка за распределбата на простите броеви, Сигма, Скопје, 2018
212. Малчески, Р., Малчески, С.:. Ред на број по модул и примитивни корени, Сигма, Скопје, 2018
213. Малчески, Р., Манова – Ераковиќ, В., Марковски, Ѓ., Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
214. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 1, Сигма, Скопје, 2005
215. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 2, Сигма, Скопје, 2005
216. Малчески, Р.: Паркетирания и приложения, Математика +, София, 2001
217. Малчески, Р.: Метод на инваријанти, Сигма, Скопје, 2014
218. Малчески, Р., Аневска, К.: Хомотетија, Сигма, Скопје, 2014
219. Малчески, Р.: Ах тие питагорови тројки, Сигма, Скопје, 1995

220. Малчески, Р.: Две важни неравенства и бројот е, Сигма, Скопје, 1996
221. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
222. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, СММ, Скопје, 2016
223. Малчески, Р.: Елементарно испитување на текот и скицирање на графикот на кубната функција, Сигма, Скопје, 1993
224. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
225. Малчески, Р.: За рационалните корени на полином од *n*-ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992
226. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
227. Малчески, Р.: Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
228. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
229. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Сигма, Скопје, 2011
230. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
231. Малчески, Р.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје, 2011
232. Малчески, Р.: Проблем на бои, Сигма, Скопје, 2000
233. Малчески, Р.: Пчелиното саќе – генијална творба во природата, Сигма, Скопје, 2013
234. Малчески, Р.: Семејно решавање на една „едноставна“ задача, Сигма, Скопје
235. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
236. Малчески, Р.: Триаголни броеви, Сигма, Скопје, 1995
237. Малчески, Р.: Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје, 2009
238. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015
239. Малчески, Р.: Хармониска прогресија, Сигма, Скопје, 1999
240. Малчески, Р:. Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје, 2001
241. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни-тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
242. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Геометриско пресметување на тригонометриски функции од некои агли, Сигма, Скопје
243. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 1, Сигма, Скопје
244. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 2, Сигма, Скопје
245. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни четириаголници, Сигма, Скопје
246. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
247. Маркоска, Ј.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
248. Маркоски, Ѓ.: Девет карактеристични точки за триаголник 1, Сигма, Скопје
249. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 2, Сигма, Скопје
250. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 3, Сигма, Скопје
251. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 4, Сигма, Скопје
252. Матић, И.: Инверзија, Београд (www.imo.org.yu/sc)
253. Миличић, П.: Идентични трансформации (збирка нестандардни решени задачи), СММ, Скопје, 2013
254. Миовска, В.: Една задача и дванаесет начини за решавање, Сигма, Скопје
255. Миовска, В.: Теорема на Симпсон, Сигма, Скопје
256. Михелович, Ш. Х.: Теория чисел, Высшая школа, Москва, 1967
257. Младеновић, П.: Комбинаторика (четврто издање), ДМС, 2013
258. Моденов, П. Ц.: Задачи по геометрии, Наука, Москва, 1979
259. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А.: Международние математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
260. Муминагић, А., Карстенсен, Ј.: Една задача, повеќе начини за нејзино решавање, Сигма, Скопје
261. Муминагић, А., Карстенсен, Ј.: Познати задачи со не така познати решенија, Сигма, Скопје
262. Муминагић, А.: Бабилиерова теорема, Сигма, Скопје
263. Муминагић, Никобинг: За една интересна математичка задача со корени, Сигма, Скопје
264. Мушкаров, О., Гроздев, С.: Едно математичко чудовиште, Сигма, Скопје
265. Нагел, Т.: Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
266. Начевска-Настоска, Б., Настоски, Љ.: Системи од точки или принцип на Дирихле, Сигма, Скопје
267. Пиперевски, Б., Малчески, Р., Малчески, А., Стојковска, И.: Избрани содржини од елементарна математика II (второ издание), СММ, Скопје, 2014
268. Плотников, А. Д.: Дискретная математика, Новое знание, Москва, 2005
269. Поја, Г.: Математическое открìитие, Москва 1976
270. Поповиќ-Грибовска, Л.: Инверзија, Сигма, Скопје
271. Поповска-Грибовска, Л.: За Виетовата теорема, Сигма, Скопје
272. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, 1988

273. Серпинский, В.: 250 задач по елементарной теории чисел, Просвещение, Москва, 1976
274. Серпинский, В.: Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
275. Сивашинский, И. Х.: Неравенства в задачах, Наука, Москва, 1967
276. Стојменовска, И.: Обопштена равенка на Ојлер, Сигма, Скопје
277. Страшевич, С., Боровкин, Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
278. Тонов, И. К.; Сидеров, П. Н.: Приложение на комплексните числа в геометрията, Наука, София, 1981
279. Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К.: Математика 3, (авторизиран ракопис), 2003
280. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
281. Филеп, Л., Березнай, Г.: История на цифрите. София, Техника, 1988
282. Филиповски, С.: 200 –тероија на броеви (подготвителни задачи), Скопје, 2013
283. Филиповски, С.: Една задача, повеќе начини за ршавање, Сигма, Скопје
284. Хинчин, А. Я.: Три бисера од теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
285. Хинчин, А. Я.: Цепные дроби, Физматгиз, Москва, 1961
286. Хинчин, А. Я.: Элементи теории чиесл, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951
287. Цветковски, З., Малчески, Р.: Алгоритам за генерирање на Питагорини тројки, Сигма, Скопје, 2006
288. Цветковски, З., Малчески, Р.: Докажување на симетрични неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
289. Цветковски, З., Малчески, Р.: Еден метод за докажување неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
290. Цветковски, З., Малчески, Р.: Неравенства на Schur и Muirhead, Сигма, Скопје, 2007
291. Цофман, Ј.: Примена на паркетот при решавање на задачи, Сигма, Скопје, 2000
292. Шаригин, И.: Задачи по геометрија, Наука, Москва, 1986 (на руски)
293. Школярски, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яаглом, И. М.: Избраные задачи и теоремы по елементарной математике, Наука, Москва, 1976
294. Шнилерман, Л. Г.: Простиы числа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1940
295. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 1, Сигма, Скопје
296. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 2, Сигма, Скопје
297. Штерјов, З.: Конвексност на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$ и една примена, Сигма, Скопје
298. Штерјов, З.: Методи за докажување неравенства, Пробиштип, 2008
299. Штерјов, З.: Триаголници чии страни формираат аритметичка прогресија, Сигма, Скопје
300. Штерјов, З.: Функционални равенки во множеството реални броеви, НУ Гоце Делчев, Штип, 2011