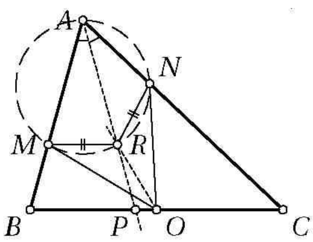
## *XLV олимпијада*

1. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ таков што $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Кружницата со дијаметар $BC$ ги сече страните $AB$ и $AC$ во точките $M$ и $N$, соодветно. Со $O$ да ја означиме средината на страната $BC$. Симетралите на аглите $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle MON$ се сечат во точка $R$. Докажи, дека кружниците опишани околу $\triangle BMR$ и $\triangle CNR$ се сечат во точка која припаѓа на страната $BC$.




**Решение.** Од $\overline{OM} = \overline{ON}$ следува $\overline{RM} = \overline{RN}$. Бидејќи $\triangle ANM \sim \triangle ABC$ и $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ заклучуваме дека $\overline{AM} \neq \overline{AN}$. Според тоа, точката $R$ е пресек на симетралата на $\measuredangle MAN$ и симетралата на отсечката $MN$, па затоа лежи на кружницата опишана околу $\triangle AMN$. Нека правите $AR$ и $BC$ се сечат во точката $P$. Тогаш $\measuredangle MRA = \measuredangle MNA = \measuredangle ABP$ и $\measuredangle NRA = \measuredangle NMA = \measuredangle ACP$, што значи дека четириаголниците $RMBP$ и $RNCP$ се тетивни, т.е. $P$ е пресечна точка на кружниците опишани околу $\triangle BMR$ и $\triangle CNR$.

2. Определи ги сите полиноми со реални коефициенти такви што

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c) \qquad (1)$$

за секои реални броеви $a,b,c$ такви што $ab+bc+ca=0$.

**Решение.** Нека $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$. За секој $x\in\mathbb{R}$ подредената тројка $(a,b,c)=(6x-3x,2x)$ го задоволува условот $ab+bc+ca=0$. Со замена во (1) добиваме

$$P(3x)+P(5x)+P(-8x)=2P(7x), \text{ за секој } x\in\mathbb{R}.$$

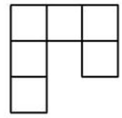
Оттука со споредување на коефициентите следува дека

$$K(i)=3^i+5^i+(-8)^i-2\cdot 7^i=0 \text{ за секој } a_i\neq 0.$$

Понатаму, $K(2)=K(4)=0$ и $K(i)<0$ за непарен $i$, а $K(i)>0$ за парен $i\notin\{2,4\}$. Затоа $a_i=0$, за $i\neq 2,4$. Според тоа, $P(x)=a_2x^2+a_4x^4$, за некои реални броеви $a_2$ и $a_4$.

Лесно се проверува дека полиномите од видот $P(x)=ax^2+bx^4,\ a,b\in\mathbb{R}$ го задоволуваат условот на задачата.

3. Кука ќе ја наречеме фигурата прикажана на цртежот десно, која составена од шест единечни квадрати, или било која друга фигура која е добиена од оваа фигура со примена на ротации и осни симетрии. Определи ги сите $m\times n$ правоаголници кои



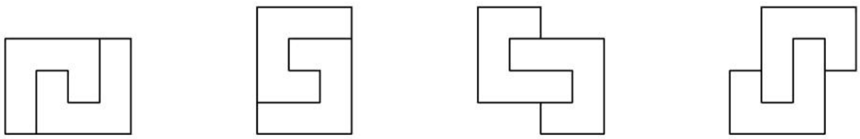
можат да се покријат со куки така што

1) правоаголникот е покриен без празнини и преклопувања,

2) ниту еден дел од некоја кука не е надвор од правоаголникот.

**Решение.** *Одговор*. Сите правоаголници $m\times n$ за кои $12\,|\,mn$, барем еден од броевите $m,n$ е делив со 4 и $m,n\notin\{1,2,5\}$.

Нека претпоставиме дека правоаголникот $m\times n$ може да се покрие со куки. За секоја кука $H$ нејзиниот „внатрешен" квадрат е покриен точно со една кука $K$. Од друга страна, $H$ го покрива внатрешниот квадрат на $K$, па затоа сите куки можат да се поделат на парови $\{H,K\}$ кои формираат една од следниве фигури со плоштина 12.



$A_1$ $A_2$ $B_1$ $B_2$

Значи, нашиот правоаголник е покриен со вакви фигури. Тоа значи дека $12\,|\,mn$.

Нека претпоставиме дека $4\nmid m$ и $4\nmid n$. Тогаш броевите $m$ и $n$ се парни, а вкупниот број фигури составени од две куки како на цртежот горе е непарен. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека вкупниот број фигури $A_1,B_1$ е непарен. Да ја обоиме секоја четврта колона на таблата $m\times n$ во црно. Тогаш секоја од фигурите $A_1,B_1$ покрива по три црни полиња, додека секоја од фигурите $A_2,B_2$ покрива по 2 или 4 црни полиња. Значи, бројот на покриените црни полиња е непарен, што не е можно, бидејќи има парен број црни полиња.

Сега нека претпоставиме дека, на пример, $4\,|\,m$. Ако $3\,|\,n$, тогаш правоаголникот $m\times n$ може да се подели на $4\times 3$. Исто така, ако $12\,|\,m$ и $n\notin\{1,2,5\}$, тогаш $n=3k+4l$, за некои $k,l\in\mathbb{N}_0$, па затоа правоаголникот $m\times n$ може да се подели на правоаголници $12\times 3$ и $12\times 4$, и оттука на правоаголници $4\times 3$ и $3\times 4$. Од друга страна, ако $12\,|\,m$ и $n\in\{1,2,5\}$ лесно се гледа дека покривањето не е можно.

4. Нека $n\ge 3$ е природен број. Ако $t_1,t_2,...,t_n$ се позитивни реални броеви такви што

$$n^2+1>(t_1+t_2+...+t_n)(\tfrac{1}{t_1}+\tfrac{1}{t_2}+...+\tfrac{1}{t_n}),$$

тогаш за секои $i,j,k$ такви што $1\le i<j<k\le n$ броевите $t_i,t_j,t_k$ се должини на страни на триаголник. Докажи!

**Решение.** Заради симетрија доволно е да докажеме дека $t_1+t_2>t_3$. Бидејќи $\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\geq 2$ за секои $i, j$ добиваме

$$S=\sum_{i=1}^{n}t_i\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}=n^2+\sum_{i<j}\left(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}-2\right)\geq n^2+\frac{t_1}{t_3}+\frac{t_3}{t_1}+\frac{t_2}{t_3}+\frac{t_3}{t_2}-4=n^2+c-4 .$$

Нека претпоставиме дека $t_3=t_1+t_2+\varepsilon, \varepsilon\geq 0$. Тогаш

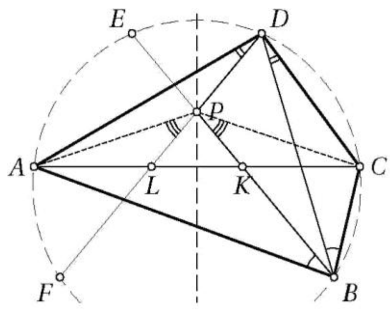
$$c=\frac{t_1+t_2}{t_3}+\frac{t_3(t_1+t_2)}{t_1t_2}=\frac{t_3}{t_3}+\frac{(t_1+t_2)^2}{t_1t_2}+\varepsilon\left(\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}-\frac{1}{t_3}\right)\geq 1+\frac{(t_1+t_2)^2}{t_1t_2}\geq 5,$$

па затоа $S\geq n^2+1$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува $t_1+t_2>t_3$.

*Забелешка*. Тврдењето на задачата е точно ако $n^2+1$ се замени со $(n+\sqrt{10}-3)^2$. Ова е најдобрата можна апроксимација.

5. Во конвексен четириаголник $ABCD$ дијагоналата $BD$ не е симетрала ниту на аголот $\measuredangle ABC$ ниту на аголот $\measuredangle CDA$. За точката $P$ која припаѓа на внатрешноста на четириаголникот $ABCD$ важи $\measuredangle PBC=\measuredangle DBA$ и $\measuredangle PDC=\measuredangle BDA$. Докажи, дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен ако и само ако $\overline{AP}=\overline{CP}$.

**Решение.** Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник и нека правите $BP$ и $DP$ повторно ја сечат опишаната околу него кружница во точките $E$ и $F$, соодветно. Тогаш $AF=BC$ и $AE=CD$, па затоа $BF\parallel AC\parallel DE$. Според тоа, четириаголникот $BDEF$ е рамнокрак трапез и $P=BE\cap DF$ лежи на заедничката симетрала на отсечките $BF, ED, AC$, па затоа $\overline{AP}=\overline{CP}$.




Нека претпоставиме дека $\overline{AP}=\overline{CP}$. Понатаму, нека правите $BP$ и $DP$ ја сечат $AC$ во точките $K$ и $L$, соодветно. Точките $A$ и $C$ се изогонално коњугирани во $\triangle BDP$, па затоа $\measuredangle APL=\measuredangle CPK$, од каде следува дека точките $K$ и $L$ се симетрични во однос на симетралата $p$ на отсечката $AC$. Тогаш симетричната точка $E$ на точката $D$ во однос на правата $p$ лежи на правата $BP$, па затоа $\triangle APD\cong\triangle CPE$. Оттука следува дека $\measuredangle BDC=\measuredangle ADP=\measuredangle BEC$, што значи дека точката $B$ припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle CDE$. Конечно, бидејќи и точката $A$ припаѓа на кружницата опишана околу $\triangle CDE$ заклучуваме дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен.

6. Природниот број $k$ ќе го нарекуваме *наизменичен* ако секои две соседни цифри во неговиот декаден запис се со различна парност. Определи ги сите природни броеви $n$ за кои постои наизменичен природен број $A_n$ делив со $n$.

**Решение.** Ако $20 \mid n$, тогаш последните две цифри на секој број делив со $n$ се парни, па затоа не е наизменичен. Ќе докажеме дека за секој $n$ таков што $20 \nmid n$ постои наизменичен содржател $A_n$. Прво, за секој $m$ таков што $\mathrm{NZD}(m,10)=1$ и за секој $k \in \mathbb{N}$ постои број од облик

$$I_{k,m} = \overline{1\underbrace{0...0}_{k-1}1\underbrace{0...0}_{k-1}1\underbrace{0...0}_{k-1}...1\underbrace{0...0}_{k-1}1} = \frac{10^{ik}-1}{10^k-1},\ i \in \mathbb{N}$$

таков што $m \mid I_{k,m}$. Навистина, според теоремата на Ојлер можеме да земеме $i = \varphi((10^k-1)m)$.

1) Ако $\mathrm{NZD}(n,10)=1$, тогаш $I_{2,n}$ е наизменичен број делив со $n$.

2) Нека $n = 2\cdot 5^k m$, каде $\mathrm{NZD}(m,10)=1$. Ќе докажеме, дека за секој $r$ постои $r-$цифрен наизменичен број $U_r$ (кој може да почнува со нула) делив со $5^r$, а потоа ќе земеме $A_n = 10U_{2k}I_{2k,m}$.

Низата $\{U_r\}$ ја дефинираме индуктивно. Нека $U_1 = 5$. За $r \geq 1$ нека $c \in \{0,1,2,3,4\}$ е таков што $2^r c \equiv -\frac{U_r}{5^r} \pmod 5$ и нека $d = c+5$. Тогаш $(r+1)-$цифрените броеви $\overline{cU_r}$ и $\overline{dU_r}$ се деливи со $5^{r+1}$, а еден од нив е наизменичен. За $U_{r+1}$ го земеме тој наизменичен број.

3) Нека $n = 2^k m$, каде $\mathrm{NZD}(m,10)=1$. Ќе докажеме дека за секој $r$ постои $2r-$цифрен наизменичен број $V_r$ делив со $2^{r+1}$, а потоа ќе земеме $A_n = V_k I_{2k,m}$. Како и во случајот 2), $V_r$ го дефинираме индуктивно. Земаме $V_1 = 16$, а за $r > 1$ точно еден од броевите $\overline{10V_r}, \overline{12V_r}, \overline{14V_r}, \overline{16V_r}$ може да се земе за $V_{r+1}$.