

## ДВАДЕСЕТ ЧЕТВРТИ ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло. Припремна варијанта, 20 октобар 2002.

8-9 разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

**1** (4 поена). У конвексном 2002-углу је повучено неколико дијагонала, које се не секу унутар тог 2002-угла. Тиме је тај многоугао разложен на 2000 троуглова. Да ли је могуће да тачно једна половина тих троуглова за све три своје странице има дијагонале тог многоугла?

**2** (5 поена). Саша и Маша су замислили по један природан број и саопштили га Васи. Васа је на једном листу папира записао збир та два броја, а на другом листу папира њихов производ. Потом је један од тих листова сакрио, а други (на којем је био записан број 2002) је показао Саши и Маши. Када је видео тај број, Саша је рекао да не зна који је број замислила Маша. Чувши то, Маша је рекла да не зна који број је замислио Саша. Који број је замислила Маша?

**3. а)** (1 поен). Одељење је радило контролну вежбу. Познато је да је барем две трећине задатака на тој контролној вежби било тешко: сваки од тих задатака није решио барем две трећине ученика. Познато је такође да је барем две трећине ученика добро урадило контролну вежбу: сваки такав ученик је урадио барем две трећине задатака са контролне вежбе. Да ли је то могуће?

**б)** (2 поена). Да ли ће се променити одговор на постављено питање ако се свуда у услову задатка две трећине замене са три четвртине?

**в)** (2 поена). Да ли ће се променити одговор на постављено питање ако се свуда у услову задатка две трећине замене са седам десетина?

**4** (5 поена). На столу се налази 2002 картица на којима су написани бројеви 1, 2, 3, ..., 2002. Два играча узимају наизменично по једну картицу. Када буду узете све картице, победник је онај играч код кога је већа последња цифра збира бројева на одабраним картицама. Одредите који од играча може увек да победи независно од тога како супарник игра и објасните како он при том треба да игра.

**5** (5 поена). Дат је угао и тачка  $A$  унутар њега. Да ли је могуће повући три праве кроз тачку  $A$ , тако да на сваком од кракова угла једна од пресечних тачака тих правих са краком лежи у средишту међу другим двема тачкама пресека правих с тим истим краком.

## ДВАДЕСЕТ ЧЕТВРТИ ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло. Припремна варијанта, 20. октобар 2002.

10-11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

**1** (4 поена). Саша и Маша су замислили по један природан број и саопштили га Васи. Васа је на једном листу папира записао збир та два броја, а на другом листу папира њихов производ. Потом је један од тих листова сакрио, а други (на којем је био записан број 2002) је показао Саши и Маши. Када је видео тај број, Саша је рекао да не зна који је број замислила Маша. Чувши то, Маша је рекла да не зна који број је замислио Саша. Који број је замислила Маша?

**2. а)** (1 поен). Одељење је радило контролну вежбу. Познато је да је барем две трећине задатака на тој контролној вежби било тешко: сваки од тих задатака није решио барем две трећине ученика. Познато је такође да је барем две трећине ученика добро урадило контролну вежбу: сваки такав ученик је урадио барем две трећине задатака са контролне вежбе. Да ли је то могуће?

**б)** (1 поена). Да ли ће се променити одговор на постављено питање ако се свуда у услову задатка две трећине замене са три четвртине?

**в)** (2 поена). Да ли ће се променити одговор на постављено питање ако се свуда у услову задатка две трећине замене са седам десетина?

**3** (5 поена). Неколико правих, међу којима нема међусобно паралелних, деле раван на неколико области. Унутар једне од тих области је одабрана тачка  $A$ . Доказати да постоји тачка  $B$  са својством да свака од датих правих раздваја тачке  $A$  и  $B$  ако и само ако је област која садржи тачку  $A$  неограничена.

**4** (5 поена). Нека су  $x, y, z$  произвољни бројеви из интервала  $(0, \pi/2)$ . Доказате неједнакост

$$\frac{x \cos x + y \cos y + z \cos z}{x + y + z} \leq \frac{\cos x + \cos y + \cos z}{3}.$$

**5** (5 поена) У бесконачном низу чији су чланови природни бројеви сваки следећи број се добија тако што се претходном броју дода једна његова цифара која је различита од нуле. Доказати да ће се у том низу наћи бар један паран број.

## DVADESET ČETVRTI TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo. **Osnovna varijanta**, 27. oktobar 2002.

### 8-9. razred (mladji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.)

1. (4 poena) U banci radi 2002 zaposlenih. Svi zaposleni su došli na jubilej banke i bili su rasporedjeni za jedim okruglim stolom. Poznato je da se plate onih koji su susedi razlikuju za dva ili tri dolara. Kolika je najveća moguća razlika izmedju dve plate ako je poznato da svi zaposleni imaju različite plate?
2. (5 poena) Sve biljke koje rastu u Rusiji su numerisane brojevima od 2 do 20000 (bez preskakanja i ponavljanja brojeva). Za svaki par biljaka je izračunat najveći zajednički delitelj njima odgovarajućih brojeva, a sami brojevi su bili izgubljeni (zbog kvara na računaru). Da li je moguće da se svakoj biljci utvrди njen broj?
3. (6 poena) Temena 50-ugla dele kružnicu na 50 lukova čije su dužine 1, 2, ..., 50 u nekom poretku. Poznato je da razlika dužina suprotnih lukova (onih koji odgovaraju suprotnim stranicama tog 50-ougla) iznosi 25. Dokažite da se u tom mnogouglu može naći par paralelnih stranica.
4. (6 poena) Unutar trougla  $ABC$  se nalazi tačka  $P$  takva da je ugao  $ABP$  jednak uglu  $ACP$  a ugao  $CBP$  jednak uglu  $CAP$ . Dokažite da je  $P$  tačka preseka visina datog trougla.
5. (7 poena) Konveksni  $n$ -tougao je razložen nekim svojim dijagonalama na trouglove (pri tome se dijagonale ne seku unutar mnogouglja). Trouglovi su obojeni u belo ili crno tako da su svaka dva trougla koji imaju zajedničku stanicu obojena različitim bojama. Za svako  $n$  nadjmite maksimum razlike broja belih trouglova i broja crnih trouglova.
6. (9 poena) Imamo veliki broj kartica, a na svakoj od njih je napisan jedan od brojeva od 1 do  $n$ . Znamo da je zbir brojeva na svim karticama jednak  $k \cdot n!$ , gde je  $k$  prirodan broj. Dokažite da se te kartice mogu rasporediti u  $k$  grupa tako da je u svakoj grupi zbir cifara na karticama te grupe jednak  $n!$ .
7. a) (5 poena) Električna mreža ima oblik rešetke  $3 \times 3$ : ukupno 16 čvorova (temena kvadratne mreže) koji su spojeni provodnicima (stranicama kvadrata te mreže). Moguće je da su neki od provodnika pregoreli. U jednom merenju je moguće odabrati dva čvora i proveriti da li medju tim čvorovima ide tok struje (to jest, da li postoji lanac provodnika koji nisu pregoreli koji spaja ta dva čvora). Poznato je da je mreža takva da postoji tok izmedju svaka dva čvora. Koji je najmanji broj merenja koji omogućava da se to pouzdano utvrdi?  
b) (5 poena) Isto pitanje za mrežu koja ima oblik rešetke  $5 \times 5$  (ukupno 36 čvorova).

## DVADESET ČETVRTI TURNIR GRADOVA

Jesenje kolo. Osnovna varijanta, 27. oktobar 2002.

### 10-11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena.)

1. (5 poena) Sve biljke koje rastu u Rusiji su numerisane brojevima od 2 do 20000 (bez preskakanja i ponavljanja brojeva). Za svaki par biljaka je izračunat najveći zajednički delitelj njima odgovarajućih brojeva, a sami brojevi su bili izgubljeni (zbog kvara na računaru). Da li je moguće da se svakoj biljci utvrdi njen broj?

2. (6 poena) Kocka je presečena jednom ravni tako da je u preseku dobijen petougao. Dokažite da postoji stranica tog petougla čija se dužina razlikuje od jednog metra najmanje za 20 centimetara.

3. (6 poena) Konveksni  $n$ -tougao je razložen nekim svojim dijagonalama na trouglove (pri tome se dijagonale ne seku unutar mnogougla). Trouglovi su obojeni u belo ili crno tako da su svaka dva trougla koji imaju zajedničku stanicu obojena različitim bojama. Za svako  $n$  nadjite maksimum razlike broja belih trouglova i broja crnih trouglova.

4. (8 poena) Imamo veliki broj kartica, a na svakoj od njih je napisan jedan od brojeva od 1 do  $n$ . Znamo da je zbir brojeva na svim karticama jednak  $k \cdot n!$ , gde je  $k$  prirodan broj. Dokažite da se te kartice mogu rasporediti u  $k$  grupe tako da je u svakoj grupi zbir cifara na karticama te grupe jednak  $n!$ .

5. Dve kružnice se seku u tačkama  $A$  i  $B$ . Kroz tačku  $B$  prolazi prava, koja seče prvu i drugu kružnicu još i u tačkama  $K$  i  $M$  respektivno. Prava  $l_1$  dodiruje prvu kružnicu u tački  $Q$  i paralelna je pravoj  $AM$ . Prava  $QA$  seče drugu kružnicu u tački  $R$ . Prava  $l_2$  dodiruje drugu kružnicu u tački  $R$ . Dokazati da

a) (4 poena) je prava  $l_2$  paralelna  $AK$ ;

b) (4 poena) prave  $l_1$ ,  $l_2$  i  $KM$  imaju zajedničku tačku.

6. (8 poena) Posmatrajmo niz čija su prva dva člana brojevi 1 i 2, a svaki sledeći član niza je najmanji prirodan broj koji se još nije pojavio u nizu a nije uzajamno prost sa prethodnim članom niza. Dokazati da se svaki prirodan broj javlja u tom nizu.

7. a) (5 poena) Električna mreža ima oblik rešetke  $3 \times 3$ : ukupno 16 čvorova (temena kvadratne mreže) koji su spojeni provodnicima (stranicama kvadrata te mreže). Moguće je da su neki od provodnika pregoreli. U jednom merenju je moguće odabrati dva čvora i proveriti da li medju tim čvorovima ide tok struje (to jest, da li postoji lanac provodnika koji nisu pregoreli koji spaja ta dva čvora). Poznato je da je mreža takva da postoji tok izmedju svaka dva čvora. Koji je najmanji broj merenja koji omogućava sa se to pouzdano utvrdi?

b) (5 poena) Isto pitanje za mrežu koja ima oblik rešetke  $7 \times 7$  (ukupno 64 čvora).

## 24. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 23. фебруара 2003. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

---

1. (4 поена). 2003 долара је распоређено у новчанике, а новчаници су смештени у џепове. Познато је да је број новчаника већи од броја долара у било ком џепу. Да ли је тачно да је број џепова већи од броја долара у неком од новчаника? (Није допуштено стављати новчанике један у други)
2. (4 поена). Два играча наизменично боје странице П-тоугла. Први може да обоји страницу која је суседна са 0 или 2 обојене странице, а други страницу која је суседна са једном обојеном страницом. Губи онај играч који не може да одигра потез. За које вредности П други играч може да победи независно од игре првог?
3. (4 поена). На крацима АВ и ВС једнакокраког троугла АВС налазе се тачке К и Л респективно, такве да је  $AK + LC = KL$ . Кроз средиште дужи KL пролази права паралелна са ВС, и та права сече страницу АС у тачки Н. Нађи величину угла KNL.
4. (5 поена). У низу природних бројева сваки број, осим првог, је једнак збиру претходног броја и његове највеће цифре. Колико највише непарних узастопних бројева може садржати такав низ?
5. (5 поена). Може ли се табла величине  $2003 \times 2003$  поплотати доминама величине  $1 \times 2$ , које је дозвољено стављати само хоризонтално, и правоугаоницима величине  $1 \times 3$ , које је дозвољено стављати само вертикално? (Две паралелне странице табле условно зовемо хоризонталним, а друге две вертикалним.)

## 24. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 23. фебруара 2003. год.

10–11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

---

1. (3 поена). 2003 долара је распоређено у новчанике, а новчаници су смештени у џепове. Познато је да новчаник има више него долара у било ком џепу. Да ли је тачно да џепова има више него долара у неком од новчаника?
2. (3 поена). Дато је 100 штапића, од којих се може саставити 100-угао. Да ли се може десити да се ни од ма којег мањег броја тих штапића не може саставити многоугао?
3. (4 поена). У троуглу  $\triangle ABC$  је одабрана тачка  $M$  тако да полупречници описаних кружница троуглова  $AMC$ ,  $BMC$  и  $BMA$  нису мањи од полупречника кружнице описане око троугла  $\triangle ABC$ . Доказати да су сва четири полупречника једнака..
4. (5 поена). Сто бројева је поређано у растућем поретку: 00, 01, 02, 03, ..., 99. Затим су они испремештани тако да се сваки следећи број добија из претходног тако што се њему тачно једна цифра повећа или смањи за 1 (на пример, после 29 може се појавити само 19, 39 или 28, а 20 или 30 се не могу појавити). Колико највише бројева може остати на свом месту?
5. (5 поена). Дат је правоутаоник од картона чије су странице  $a$  см и  $b$  см, где је  $b/2 < a < b$ . Доказати да га је могуће разрезати на три дела с д којих се може саставити квадрат.

## 24. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Основна варијанта, 2. марта 2003. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

- 
- 1.** (4 поена). Васа напише на табли једначину  $ax^2 + bx + c = 0$  са позитивним целобројним коефицијентима  $a$ ,  $b$  и  $c$ . После тога Петар, ако жели, може да замени један или два знака "+" знаком "-". Ако добијена једначина има оба корена целобројна, онда побеђује Васа, а ако пак добијена једначина нема корена (решења) или је бар један од корена нецелобројан, онда побеђује Петар. Може ли Васа тако одабрати коефицијенте једначине да сигурно победи Петра?
  - 2.** (4 поена). Дат је троугао  $ABC$ . У њему је  $R$ - полупречник описане кружнице,  $r$  - полупречник уписане кружнице,  $a$  - дужина најдуже странице,  $h$  - дужина најмање висине. Доказати да је  $R/r > a/h$ .
  - 3.** На турниру је свака од 15 екипа одиграла са сваком другом екипом тачно један меч.

    - a)** (4 поена) Доказати да су се барем у једном мечу сусреле екипе које су, до тог меча, у збиру одиграле непаран број мечева.
    - б)** (3 поена) Може ли такав меч бити јединствен?
  - 4.** (7 поена) Чоколада облика једнакостраничног троугла станице  $n$  издељена је браздама на мале троуглове чије су странице дужине 1 (свака страница је подељена на  $n$  једнаких делова, деоне тачке на сваком пару страница су спојене дужима паралелним трећој страници). Два играча играју игру. У једном потезу се може одломити троугаоно парче чоколаде (дуж бразде), појести га и остатак предати противнику. Онај који добије последње парче - троугаоне странице 1 - је победник. Ако играч не може да одигра потез, одмах губи игру. За свако  $n$  установите који од играча, први (онај који почиње) или други, може играти тако да увек победи (независно од игре противника).
  - 5.** (7 поена) Који је највећи број поља табле  $9 \times 9$  која се могу разрезати по обе дијагонале, тако да се при томе табла не распадне на неколико делова?
  - 6.** (7 поена) Трапез са основицама  $AD$  и  $BC$  описан је око кружнице,  $E$  је тачка пресека његових дијагонала. Доказати да угао  $AED$  не може бити оштар.

## 24. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Основна варијанта, 2. марта 2003. год.  
10–11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

- 
1. (4 поена). Дата је тространа пирамида  $ABCD$ . У њој је  $R$  - полупречник описане сфере,  $r$  - радијус уписане сфере,  $a$  - дужина најдуже ивице  $h$  - дужина најмање висине (на једну од страна пирамиде). Доказати да је  $R/r > a/h$ .
  2. (5 поена). Дат је полином  $P(x)$  са реалним коефицијентима. Бесконачан низ различитих природних бројева  $a_1, a_2, a_3, \dots$  је такав да је  $P(a_1) = 0, P(a_2) = a_1, P(a_3) = a_2$ , итд. Који степен може имати полином  $P(x)$ ?
  3. (5 поена). Може ли се површина коцке у потпуности покрити са три троугла без преклапања?
  4. (6 поена). У кружници је уписан правоугли троугао  $ABC$  чија је хипотенуза  $AB$ . Нека је  $K$  средиште лука  $BC$  који не садржи тачку  $A$ .  $N$  - средиште дужи  $AC$ ;  $M$  - тачка пресека полуправе  $KN$  са кружницом. У тачкама  $A$  и  $C$  су конструисане тангенте на кружницу, које се секу у тачки  $E$ . Доказати да је угао  $EMK$  прав.
  5. (6 поена). Бора је замислио цео број, већи од 100. Кира каже цео број  $d$ , већи од 1. Ако је Борин број дељив са  $d$ , онда Кира побеђује, а у супротном Бора одузима од свог броја број  $d$  и игра се наставља. Кира нема право да каже број које је раније рекла. Када Борин број постане негативан, Кира губи. Може ли Кира тако играти да сигурно победи?
  6. (7 поена). У сваком пољу таблице величине  $4 \times 4$  је записан знак "+" или "-". Дозвољено је истовремено мењати знак у произвољном пољу и свим пољима која имају заједничку страницу са тим пољем. Колико се различитих таблица може добити, више пута примењујући описану операцију?
  7. (8 поена). Унутар квадрата је одабрано неколико тачака и те тачке су спојене дужима између себе и са теменима квадрата, тако да те дужи не секу једна другу (осим на крајевима). Тиме је квадрат подељен на троуглове и то тако да је свака одабрана тачка теме неког троугла, а ниједна се не налази на страници неког троугла. За сваку одабрану тачку, као и за свако теме квадрата, пребројане су одатле повучене дужи. Може ли се десити да сви таако добијени бројеви буду парни?