БМО 2002

1. Некои парови на множество од n точки $A_1, A_2, ..., A_n$ ($n \geq 4$) се меѓусебно поврзани со отсечки, така што секоја точка е поврзана со барем три од дадените точки. Докажи дека постојат различни точки $X_1, X_2, ..., X_{2k} \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ за некој $k \geq 2$ така што точките X_i и X_{i+1} се поврзани за секој $i\ (1 \leq i \leq 2k)$ каде $X_{2k+1} = X_1$.

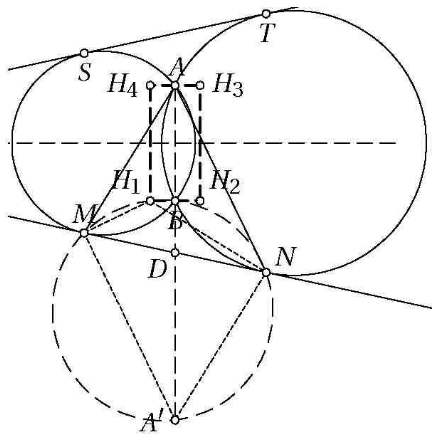
   Решение. Да го разгледаме најдолгиот пат $Y_1Y_2...Y_m$ со меѓусебно различни точки $Y_i \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Заради максималноста на патот, точката Y_1 е поврзана само со точката Y_2 и некои Y_i, Y_j, каде $2 < i < j \leq n$. Меѓу индексите $2, i, j$, два се со иста парност: да ги означиме со $k, l\ (k < l)$. Тогаш $Y_1Y_kY_{k+1}...Y_lY_1$ е кружен пат со парен број точки.

2. Низата $\{a_n\}_{n\geq 1}$ е дефинирана со $a_1 = 20, a_2 = 30, a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n, n \geq 1$. Определи ги сите природни броеви n за кои $1 + 5a_na_{n+1}$ е точен квадрат.

   Решение. Од рекуреантната релација следува
$$5a_na_{n+1} - 5a_{n-1}a_n = 5a_n(3a_n - 2a_{n-1}) = (4a_n - a_{n-1})^2 - (a_{n-1} + a_n)^2$$
$$= (a_n + a_{n+1})^2 - (a_{n-1} + a_n)^2.$$
   Оттука следува
$$5a_na_{n+1} - (a_n + a_{n+1})^2 = 5a_{n-1}a_n - (a_{n-1} + a_n)^2 = ... = 5a_1a_2 - (a_1 + a_2)^2 = 500.$$
   Според тоа,
$$1 + 5a_na_{n+1} = (a_n + a_{n+1})^2 + 501$$
   е меѓу $(a_n + a_{n+1})^2$ и $(a_n + a_{n+1} + 1)^2$ ако $a_n + a_{n+1} > 250$, т.е. за $n \geq 4$, бидејќи $a_3 = 70, a_4 = 180, a_5 = 470$, па тогаш не е точен квадрат. Со проверка за $n = 1, 2, 3$ добиваме дека $1 + 5a_na_{n+1}$ е точен квадрат само за $n = 3$ и тогаш
$$1 + 5a_3a_4 = 1 + 5 \cdot 70 \cdot 180 = 250^2 + 501 = 251^2.$$

3. Кружниците C_1 и C_2 имаат различни радиуси и се сечат во точките A и B. Нека MN и ST, ($M, S \in C_1, N, T \in C_2$) се заедничките тангенти на C_1 и C_2. Докажи, дека ортоцентрите на триаголниците AMN, AST, BMN и BST се темиња на правоаголник.

   Решение. Со H_1, H_2, H_3, H_4 соодветно да ги означиме центрите на триаголниците $AMN,\ AST, BMN, BST$. Точките H_3 и H_4 се соодветно симетрични на точките H_2 и H_1 во однос на правата l која минува низ центрите на кружниците C_1 и C_2. Затоа доволно е да се докаже дека $H_1H_2 \perp AB$.



Точката $D = AB \cap MN$ е средина на отсечката MN бидејќи

$$\overline{DM}^2 = \overline{DA} \cdot \overline{DB} = \overline{DN}^2$$

(степен на точка во однос на дадените кружници). Ако A' е точка таква што $AMA'N$ е паралелограм, тогаш $\measuredangle H_1MA' = \measuredangle H_1NA' = 90^\circ$, т.е. точките M и N лежат на кружница γ со дијаметар H_1A'. Понатаму, и точката B лежи на γ бидејќи

$$\overline{DB} \cdot \overline{DA'} = \overline{DB} \cdot \overline{DA} = \overline{DM} \cdot \overline{DN} .$$

Оттука следува дека $\measuredangle H_1BA' = 90^\circ$. Аналогно, $\measuredangle H_2BA' = 90^\circ$, па затоа $B \in H_1H_2 \perp AB$.

4. Определи ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такви што за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$2n + 2001 \le f(f(n)) + f(n) \le 2n + 2002 .$$

Решение. Функцијата $f(n) = n + 667$ ги задоволува условите на задачата.

За даден $n \in \mathbb{N}$, дефинираме низа $\{a_k\}$ со $a_0 = n$ и $a_{k+1} = f(a_k), k \ge 0$. Ако означиме $b_k = a_{k+1} - a_k - 667 - \frac{1}{6}$, тогаш од условот на задачата следува $-\frac{1}{2} \le c_k = b_{k+1} + 2b_k \le \frac{1}{2}$. Бидејќи

$$b_m = (-2)^m b_0 + \sum_{k=0}^{m-1} (-2)^{m-1-k} c_k \quad \text{и}$$

$$a_n = a_0 + 667 + \sum_{m=0}^{n-1} b_m = a_0 + 667 + \sum_{m=0}^{n-1} (-2)^m b_0 + \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{m=k+1}^{n-1} (-2)^{m-1-k} c_k$$

$$= a_0 + 667 + \tfrac{1-(-2)^n}{3} b_0 + \sum_{k=0}^{n-2} \tfrac{1-(-2)^{n-k-1}}{3} c_k$$

$$\le a_0 + 667 + \tfrac{1-(-2)^n}{3} (b_0 + \tfrac{(-1)^{n-1}}{2}),$$

мора да важи $a_n < 0$ за некој n ако $|b_0| > \frac{1}{2}$. Но, според условот на задачата важи $a_n > 0$, за секој n, па затоа $-\frac{1}{2} \le b_0 = f(n) - n - 667 - \frac{1}{6} \le \frac{1}{2}$, од каде заклучуваме дека $f(n) = n + 667$.