

XXIII олимпијада

1. Дадена е функцијата $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$, за која важи:

(a) за секои m и n , $f(m+n) - f(m) - f(n) = 0$ или 1 ,

(b) $f(2) = 0$,

(c) $f(3) > 0$,

(d) $f(9999) = 3333$.

Пресметај $f(1982)$.

Решение. За $m = n = 1$ според (a) и (b) добиваме $0 = f(2) = 2f(1)$ или $0 = 2f(1) + 1$. Вториот случај не е можен бидејќи функцијата прима ненегативни вредности. Затоа $f(1) = 0$.

За $m = 2, n = 1$ важи $f(3) = f(2) + f(1) = 0$ или $f(3) = f(2) + f(1) + 1 = 1$, што според (c) значи $f(3) = 1$.

Јасно, $f(3n+3) \geq f(3n) + f(3) = f(3n) + 1$, од каде со индукција се докажува дека $f(3n) \geq n$. Ако за некој n важи строго неравенство, тогаш тоа е исполнето и за секој број поголем од n . Бидејќи $f(9999) = 3333$, заклучуваме дека $f(3n) = n$, за секој $n \leq 3333$. Во нашиот случај важи

$$1982 = f(3 \cdot 1982) \geq f(2 \cdot 1982) + f(1982) \geq 3f(1982),$$

па според тоа

$$661 > \frac{1982}{3} \geq f(1982) \geq f(1980) + 2 = 660.$$

Значи, $f(1982) = 660$.

Забелешка. Функцијата $f(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ ги задоволува условите на задачата.

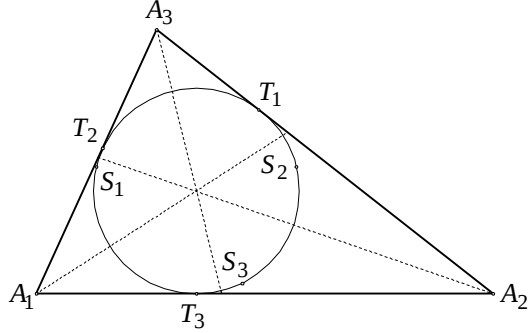
2. Даден е разностран $\triangle A_1 A_2 A_3$ со должина на страните a_1, a_2, a_3 (a_i е должина на страна спроти темето A_i). Нека M_i е средината на страната a_i , T_i е точка во која впишаната кружница во триаголникот ја допира страната a_i , а S_i е симетрична точка на точката T_i во однос на симетралата на внатрешниот агол кај темето A_i ($i = 1, 2, 3$). Докажи дека правите $M_1 S_1$, $M_2 S_2$ и $M_3 S_3$ се сечат во една точка.

Решение. I начин. Точките S_1, S_2 и S_3 припаѓаат на впишаната кружница. Оsnата симетрија во однос на симетралата на аголот A_1 го пресликува лакот $T_3 S_1$ на впишаната кружница во лакот $T_2 T_1$, а оsnата симетрија во однос на симетралата на аголот A_2 лакот $T_3 S_2$ го пресликува во лакот $T_1 T_2$. Затоа

$$T_3S_1 = -T_2T_1 = T_1T_2 = -T_3S_2$$

(при што ознаките $T_3S_1, -T_2T_1, T_1T_2, -T_3S_2, \dots$ се ознаки за ориентирани лаци на впишаната кружница).

Од овде следува дека $S_1S_2 \parallel A_1A_2$ и заради тоа $S_1S_2 \parallel M_1M_2$. Слично се докажува дека $S_1S_3 \parallel M_1M_3$ и $S_2S_3 \parallel M_2M_3$. Значи, триаголниците $M_1M_2M_3$ и $S_1S_2S_3$ имаат паралелни страни па затоа постои хомотетија или трансформација со која едниот се пресликува



Црп. 23.1.

во другиот. Трансформација не постои бидејќи опишаната кружница околу $\triangle M_1M_2M_3$ има поголем радиус од опишаната кружница околу $\triangle S_1S_2S_3$ (т.е. впишаната кружница на $\triangle A_1A_2A_3$, бидејќи $\triangle A_1A_2A_3$ е разностран). Затоа постои хомотетија и нејзин центар е заедничката точка на правите M_1S_1 , M_2S_2 и M_3S_3 . (Овие прави постојат бидејќи $M_i \neq S_i$, а триаголникот $\triangle A_1A_2A_3$ е разностран).

II начин. Поставуваме координатен систем така што координатниот почеток да биде во центарот O на кружницата впишана во $\triangle A_1A_2A_3$, а радиусот на впишаната кружница да е еднаков на 1. Со мали букви ги означуваме комплексните броеви кои соодветствуваат на дадените точки означени со големи букви. Точни се равенствата $t_1\bar{t}_1 = t_2\bar{t}_2 = t_3\bar{t}_3 = 1$. Тетивите $\overline{T_2T_3}$ и $\overline{T_1S_1}$ на дадената кружница се паралелни, бидејќи и двете се нормални на симетралата на аголот A_1 , па затоа $t_2t_3 = t_1s_1$, односно $s_1 = t_2t_3\bar{t}_1$. Аналогно, $s_2 = t_1t_3\bar{t}_2$ и $s_3 = t_1t_2\bar{t}_3$. Според тоа,

$$s_3 - s_2 = t_1(t_2\bar{t}_3 - t_3\bar{t}_2).$$

Бројот во заградата е имагинарен, како разлика на два коњугирано комплексни броеви, што значи $OT_1 \perp S_2S_3$ па затоа правите A_2A_3 и S_2S_3 се паралелни.

Понатаму решавањето е исто како и во првиот начин.

3. Ги разгледуваме низите позитивни реални броеви $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ со својство

$$1 = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$$

(a) Докажи дека за секоја низа со тоа својство постои $n \in \mathbb{N}$ таков што

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3.999.$$

(b) Најди низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ со тоа својство, при што е исполнето

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4.$$

Решение. (a) Воведуваме ознаки

$$\frac{x_{i-1}}{x_i} = k_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Тогаш, бидејќи

$$k_i + \frac{2}{k_i} \geq 2\sqrt{2} \quad \text{за } i = 1, 2, \dots, n \text{ и } x_0 = 1,$$

добиваме:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} = k_1 + \frac{k_2}{k_1} + \frac{k_3}{k_1 k_2} + \dots + \frac{k_n}{k_1 k_2 \dots k_{n-1}} \\ &= k_1 + \frac{1}{k_1} (k_2 + \frac{1}{k_2} (k_3 + \dots + \frac{1}{k_{n-2}} (k_{n-1} + \frac{k_n}{k_{n-1}}) \dots)) \\ &\geq k_1 + \frac{1}{k_1} (k_2 + \frac{1}{k_2} (k_3 + \dots + \frac{1}{k_{n-3}} (k_{n-2} + \frac{2}{k_{n-2}}) \dots)) \\ &\geq k_1 + \frac{1}{k_1} \cdot 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots\sqrt{2}}}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\dots\sqrt{2}}}} = y_n. \end{aligned}$$

За да најдеме $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, изразот го запишуваме во облик $y_n = 2\sqrt{y_{n-1}}$, од што

следува $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 4$, со што е докажано тврдењето под (a).

(b) Низата $x_n = 2^{-n}$ го задоволува дадениот услов:

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} = 2^1 + 2^0 + \dots + 2^{-n+2} = 4 - 2^{-n+2} < 4,$$

за секој $n \in \mathbb{N}$.

4. Дадена е равенка

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n.$$

Ако $n \in \mathbb{N}$ е таков што дадената равенка има целобројно решение (x, y) , докажи дека таа има барем три целобројни решенија. Докажи дека за $n = 2891$ оваа равенка нема целобројно решение.

Решение. Левата страна на равенката ја запишуваме во облик

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y - x)^3 - 3(y - x)x^2 - x^3.$$

Јасно, ако парот (x, y) е решение на равенката, тогаш и паровите $(y - x, -x)$ и $(-y, x - y)$, исто така се решенија на дадената равенка и притоа било кои два од овие три пара (x, y) , $(y - x, -x)$, $(-y, x - y)$ не се еднакви меѓу себе,

бидејќи во спротивно добиваме $x = y = 0$, што не е можно заради претпоставката $n \neq 0$.

Да претпоставиме дека

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2891 \equiv 2 \pmod{9} \quad (1)$$

каде x и y се цели броеви. При делење на трети степени на цели броеви со 9 се добиваат остатоци 0 и ± 1 , од што следува дека равенството (1) не е можно.

5. На дијагоналите AC и CE на правилниот шестаголник $ABCDEF$ се избрани внатрешни точки M и N , такви што $\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = \lambda$. Пресметај го λ , ако се знае дека точките B, M и N лежат на иста права.

Решение. I начин. Од $\overline{CM} = \overline{EN}$, следува дека триаголниците BCM и DEN се складни, па затоа $\angle NBC = \angle NDE$. Освен тоа $\angle BCE = 90^\circ$, $\angle DEC = 30^\circ$, па затоа

$$\begin{aligned} \angle DNB &= \angle CNB + \angle DNC \\ &= (90^\circ - \angle NBC) + (\angle DEC + \angle NDE) \\ &= 120^\circ. \end{aligned}$$

Тоа значи дека отсечката BD се гледа од точката N под ист агол како и од центарот O на кружницата опишана околу правилниот шестаголник. Затоа N лежи на кружница со центар во C , и радиус $\overline{CD} = \overline{CB}$, т.е. $\overline{CN} = \overline{CB}$. Конечно,

$$\lambda = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CE}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

бидејќи во правоаголниот триаголник BCE , $\angle EBC = 60^\circ$.

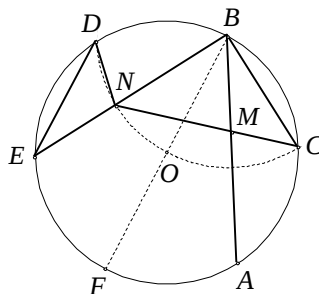
II начин. Ако ги воведеме ознаки $\overline{AB} = \vec{a}$ и $\overline{BC} = \vec{b}$, добиваме $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\overline{CE} = \vec{b} - 2\vec{a}$. Од $\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = \lambda$ имаме

$$\begin{aligned} \overline{AM} &= \lambda \overline{AC} = \lambda(\vec{a} + \vec{b}) \text{ и} \\ \overline{CN} &= \lambda \overline{CE} = \lambda(\vec{b} - 2\vec{a}). \end{aligned}$$

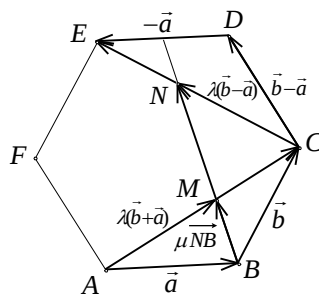
Точките B, M и N се колинеарни и затоа

$$\overline{BM} = \mu \overline{BN} \quad (1)$$

за некој μ . Ги изразуваме $\overline{BM}$ и $\overline{BN}$ со помош на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$



Црп. 23.2.



Црп. 23.3.

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \lambda(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a},$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \vec{b} + \lambda(\vec{b} - 2\vec{a}),$$

и ако замениме во (1) добиваме

$$\vec{a}(\lambda - 1 + 2\lambda\mu) + \vec{b}(\lambda - \mu - \lambda\mu) = 0,$$

Бидејќи $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеано независни вектори, добиваме:

$$\lambda - 1 + 2\lambda\mu = 0$$

$$\lambda - \mu - \lambda\mu = 0$$

од каде што наоѓаме $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. Даден е квадрат S со должина на страната 100. Нека $L = A_0A_1A_2\dots A_n$ е полигонална линија во S која самата себе не се допира и не се пресекува, таква што $A_0 \neq A_n$. Нека за секоја точка P од работ на квадратот S постои точка од линијата L чија оддалеченост од точката P не е поголема од $\frac{1}{2}$.

Докажи дека на L постојат две точки X и Y меѓу кои растојанието не е поголемо од 1, а должината на линијата L меѓу тие точки не е помала од 198.

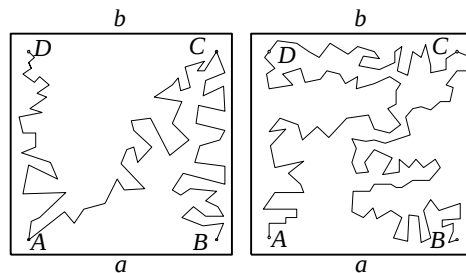
Решение. На растојание $\frac{1}{2}$ од се-

кое теме на квадратот мора да постои барем една точка од линијата L . Избираме четири точки кои се најблиски до темињата на квадратот. Тие може да бидат поврзани меѓу себе само на два начина: или во облик на буквата N

или во облик на буквата U . Ги означуваме точките како на црте-

жот (во двата случаи на L меѓу точките A и B лежи точката C покрај спротивната страна на квадратот). Бидејќи за секоја точка од страна на квадратот S постои точка од линијата L на оддалеченост која не е поголема од $\frac{1}{2}$, а на појасот го додаваме и неговиот раб, тој појас го покрива целиот

раб на квадратот. Точките од страната AB ги боиме со црвено ако се покриени со појас од A до C , и со сино ако се покриени со појас од C до B . Страната AB е покриена со конечен број црвени и сини затворени интервали, па пресекот на црвените и сините интервали не е празен. Нека R е точка од пресекот. Во круг со радиус $\frac{1}{2}$ околу R се наоѓаат две точки од линијата L такви што C е на делот од линијата L меѓу нив. Ги означуваме со X и Y . Да забележиме дека $d(X, Y) \leq 1$. Должината на делот од L кој се



Црп. 23.4.

наоѓа меѓу X и C е поголема или еднаква на $100 - 2 \cdot \frac{1}{2}$, бидејќи растојанието меѓу X и страната AB е помало или еднакво на $\frac{1}{2}$, а истото важи и за растојанието меѓу точката C и страната CD . Аналогно, и делот од L меѓу Y и C има должина поголема или еднаква на 99 . Должината на линијата меѓу X и Y е поголема или еднаква на 198 .