Language: **English**

*Sunday, June 23, 2013*

**Problem 1.** Find all ordered pairs $(a, b)$ of positive integers for which the numbers $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ and $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ are both positive integers.

**Problem 2.** Let $ABC$ be an acute triangle with $AB < AC$ and $O$ be the center of its circumcircle $\omega$. Let $D$ be a point on the line segment $BC$ such that $\angle BAD = \angle CAO$. Let $E$ be the second point of intersection of $\omega$ and the line $AD$. If $M$, $N$ and $P$ are the midpoints of the line segments $BE$, $OD$ and $AC$, respectively, show that the points $M$, $N$ and $P$ are collinear.

**Problem 3.** Show that

$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) \geq 16$$

for all positive real numbers $a$ and $b$ such that $ab \geq 1$.

**Problem 4.** Let $n$ be a positive integer. Two players, Alice and Bob, are playing the following game:

- Alice chooses $n$ real numbers, not necessarily distinct
- Alice writes all pairwise sums on a sheet of paper and gives it to Bob (there are $\frac{n(n-1)}{2}$ such sums, not necessarily distinct)
- Bob wins if he finds correctly the initial $n$ numbers chosen by Alice with only one guess

Can Bob be sure to win for the following cases?

**a.** $n = 5$ **b.** $n = 6$ **c.** $n = 8$

Justify your answer(s).

[For example, when $n = 4$, Alice may choose the numbers 1, 5, 7, 9, which have the same pairwise sums as the numbers 2, 4, 6, 10, and hence Bob cannot be sure to win.]

*Each problem is worth 10 points.*

*Time allowed: 4 hours and 30 minutes.*

## Problem 1.

**Solution.** As $a^3b-1=b(a^3+1)-(b+1)$ and $a+1 \mid a^3+1$, we have $a+1 \mid b+1$.

As $b^3a+1=a(b^3-1)+(a+1)$ and $b-1 \mid b^3-1$, we have $b-1 \mid a+1$.

So $b-1 \mid b+1$ and hence $b-1 \mid 2$.

- If $b=2$, then $a+1 \mid b+1=3$ gives $a=2$. Hence $(a,b)=(2,2)$ is the only solution in this case.
- If $b=3$, then $a+1 \mid b+1=4$ gives $a=1$ or $a=3$. Hence $(a,b)=(1,3)$ and $(3,3)$ are the only solutions in this case.

To summarize, $(a,b)=(1,3)$, $(2,2)$ and $(3,3)$ are the only solutions.

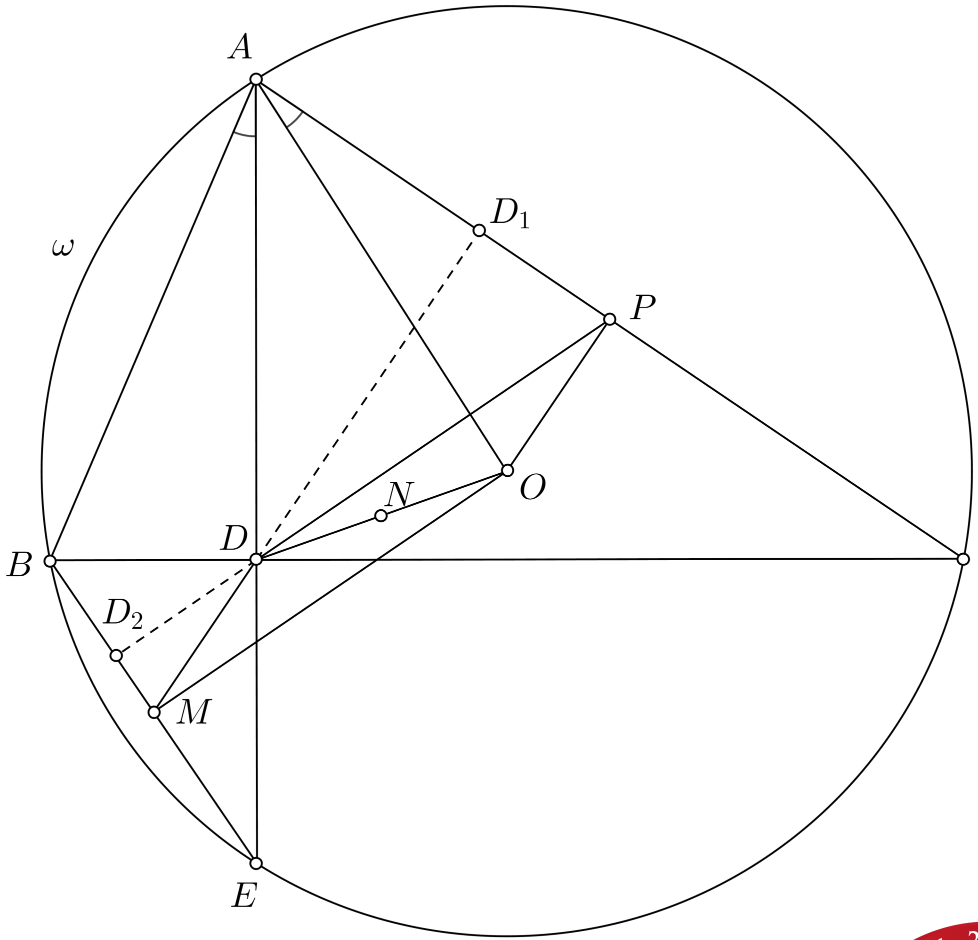
## Problem 2.

**Solution.** We will show that $MOPD$ is a parallelogram. From this it follows that $M$, $N$, $P$ are collinear.

Since $\angle BAD = \angle CAO = 90^\circ - \angle ABC$, $D$ is the foot of the perpendicular from $A$ to side $BC$. Since $M$ is the midpoint of the line segment $BE$, we have $BM = ME = MD$ and hence $\angle MDE = \angle MED = \angle ACB$.

Let the line $MD$ intersect the line $AC$ at $D_1$. Since $\angle ADD_1 = \angle MDE = \angle ACD$, $MD$ is perpendicular to $AC$. On the other hand, since $O$ is the center of the circumcircle of triangle $ABC$ and $P$ is the midpoint of the side $AC$, $OP$ is perpendicular to $AC$. Therefore $MD$ and $OP$ are parallel.

Similarly, since $P$ is the midpoint of the side $AC$, we have $AP = PC = DP$ and hence $\angle PDC = \angle ACB$. Let the line $PD$ intersect the line $BE$ at $D_2$. Since $\angle BDD_2 = \angle PDC = \angle ACB = \angle BED$, we conclude that $PD$ is perpendicular to $BE$. Since $M$ is the midpoint of the line segment $BE$, $OM$ is perpendicular to $BE$ and hence $OM$ and $PD$ are parallel.



# Problem 3.

**Solution 1.** By the AM-GM Inequality we have:

$$\frac{a+1}{2}+\frac{2}{a+1}\geq 2$$

Therefore

$$a+2b+\frac{2}{a+1}\geq\frac{a+3}{2}+2b\,.$$

and, similarly,

$$b+2a+\frac{2}{b+1}\geq 2a+\frac{b+3}{2}\,.$$

On the other hand,

$$(a+4b+3)(b+4a+3)\geq(\sqrt{ab}+4\sqrt{ab}+3)^2\geq 64$$

by the Cauchy-Schwarz Inequality as $ab\geq 1$, and we are done.

**Solution 2.** Since $ab\geq 1$, we have $a+b\geq a+1/a\geq 2\sqrt{a\cdot(1/a)}=2$.

Then

$$\begin{aligned}a+2b+\frac{2}{a+1}&=b+(a+b)+\frac{2}{a+1}\\&\geq b+2+\frac{2}{a+1}\\&=\frac{b+1}{2}+\frac{b+1}{2}+1+\frac{2}{a+1}\\&\geq 4\sqrt[4]{\frac{(b+1)^2}{2(a+1)}}\end{aligned}$$

by the AM-GM Inequality. Similarly,

$$b+2a+\frac{2}{b+1}\geq 4\sqrt[4]{\frac{(a+1)^2}{2(b+1)}}\,.$$

Now using these and applying the AM-GM Inequality another time we obtain:

$$
\begin{aligned}
\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) &\geq 16\sqrt[4]{\frac{(a+1)(b+1)}{4}} \\
&\geq 16\sqrt[4]{\frac{(2\sqrt{a})(2\sqrt{b})}{4}} \\
&= 16\sqrt[8]{ab} \\
&\geq 16
\end{aligned}
$$

**Solution 3.** We have

$$
\begin{aligned}
\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) &= \left((a+b)+b+\frac{2}{a+1}\right)\left((a+b)+a+\frac{2}{b+1}\right) \\
&\geq \left(a+b+\sqrt{ab}+\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}\right)^2
\end{aligned}
$$

by the Cauchy-Schwarz Inequality.

On the other hand,

$$\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}} \geq \frac{4}{a+b+2}$$

by the AM-GM Inequality and

$$a+b+\sqrt{ab}+\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}} \geq a+b+1+\frac{4}{a+b+2} = \frac{(a+b+1)(a+b-2)}{a+b+2}+4 \geq 4$$

as $a+b \geq 2\sqrt{ab} \geq 2$, finishing the proof.

## Problem 4.

**Solution. a.** Yes. Let $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ be the numbers chosen by Alice. As each number appears in a pairwise sum 4 times, by adding all 10 pairwise sums and dividing the result by 4, Bob obtains $a+b+c+d+e$. Subtracting the smallest and the largest pairwise sums $a+b$ and $d+e$ from this he obtains $c$. Subtracting $c$ from the second largest pairwise sum $c+e$ he obtains $e$. Subtracting $e$ from the largest pairwise sum $d+e$ he obtains $d$. He can similarly determine $a$ and $b$.

**b.** Yes. Let $a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq f$ be the numbers chosen by Alice. As each number appears in a pairwise sum 5 times, by adding all 15 pairwise sums and dividing the result by 5, Bob obtains $a+b+c+d+e+f$. Subtracting the smallest and the largest pairwise sums $a+b$ and $e+f$ from this he obtains $c+d$.

Subtracting the smallest and the second largest pairwise sums $a+b$ and $d+f$ from $a+b+c+d+e+f$ he obtains $c+e$. Similarly he can obtain $b+d$. He uses these to obtain $a+f$ and $b+e$.

Now $a+d$, $a+e$, $b+c$ are the three smallest among the remaining six pairwise sums. If Bob adds these up, subtracts the known sums $c+d$ and $b+e$ from the result and divides the difference by 2, he obtains $a$. Then he can determine the remaining numbers.

**c.** No. If Alice chooses the eight numbers $1, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 20$, then Bob cannot be sure to guess these numbers correctly as the eight numbers $2, 4, 6, 10, 11, 15, 17, 19$ also give exactly the same 28 pairwise sums as these numbers.

**17-та Јуниорска балканска математичка олимпијада**
**Анталија Република Турција, 19-24 јуни 2013**

**1.** Определи ги сите подредени парови природни броеви $(a,b)$ такви што броевите $\frac{a^3b-1}{a+1}$ и $\frac{b^3a+1}{b-1}$ се позитивни цели броеви.

**Решение.** За дадени природни броеви $a$ и $b$ бројот $a^3b-1$ можеме да го запишеме во облик

$$a^3b-1=b(a^3+1)-(b+1)\ .$$

Ако $a$ и $b$ се броеви кои го исполнуваат условот од задачата, тогаш $a+1|a^3b-1$ и $a+1|b(a^3+1)$, па затоа $a+1|b+1$ .

Аналогно, $b^3a+1$ можеме да го запишеме во облик

$$b^3a+1=a(b^3-1)+(a+1)\ .$$

Ако $a$ и $b$ се броеви кои го исполнуваат условот од задачата, тогаш $b-1|b^3a+1$ и $b-1|a(b^3-1)$ , па затоа $b-1|a+1$.

Сега, на потполно аналоген начин се добива дека $b-1|b+1$. Од равенството

$$b+1-(b-1)=2,$$

следува $b-1|2$ , па имаме две можности.

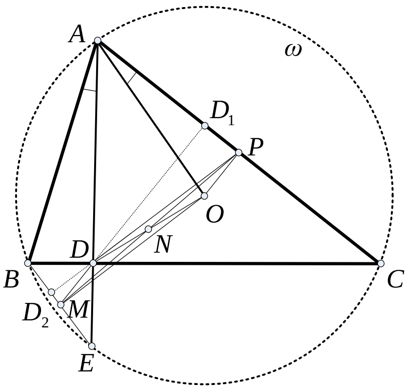
**Случај 1.** $b=2$. Тогаш $a+1|b+1=3$ и единствена можност е $a=2$. Во овој случај единствено решение е $(a,b)=(2,2)$.

**Случај 2.** $b=3$. Тогаш $a+1|b+1=4$ , па имаме две можности $a=1$ или $a=3$. Решенија во овој случај се $(a,b)=(1,3)$ и $(a,b)=(3,3)$.

Конечно бараните подредени парови се $(a,b)\in\{(1,3),(2,2),(3,3)\}$.

**2.** Нека $ABC$ е остроаголен триаголник со $\overline{AB}<\overline{AC}$ и $O$ е центар на неговата опишана кружница $\omega$. Нека $D$ е точка од отсечката $BC$ таква што $\angle BAD=\angle CAO$. Точката $E$ е втора пресечна точка на $\omega$ и правата $AD$, а точките $M,N$ и $P$ се средини на отсечките $BE,OD$ и $AC$. Докажи дека $M,N$ и $P$ се колинеарни.

**Решение.** Ќе покажеме дека $MOPD$ е паралелограм. Од тоа ќе следува дека $M,N$ и $P$ се колинеарни.




Бидејќи $\angle BAD=\angle CAO=90°-\angle ABC$, $D$ е подножјето на нормалата повлечена од $A$ до страната $BC$. Бидејќи $M$ е средина на отсечката $BE$, имаме $\overline{BM}=\overline{ME}=\overline{MD}$, па затоа $\angle MDE=\angle MED=\angle ACB$.

Нека $MD$ ја сече страната $AC$ во точка $D_1$. Од $\angle ADD_1=\angle MDE=\angle ACD$, следува дека $MD$ е нормална на $AC$. Од друга страна, бидејќи $O$ е центар на кружницата опишана околу триаголникот $ABC$ и $P$ е средина на страната $AC$, добиваме дека $OP$ е нормална на $AC$. Затоа $MD$ и $OP$ се паралелни.

Слично, бидејќи $P$ е средина на страната $AC$, имаме $\overline{AP}=\overline{PC}=\overline{DP}$, па оттука $\angle PDC=\angle ACB$. Да земеме дека $PD$ ја сече $BE$ во точка $D_2$. Бидејќи $\angle BDD_2=\angle PDC=\angle ACB=\angle BED$, заклучуваме дека $PD$ е нормална на $BE$. Бидејќи $M$ е средна точка на отсечката $BE$, $OM$ е нормална на $BE$ и оттука $OM$ и $PD$ се паралелени.

**3.** Докажи дека
$$(a+2b+\tfrac{2}{a+1})(b+2a+\tfrac{2}{b+1})\geq 16,$$
за било кои позитивни броеви $a$ и $b$ такви што $ab\geq 1$.

**Решение 1.** Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за два позитивни реални броја имаме
$$\tfrac{a+1}{2}+\tfrac{2}{a+1}\geq 2\sqrt{\tfrac{a+1}{2}\tfrac{2}{a+1}}\geq 2,$$
од каде што непосредно се добива
$$a+2b+\tfrac{2}{a+1}\geq \tfrac{a+3}{2}+2b=\tfrac{a+4b+3}{2}.$$
На потполно аналоген начин, од истите причини како и претходно имаме
$$b+2a+\tfrac{2}{b+1}\geq 2a+\tfrac{b+3}{2}=\tfrac{b+4a+3}{2}.$$
Понатаму, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и условот $ab\geq 1$ имаме
$$\tfrac{a+4b+3}{2}\cdot\tfrac{b+4a+3}{2}\geq \tfrac{1}{4}(\sqrt{ab}+4\sqrt{ab}+3)^2=\tfrac{64}{4}=16,$$
што требаше да се докаже.

**Решение 2.** Бидејќи $ab\geq 1$, и од тоа што $a$ и $b$ се позитивни реални броеви, имаме
$$a+b\geq a+\tfrac{1}{a}\geq 2\sqrt{a\tfrac{1}{a}}=2.$$
Сега од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина меѓу четири позитивни реални броја имаме
$$\begin{aligned}a+2b+\tfrac{2}{a+1}&=b+(a+b)+\tfrac{2}{a+1}\geq b+2+\tfrac{2}{a+1}=(b+1)+\tfrac{2}{a+1}+1\\&=\tfrac{b+1}{2}+\tfrac{b+1}{2}+\tfrac{2}{a+1}+1=4\sqrt[4]{\tfrac{(b+1)^2}{2(a+1)}}.\end{aligned}$$
Потполно аналогно, ако $a$ и $b$ си ги сменат местата во претходното неравенство добиваме
$$b+2a+\tfrac{2}{b+1}\geq 4\sqrt[4]{\tfrac{(a+1)^2}{2(b+1)}}.$$
Од добиените неравенства и со уште една примена на неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина меѓу два реални броја, заедно со неравенството $ab\geq 1$, добиваме
$$\begin{aligned}(a+2b+\tfrac{2}{a+1})(b+2a+\tfrac{2}{b+1})&\geq 16\sqrt[4]{\tfrac{(b+1)^2}{2(a+1)}\tfrac{(a+1)^2}{2(b+1)}}=16\sqrt[4]{\tfrac{b+1}{2}\tfrac{a+1}{2}}\\&\geq 16\sqrt[4]{\tfrac{2\sqrt{a}}{2}\tfrac{2\sqrt{b}}{2}}=16\sqrt[8]{ab}\geq 16.\end{aligned}$$
**Решение 3.** Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува
$$\begin{aligned}(a+2b+\tfrac{2}{a+1})(b+2a+\tfrac{2}{b+1})&=((a+b)+b+\tfrac{2}{a+1})((a+b)+a+\tfrac{2}{b+1})\\&\geq (a+b+\sqrt{ab}+\tfrac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}})^2.\end{aligned}$$

Од друга страна, од неравенството межу аритметичката и геометриската средина следува

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \geq 2$$

и

$$\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}} \geq \frac{4}{a+b+2},$$

па затоа

$$a+b+\sqrt{ab}+\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}} \geq a+b+1+\frac{4}{a+b+2}=\frac{(a+b+1)(a+b-2)}{a+b+2}+4 \geq 4$$

со што е завршен доказот.

**4.** Нека $n$ е позитивен број. Двајца играчи, Алиса и Боб, ја играат следната игра:

- Алиса избира $n$ природни броеви, не секогаш различни
- Алиса ги запишува сите по парови суми на лист хартија и листот му го дава на Боб (постојат $\frac{n(n-1)}{2}$ вакви суми, не секогаш различни),
- Боб победува ако точно ги погоди првичните $n$ избрани броеви од Алиса со точно едно погодување.

Може ли Боб да биде сигурен дека ќе победи во следните случаиё?

а) $n=5$ б) $n=6$ в) $n=8$

Објасни го твојот одговор.

(На пример, кога $n=4$, Алиса може да ги избере броевите 1,5,7,9, кои имаат исти по парови суми како и броевите 2,4,6,10, па затоа Боб неможе да биде сигурен дека ќе победи.)

**Решение.** а) Да. Нека $a \le b \le c \le d \le e$ се броевите избрани од Алиса. Бидејќи сите броеви се појавуваат во добиените по парови суми точно 4 пати, со собирање на сите 10 по парови добиени суми и делење на резултатот со 4, Боб ја добива сумата $a+b+c+d+e$. Со одземање на најмалата и најголемата по парови сума $a+b$ и $d+e$ тој го добива $c$. Со одземање на $c$ од втората најголема попарови сума $c+e$ тој го добива $e$. Одземајќи го $e$ од најголемата по парови сума $d+e$ тој го добива $d$. На ист начин може да ги добие и $a$ и $b$.

б) Да. Нека $a \le b \le c \le d \le e \le f$ се броевите избрани од Алиса. Бидејќи сите броеви се појавуваат во добиените по парови суми точно 5 пати, со собирање на добиените 15 по парови суми и делење на резултатот со 5, Боб ја добива сумата $a+b+c+d+e+f$. Со одземање на најмалата и најголемата добиена по парови сума $a+b$ и $e+f$ тој ја добива сумата $c+d$.

Со одземање на најмалата и втората најголема попарови сума $a+d$ и $d+f$ од $a+b+c+d+e+f$ тој ја добива сумата $c+e$. На сличен начин може да ја добие $b+d$. Тој ги користи нив за да ги добие $a+f$ и $b+e$.

Сега $a+d$, $a+e$, $b+c$ се трите најмали меѓу останатите шест добиени по парови суми. Ако Боб ги собере овие три пара и притоа од нив ги одземе $c+d$ и $b+e$ и добиениот резултат го подели со 2, тој го добива $a$. Потоа тој може да ги одреди останатите броеви.

в) Не. Ако Алиса ги избере осумте броеви 1,5,7,9,12,14,16,20 тогаш Боб не може да биде сигурен дека точно ќе ги погоди осумте броеви, бидејќи броевите 2,4,6,10,11,15,17,19 ги даваат точно истите 28 по парови добиени суми како и претходните броеви.