22nd Junior Balkan Mathematical Olympiad
Rhodes 19-24 June 2018

Solutions

Problem 1. Find all the pairs (m, n) of integers which satisfy the equation

$$m^5 - n^5 = 16mn.$$

Solution. If one of m, n is 0, the other has to be 0 too, and $(m, n) = (0, 0)$ is one solution. If $mn \neq 0$, let $d = \gcd(m, n)$ and we write $m = da,\ n = db,\ a, b \in \mathbb{Z}$ with $(a, b) = 1$. Then, the given equation is transformed into

$$d^3a^5 - d^3b^5 = 16ab \tag{1}$$

So, by the above equation, we conclude that $a \mid d^3b^5$ and thus $a \mid d^3$. Similarly $b \mid d^3$. Since $(a, b) = 1$, we get that $ab \mid d^3$, so we can write $d^3 = abr$ with $r \in \mathbb{Z}$. Then, equation (1) becomes

$$abra^5 - abrb^5 = 16ab \Rightarrow$$
$$r(a^5 - b^5) = 16.$$

Therefore, the difference $a^5 - b^5$ must divide 16. Therefore, the difference $a^5 - b^5$ must divide 16. This means that

$$a^5 - b^5 = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16.$$

The smaller values of $|a^5 - b^5|$ are 1 or 2. Indeed, if $|a^5 - b^5| = 1$ then $a = \pm 1$ and $b = 0$ or $a = 0$ and $b = \pm 1$, a contradiction. If $|a^5 - b^5| = 2$, then $a = 1$ and $b = -1$ or $a = -1$ and $b = 1$. Then $r = -8$, and $d^3 = -8$ or $d = -2$. Therefore, $(m, n) = (-2, 2)$. If $|a^5 - b^5| > 2$ then, without loss of generality, let $a > b$ and $a \geq 2$. Putting $a = x + 1$ with $x \geq 1$, we have

$$\begin{aligned}|a^5 - b^5| &= |(x+1)^5 - b^5| \\ &\geq |(x+1)^5 - x^5| \\ &= |5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1| \geq 31\end{aligned}$$

which is impossible. Thus, the only solutions are $(m, n) = (0, 0)$ or $(-2, 2)$.

Problem 2. Let n three-digit numbers satisfy the following properties:

(1) No number contains the digit 0.

(2) The sum of the digits of each number is 9.

(3) The units digits of any two numbers are different.

(4) The tens digits of any two numbers are different.

(5) The hundreds digits of any two numbers are different.

Find the largest possible value of n.

Solution. Let S denote the set of three-digit numbers that have digit sum equal to 9 and no digit equal to 0. We will first find the cardinality of S. We start from the number 111 and each element of S can be obtained from 111 by a string of 6 A's (which means that we add 1 to the current digit) and 2 G's (which means go to the next digit). Then for example 324 can be obtained from 111 by the string $AAGAGAAA$. There are in total

$$\frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28$$

such words, so S contains 28 numbers. Now, from the conditions (3), (4), (5), if $\overline{abc}$ is in T then each of the other numbers of the form $\overline{**c}$ cannot be in T, neither $\overline{*b*}$ can be, nor $\overline{a**}$. Since there are $a+b-2$ numbers of the first category, $a+c-2$ from the second and $b+c-2$ from the third one. In these three categories there are

$$(a+b-2)+(b+c-2)+(c+a-2) = 2(a+b+c)-6 = 2 \cdot 9 - 6 = 12$$

distinct numbers that cannot be in T if $\overline{abc}$ is in T. So, if T has n numbers, then $12n$ are the forbidden ones that are in S, but each number from S can be a forbidden number no more than three times, once for each of its digits, so

$$n + \frac{12n}{3} \leq 28 \iff n \leq \frac{28}{5},$$

and since n is an integer, we get $n \leq 5$. A possible example for $n = 5$ is

$$T = \{144, 252, 315, 423, 531\}.$$

□

Comment by PSC. It is classical to compute the cardinality of S and this can be done in many ways. In general, the number of solutions of the equation

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$

in positive integers, where the order of x_i matters, is well known that equals to $\binom{n-1}{k-1}$. In our case, we want to count the number of positive solutions to $a+b+c=9$. By the above, this equals to $\binom{9-1}{3-1} = 28$. Using the general result above, we can also find that there are $a+b-2$ numbers of the form $\overline{**c}$.

Problem 3. Let $k > 1$ be a positive integer and $n > 2018$ be an odd positive integer. The nonzero rational numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ are not all equal and satisfy

$$x_1 + \frac{k}{x_2} = x_2 + \frac{k}{x_3} = x_3 + \frac{k}{x_4} = \cdots = x_{n-1} + \frac{k}{x_n} = x_n + \frac{k}{x_1} \cdot$$

Find:

a) the product $x_1 x_2 \ldots x_n$ as a function of k and n

b) the least value of k, such that there exist n, x_1, $x_2, \ldots, x_n$ satisfying the given conditions.

a) If $x_i = x_{i+1}$ for some i (assuming $x_{n+1} = x_1$), then by the given identity all x_i will be equal, a contradiction. Thus $x_1 \neq x_2$ and

$$x_1 - x_2 = k \frac{x_2 - x_3}{x_2 x_3}.$$

Analogously

$$x_1 - x_2 = k \frac{x_2 - x_3}{x_2 x_3} = k^2 \frac{x_3 - x_4}{(x_2 x_3)(x_3 x_4)} = \cdots = k^n \frac{x_1 - x_2}{(x_2 x_3)(x_3 x_4) \ldots (x_1 x_2)} \cdot$$

Since $x_1 \neq x_2$ we get

$$x_1 x_2 \ldots x_n = \pm\sqrt{k^n} = \pm k^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{k}.$$

If one among these two values, positive or negative, is obtained, then the other one will be also obtained by changing the sign of all x_i since n is odd.

b) From the above result, as n is odd, we conclude that k is a perfect square, so $k \geq 4$. For $k = 4$ let $n = 2019$ and $x_{3j} = 4$, $x_{3j-1} = 1$, $x_{3j-2} = -2$ for $j = 1, 2, \ldots, 673$. So the required least value is $k = 4$.

□

Comment by PSC. There are many ways to construct the example when $k = 4$ and $n = 2019$. Since $3 \mid 2019$, the idea is to find three numbers x_1, x_2, x_3 satisfying the given equations, not all equal, and repeat them as values for the rest of the x_i's. So, we want to find x_1, x_2, x_3 such that

$$x_1 + \frac{4}{x_2} = x_2 + \frac{4}{x_3} = x_3 + \frac{4}{x_1} \cdot$$

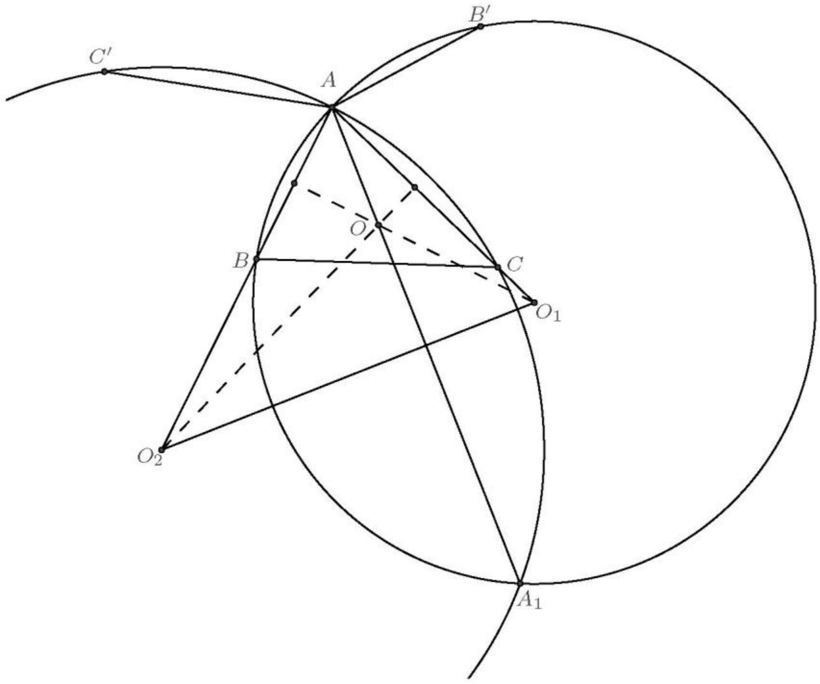
As above, $x_1 x_2 x_3 = \pm 8$. Suppose without loss of generality that $x_1 x_2 x_3 = -8$. Then, solving the above system we see that if $x_1 \neq 2$, then

$$x_2 = -\frac{4}{x_1 - 2} \quad \text{and} \quad x_3 = 2 - \frac{4}{x_1},$$

leading to infinitely many solutions. The example in the official solution is obtained by choosing $x_1 = -2$.

Problem 4. Let ABC be an acute triangle, A', B' and C' be the reflections of the vertices A, B and C with respect to BC, CA, and AB, respectively, and let the circumcircles of triangles ABB' and ACC' meet again at A_1. Points B_1 and C_1 are defined similarly. Prove that the lines AA_1, BB_1 and CC_1 have a common point.

Solution. Let O_1, O_2 and O be the circumcenters of triangles ABB', ACC' and ABC respectively. As AB is the perpendicular bisector of the line segment CC', O_2 is the intersection of the perpendicular bisector of AC with AB. Similarly, O_1 is the intersection of the perpendicular bisector of AB with AC. It follows that O is the orthocenter of triangle AO_1O_2. This means that AO is perpendicular to O_1O_2. On the other hand, the segment AA_1 is the common chord of the two circles, thus it is perpendicular to O_1O_2. As a result, AA_1 passes through O. Similarly, BB_1 and CC_1 pass through O, so the three lines are concurrent at O. $\square$



Comment by PSC. We present here a different approach.
We first prove that A_1, B and C' are collinear. Indeed, since $\angle BAB' = \angle CAC' = 2\angle BAC$, then from the circles (ABB'), (ACC') we get

$$\angle AA_1B = \frac{\angle BA_1B'}{2} = \frac{180^\circ - \angle BAB'}{2} = 90^\circ - \angle BAC = \angle AA_1C'.$$

It follows that

$$\angle A_1AC = \angle A_1C'C = \angle BC'C = 90^\circ - \angle ABC \tag{1}$$

On the other hand, if O is the circumcenter of ABC, then

$$\angle OAC = 90^\circ - \angle ABC. \tag{2}$$

From (1) and (2) we conclude that A_1, A and O are collinear. Similarly, BB_1 and CC_1 pass through O, so the three lines are concurrent in O.

ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА 2018 ГОДИНА

1. Определи ги сите парови од цели броеви (m,n) кои ја задоволуваат равенката

$$m^5 - n^5 = 16mn.$$

Решение. Ако еден од m или n е 0, тогаш и другиот мора да е 0 и $(m,n)=(0,0)$ е едно решение. Ако $mn \neq 0$, нека $d = \mathrm{NZD}(m,n)$ и $m = da$, $n = db$, $a,b \in \mathbb{Z}$ така што $\mathrm{NZD}(a,b)=1$. Тогаш дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$d^3a^5 - d^3b^5 = 16ab \qquad (1).$$

Од горната равенка заклучуваме дека $a \mid d^3b^5$, од каде $a \mid d^3$. Слично се покажува дека $b \mid d^3$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(a,b)=1$, добиваме $ab \mid d^3$, па можеме да запишеме $d^3 = abr$ за $r \in \mathbb{Z}$. Тогаш, од равенката (1) добиваме

$$abra^5 - abrb^5 = 16ab$$
$$r(a^5 - b^5) = 16.$$

Според тоа, разликата $a^5 - b^5$ мора да е делител на 16, што значи дека

$$a^5 - b^5 = \pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16.$$

Ако $|a^5 - b^5| = 1$, тогаш $a = \pm1$ и $b = 0$ или $a = 0$ и $b = \pm1$, што претставува контрадикција. Ако $|a^5 - b^5| = 2$, тогаш $a = 1$ и $b = -1$ или $a = -1$ и $b = 1$. Тогаш $r = -8$, и $d^3 = -8$ или $d = -2$. Според тоа, $(m,n) = (-2,2)$. Ако $|a^5 - b^5| > 2$, тогаш без губење на општоста можеме да земеме дека $a > b$ и $a \geq 2$. Ставаме $a = x+1$ за $x \geq 1$ и добиваме

$$|a^5 - b^5| = |(x+1)^5 - b^5| \geq |(x+1)^5 - x^5| = |5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1| \geq 31,$$

што не е можно. Според тоа, единствените решенија се $(m,n) = (0,0)$ или $(-2,2)$.

2. Нека n трицифрените броеви ги задоволуваат следните својства:

(1) Ниту еден број ја содржи цифрата 0.

(2) Збирот на цифрите на секој број е 9.

(3) Цифрите на единиците на било кои два броја се различни.

(4) Цифрите на десетките на било кои два броја се различни.

(5) Цифрите на стотките на било кои два броја се различни.

Определи ја најголемата можна вредност за n.

Решение. Нека *S* го означува множеството од трицифрените броеви кои имаат збир на цифрите 9 и ниту една од нив не е 0. Најпрво ќе го определиме бројот на елементите на множеството *S*. Секој елемент на S може да се добие од 111 со низа од 6 букви *A* (што значи дека додаваме 1 на соодветната цифра) и 2 букви G (што значи одиме на наредната цифра). На пример бројот 324 може да се добие од 111 со низата AAGAGAAA. Постојат вкупно $\frac{8!}{6!\cdot 2!}=28$ такви зборови, односно *S* содржи 28 броеви. Од условите (3), (4), (5), ако $\overline{abc}$ е во бараното множество *T*, тогаш секој од броевите од облик $\overline{**c}$, $\overline{*b*}$ и $\overline{a**}$ не може да биде во T. Бидејќи има $a+b-2$ броја од првиот тип, $a+c-2$ од вториот и $b+c-2$ од третиот, вкупно од сите три типа има

$$(a+b-2)+(b+c-2)+(c+a-2)=2(a+b+c)-6=2\cdot 9-6=12$$

различни броја кои не може да се во *T* ако $\overline{abc}$ е во T. Според тоа, ако *T* има *n* броеви, тогаш 12*n* броеви од *S* не се дозволени. Но, секој број од *S* може да биде забранет не повеќе од три пати, по еднаш за секоја негова цифра, од каде следува $n+\frac{12n}{3}\le 28$, т.е. $n\le\frac{28}{5}$. Бидејќи n е цел број, добиваме $n\le 5$. За $n=5$ можеме да го земеме множеството

$$T=\{144,252,315,423,531\}.$$

Забелешка. Бројот на елементите на множеството *S* може да се пресмета на повеќе начини. За бројот на решенијата на равенката

$$x_1+x_2+...+x_k=n$$

во множеството на природни броеви, каде редоследот на x_i е важен, е познато дека е еднаков на $\binom{n-1}{k-1}$. Во нашиот случај сакаме да го изброиме бројот на решенија на равенката $a+b+c=9$ во множеството природни броеви. Според горната дискусија, $\binom{9-1}{3-1}=28$. Користејќи го општиот резултат од погоре, можеме исто така да покажеме дека постојат $a+b-2$ броја од облик $\overline{**c}$.

3. Нека $k>1$ е природен број и $n>2018$ е непарен природен број. Ненултите рационални броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ се такви што не се сите еднакви меѓу себе и ги задоволуваат равенствата

$$x_1+\frac{k}{x_2}=x_2+\frac{k}{x_3}=x_3+\frac{k}{x_4}=...=x_{n-1}+\frac{k}{x_n}=x_n+\frac{k}{x_1}.$$

Определи:

а) го производот $x_1 x_2 ... x_n$ како функција од k и n,

б) ја најмалата вредност на k за која постојат $n, x_1, x_2, ..., x_n$ кои ги исполнуваат дадените услови.

Решение. а) Ако $x_i = x_{i+1}$ за некој i (по претпоставка дека $x_{n+1}=x_1$), тогаш од дадените равенства следува дека сите x_i се еднакви, што претставува контрадикција. Според тоа, $x_1 \neq x_2$ и $x_1 - x_2 = k\frac{x_2-x_3}{x_2x_3}$. Аналогно добиваме

$$x_1-x_2=k\frac{x_2-x_3}{x_2x_3}=k^2\frac{x_3-x_4}{(x_2x_3)(x_3x_4)}=...=k^n\frac{x_1-x_2}{(x_2x_3)(x_3x_4)...(x_1x_2)}.$$

Бидејќи $x_1 \neq x_2$ добиваме $x_1x_2...x_n = \pm\sqrt{k^n} = \pm k^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{k}$. Ако една од овие две вредности, позитивна или негативна, е достигната, тогаш другата ќе биде исто така достигната со промена на знаците на сите x_i бидејќи n е непарен број.

б) Од претходниот резултат, бидејќи n е непарен број, заклучуваме дека k е полн квадрат, од каде $k \geq 4$. За $k=4$ нека $n=2019$ и

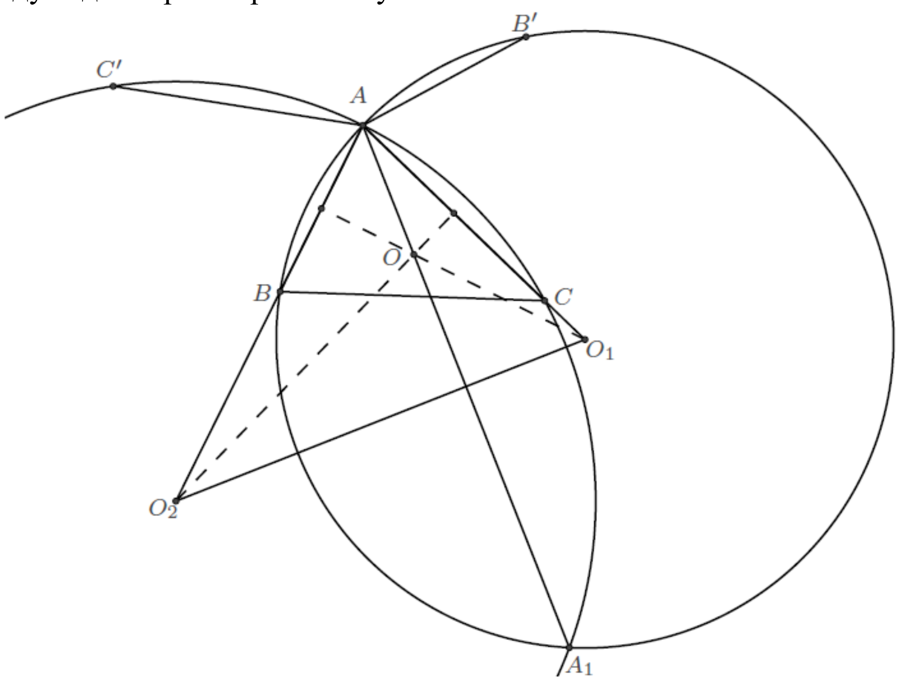
$$x_{3j}=4, x_{3j-1}=1, x_{3j-2}=-2 \text{ за } j=1,2,...,673.$$

Според тоа, бараната најмала вредност е $k=4$.

Забелешка. Постојат повеќе начини на кои може да се конструира пример кога $k=4$ и $n=2019$. Бидејќи $3\,|\,2019$, идејата е да најдеме три броеви x_1, x_2, x_3, не сите еднакви меѓу себе кои ги задоволуваат дадените равенства и да ги повториме како вредности за останатите x_i. Според тоа, сакаме да најдеме x_1, x_2, x_3 такви што $x_1+\frac{k}{x_2}=x_2+\frac{k}{x_3}=x_3+\frac{k}{x_4}$. Од претходната дискусија $x_1x_2x_3=\pm 8$. Нека претпоставиме, без губење на општоста, дека $x_1x_2x_3=-8$. Тогаш со решавање на горниот систем гледаме дека ако $x_1 \neq 2$, тогаш $x_2=-\frac{4}{x_1-2}$ и $x_3=2-\frac{4}{x_1}$, што води до бесконечно многу решенија. Примерот во официјалното решение е добиен за $x_1=-2$.

4. Нека ABC е остроаголен триаголник, A', B' и C' се симетричните точки на темињата A, B и C во однос на правите BC, CA и AB, соодветно и нека кружниците опишани околу триаголниците ABB' и ACC' се сечат и во точката A_1. Точките B_1 и C_1 се аналогно дефинирани. Докажи дека правите AA_1, BB_1 и CC_1 имаат една заедничка точка.

Решение. Нека O_1, O_2 и O се центрите на опишаните кружници околу ABB', ACC' и ABC, соодветно. Бидејќи AB е симетрала на отсечката CC', O_2 е пресекот на симетралата на отсечката AC со AB. Слично, O_1 е пресекот на симетралата на отсечката AB со AC. Следува дека O е ортоцентар на триаголникот AO_1O_2. Според тоа, AO е нормална на O_1O_2. Од друга страна, AA_1 е заедничка тетива за двете кружници, од каде следува дека е нормална на O_1O_2. Добиваме дека AA_1 минува низ O. Слично се покажува дека BB_1 и CC_1 минуваат низ O, од каде следува дека трите прави минуваат низ точката O.



Забелешка. Ќе дадеме и друг пристап. Најпрво покажуваме дека A_1, B и C' се колинеарни. Навистина, бидејќи $\measuredangle BAB' = \measuredangle CAC' = 2\measuredangle BAC$, тогаш од кружниците $(ABB'), (ACC')$ добиваме $\measuredangle AA_1B = \frac{\measuredangle BA_1B'}{2} = \frac{180^\circ - \measuredangle BAB'}{2} = 90^\circ - \measuredangle BAC = \measuredangle AA_1C'$. Следува дека

$$\measuredangle A_1AC = \measuredangle A_1C'C = \measuredangle BC'C = 90^\circ - \measuredangle ABC \qquad (1).$$

Од друга страна, ако O е центар на опишаната кружница околу ABC, тогаш

$$\measuredangle OAC = 90^\circ - \measuredangle ABC \qquad (2).$$

Од (1) и (2) заклучуваме дека A_1, A и O се колинеарни. Слично се покажува дека BB_1 и CC_1 минуваат низ O, од каде следува дека трите прави минуваат низ точкат O.