Ристо Малчески, Скопје
Катерина Аневска, Скопје

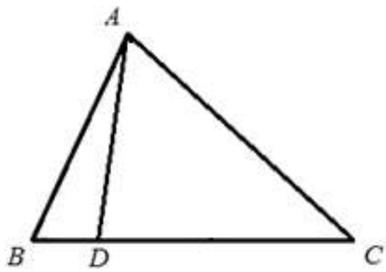
ТЕОРЕМА НА СТЈУАРТ

Теоремата на шкотскиот математичар Стјуарт (1717-1785) наоѓа широка примена во решавање на метрички задачи во триаголник. Во овој напис ќе презентираме доказ на оваа теорема и ќе се осврнеме на некои карактеристични примени на ситата.

Теорема 1 (Стјуарт). Ако на страната BC на $\triangle ABC$ е избрана точка D, која лежи меѓу точките B и C, тогаш точно е равенството

$$\overline{AC}^2\cdot\overline{BD}+\overline{AB}^2\cdot\overline{CD}-\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{BD}=\overline{AD}^2\cdot\overline{BC}. \qquad (1)$$

Доказ. Да ги разгледаме триаголниците ABD и ADC (цртеж десно). Од косинусната теорема применета на овие триаголници добиваме



$$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-2\overline{AD}\cdot\overline{CD}\cos\measuredangle ADC$$
$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2+2\overline{AD}\cdot\overline{BD}\cos\measuredangle ADC$$

Ако првото равенство го помножиме со $\overline{BD}$ и второто го помножиме со $\overline{CD}$ и добиваме

$$\overline{AC}^2\cdot\overline{BD}=\overline{AD}^2\cdot\overline{BD}+\overline{CD}^2\cdot\overline{BD}-2\overline{AD}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{BD}\cos\measuredangle ADC \text{ и}$$

$$\overline{AB}^2\cdot\overline{CD}=\overline{AD}^2\cdot\overline{CD}+\overline{BD}^2\cdot\overline{CD}+2\overline{AD}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CD}\cos\measuredangle ADC .$$

Собирајќи го последните две равенства го добиваме равенството

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2\cdot\overline{BD}+\overline{AB}^2\cdot\overline{CD}&=\overline{AD}^2\cdot\overline{BD}+\overline{CD}^2\cdot\overline{BD}+\overline{AD}^2\cdot\overline{CD}+\overline{BD}^2\cdot\overline{CD}\\&=\overline{AD}^2(\overline{BD}+\overline{CD})+\overline{CD}\cdot\overline{BD}(\overline{BD}+\overline{CD})\\&=\overline{AD}^2\cdot\overline{BC}+\overline{CD}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{BC}\end{aligned}$$

кое е еквивалентно со равенството (1). ■

Задача 1. Нека m_A, m_B, m_C се должините на тежишните линии на $\triangle ABC$ повлечени од темињата A, B, C соодветно. Докажи, дека

$$m_A^2=\frac{\overline{AC}^2+\overline{AB}^2}{2}-\frac{\overline{BC}^2}{4},\quad m_B^2=\frac{\overline{BC}^2+\overline{BA}^2}{2}-\frac{\overline{AC}^2}{4},\quad m_C^2=\frac{\overline{CA}^2+\overline{CB}^2}{2}-\frac{\overline{AB}^2}{4}. \qquad (2)$$

Решение. Ќе го докажеме само првото равенство во (2). Останатите две равенства се докажуваат аналогно.

Нека A' е средината на страната BC. Бидејќи

$$\overline{CA'} = \overline{BA'} = \frac{\overline{BC}}{2} \text{ и } m_A = \overline{AA'},$$

од теоремата на Стјуарт го добиваме равенството

$$m_A^2 \cdot \overline{BC} = \overline{AC}^2 \cdot \frac{\overline{BC}}{2} + \overline{AB}^2 \cdot \frac{\overline{BC}}{2} - \overline{BC} \cdot \frac{\overline{BC}}{2} \cdot \frac{\overline{BC}}{2}$$

и ако скратиме со $\overline{BC}$ го добиваме равенството

$$m_A^2 = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{2} - \frac{\overline{BC}^2}{4}. \ \blacksquare$$

Задача 2. Докажи, дека за секој $\triangle ABC$ е точно неравенството

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 \geq 2\overline{BC} \cdot m_A,$$

каде m_A е должината на тежишната линија повлечена кон страната BC.

Решение. Од првото равенство во (2) и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средна следува

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \frac{4m_A^2 + \overline{BC}^2}{2} \geq \sqrt{4m_A^2 \cdot \overline{BC}^2} = 2\overline{BC} \cdot m_A. \ \blacksquare$$

Задача 3. Нека h_a, h_b, h_c се должините на висините во $\triangle ABC$. Докажи

$$h_A^2 + h_B^2 + h_C^2 \leq \frac{3}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2). \tag{3}$$

Решение. Ако ги собереме равенствата (2) го добиваме равенството

$$m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 = \frac{3}{4}(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2). \tag{4}$$

Сега неравенството (3) непосредно следува од равенството (4) и неравенствата $h_A \leq m_A, h_B \leq m_B, h_C \leq m_C$. Јасно, во неравенството (3) знак за равенство важи ако и само ако $h_A = m_A, h_B = m_B, h_C = m_C$, т.е. ако и само ако $\triangle ABC$ е рамностран. $\blacksquare$

Забелешка 1. Од формулата (4) добиваме дека во $\triangle ABC$ со должини на медијани m_A, m_B, m_C важи

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \frac{4}{3}(m_A^2 + m_B^2 + m_C^2),$$

а од (2) добиваме дека

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \frac{4m_A^2 + \overline{BC}^2}{2}.$$

Ако ги одземеме едно од друго последните две равенства, после средувањето добиваме

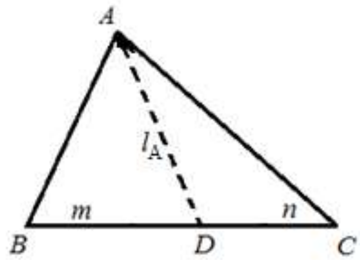
$$\overline{BC}^2=\frac{4}{9}(2(m_B^2+m_C^2)-m_A^2).$$

Аналогно се докажува дека

$$\overline{AB}^2=\frac{4}{9}(2(m_A^2+m_B^2)-m_C^2) \text{ и } \overline{CA}^2=\frac{4}{9}(2(m_C^2+m_A^2)-m_B^2).$$

Задача 4. Изрази ги должините на симетралите на внатрешните агли на $\triangle ABC$ со помош на должините на неговите страни.

Решение. Нека D е пресечната точка на симетралата l_A на аголот при темето A со страната BC. Знаеме дека



$$\overline{BD}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}} \text{ и } \overline{CD}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}}.$$

Сега бидејќи $l_A=\overline{AD}$ од теоремата на Стјуарт следува

$$l_A^2\cdot\overline{BC}=\overline{AC}^2\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}}+\overline{AB}^2\cdot\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}}-\overline{BC}\cdot\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}}$$

$$l_A^2=\overline{AC}^2\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}+\overline{AB}}+\overline{AB}^2\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{CA}+\overline{AB}}-\overline{BC}^2\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{CA}+\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}+\overline{AB}}$$

$$l_A^2=\overline{AB}\cdot\overline{AC}(1-\frac{\overline{BC}^2}{(\overline{AB}+\overline{AC})^2}.$$

Аналогно се докажува дека

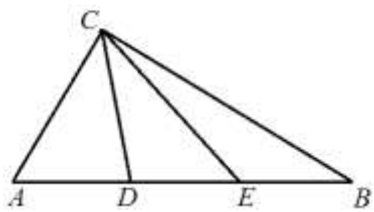
$$l_B^2=\overline{AB}\cdot\overline{BC}(1-\frac{\overline{AC}^2}{(\overline{AB}+\overline{BC})^2} \text{ и } l_C^2=\overline{AC}\cdot\overline{BC}(1-\frac{\overline{AB}^2}{(\overline{AC}+\overline{BC})^2}. \blacksquare$$

Забелешка 2. Нека D е пресечната точка на симетралата l_A на аголот при темето A со страната BC. Ако земеме предвид дека $\overline{BD}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}}$ и $\overline{CD}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{CA}+\overline{AB}}$, тогаш

$$l_A^2=\overline{AB}\cdot\overline{AC}-\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}+\overline{AC}}\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{AB}+\overline{AC}}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}-\overline{BD}\cdot\overline{DC}.$$

Аналогно се изведуваат соодветните формули за l_B^2 и l_C^2.

Задача 5. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C и точки D и E на хипотенузата AB такви што



$$\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EB},$$

(цртеж десно). Докажи, дека

$$\overline{CD}^2+\overline{DE}^2+\overline{EC}^2=\tfrac{2}{3}\overline{AB}^2. \qquad (5)$$

Решение. Од теоремата на Стјуарт следува

$$\overline{CD}^2\cdot\overline{AB}=\overline{BC}^2\cdot\overline{AD}+\overline{AC}^2\cdot\overline{DB}-\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD} \text{ и}$$

$$\overline{CE}^2\cdot\overline{AB}=\overline{BC}^2\cdot\overline{AE}+\overline{AC}^2\cdot\overline{EB}-\overline{AB}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{EB}.$$

Понатаму, од $\overline{AD}=\frac{1}{3}\overline{AB}, \overline{DB}=\frac{2}{3}\overline{AB}, \overline{DE}=\frac{1}{3}\overline{AB}, \overline{EB}=\frac{1}{3}\overline{AB}, \overline{AE}=\frac{2}{3}\overline{AB}$ и од последните две равенства добиваме

$$\overline{CD}^2=\tfrac{1}{3}\overline{BC}^2+\tfrac{2}{3}\overline{AC}^2-\tfrac{2}{9}\overline{AB}^2 \text{ и } \overline{CE}^2=\tfrac{2}{3}\overline{BC}^2+\tfrac{1}{3}\overline{AC}^2-\tfrac{2}{9}\overline{AB}^2.$$

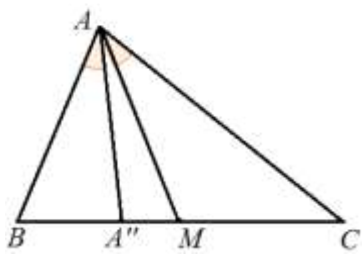
Конечно, ако прво ги собереме последните две равенства, потоа добиеното равенство го собереме со равенството $\overline{DE}^2=\frac{1}{9}\overline{AB}^2$ и земеме предвид дека $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$, го добиваме равенството (5). ■

Дефиниција 1. Правата симетрична на тежишната линија во однос на симетралата на аголот повлечена од исто теме ја нарекуваме *симедијана*.

За симедијаната е точна следнава теорема.

Теорема 2. Ако A'' е пресечната точка на симедијаната соодветна на темето A на $\triangle ABC$ со страната BC, тогаш

$$\frac{\overline{BA''}}{\overline{CA''}}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CA}^2}. \qquad (6)$$



Доказ. Нека AM и AA'' се тежишната линија и симедијаната повлечени од темето A, соодветно и h_A е висината повлечена од темето A. Имаме

$$\frac{\overline{BA''}}{\overline{MC}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{BA''}\cdot h_A}{\frac{1}{2}\overline{MC}\cdot h_A}=\frac{P_{BAA''}}{P_{MAC}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{BA}\cdot\overline{AA''}\sin\measuredangle BAA''}{\frac{1}{2}\overline{AM}\cdot\overline{AC}\sin\measuredangle MAC}=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{AA''}}{\overline{AM}\cdot\overline{AC}} \text{ и}$$

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{CA''}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{BM}\cdot h_A}{\frac{1}{2}\overline{CA''}\cdot h_A}=\frac{P_{BMA}}{P_{CAA''}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{BA}\cdot\overline{AM}\sin\measuredangle BAM}{\frac{1}{2}\overline{AA''}\cdot\overline{AC}\sin\measuredangle CAA''}=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{AM}}{\overline{AA''}\cdot\overline{AC}}$$

Ако ги помножиме последните две равенства и земеме предвид дека $\overline{BM}=\overline{MC}$ го добиваме равенството (6). ■

Задача 6. Изрази ги должините на симедијаните на $\triangle ABC$ со помош на должините на страните.

Решение. Имаме $\overline{BA''} = \overline{BC} - \overline{CA''}$, па ако замениме во равенството (6), после средувањето добиваме $\overline{CA''} = \frac{\overline{AC}^2 \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2}$. Слично, од $\overline{CA''} = \overline{BC} - \overline{BA''}$ и равенството (6) следува $\overline{BA''} = \frac{\overline{AB}^2 \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2}$. Ако ги искористиме последните две равенства, тогаш од теоремата на Стјуарт за должината на симедијаната AA'' добиваме

$$\overline{A''A}^2 = \overline{AC}^2 \cdot \overline{AB}^2 \left(2 - \frac{\overline{BC}^2}{(\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2)^2}\right).$$

Аналогно за должините на симедијаните BB'' и CC'' имаме

$$\overline{B''B}^2 = \overline{BC}^2 \cdot \overline{AB}^2 \left(2 - \frac{\overline{AC}^2}{(\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2)^2}\right) \text{ и}$$

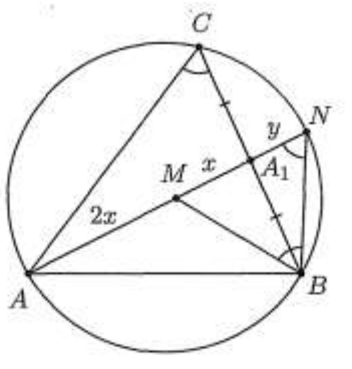
$$\overline{C''C}^2 = \overline{AC}^2 \cdot \overline{BC}^2 \left(2 - \frac{\overline{AB}^2}{(\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2)^2}\right). \blacksquare$$

На крајот од ова наше дружење ќе разгледаме неколку задачи, кои се задавани на математички натпревари од различен ранг.

Задача 7. Точката M е тежиште на $\triangle ABC$ и важи $\measuredangle AMB = 2\measuredangle ACB$. Докажи, дека

$$9\overline{AM} \cdot \overline{BM} = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2.$$

Решение. Нека M е втората пресечна точка на правата AM со кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Тогаш $\measuredangle MNB = \measuredangle ACB$ и $\measuredangle MBN = \measuredangle AMB - \measuredangle MNB = \measuredangle ACB$, т.е. $\overline{MB} = \overline{MN}$. Ако A_1 е средина на BC, $x = \overline{MA_1}$ и $y = \overline{A_1N}$, тогаш



$$\overline{AA_1} \cdot \overline{A_1N} = 3xy = \frac{\overline{BC}^2}{4},$$

па затоа $xy = \frac{\overline{BC}^2}{12}$. Од формулата за тежишната линија имаме

$$9x^2 = \frac{1}{4}(2\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2), \text{ т.е. } x^2 = \frac{2\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{36}.$$

Според тоа,

$$\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 2x \cdot \overline{MN} = 2x(x+y) = 2x^2 + 2xy = \frac{2\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2}{18} + \frac{\overline{BC}^2}{6} = \frac{a^2+b^2+c^2}{9},$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 8. Даден е $\triangle ABC$. За точката X од рамнината на триаголникот, различна од темињата на триаголникот, со A_X и B_X да ги означиме пресечните точки на симетралите на $\measuredangle AXC$ и $\measuredangle BXC$ со страните AC и BC, соодветно. За кои точки X изразот $\frac{1}{\overline{A_X C}}+\frac{1}{\overline{B_X C}}$ прима минимална вредност?

Решение. Од својството на симетралите и неравенството на Птоломеј следува

$$\frac{1}{\overline{A_X C}}+\frac{1}{\overline{B_X C}}=\frac{\overline{AX}+\overline{CX}}{\overline{AC}\cdot\overline{CX}}+\frac{\overline{BX}+\overline{CX}}{\overline{BC}\cdot\overline{CX}}=\frac{\overline{AX}\cdot\overline{BC}+\overline{BX}\cdot\overline{AC}+\overline{CX}\,(\overline{AC}+\overline{BC})}{\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CX}}$$
$$\geq\frac{\overline{CX}\cdot\overline{AB}+\overline{CX}\,(\overline{AC}+\overline{BC})}{\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CX}}=\frac{\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}}{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}.$$

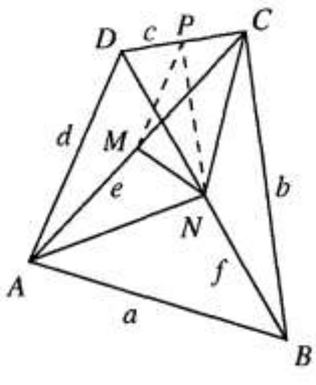
Знак за равенство важи ако и само ако X припаѓа на лакот од опишаната кружница околу $\triangle ABC$ кој не ја содржи точката C.

Задача 9. Даден е четириаголник $ABCD$, $\overline{AB}=a, \overline{BC}=b, \overline{CD}=c,$ $\overline{DA}=d, \overline{BD}=f, \overline{AC}=e$

а) Докажи, дека $a^2+b^2+c^2+d^2\geq e^2+f^2$.

б) Ако четриаголникот $ABCD$ е тетивен, докажи дека $|a-c|\geq|e-f|$.

Решение. а) Средините на AC и BD да ги означиме со M и N соодветно. Ако ја искористиме формулата за должината на тежишната линија, применета на $\triangle BMN$ добиваме



$$\overline{MN}^2=\frac{2\overline{MB}^2+2\overline{MD}^2-f^2}{4}.$$

Понатаму,

$$\overline{MB}^2=\frac{2a^2+2b^2-e^2}{4}, \overline{MD}^2=\frac{2c^2+2d^2-e^2}{4}$$

и ако замениме во горното равенство добиваме

$$4\overline{MN}^2=a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2\geq 0.$$

б) Од теоремата на Птоломеј имаме $ac+bd=ef$. Ако го искористиме последното равенство, тогаш равенството добиено под а) можеме да го запишеме во видот

$$(a-c)^2+(b-d)^2=(e-f)^2+4\overline{MN}^2.$$

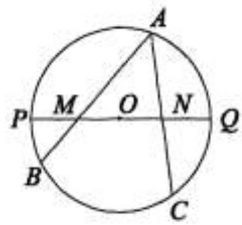
За да го докажеме саканото неравенство доволно е да докажеме дека $(b-d)^2 \le 4\overline{MN}^2$. Но, последното неравенство следува од неравенството на триаголник применето на $\triangle MNP$, каде P е средината на страната CD. ■

Задача 10. На дијаметар на кружница со радиус $\sqrt{5}$ на еднакво растојание од нејзиниот центар O земени се точки M и N. Низ точката M е повлечена тетива AB, а низ точката N е повлечена тетива AC така што

$$\frac{1}{\overline{MB}^2}+\frac{1}{\overline{NC}^2}=\frac{3}{\overline{MN}^2}.$$

Определи го растојанието од центарот на кружницата до точките M и N.

Решение. Нека PQ е дијаметар на кружницата на кој лежат точките M и N ($M \in PO, N \in QO$). Да означиме $x=\overline{MO}=\overline{NO}$, $0 \le x \le \sqrt{5}$. Тогаш



$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MP}\cdot\overline{MQ}=(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)=5-x^2.$$

Аналогно $\overline{NA}\cdot\overline{NB}=5-x^2$. Оттука наоѓаме

$$\frac{1}{\overline{MB}^2}+\frac{1}{\overline{NC}^2}=\frac{\overline{MA}^2+\overline{NA}^2}{(5-x^2)^2}.$$

Од формулата за тежишната линија AO во $\triangle MNA$ имаме

$$5=\overline{AO}^2=\tfrac{1}{4}(2(\overline{MA}^2+\overline{NA}^2)-4x^2), \text{ т.е. } \overline{MA}^2+\overline{NA}^2=2(5+x^2).$$

Според тоа, бидејќи $\overline{MN}=2x$ добиваме дека

$$\frac{3}{3x^2}=\frac{3}{\overline{MN}^2}=\frac{1}{\overline{MB}^2}+\frac{1}{\overline{NC}^2}=\frac{\overline{MA}^2+\overline{NA}^2}{(5-x^2)^2}=\frac{2(5+x^2)}{(5-x^2)^2},$$

од каде наоѓаме $x^4+14x^2-15=0$, т.е. $x=1$. ■

Задача 11. Триаголникот ABC е таков што во рамнината постои точка P таква, што триаголниците PAB, PBC и PCA имаат еднакви периметри и еднакви плоштини. Докажи, дека

a) Ако P е внатрешна точка за $\triangle ABC$, тогаш тој е рамностран.

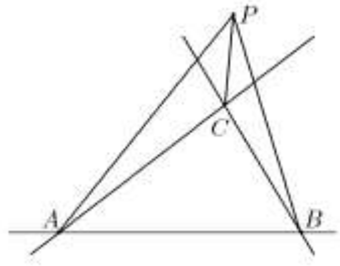
b) Ако P не е внатрешна точка за $\triangle ABC$, тогаш тој е правоаголен.

Решение. Плоштината на $\triangle ABC$ да ја означиме со S.

а) Бидејќи P е внатрешна точка, од условот следува дека $P_{PAB}=\frac{S}{3}$. Според тоа, должината на висината повлечена од P во $\triangle PAB$ е еднаква на $\frac{1}{3}$ од должината на висината повлечена од C во $\triangle ABC$. Тоа значи дека P лежи на права која минува низ тежиштето G на $\triangle ABC$, која е паралелна на BC и затоа P се совпаѓа со G. Сега, од условот следува

$$a+\tfrac{2}{3}(m_b+m_c)=b+\tfrac{2}{3}(m_a+m_c)=c+\tfrac{2}{3}(m_b+m_a).$$

Без ограничување на оштоста можеме да земеме дека $a\ge b\ge c$. Бидејќи



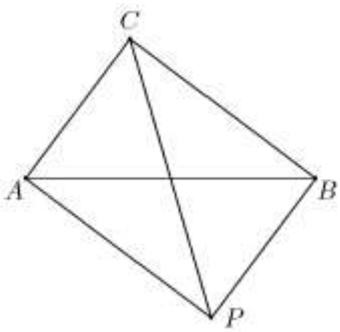
$$4m_a^2=2(a^2+b^2+c^2)-3a^2,$$
$$4m_b^2=2(a^2+b^2+c^2)-3b^2,$$
$$4m_c^2=2(a^2+b^2+c^2)-3c^2,$$

добиваме дека $m_a\le m_b\le m_c$. Оттука следува

$$a+\tfrac{2}{3}(m_b+m_c)\ge b+\tfrac{2}{3}(m_a+m_c)\ge c+\tfrac{2}{3}(m_b+m_a),$$

при што равенства се можни само ако $a=b=c$, т.е. $\triangle ABC$ е рамностран.

b) Нека претпоставиме дека точката P лежи во некој од трите надворешни агли при темињата A,B и C (цртеж десно). Тогаш $\triangle PBC$ се содржи во $\triangle PAB$, што значи дека нивните плоштини не може да се еднакви.



Без ограничување на општоста можеме точката P да ја избереме како на цртежот лево. Ако $P_{PAB}=P_{PAC}=P_{PBC}=t$, тогаш

$$S=P_{PAC}+P_{PBC}-P_{PAB}=t,$$

па затоа $S=P_{PAC}=P_{PBC}$. Оттука добиваме дека висината во $\triangle ACP$ повлечена од темето P е еднаква на висината во $\triangle ABC$ повлечена од темето B, т.е. BP е паралелна на AC. Аналогно $PA\,\|\,BC$, т.е. $PBCA$ е паралелограм. Сега од еднаквоста на периметрите на $\triangle PAB$ и $\triangle PCB$ добиваме $\overline{PA}+\overline{AB}+\overline{BP}=\overline{PC}+\overline{CB}+\overline{BP}$, од каде следува $\overline{PC}=\overline{AB}$ т.е. $PBCA$ е правоаголник. Според тоа, $\measuredangle ACB=90^\circ$.

Литература

1. Coxeter, H. S. M. , Greitzer, S. L. Geometry Revisited, MAA, 1967
2. Malcheski, R., Grozdev, S., Anevska, K. Geometry of complex numbers, Arhimed, Sofia, 2015
3. Mitrović, M, Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj. Lazarević, N. Geometrija za I razred matematičke gimnazije, Krug, Beograd, 1998