Ирена Стојменовска, Скопје

ОБОПШТЕНА РАВЕНКА НА ОЈЛЕР

1. Вовед

Во оваа работа ќе ја разгледаме равенката

$$x^{\underbrace{y^{x^{\cdot^{\cdot^{y}}}}}_{m\text{ пати}}} = y^{\underbrace{x^{y^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}_{n\text{ пати}}} \tag{1}$$

која всушност е генерализација на добро познатата Ојлерова равенка

$$x^y = y^x. \tag{2}$$

За да ја решиме равенката (1) во множеството природни броеви N, најпрво ќе ја решиме равенката (2) во множеството N. Пред да преминеме на решавање на поставените задачи, ќе ги воведеме ознаките:

$$x^{\underbrace{y^{x^{\cdot^{\cdot^{y}}}}}_{m\text{ пати}}} = f_m(x,y), \qquad y^{\underbrace{x^{y^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}_{n\text{ пати}}} = f_n(y,x) \quad \text{и} \quad f_o(x,y) = x, \qquad f_o(y,x) = y.$$

Јасно, при воведените ознаки точни се равенствата

$$f_{n+1}(x,y) = x^{f_n(y,x)} \quad \text{и} \quad f_{n+1}(y,x) = x^{f_n(x,y)}.$$

2. Ојлерова равенка

За да ја решиме равенката (2) ќе докажеме три леми.

Лема 1. Ако $x > y \ge 3$, тогаш $y^x > x^y$.

Доказ. Да ја разгледаме функцијата $f(t) = \frac{t}{\ln t}$, $t \in [3,\infty)$. Од $f'(t) = \frac{\ln t - 1}{(\ln t)^2}$ следува $f'(t) > 0$ за секој $t \in [3,\infty)$, што значи дека функцијата $f(t)$ монотоно расте на разгледуваниот интервал. Според тоа, ако $x > y \ge 3$ тогаш $f(x) > f(y)$ т.е. $\frac{x}{\ln x} > \frac{y}{\ln y}$. Од последното неравенство последователно добиваме $x\ln y > y\ln x$, $\ln y^x > \ln x^y$, $y^x > x^y$, што и требаше да се докаже. ♦

Лема 2. За секој $n \ge 5$ важи $2^n > n^2$.

Доказ. За $n = 5$ имаме $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. Нека претпоставиме дека за $n = k \ge 5$ важи $2^k > k^2$. За $n = k+1$ имаме

$$2^{k+1} = 2\cdot 2^k > 2k^2 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Сега точноста на тврдењето следува од принципот на математичката индукција. ♦

Лема 3. Во множеството природни броеви единствени решенија на равенката (2) се подредените парови $(2,4)$, $(4,2)$ и (k,k), $k \in N$.

Доказ. Јасно, секој подреден пар (k,k), $k \in N$, е решение на равенката (2). Нека $x_o > y_o \geq 3$. Тогаш од лема 1 следува ${y_o}^{x_o} > {x_o}^{y_o}$, што значи дека равенката (2) нема решение (x_o, y_o), такво што $x_o > y_o \geq 3$. Заради симетрија заклучуваме дека равенката (2) нема решение (x_o, y_o), такво што $y_o > x_o \geq 3$.

Нека $y_o = 2$. Тогаш од лема 2 следува $2^{x_o} > {x_o}^2$, за $x_o \geq 5$. Со непосредна проверка се уверуваме дека подредените парови $(2,4)$ и $(4,2)$ се решенија на равенката (2), а подредените парови $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$, $(1,4)$, $(4,1)$ и $(3,2)$ не се решенија на равенката (2). Конечно, од досега изнесеното следува тврдењето на лемата. ♦

3. Обопштена равенка на Ојлер

Аналогно на постапката со која ги определивме решенијата на равенката (2) ќе презентираме постапка за решавање на равенката (1), која ќе ја наречеме обопштена равенка на Ојлер.

Теорема 1. Ако $x > y \geq 2$, тогаш $x^{y^x} > y^{x^y}$.

Доказ. Ако $x > y > 2$, тогаш од лема 1 $y^x > x^y$, па затоа $x^{y^x} > y^{x^y}$. Нека $y = 2$. Тогаш, ако $x \geq 5$ од Лема 2 имаме $2^x > x^2$, и затоа $x^{2^x} > 2^{x^2}$. Ако $x = 3$, тогаш $3^{2^3} = 3^8 = 6561$ и $2^{3^2} = 2^9 = 512$ што значи $3^{2^3} > 2^{3^2}$. Ако $x = 4$, тогаш $4^{2^4} = 4^{16} > 2^{16} = 2^{4^2}$, па и во овој случај $x^{2^x} > 2^{x^2}$. ♦

Во досегашните излагања разгледувавме два парцијални случаи на равенката (1), и тоа $m = n = 1$ и $m = n = 2$. Сега ќе го разгледаме општиот случај. Најпрво ќе го разгледаме случајот кога $m \neq n$. Притоа, без ограничување на општоста можеме да сметаме $n > m$.

Теорема 2. Ако $n = m+1$ и $x \neq 1$, $y \neq 1$, тогаш $f_n(x,y) > f_m(y,x)$.

Доказ. Од $n = m+1$ следува $f_n(x,y) = f_{m+1}(x,y)$. Бидејќи

$$f_{m+1}(x,y) = x^{f_m(y,x)} \text{ за } x \geq 2$$

добиваме

$$x^{f_m(y,x)} \geq 2^{f_m(y,x)} > 1 + f_m(y,x) > f_m(y,x)$$

па затоа $f_n(x,y) > f_m(y,x)$. ♦

Последица 1. Ако $n = m + p$ и $p \geq 2$, тогаш $f_n(x,y) > f_m(y,x)$.

Доказ. Од Теорема 2 следува дека $f_n(x,y) > f_{n-1}(y,x)$. Лесно се воочува дека за $p \geq 2$ важи неравенството $f_{m+p-1}(y,x) > f_m(y,x)$. Конечно добиваме $f_n(x,y) > f_{n-1}(y,x) = f_{m+p-1}(y,x) > f_m(y,x)$, што требаше да се докаже. ♦

Останува да го разгледаме случајот $m = n$. За таа цел ќе ја докажеме следната теорема:

Теорема 3. Ако $f_{n-2}(y,x) > f_{n-2}(x,y)$ и $x > y > 1$, тогаш $f_{n-1}(x,y) > f_{n-1}(y,x)$, $f_n(y,x) > f_n(x,y)$, $f_{n+1}(x,y) > f_{n+1}(y,x)$.

Доказ. Ги воведуваме ознаките: $k = \frac{x}{y}$, $A = f_{n-2}(y,x)$, $B = f_{n-2}(x,y)$. Од условот на теоремата следува дека $k > 1$ и $A > B$. При овие ознаки имаме

$$\frac{f_{n-1}(x,y)}{f_{n-1}(y,x)} = \frac{x^A}{y^B} > \frac{x^B}{y^B} = \left(\frac{x}{y}\right)^B = k^B > k > 1$$

што значи $f_{n-1}(x,y) > f_{n-1}(y,x)$ т.е. првото неравенство важи.

Ќе го докажеме второто неравенство.

Нека $y \geq 3$. Од доказот на неравенство имаме $f_{n-1}(x,y) > k\, f_{n-1}(y,x)$. Бидејќи за секој $y \geq 3$ и секој $k > 1$ е исполнето неравенството $y^k > k\,y$, добиваме:

$$f_n(y,x) = y^{f_{n-1}(x,y)} > y^{k\, f_{n-1}(y,x)} > (k\, y)^{f_{n-1}(y,x)} = x^{f_{n-1}(y,x)} = f_n(x,y).$$

Нека $y = 2$. Тогаш $f_n(2,x) = 2^{x^A}$, $f_n(x,2) = 2^{x^B}$. Ако $x \geq 5$, тогаш $k \geq \frac{5}{2} = 2.5$. Бидејќи $k \geq \frac{5}{2}$ тогаш $2^{k-1} > k$ па затоа $2^k > x$, $2 > x^{\frac{1}{k}}$ и

$$f_n(2,x) = 2^{f_{n-1}(x,2)} > (x^{\frac{1}{k}})^{f_{n-1}(x,2)} > x^{f_{n-1}(2,x)} = f_n(x,2).$$

Ако $x = 4$, тогаш $f_n(2,4) = 2^{4^A}$, $f_n(4,2) = 4^{2^B}$. Бидејќи $A > B$ добиваме $4^A > 2 \cdot 2^B$, па затоа $f_n(2,4) > f_n(4,2)$. Ако $x = 3$, тогаш $f_n(2,3) = 2^{3^A}$, $f_n(3,2) = 3^{2^B}$. Бидејќи $A > B$ добиваме $3^A > 2 \cdot 2^B$, па затоа $f_n(2,3) > f_n(3,2)$. Конечно, $f_n(y,x) > f_n(x,y)$.

За да го докажеме третото неравенство ги воведуваме следните ознаки: $A_1 = f_n(y,x)$, $B_1 = f_n(x,y)$. Тогаш заради точноста на второто неравенство имаме

$$\frac{f_{n+1}(x,y)}{f_{n+1}(y,x)} = \frac{x^{A_1}}{y^{B_1}} > \frac{x^{B_1}}{y^{B_1}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{B_1} = k^{B_1} > k > 1$$

што значи $f_{n+1}(x,y) > f_{n+1}(y,x)$. Со тоа теоремата е комплетно докажана. ♦

Од досега изнесеното следува дека:

i) за $m \neq n$ равенката (1) нема решение.

ii) за $m = n = 1$ равенката (1) е еквивалентна на равенката (2) и нејзините решенија се дадени во лема 3.

iii) за $m = n > 1$ единствени решенија на равенката (1) се подредените парови (k,k), $k \in N$.