

Математичка индукција во комбинаторика

Даниел Велинов, Градежен факултет, Скопје

Математичката индукција е метод кој се користи за докажување на тврдења кои се однесуваат исклучиво на природните броеви. Постои обоштување на математичката индукција кое е на преброиво множество. Ние овде ќе се задржиме на множеството на природни броеви. Како начин на докажување таа се изведува во два чекори. Првиот чекор, кој е познат како базичен чекор, е да се покаже точност на тврдењето за првиот природен број за кое тоа важи. Вториот чекор, познат како индуктивен чекор, е од претпоставката дека тврдењето важи за првите k броеви, да добиеме точност на тврдењето за $k+1$ -от број. Во продолжение, ќе дадеме неколку примери од комбинаторика кои можат да се решат со помош на принципот на математичка индукција.

1. (China, 1994) Во n кутии ($n \geq 4$) има најмалку 4 чоколатца. Секој пат на Дебелко му е дозволено да избере две непразни кутии, да земе по едно чоколатце од секој од двете кутии и да ги стави тие чоколатца во трета кутија. Дали е секогаш можно сите чоколатца Дебелко да ги стави во една кутија?

Решение. Одговорот е да. Секогаш е можно сите чоколатца да се стават во една кутија. Ова тврдење ќе го докажеме со индукција по m , каде m е бројот на чоколатца. За случајот $m = 4$, има најмногу четири непразни кутии. Кутиите кои се празни не ги разгледуваме. Можни се четири почетни дистрибуции на чоколатцата во кутиите:

$(1,1,1,1)$, $(1,2,1,0)$, $(2,2,0,0)$, $(1,3,0,0)$. Тогаш,

$(1,1,1,1) \rightarrow (3,1,0,0) \rightarrow (2,0,2,0) \rightarrow (1,0,1,2) \rightarrow (0,0,0,4)$. Јасно е дека сите други почетни дистрибуции можат да се опфатат со горната постака за дистрибуцијата $(1,1,1,1)$. Па, доказот за $m = 4$ е готов. Сега претпоставуваме дека тврдењето е точно за првите $m \geq 4$ броеви. Ако имаме $m+1$ чоколатца, избираме едно од нив и го нарекуваме специјално чоколатце. Најпрвин го игнорираме специјалното чоколатце и ги разгледуваме останатите m чоколатца. Од индуктивната претпоставка, ние можеме да ги сместиме m -те чоколатца во една кутија. Ако кутијата го содржи специјалното чоколатце тогаш доказот е завршен. Ако не, избираме две празни кутии и продолжуваме на следниот начин:

$(1, m, 0, 0) \rightarrow (0, m-1, 2, 0) \rightarrow (0, m-2, 1, 2) \rightarrow (2, m-3, 0, 2) \rightarrow$
 $\rightarrow (1, m-1, 0, 1) \rightarrow (0, m+1, 0, 0)$

Од каде според принципот на математичка индукција добиваме дека тврдењето важи за секој природен број $m \geq 4$.

2. Одреди дали е можно броевите $1, 2, 3, \dots, 1000$ да се распоредат во редица, така што аритметичката средина на било кои различни два броја од таа редица не се наоѓа помеѓу тие два броја.

Решение. Одговорот е да. Најпрво ќе докажеме дека ова е точно за $n = 2^m$ за сите природни броеви m , со индукција по m . За $m = 1$ е очигледно. Нека претпоставиме дека можеме да ги распоредиме $1, 2, 3, \dots, 2^m$ за некој природен број m во редица $(a_1, a_2, \dots, a_{2^m})$ така да аритметичката средина од било кои два различни броја не се наоѓа помеѓу нив. Не е тешко да се види дека $(b_1, b_2, \dots, b_{2^{m+1}}) = (2a_1 - 1, 2a_2 - 1, \dots, 2a_{2^m} - 1, 2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{2^m})$ е распоред на броевите $1, 2, \dots, 2^{m+1}$ кој ги задоволува условите на проблемот. Навистина, аритметичката средина од броевите b_i и b_j , кога $1 \leq i < j \leq 2^m$ или $2^m + 1 \leq i < j \leq 2^{m+1}$ не е помеѓу броевите b_i и b_j од индуктивната претпоставка и аритметичката средина од броевите b_i и b_j кога $1 \leq i \leq 2^m < j \leq 2^{m+1}$ не е цел број. Па, тврдењето е докажано со помош на индукција.

За позитивен број кој не е степен на 2, секогаш може да се најде природен број n , таков што $n < 2^m$. Потоа броевите $1, 2, 3, \dots, 2^m$ ги распоредуваме како погоре, а потоа сите броеви кои се поголеми од n ги бришеме и новодобиената редица го задоволува условот на задачата.

3. (USAMO, 1988) Докажи дека за секој $n \geq 2$, постои множество S од n цели броеви така да $(a-b)^2$ го дели ab , за секои $a, b \in S$

Решение. Доказот ќе го дадеме со помош на математичка индукција по n . Ќе покажеме дека постои такво множество S од ненегативни елементи. За $n = 2$, множеството S е дадено со $S = \{0, 1\}$. Сега да претпоставиме дека за $n \geq 2$, бараното множество S_n од ненегативни броеви постои. Нека $L = H.3.C((a-b)^2, ab)$, каде (a, b) се сите парови од S_n . Дефинираме, $S_{n+1} = \{L + a : a \in S_n\} \cup \{0\}$. Тогаш S_{n+1} се состои од $(n+1)$ ненегативни броеви, бидејќи $L > 0$. Ако $\alpha, \beta \in S_{n+1}$ и или $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, тогаш $(\alpha - \beta)^2 \mid \alpha\beta$. Ако $L + a$ и $L + b$, каде a и b се различни елементи од S_n , тогаш $(L + a)(L + b) \equiv ab \equiv 0 \pmod{(a-b)^2}$, па $(a-b)^2 = ((L + a) - (L + b))^2$ го дели $(L + a)(L + b)$, од каде со принципот на математичка индукција имаме дека тврдењето важи за секој $n \geq 2$.

4. (China, Shanghai Mathematical Competition, 1999) Нека S е множество со конечен број на точки од рамнината. Ако растојанијата помеѓу било кои две точки во S е одредено, тогаш за множеството S велиме дека е стабилно. Нека M_n е множество

од $n \geq 4$ точки во рамнината и никои три од нив не се колинеарни. Да претпоставиме дека бројот на паровите од точки кои имаат одредено растојание помеѓу нив од M_n е $\frac{1}{2}n(n-3)+4$. Докажи дека M_n е стабилно.

Решение. Доказот ќе го дадеме со индукција по n . Кога $n=4$, бројот на парови од точки кои имаат одредени растојанија во M_4 е $\frac{1}{2}4(4-3)+4=6$. Но, 4 точки формираат $\binom{4}{2}=6$ парови од точки, па M_4 е стабилно. Да претпоставиме дека за $n=k \geq 4$ тврдењето важи. Тогаш, за $n=k+1$, да претпоставиме дека бројот на парови од точки кои имаат одредени растојанија во M_{k+1} е $\frac{1}{2}(k+1)(k-2)+4$, тогаш сумата на паровите од точки кои имаат одредени растојанија до некоја точка во M_{k+1} е еднаква на $(k+1)(k-2)+8$. Од Теоремата за средна вредност, постои точка A така да бројот на парови од точки кои имаат одредени растојанија до точката A е $l \leq \frac{1}{k+1}[(k+1)(k-2)+8] = k-1 + \frac{7-k}{k+1}$. Бидејќи $\frac{7-k}{k+1} < 1$, $l \leq k-1$. Бришејќи ја точката A , знаеме дека фигурата што останува има k точки и бројот на парови на точки кои имаат одредени растојанија е најмалку $\frac{1}{2}(k+1)(k-2)+4 - (k-1) = \frac{1}{2}k(k-3)+4$. Од индуктивната претпоставка, имаме дека множество кое се состои од k точки е стабилно и има најмалку $\frac{1}{2}(k+10)(k-2)+4 - \binom{k}{2} - 3$ точки B, C, D од k -те точки така да растојанијата помеѓу A и секоја од точките B, C, D се одредени. Да претпоставиме дека $\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = y$, $\overline{AD} = z$, каде x, y, z се позитивни реални броеви. Тогаш точката A е единствена. Навистина, ако постои друга точка $A' \neq A$ таква да $\overline{A'B} = x$, $\overline{A'C} = y$, $\overline{A'D} = z$, тогаш трите точки B, C, D лежат на симетралата на отсечката AA' , што е во контрадикција со тоа дека B, C, D не се колинеарни. Па, согласно принципот на математичка индукција тврдењето важи за секој $n \geq 4$.

Задачи за самостојна работа

1. Нека S е множество од 10 различни броја изберени од множеството $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$. Докажи дека S мора да содржи две дисјунктни подмножества за кои сумата на елементите од тие подмножества е еднаква.

2. Нека се изберени n точки на кружница и попарно поврзани со секанти. Ако знаеме дека не постојат три секанти кои се сечат во иста точка, на колку региони е поделен кругот?
3. Нека $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ е низата на Фибоначи дадена со $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ за $n \geq 3$. Докажи дека секој природен број може да се запише како сума од различни елементи на низата на Фибоначи.

Користена литература

1. Andreescu, T.; Feng, Z., 102 Combinatorial Problems from the Training of the USA IMO Team, Birkhäuser, 2002.
4. Andreescu, T.; Feng, Z., A Path to Combinatorics for Undergraduate Students: Counting Strategies, Birkhäuser, 2003.
5. Zhang, Y., Combinatorial problems in mathematical competitions, World Scientific, 2011
6. Jiagu, X., Lecture notes on Mathematical Olympiad courses, World Scientific, 2012