ЗА ЕДНА ИНТЕРЕСНА МАТЕМАТИЧКА ЗАДАЧА СО КОРЕНИ

Алија Муминагиќ, Nykøbing F., Данска

Во овој труд ќе дадеме повеќе решенија на „познатата” задача:

Да се докаже равенството:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\,. \tag{1}$$

Задачата е од категоријата „ни тешка - ни лесна” (сепак повеќе „тешка”), а ќе ја наречеме рутинска, затоа што дава пракса за примена само за куб на збир и разлика на два броеви и пресметковни операции со корени (дека тоа е така ќе се увериме од Решението 1.).

Решение 1. Равенството (1) е еквивалентно со равенството

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3=\sqrt[3]{2}-1\,. \tag{2}$$

Ќе го докажеме равенството (2) „од лево на десно”:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3=\left[\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right]^3=$$

(со примена на $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$)

$$=\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{9}}+3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3=$$

(со примена на $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$)

$$=\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^3-3\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^2-\left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^3+$$

$$+3\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\left(\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^2-2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\left(\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)^2\right)+3\cdot\sqrt[3]{\frac{4^2}{9^2}}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}\right)+\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3=$$

$$=\frac{1}{9}-3\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{9^3}}+3\cdot\sqrt[3]{\frac{2^2}{9^3}}-\frac{2}{9}+3\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{9^3}}-6\cdot\sqrt[3]{\frac{8}{9^3}}+3\cdot\sqrt[3]{\frac{16}{9^3}}+3\cdot\sqrt[3]{\frac{16}{9^3}}-3\cdot\sqrt[3]{\frac{32}{9^3}}+\frac{4}{9}=$$

$$=\frac{1}{9}-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}-\frac{3}{9}\sqrt[3]{2}+\frac{3}{9}\sqrt[3]{4}+\frac{3}{9}\sqrt[3]{4}-\frac{12}{9}+\frac{6}{9}\sqrt[3]{2}+\frac{6}{9}\sqrt[3]{2}-\frac{6}{9}\sqrt[3]{4}=$$

$$=-\frac{9}{9}+\frac{9}{9}\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2}-1$$

Ова решение е „tour de force” (мачна работа), но во наставата потребни се и вакви решенија.
Меѓу решенијата на учениците сигурно ќе се најдат и решенија од облик:

Решение 2.

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3=\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}-\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}}+\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^3=\left(\frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^3=\frac{\left(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3}{9}=$$

$$=\frac{\left[\left(1-\sqrt[3]{2}\right)+\sqrt[3]{4}\right]^3}{9}=\ldots=\sqrt[3]{2}-1,$$

што во однос на решението 1, е и полесно и поелегантно.

Решение 3. Нека е $x=\sqrt[3]{2}$. Тогаш даденото равенство (1) е еквивалентно со

$$\sqrt[3]{x-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}-\frac{x}{\sqrt[3]{9}}+\frac{x^2}{\sqrt[3]{9}}\Leftrightarrow 9x-9=\left[\left(1-x\right)+x^2\right]^3.$$

Сага е уште полесно да се утврди, дека за $x=\sqrt[3]{2}\ \left(x^3=2, x^6=4\right)$,
последното равенство е точно, па точно е и неговото еквивалентно равенство (1).

Тешко е да се очекува вакво решение.

Решение 4. Десната страна во даденото равенство (1), со користење на формулите

$$a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right), \qquad (3)$$

$$a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right), \qquad (4)$$

го трансформираме на начин што следува:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\frac{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2}+1}\overset{(3)}{=}\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+1^3}{\sqrt[3]{9}\left(\sqrt[3]{2}+1\right)}=\frac{3}{\sqrt[3]{9}\left(\sqrt[3]{2}+1\right)}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}=$$

$$=\frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{27}\left(\sqrt[3]{2}+1\right)}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}+1}=\sqrt[3]{\frac{3}{\left(\sqrt[3]{2}+1\right)^3}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2+3\cdot\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+1}}=\sqrt[3]{\frac{3}{3\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}-1}}\overset{(4)}{=}\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1^3}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}\,.$$

Слично се докажува дека се точни и следните равенства:

$$\sqrt[3]{\frac{2}{9}}-\sqrt[3]{\frac{4}{9}}+\sqrt[3]{\frac{8}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{16}-2},$$
$$\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{8}{9}}+\sqrt[3]{\frac{16}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{128}-4}\,.$$

Решение 5. Нека е $x=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}$ и $y=\sqrt[3]{2}$. Тогаш $y^3=2$ и $x=\sqrt[3]{y-1}$. Сега имаме

$$y^3=2\Leftrightarrow 1=y^3-1\Leftrightarrow 1=(y-1)\left(y^2+y+1\right),\qquad (5)$$

па од $y^3+1=3$:

$$y^2+y+1=\frac{1}{3}\left(3y^2+3y+3\right)=\frac{1}{3}\left(3y^2+3y+y^3+1\right)=\frac{1}{3}(y+1)^3\,.\qquad (6)$$

Сега од (5) и (6) добиваме:

$$x^3=y-1=\frac{1}{y^2+y+1}=\frac{3}{(y+1)^3}\Rightarrow x=\frac{\sqrt[3]{3}}{y+1}\,.\qquad (7)$$

Исто така:

$$3=y^3+1=(y+1)\left(y^2-y+1\right),$$

а оттука

$$\frac{1}{y+1}=\frac{y^2-y+1}{3}\,.\qquad (8)$$

Конечно од (7) и (8) следува:

$$x=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}\left(y^2-y+1\right)=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}\left(\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\sqrt[3]{2}+1\right)=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3}\right),$$

односно

$$x=\sqrt[3]{\frac{12}{27}}-\sqrt[3]{\frac{6}{27}}+\sqrt[3]{\frac{3}{27}}=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\text{, т.е.}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\,,$$

а ова е равенството (1).

Насетуваме дека важи

$$\sqrt[3]{\frac{2^{n-1}}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2^{n}}{9}}+\sqrt[3]{\frac{2^{n+1}}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^{3n-2}}-2^{n-1}},\quad n\in N\ ?. \qquad (9)$$

Доказ: Тврдењето (9) ќе го докажеме со математичка идукција. Имаме:

1^0 За $n=1$ тврдењето е точно (види ги претходните решенија).

2^0 Нека тврдењето е точно за некое $n=k\geq 1$, па имаме

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^{3k-2}}-2^{k-1}}=\sqrt[3]{\frac{2^{k-1}}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2^{k}}{9}}+\sqrt[3]{\frac{2^{k+1}}{9}}\ \Big/\cdot\sqrt[3]{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2\cdot\sqrt[3]{2^{3k-2}}-2\cdot 2^{k-1}}=\sqrt[3]{\frac{2\cdot 2^{k-1}}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2\cdot 2^{k}}{9}}+\sqrt[3]{\frac{2\cdot 2^{k+1}}{9}}\text{, т.е.}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^{3k+1}}-2^{k}}=\sqrt[3]{\frac{2^{k}}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2^{k+1}}{9}}+\sqrt[3]{\frac{2^{k+2}}{9}}\text{, т.е.}$$

Тврдењето важи за $n=k+1$, ако важи за $n=k\geq 1$. Значи, важи за секое $n\in N$.

Решенијата 4. и 5. као и обопштувањето се надвор од рутинското решавање и овозможуваат креативност и оригиналност при решавањето.
Ако некој од читателите се запрашал како доаѓаме до рационалните броеви $\frac{1}{9},-\frac{2}{9},\frac{4}{9}$ во равенството (1), може да формулираме и ваква задача:
Одреди ги рационалните броеви a,b и c така што

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\ ;$$

тогаш овој труд во потполност ја оправдува својата цел.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Časopis "Matematika Magasinet"*, (Danska), Nr. 45, april 2009.
[2] **Krečmar, V.A.**, *Zadačnik po algebre*, Nauka, Moskva, 1968.
[3] **Sivašinskij, I.H.**, *Teoremi i zadači po algebre i elementarnim funkcijam*, Nauka, Moskva, 1971.