VI олимпијада

1. а) Најди ги сите природни броеви n, такви што $7 \mid (2^n - 1)$.

б) Докажи дека $7 \nmid (2^n + 1)$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Решение. а) Ако $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, тогаш $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, т.е.

$$2^n = (2^3)^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 7),$$

па $2^{3k} - 1$ е делив со 7.

Ако $n = 3k + i,$ за $i = 1, 2$ тогаш $2^{3k+i} - 1 = 2^i (2^{3k} - 1) + 2^i - 1$. Бидејќи е $2^{3k} - 1$ е делив со 7, а $2^i - 1$ не е делив со 7 добиваме дека $2^{3k+i} - 1,$ за $i = 1, 2$ не е делив со 7.

Значи, $2^n - 1$ е делив со 7 ако и само ако n е делив со 3.

б) Секој природен број n може да се запише во обликот $3k + i$, $i = 0, 1, 2,$ $k \in \mathbb{N}$. Тогаш $2^n + 1 = 2^i (2^{3k} - 1) + 2^i + 1$. Првиот собирок е делив со 7, а вториот собирок не е делив со 7.

Значи, $2^n + 1$ не е делив со 7, за секој $n \in \mathbb{N}$.

2. Нека a, b и c се страни должини на триаголник. Докажи дека

$$a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \le 3abc.$$

Решение. Воведуваме смени

$$b + c - a = x, \quad c + a - b = y, \quad a + b - c = z$$

т.е.

$$a = \frac{y+z}{2}, \; b = \frac{z+x}{2}, \; c = \frac{x+y}{2}$$

Бидејќи a, b и c се должини на страни на триаголник, $x, y, z > 0$. Сега Неравенството го добива обликот

$$\left(\frac{y+z}{2}\right)^2 x + \left(\frac{z+x}{2}\right)^2 y + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 z \le 3 \frac{y+z}{2} \frac{z+x}{2} \frac{x+y}{2}.$$

По средување на ова неравенство добиваме

$$6xyz \le xy^2 + yx^2 + yz^2 + zy^2 + zx^2 + xz^2,$$

кое е еквивалентно на неравенството

$$x(y - z)^2 + y(z - x)^2 + z(x - y)^2 \ge 0.$$

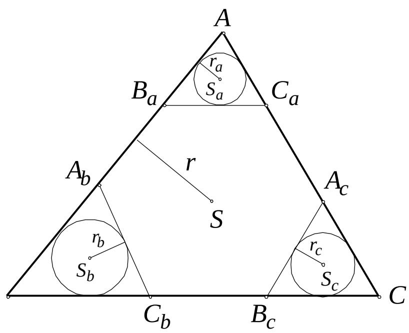
Последното неравенство очигледно важи за секои $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.

3. Во $\triangle ABC$ со должина на страните a, b и c вписана е кружница и на неа се повлечени тангенти паралелни со страните на триаголникот, кои од $\triangle ABC$

отсекуваат три нови триаголници во кои се впишани кружници. Пресметај го збирот на плоштините на четирите кружници!

Решение. Со r да го означиме радиусот на кругот впишан во $\triangle ABC$, а со r_a, r_b, r_c радиусите на круговите впишани во триаголниците добиени со конструирање на тангентите на впишаниот круг. Нека P е плоштина на $\triangle ABC$, а $s = \frac{a+b+c}{2}$ неговиот полупериметар. Според ознаките на црт. 6.1 триаголниците AB_aC_a и ABC се слични, па радиусите на впишаните кругови се однесуваат како висините h_a' и h_a кои соодветствуваат на страните $\overline{B_aC_a}$ и $\overline{BC}$. Значи,

$$\frac{r}{r_a} = \frac{h_a}{h_a'}$$



Црт. 6.1.

Бидејќи $h_a' = h_a - 2r$, добиваме

$$r_a = \frac{h_a - 2r}{h_a} r .$$

Аналогно,

$$r_i = \frac{h_i - 2r}{h_i} r , \quad i = b, c .$$

Бидејќи $r = \frac{P}{s}$ и $h_i = \frac{2P}{i}$, од претходните равенства добиваме

$$r_i = \frac{P(s-i)}{s^2}, \; i = a, b, c .$$

Ако искористиме дека $a+b+c = 2s$ и $P^2 = (s-a)(s-b)(s-c)s$, добиваме дека

$$\begin{aligned} S &= r^2\pi + r_a^2\pi + r_b^2\pi + r_c^2\pi = \frac{P^2}{s^4}(s^2 + (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2)\,\pi \\ &= \frac{P^2}{s^4}(4s^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2s(a+b+c))\,\pi \\ &= \frac{1}{s^4}(s-a)(s-b)(s-c)(a^2+b^2+c^2)\,s\,\pi \\ &= \frac{1}{(a+b+c)^3}(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2)\,\pi . \end{aligned}$$

4. Седумнаесет научници се допишуваат меѓусебно секој, со секој. Тие се допишуваат на три теми и секој пар се допишува само на една тема. Докажи дека постојат барем три научници кои меѓусебно се допишуваат на една иста тема.

Решение. Избираме еден научник, A. Бидејќи тој се допишува со 16 други научници, постојат 6 други научници кои со научникот A се допишуваат на иста тема.

Ако меѓу шесте научници, постојат двајца B и C, кои меѓу себе се допишуваат на таа иста тема, тогаш (A, B, C) е бараната тројка.

Ако од овие шест научници било кои двајца не се допишуваат на таа тема, тогаш тие меѓусебно се допишуваат на преостанатите две теми. Избираме еден од шестмината и нека тоа е D. Тој барем со тројца од преостанатите петмина се допишува на една иста тема. Ако барем двајца од нив, E и F, се допишуваат на таа тема, тогаш (D, E, F) е бараната тројка. Ако од таа тројка било кои двајца не се допишуваат на таа тема, тогаш тие се допишуваат меѓу себе на преостанатата трета тема.
Значи, секогаш постојат тројца научници кои се допишуваат на иста тема.

5. Во рамнина дадени се 5 точки. Правите кои се определени со овие точки се различни и меѓу нив нема ниту паралелни, ниту нормални прави. Низ секоја точка конструирани се сите нормали така што секоја од нив е нормална на некоја права одредена со две од преостанатите 4 точки. Определи го најголемиот број пресечни точки на овие нормали, не сметајќи ги дадените точки.

Решение. Вкупно има $\binom{5}{2}=10$ прави. Низ секоја точка, на пример A, минуваат четири прави. Според тоа, низ секоја точка минуваат шест нормали (на секоја права која не минува низ точката A). Разгледуваме било кои две точки, на пример A и B. Ќе го пресметаме бројот на пресеци на нормалите од точката A и нормалите од точката B. Нормала низ точката A кон права низ точката B, ги сече сите нормали низ точката B. Низ точката B минуваат три прави кои не минуваат низ точката A. Тоа значи дека низ точката A кон нив може да се повлечат три нормали. Тие се сечат со нормалите низ точката B во $3 \cdot 6 = 18$ точки. Секоја друга нормала низ точката A на преостанатите три прави, кои не минуваат низ точката A, сече пет нормали низ точката B. Со една од нив не се сечи бидејќи е паралелна со неа. На тој начин се добиваат уште 15 точки. Значи, нормалите низ тие две точки се сечат во $18+15=33$ точки. Од петте точки може да се состават 10 парови. Затоа, бројот на пресечни точки не е поголем од $33 \cdot 10 = 330$. Но, некои од тие точки се повторуваат. Имено, секои три точки од дадените 5 точки се темиња на триаголник. Правите на кои лежат висините на секој триаголник се сечат во една точка. Оваа точка е броена 3 пати. Такви триаголници има $\binom{5}{3}=10$, па според тоа вкупниот број на пресечни точки не е поголем од $330-30+10=310$.

6. Даден е тетраедар $ABCD$. Врвот D е поврзан со тежиштето D_1 на страната ABC. Правите низ точките A, B, C кои се паралелни со DD_1 ги сечат рамнините на спротивните страни во точки A_1, B_1 и C_1. Докажи дека волуменот на тетраедарот $ABCD$ е три пати помал од волуменот на тетраедарот

$A_1B_1C_1D_1$. Дали тврдењето важи ако се избере било која точка D_1 во внатрешноста на триаголникот ABC?

Решение. Ќе го докажеме ова тврдење во општ случај, т.е. за секоја точка D_1 од внатрешноста на триаголникот ABC, (црт. 6.2). Нека $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, каде A_1, B_1, C_1 се точки во спротивните рамнини.

Во триаголникот ABC ги повлекуваме правите AD_1, BD_1, CD_1 до нивниот пресек со спротивните страни во точките A', B', C', соодветно. Точката A' лежи на правата $A_1D,$ бидејќи A_1D е во рамнината A_1BC и $AA_1 \parallel D_1D$. Аналогно се покажува дека точките B' и C' се на правите B_1D и C_1D.

Во темињата на триаголникот ABC ставаме точкести маси x, y, z, така што тежиштето на овај систем да е точката D_1. На пример, нека

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} = \frac{z}{x}, \; \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{y}{z}, \; \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{x}{y}.$$

Доволно е да земеме

$$x = \overline{C'B}, \quad y = \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}\overline{AC'}, \; z = \overline{AC'}.$$

Според тоа

$$\frac{P_{AB'C'}}{P_{ABC}} = \frac{\overline{AB'}\cdot\overline{AC'}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} = \frac{yz}{(x+y)(x+z)}$$

и аналогно

$$\frac{P_{BC'A'}}{P_{ABC}} = \frac{xz}{(y+x)(y+z)}, \; \frac{P_{CA'B'}}{P_{ABC}} = \frac{xy}{(z+y)(z+x)}.$$

Според тоа

$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = \frac{P_{ABC}-P_{AB'C'}-P_{BA'C'}-P_{CA'B'}}{P_{ABC}} = \frac{2xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)}.$$

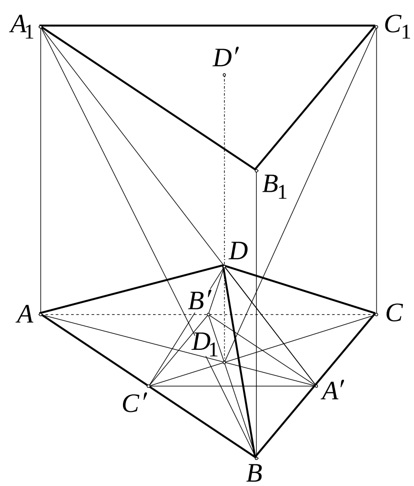
Понатаму,

$$\frac{\overline{A'D}}{\overline{DA_1}} = \frac{\overline{A'D_1}}{\overline{D_1A}} = \frac{x}{y+z}, \; \frac{\overline{C'D}}{\overline{DC_1}} = \frac{z}{x+y},$$

$$\frac{\overline{B'D}}{\overline{DB_1}} = \frac{y}{x+z},$$

(D_1 е тежиште на системот со маса x во A и $y+z$ во A' итн.). Бидејќи просторните агли $DA'B'C'$ и $DA_1B_1C_1$ се еднакви, волумените на тетраедрите $A'B'C'D$ и $A_1B_1C_1D$ се пропорционални на производот на должините на бочните рабови, т.е.

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{A_1B_1C_1D}} = \frac{\overline{A'D}\cdot\overline{B'D}\cdot\overline{D'C}}{\overline{DA_1}\cdot\overline{DB_1}\cdot\overline{DC_1}} = \frac{xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)},$$



Црт. 6.2.

па според тоа

$$\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{ABCD}}=\frac{2xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)}=2\frac{V_{A'B'C'D}}{V_{A_1B_1C_1D}},$$

т.е. $V_{A_1B_1C_1D}=2V_{ABCD}$. Сега да ги преместиме масите во $\triangle ABC$ и тоа, во A' маса $\frac{y+z}{2}$, во B' маса $\frac{x+z}{2}$ и во C' маса $\frac{x+y}{2}$. Јасно, повторно тежиштето е D_1. Потоа, во темињата A_1,B_1,C_1 ставаме маси $\frac{x}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2}$. Тогаш тежиштето на секој пар точки (A_1,A'), (B_1,B'), (C_1,C') е во точката D, бидејќи

$$\frac{\overline{A_1D}}{\overline{DA'}}=\frac{\overline{AD_1}}{\overline{D_1A'}}=\frac{\frac{y+z}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{y+z}{x}$$

и аналогно за останатите два пара. Затоа тежиштето на целиот систем е во точката D. Од друга страна, тежиштето на системот точки A',B',C' е во точката D_1 и неговата маса е $x+y+z$. Тежиштето на системот точки A_1,B_1,C_1 е во рамнината $A_1B_1C_1$ и на правата DD_1, т.е. во точката D', а неговата маса е $\frac{x+y+z}{2}$. Од овде добиваме

$$\frac{\overline{D_1D}}{\overline{DD'}}=\frac{1}{2} \text{ и } \frac{\overline{D'D_1}}{\overline{D'D}}=\frac{3}{2}.$$

Тоа значи дека односот на висините, спуштени од точките D_1 и D врз рамнината $A_1B_1C_1$ е еднаков на $\frac{3}{2}$. Тетраедрите $A_1B_1C_1D$ и $A_1B_1C_1D_1$ имаат заедничка основа $A_1B_1C_1$. Затоа $\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{A_1B_1C_1D}}=\frac{3}{2}$, а бидејќи $V_{A_1B_1C_1D}=2V_{ABCD}$, добиваме $V_{A_1B_1C_1D_1}=3V_{ABCD}$.