

Произведения последовательных натуральных чисел

Вадим Бугаенко, Константин Кохась, Ярослав Абрамов, Мария Илюхина

Версия 0.9

Условия задач

Мы будем решать следующую задачу:

Может ли произведение нескольких последовательных натуральных чисел быть некоторой степенью натурального числа

Иными словами, ставится вопрос разрешимости в целых положительных числах уравнения

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1) = y^m \quad (1)$$

при всевозможных $k \geq 2$ и $m \geq 2$.

Решение задачи для любого частного случая будет засчитываться, как продвижение. Рекомендуем начать со следующих случаев.

1 Некоторые частные случаи

- 1.1. $k = 2, m = 2$.
- 1.2. $k = 2, m$ — произвольное.
- 1.3. $k = 3, m = 2$.
- 1.4. $k = 3, m$ — произвольное.
- 1.5. $k = 4, m = 2$.
- 1.6. $k = m$.
- 1.7. $k = 8, m = 4$.
- 1.8. $k = 8, m = 2$.
- 1.9. $k = 4, m$ — произвольное.
- 1.10. $k = 5, m = 2$.

2 Близкие вопросы

- 2.1. Докажите, что при $m = 2$ и четном k уравнение не может иметь бесконечно много решений (x, y) .
- 2.2. Из пяти последовательных натуральных чисел выбирают четыре и перемножают. Может ли результат оказаться точным квадратом?
- 2.3. Докажите, что уравнение $x(x+d)(x+2d) = y^2$ имеет бесконечно много решений (x, y, d) в натуральных числах.
- 2.4. Докажите, что при фиксированном $k \neq 2, 4$ многочлен вида $x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1) + c$, где c — рациональное число, не является квадратом многочлена.

3 Удобные числа

Назовем число k *удобным*, если среди любых k последовательных натуральных чисел найдется хотя бы одно, взаимно простое с остальными.

При ссылке на наше основное уравнение (1) будем называть его уравнением (k, m) , если речь идет о произвольных k и m , или указывать конкретные значения k и m . Например, в самой первой задаче обсуждалось уравнение $(2, 2)$.

- 3.1. Докажите, что для удобных k при $m > k$ уравнение (k, m) не может иметь бесконечно много решений.
- 3.2. Докажите, что для каждого удобного числа k существует такое число $m_0(k)$, что при $m > m_0(k)$ уравнение (k, m) не имеет решений.
- 3.3. Докажите, что для удобных k уравнение (k, m) не имеет решений при $m \geq 2k$.
- 3.4. Докажите, что для удобных k уравнение (k, m) не имеет решений при $m \geq k + 2 \log_2 k$.
- 3.5. Докажите, что уравнение $(5, 7)$ не имеет решений.
- 3.6. Докажите, что все натуральные числа, не превосходящие 16, удобны.
- 3.7. Докажите, что 17 — неудобное число.
- 3.8. Докажите, что все натуральные числа, большие 17, неудобные.

4 Общие свойства решений уравнения

При решении задач вы можете пользоваться двумя следующими теоремами.

Теорема Чебышёва (постулат Бертрана). При $n > 5$ между n и $2n$ имеется не меньше двух простых чисел.

Теорема Сильвестра. При $n > k$ произведение $(n+1)(n+2)\dots(n+k)$ делится на хотя бы одно простое число $p > k$.

Для изучения свойств решений уравнения (k, m) запишем множители из левой части в виде

$$x + i = a_i z_i^m, \quad 0 \leq i \leq k-1,$$

где числа a_i не делятся ни на какую точную m -ю степень, т. е. все простые множители входят в разложение чисел a_i в степени меньше m .

- 4.1. Докажите, что для каждого решения уравнения (k, m) верно неравенство $x > k$.
- 4.2. Докажите, что для каждого решения уравнения (k, m) верно неравенство $x > k^m$.
- 4.3. Докажите, все простые множители чисел a_i меньше k .
- 4.4. Решите уравнение $(7, 2)$.
- 4.5. Решите уравнение $(6, 2)$.
- 4.6. Докажите, что если x — решение уравнения (k, m) , то равенство $(x + i_1) \dots (x + i_{m-1}) = (x + j_1) \dots (x + j_{m-1})$, где $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{m-1} \leq k-1$; $0 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{m-1} \leq k-1$ возможно лишь в случае, когда наборы индексов в левой и правой частях совпадают.
- 4.7. Докажите, все числа a_i различны.
- 4.8. Пусть $m = 3$. Докажите, все попарные произведения $a_i a_j$, $0 \leq i < j \leq k-1$, различны.
- 4.9. Пусть $m = 3$. Докажите, что частное вида $\frac{a_i a_j}{a_r a_s}$, где $0 \leq i < j \leq k-1$, $0 \leq r < s \leq k-1$, не может быть кубом рационального числа (не равного 1).
- 4.10. Пусть $m = 3$, $k = 75$. Докажите, что не менее двадцати чисел a_i содержат в своем разложении только простые множители, не превосходящие 10.
- 4.11. Докажите, что уравнение $(75, 3)$ не имеет решения.
- 4.12. Обозначим через $\pi(k)$ количество простых чисел, не превосходящих k . Докажите, что почти все числа a_i невелики в следующем смысле: можно выбрать $k - \pi(k)$ чисел a_i так, что их произведение будет делителем числа $k!$. (Вы можете ограничиться случаями $m = 2, 3$.)
- 4.13. Пусть $m = 2$, $B_n(k) = a_0 a_1 \dots a_{k-1}$. Докажите, что $B_x(k) > \left(\frac{4}{3}\right)^k k!$ при достаточно больших k .

Решения задач

Изучаемое уравнение вообще не имеет решений. Поэтому при разборе отдельных пунктов мы не приводим этот повторяющийся ответ “решений нет”, а сразу приступаем к доказательству.

1 Некоторые частные случаи

1.1. Следует из утверждения следующего пункта.

1.2. Числа x и $x + 1$ взаимно просты, и поэтому оба должны быть точными m -ми степенями, что, как нетрудно понять, невозможно.

1.3. Следует из утверждения следующего пункта.

1.4. Заметим, что числа $x + 1$ и $x(x + 2) = (x + 1)^2 - 1$ взаимно просты. Следовательно, каждое из них — точная m -я степень. Пусть $x + 1 = u^m$, тогда $x(x + 2) = (u^2)^m - 1 = v^m$. Последнее невозможно, так как разность между m -ми степенями натуральных чисел всегда больше 1.

1.5. Воспользуемся тождеством $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$.

1.6. Заметим, что $x < y < x + k - 1$. Тогда левая часть уравнения содержит множитель $y + 1$, который взаимно прост с правой частью.

1.7. Группируя сомножители на пары, равноотстоящие от краев, получаем, что

$$x(x + 1)(x + 2) \dots (x + 7) = (x^2 + 7x)(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12).$$

Полагая $a = x^2 + 7x$, приходим к уравнению

$$a(a + 6)(a + 10)(a + 12) = y^4. \quad (2)$$

Раскрывая скобки, нетрудно видеть, что при $a > 10$

$$(a + 6)^4 < a(a + 6)(a + 10)(a + 12) < (a + 7)^4$$

(впрочем, правое неравенство видно и без раскрытия скобок — это неравенство о средних).

1.8. Преобразуем произведение восьми последовательных чисел к виду (2). Заметим, что $a = x^2 + 7x$ — число четное, положим $a = 2b$, $y = 2y_1$ и сократим уравнение на 2, получим

$$b(b + 3)(b + 5)(b + 6) = y_1^2.$$

Непосредственно убеждаемся, что

$$(b^2 + 7b + 6)^2 < b(b + 3)(b + 5)(b + 6) < (b^2 + 7b + 7)^2.$$

В этом действительно несложно убедиться, поскольку после сокращений оба неравенства становятся квадратичными.

1.9. Эта задача предлагалась в журнале Квант в задачнике Кванта (задача М367).

Одно из чисел $(x + 1)$, $(x + 2)$ взаимно просто с остальными тремя. Разберем эти два случая.

В первом случае $x + 1 = u^m$,

$$x(x + 2)(x + 3) = (u^m - 1)(u^m + 1)(u^m + 2) = u^{3m} + 2u^{2m} - u^m - 2 = y_1^m.$$

Как нетрудно проверить, при $u \geq 2$, $m \geq 3$

$$u^3 < y_1 < u^3 + 1,$$

следовательно, целочисленных решений нет.

Во втором случае $x + 2 = u^m$,

$$x(x + 1)(x + 3) = (u^m - 2)(u^m - 1)(u^m + 1) = u^{3m} - 2u^{2m} - u^m + 2 = y_1^m.$$

И здесь целочисленных решений нет при $u \geq 2$, $m \geq 3$, поскольку

$$u^3 - 1 < y_1 < u^3.$$

Здесь правое неравенство совсем простое, а для доказательства левого неравенства заметим, что

$$\begin{aligned} (u^3)^m - (u^3 - 1)^m &= u^{3m-3} + u^{3m-6}(u^3 - 1) + u^{3m-9}(u^6 - 2u^3 + 1) + \dots + (u^3 - 1)^{m-1} \geq \\ &\geq 3u^{3m-3} - 3u^{3m-6} > 2u^{3m-3} + u^m > 2u^{3m-3} + u^m - 2. \end{aligned}$$

1.10. Заметим, что наибольший общий делитель любых двух из чисел x , $x + 1$, \dots , $x + 4$ не превосходит 4. Поэтому все крупные простые множители числа y должны входить в разложение чисел x , \dots , $x + 4$ в четных степенях. Следовательно, каждый множитель в левой части уравнения имеет вид n^2 , $2n^2$, $3n^2$ или $6n^2$. Так как в левой части уравнения 5 множителей, какие-то два множителя имеют один и тот же вид. Но разности между соседними квадратами, удвоенными квадратами и т. д. обычно больше 4, поэтому уравнение не имеет решений.

2 Близкие вопросы

2.1. Следующее рассуждение взято из [4]. Многочлен в правой части уравнения (1) обозначим для краткости через $f(x)$. Допустим, что при $m = 2$, $k = 2n$ уравнение (1) имеет бесконечно много решений (x_i, y_i) , где $x_i \rightarrow +\infty$ и $f(x_i) = y_i^2$. Заметим, что $f(x)$ не является квадратом многочлена, поскольку все его корни имеют кратность 1. Подберем тогда такой многочлен $a(x)$ степени n , что $\deg(f - a^2) \leq n - 1$. Пусть $r = f - a^2$, $a(x_i) = z_i$. Тогда $z_i \sim x_i^n$ при $i \rightarrow +\infty$ (читатель, не знакомый с теорией пределов, может читать эту фразу так: $z_i > 0.99x_i^n$ при больших i). Кроме того, при больших i $y_i^2 - z_i^2 = r(x_i) \neq 0$ и при этом $|r(x_i)| \leq \text{const} \cdot x_i^{n-1}$. Но с другой стороны, $|r(x_i)| = |y_i^2 - z_i^2| = (y_i + z_i)|y_i - z_i| \geq z_i \sim x_i^n$, что противоречит только что полученной оценке.

2.2. Ответ: да, может. $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 12^2$.

2.3. Пусть $x = kd$. Тогда $k(k+1)(k+2)d^3 = y^2$. Положим теперь $d = k(k+1)(k+2)$.

Вот другое решение с использованием Пифагоровых троек. Пусть $\bar{x} = x + d$. Тогда уравнение запишется в виде $\bar{x}^2(\bar{x}^2 - d^2) = y^2$. В качестве решения подойдут $d = 2ab(a^2 - b^2)$, $\bar{x} = (a^2 + b^2)^2$.

А можно просто воспользоваться однородностью: заметим, например, что $(1, 35, 24)$ — решение. Кроме того, если (x, y, d) — решение, то при каждом k тройка (k^2x, k^3y, k^2d) — тоже решение.

2.4. Мы приводим рассуждение из [4]. Обозначим для краткости $P_{k,c}(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1) + c$. Предположим, что $P_{k,c}(x) = a(x)^2$, $k = 2n$. Тогда

$$P_{k,c}(x+1) - P_{k,c}(x) = k(x+1)(x+2)\dots(x+k-1) = a(x+1)^2 - a(x)^2.$$

Следовательно,

$$(a(x+1) - a(x))(a(x+1) + a(x)) = k(x+1)(x+2)\dots(x+k-1).$$

Поскольку график многочлена $y = a(x+1)$ получается из графика $y = a(x)$ сдвигом на 1 влево, каждое из $n-1$ решения уравнения $a(x+1) = a(x)$ лежит между парой корней многочлена $a(x) + a(x+1)$ (который всего имеет n корней). Значит,

$$\begin{aligned} a(x+1) - a(x) &= n(x+2)(x+4)\dots(x+2n-2), \\ a(x+1) + a(x) &= 2(x+1)(x+3)\dots(x+2n-1). \end{aligned}$$

Складывая эти выражения, получаем

$$2a(x+1) = 2(x+1)(x+3)\dots(x+2n-1) + n(x+2)(x+4)\dots(x+2n-2).$$

А вычитая и подставив в результат $x+1$ вместо x , —

$$2a(x+1) = 2(x+2)(x+4)\dots(x+2n) - n(x+3)(x+5)\dots(x+2n-1).$$

Два полученных выражения для $2a(x+1)$ несовместны при $n > 2$. В этом можно убедиться, например, так. Подставим в эти равенства $x = 0$ и вычтем одно из другого. Мы получим равенство

$$(n+2)(1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)) = 3n(2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2)),$$

в котором при $n > 2$ правая часть делится на большую степень двойки, чем левая.

3 Удобные числа

3.1. Пусть число $x + i$ взаимно просто с остальными множителями левой части. Тогда $x + i = u^m$ и

$$(u^m - k + 1)(u^m - k + 2) \dots u^m \leq x(x + 1) \dots (x + k - 1) \leq u^m(u^m + 1) \dots (u^m + k - 1).$$

Проверим, что при больших u

$$(u^k - 1)^m < (u^m - k + 1)(u^m - k + 2) \dots u^m \leq u^m(u^m + 1) \dots (u^m + k - 1) < (u^k + 1)^m. \quad (3)$$

Если это так, то при больших u выполнено неравенство $u^k - 1 < y < u^k + 1$, а поскольку очевидно, что $y = u^k$ не является решением нашего уравнения, то отсюда следует, что при больших u уравнение не имеет решений. Таким образом, количество решений уравнения конечно.

Для проверки правого неравенства (3) заметим, что

$$(u^k + 1)^m > u^{km} + mu^{km-k}.$$

С другой стороны,

$$u^m(u^m + 1) \dots (u^m + k - 1) < u^{mk} + \frac{k(k-1)}{2}u^{km-m}$$

Значит, при $m > k$ и больших u мы имеем неравенство

$$u^m(u^m + 1) \dots (u^m + k - 1) < u^{mk} + \frac{k(k-1)}{2}u^{km-m} <^* u^{km} + mu^{km-k} < (u^k + 1)^m. \quad (4)$$

Для левого неравенства (3) аналогично получаем

$$(u^m - k + 1)(u^m - k + 2) \dots u^m - (u^k - 1)^m = mu^{km-k} - \frac{k(k-1)}{2}u^{km-m} + \dots$$

Здесь правая часть является многочленом по u , опущенные слагаемые имеют меньшую степень по u , а старший член $-mu^{km-k}$ — положителен. Значит, при больших u этот многочлен положителен, и мы имеем нужное неравенство.

3.2. Следует из результата следующей задачи.

3.3. Достаточно проверить, что при $m \geq 2k$ выполнено неравенство (3). Правое неравенство (3) очевидно, поскольку уже при $m \geq k + 1$ верно среднее неравенство (4), помеченное звездочкой.

Докажем левое неравенство (3). Так как

$$(u^m - k + 1)(u^m - k + 2) \dots u^m > (u^m - k + 1)^k,$$

то достаточно при $m \geq 2k$ доказать неравенство

$$(u^m - k + 1)^k > (u^k - 1)^m. \quad (5)$$

Мы докажем неравенство (5) индукцией по m . База, $m = 2k$

$$(u^{2k} - k + 1)^k > (u^k - 1)^{2k}.$$

Извлечем корень k -й степени и раскроем скобки, получим очевидное неравенство $2u^k > k$. Переход. Достаточно проверить неравенство

$$(u^m - k + 1)^k (u^k - 1) < (u^{m+1} - k + 1)^k.$$

Запишем его в виде

$$u^k - 1 < \left(\frac{u^{m+1} - k + 1}{u^m - k + 1} \right)^k.$$

Это неравенство очевидно, поскольку дробь, написанная в скобках в правой части, не меньше u .

3.4. Пусть число $z = x + i$ взаимно просто с остальными множителями правой части уравнения. Тогда $z = x + i = u^m$ и

$$(u^m - k + 1)^k < (z - k + 1) \dots (z - 1)z \leq x(x + 1) \dots (x + k - 1) \leq z(z + 1) \dots (z + k - 1) < (u^m + k - 1)^k.$$

Докажем, что при $m \geq k + 2 \log_2 k$ и $u \geq 2$ выполнены неравенства

$$(u^m + k - 1)^k < (u^k + 1)^m \quad (6)$$

$$(u^m - k + 1)^k > (u^k - 1)^m \quad (7)$$

Доказательство неравенства (6). Запишем частное правой и левой частей и воспользуемся неравенством Бернулли

$$\frac{(u^k + 1)^m}{u^{km}} \cdot \frac{u^{km}}{(u^m + k - 1)^k} = \left(1 + \frac{1}{u^k}\right)^m \left(1 - \frac{k-1}{u^m + k - 1}\right)^k \geq 1 + \frac{m}{u^k} - \frac{k(k-1)}{u^m + k - 1} - \frac{mk(k-1)}{u^k(u^m + k - 1)}.$$

Нам нужно проверить, что последнее выражение больше 1. Для этого достаточно установить, что сумма трех последних слагаемых положительна, т. е.

$$\frac{m}{u^k} > \frac{k(k-1)}{u^m + k - 1} + \frac{mk(k-1)}{u^k(u^m + k - 1)}.$$

Домножим на знаменатели и перенесем $m(k-1)$ в правую часть:

$$mu^m > k(k-1)u^k + (k-1)^2m.$$

Так как $m > k + 2 \log_2 k \geq k + 2 \log_u k$, то $u^m > k^2 u^k$. Заменим тогда выражение u^m в левой части на $k^2 u^k$, а множители $k-1$ в правой части — на k , от этих замен неравенство усилится:

$$mk^2 u^k > k^2 u^k + k^2 m.$$

Мы пришли к верному неравенству $ab > a + b$.

Доказательство неравенства (7). Рассмотрим частное $\frac{(u^m - k + 1)^k}{(u^k - 1)^m} = \frac{(u^m - k + 1)^k}{u^{km}} \frac{u^{km}}{(u^k - 1)^m}$ и докажем, что оно больше 1. В самом деле, в силу неравенства Бернулли

$$\left(1 - \frac{k-1}{u^m}\right)^k \left(\frac{u^k}{u^k - 1}\right)^m > \left(1 + \frac{m}{u^k - 1}\right) \left(1 - \frac{k(k-1)}{u^m}\right).$$

Кроме того, $1 - \frac{k(k-1)}{u^m} > 1 - \frac{k^2}{u^m}$. Значит, достаточно доказать, что

$$1 < \left(1 + \frac{m}{u^k - 1}\right) \left(1 - \frac{k^2}{u^m}\right) = 1 + \frac{m}{u^k - 1} - \frac{k^2}{u^m} - \frac{mk^2}{u^m(u^k - 1)} = 1 + \frac{mu^m - k^2 u^k + k^2 - mk^2}{u^m(u^k - 1)}.$$

Но ведь $u^m \geq k^2 u^k$, значит,

$$mu^m - k^2 u^k + k^2 - mk^2 > mk^2 u^k - k^2 u^k + k^2 - mk^2 = k^2(m-1)(u^k - 1) > 0,$$

что и требовалось.

3.5. Неравенство $7 \geq 5 + 2 \log_2 5$ неверно, так что мы не можем сослаться на результат предыдущей задачи. Правда, в решении предыдущей задачи мы пользовались лишь неравенством $m \geq k + 2 \log_u k$, так что такая ссылка все же возможна, если дополнить ее перебором малых значений x . Но мы дадим прямое решение.

Как и в предыдущих задачах, достаточно доказать два неравенства

$$u^7(u^7 + 1)(u^7 + 2)(u^7 + 3)(u^7 + 4) < (u^5 + 1)^7, \quad (8)$$

$$u^7(u^7 - 1)(u^7 - 2)(u^7 - 3)(u^7 - 4) > (u^5 - 1)^7. \quad (9)$$

Для доказательства неравенства (8) раскроем скобки

$$\begin{aligned} & u^{35} + 10u^{28} + 35u^{21} + 50u^{14} + 24u^7 < \\ < u^{35} + 7u^{30} + 21u^{25} + 35u^{20} + 35u^{15} + 21u^{10} + 7u^5 + 1. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при $u \geq 2$ каждое слагаемое верхней строки меньше расположенного под ним слагаемого нижней строки.

Для доказательства неравенства (9) тоже раскроем скобки

$$u^{35} - 10u^{28} + 35u^{21} - 50u^{14} + 24u^7 > u^{35} - 7u^{30} + 21u^{25} - 35u^{20} + 35u^{15} - 21u^{10} + 7u^5 - 1.$$

Соберем в каждой части слагаемые одного знака.

$$\begin{aligned} & 6u^{30} + u^{30} + 35u^{21} + 35u^{20} + 24u^7 + 21u^{10} + 1 > \\ > 10u^{28} + 21u^{25} + 35u^{15} + 50u^{14} + 7u^5 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при $u \geq 2$ каждое слагаемое нижней строки меньше расположенного над ним слагаемого верхней строки.

3.6. Утверждение этой и двух следующих задач мы почерпнули в [1].

3.7. В качестве примера набора из 17 чисел, каждое из которых имеет общий делитель с каждым из остальных подходит набор, в котором наименьшее число равно $2184 + 30\,030n$.

3.8.

4 Общие свойства решений уравнения

4.1. При $x \leq k$ все натуральные числа, лежащие между $x+k$ и $\frac{1}{2}(x+k)$, входят как сомножители в левую часть нашего уравнения. Согласно постулату Бертрана, среди этих чисел встречается простое число p , и очевидно, что p входит в произведение в левой части в первой степени. Поэтому при $x \leq k$ левая часть не может быть никакой точной степенью.

4.2. По теореме Сильвестра некоторый множитель $x+i$ из левой части уравнения имеет простой делитель $p > k$. Поскольку в левой части лишь $x+i$ может делиться на p , то чтобы все произведение оказалось точной степенью, необходимо, чтобы $x+i$ делилось хотя бы на p^m . Тогда $x+i \geq p^m \geq (k+1)^m$. Если при этом $x \leq k^p$, то $k^p + i \geq x+i \geq (k+1)^p$. Откуда $i > pk$, что неверно.

4.3. Если бы число a_i имело бы простой делитель $p > k$, то среди чисел $x, x+1, \dots, x+k-1$ только $x+i$ делилось бы на p . Но тогда p входит в разложение $x+i$ на простые множители в степени, кратной m , и, поскольку $x+i = a_i z_i^m$, множитель p входит только в разложение z_i и не входит в разложение a_i . Противоречие.

4.4. Заметим, что если мы найдем среди чисел a_i не менее 5 чисел, в разложение которых входят только простые множители 2 и 3, то, рассуждая дальше как в задаче 1.10, мы сразу получим, что уравнение не имеет решений. Но такие 5 чисел совсем нетрудно найти: всего чисел у нас 7, они могут содержать только простые делители 2, 3, 5 и при этом количество чисел a_i , делящихся на 5, — не более двух!

4.5. Как и в предыдущей задаче, попробуем найти среди чисел a_i не менее 5 чисел, в разложение которых входят только простые множители 2 и 3. Числа a_i могут содержать только множители 2, 3, 5 — причем каждый множитель может присутствовать лишь в степени 0 или 1. Произведение чисел a_i должно быть точным квадратом. Среди исходных последовательных натуральных чисел не более двух делятся на 5, поэтому среди чисел a_i тоже не более двух чисел, делящихся на 5. Нам достаточно рассмотреть только случай, когда этих чисел ровно 2. Очевидно, это возможно, лишь если a_0 и a_5 делятся на 5.

Сделаем на всякий случай очевидное замечание. Среди трех последовательных натуральных чисел ровно одно делится на 3. Но если эта тройка входит в четной степени, то среди соответствующих чисел a_i не будет ни одного, делящегося на 3.

Рассмотрим 4 числа $x+1, x+2, x+3, x+4$. Как мы знаем из задачи 1.5, их произведение не может быть точным квадратом. Следовательно, суммарная степень вхождения в числа a_1, a_2, a_3, a_4 множителей 2 или суммарная степень вхождения в эти же числа a_i множителей 3 должна быть нечетна. Это может быть лишь в двух (невыключающих) случаях:

1) среди чисел a_1, a_2, a_3, a_4 ровно одно делится на 2;

2) среди чисел a_1, a_2, a_3, a_4 ровно одно делится на 3.

Заметим еще, что количество чисел a_i , делящихся на 2 (и, аналогично, на 3), не превосходит 2. Тогда, как нетрудно видеть, в каждом из случаев среди чисел $x+1, x+2, x+3, x+4$ обязательно найдутся два числа вида t^2 , или два числа вида $2t^2$, два числа вида $3t^2$, чего не может быть.

4.6. Это утверждение — часть леммы 1 из [3]. Сократим равные множители. Так как $\text{НОД}(n+i, n+j) < k$ и при этом $n > k^m$, получается, что ни одна из скобок в левой части не делит произведение в правой части, поэтому равенство невозможно.

4.7. Пусть $a_i = a_j$, где $0 \leq j < i < k+1$. Так как $n+i = a_i z_i^m > n+j = a_j z_j^m$, то $z_i \geq z_j + 1$. Следовательно,

$$k > a_j z_i^m - a_j z_j^m = a_j ((z_j + 1)^m - z_j^m) > a_j m z_j^{m-1} \geq a_j^{(m-1)/m} z_j^{m-1} = (a_j z_j^m)^{(m-1)/m} = (x+j)^{(m-1)/m} > x^{1/m},$$

что противоречит утверждению задачи 4.2.

4.8. Похоже на 4.7. Следует из утверждения следующей задачи. Достаточно в ее решении всюду полагать $u = v = 1$.

4.9. Это лемма 1 из [3]. Допустим, что

$$a_{i_1} a_{i_2} = a_{j_1} a_{j_2} t^3.$$

Проверим, что тогда $t = 1$ и наборы индексов в левой и правой частях совпадают. Не умаляя общности, можно считать, что $(x + i_1)(x + i_2) > (x + j_1)(x + j_2)$ (равенство этих выражений невозможно в силу утверждения задачи 4.6).

Пусть $t = u/v$ (несократимая запись). Тогда $a_{i_1} a_{i_2}/u^3 = a_{j_1} a_{j_2}/v^3$ и в силу того, что u и v взаимно просты, обе части равенства представляют собой целое число. Обозначим $A = a_{i_1} a_{i_2}/u^3 = a_{j_1} a_{j_2}/v^3$.

По определению чисел a_i имеем $x + i = a_i z_i^3$, и тогда

$$\begin{aligned} (x + i_1)(x + i_2) &= a_{i_1} a_{i_2} \cdot \frac{s^3}{u^3}, \\ (x + j_1)(x + j_2) &= a_{j_1} a_{j_2} \cdot \frac{r^3}{v^3}, \end{aligned}$$

где $s = uz_{i_1} z_{i_2}$, $r = vz_{j_1} z_{j_2}$. Тогда $As^3 > Ar^3$ и, значит, $s \geq r + 1$. Таким образом,

$$(x + i_1)(x + i_2) - (x + j_1)(x + j_2) \geq A((r + 1)^3 - r^3) > 3Ar^2.$$

Заметим, что $Ar^3 = (x + j_1)(x + j_2) > x^2$, и тогда последнее неравенство может быть переписано так:

$$(x + i_1)(x + i_2) - (x + j_1)(x + j_2) \geq 3A \cdot \left(\frac{x^2}{A}\right)^{2/3} \geq 3x^{4/3}.$$

С другой стороны,

$$(x + i_1)(x + i_2) - (x + j_1)(x + j_2) < (x + k)^2 - x^2 < 3kx.$$

Полученные оценки противоречат друг другу, так как из задачи 4.2 мы знаем, что $x > k^3$, и следовательно, $3kx < 3x^{4/3}$.

4.10. Нам нужно найти двадцать чисел a_i , которые содержат только простые множители 2, 3, 5, 7.

Мы знаем, что числа a_i могут делиться только на простые множители, не превосходящие 75, т. е. на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73. Поскольку числа a_i являются делителями 75 последовательных натуральных чисел, то для каждого простого числа из диапазона [41; 73] (в этом отрезке 9 простых чисел) лишь не более двух из чисел a_i делятся на это простое число; а для каждого простого числа из диапазона [29; 37] (3 простых числа) лишь не более трех из чисел a_i делятся на это простое число. Далее, не более четырех из чисел a_i делятся на 23; не более четырех — на 19; не более пяти — на 17; не более шести — на 13 и не более семи — на 11. Итого мы насчитали не более

$$18 + 9 + 8 + 5 + 6 + 7 = 53$$

чисел. Значит, осталось не менее 22 чисел. Эти числа могут иметь только множители 2, 3, 5, 7.

4.11. Рассмотрим только те числа a_i , которые содержат только простые множители 2, 3, 5, 7. По утверждению предыдущей задачи, таких чисел не меньше 20, но нам, впрочем, достаточно будет десяти из них. Пользуясь этими десятью числами, мы можем составить $90 = 10 \cdot 9$ различных частных вида a_i/a_j .

С другой стороны, по утверждению задачи 4.9 частное двух произведений вида $a_i a_j$ (и, в том числе, частное вида a_i/a_j) не может быть кубом рационального числа. Но тогда, с точностью до отличия на множитель-куб существует не более $3^4 = 81$ классов значений для частных выбранных нами десяти чисел (каждый множитель 2, 3, 5, 7 может входить в такое частное в степени $0 + 3s$, $1 + 3s$, $2 + 3s$). Таким образом, в какой-то класс попадут два частных, т. е. будет выполнено соотношение

$$\frac{a_i}{a_j} = \frac{a_u}{a_v} \cdot t^3,$$

запрещенное утверждением задачи 4.9.

4.12. Это изящное рассуждение мы целиком взяли из статьи [3].

Для каждого простого числа $p_0 < k - 1$ выберем то число a_i , для которого $x + i$ делится на p_0 в максимальной степени. Тогда для всех остальных j число $x + j$ делится на ту же степень числа p , на которую делится число $(x + i) - (x + j) = j - i$. Таким образом, если $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_d}$ — это список всех НЕвыбранных чисел

(тогда здесь $d \geq k - \pi(k)$), и p_0^a — максимальная степень p_0 , на которую делится произведение $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_d}$, то p^a делит также произведение $(k-i)!(i-1)!$, а значит, и $(k-1)!$ (поскольку $\frac{(k-1)!}{(k-i)!(i-1)!}$ — целое число). Таким образом, произведение всех невыбранных чисел делит $(k-1)!$.

4.13. Это рассуждение Эрдеша мы цитируем по [2].

Поскольку числа a_i различны и свободны от квадратов, $B_x(k) > B'(k)$, где $B'(k)$ — произведение первых k чисел, свободных от квадратов. Достаточно доказать, что $B'(k) > (4/3)^k k!$ при $k \geq 24$.

Докажем это по индукции. База, $k = 24$. Проверяется непосредственно:

$$\frac{26 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 37}{4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 24} > \left(\frac{4}{3}\right)^{24}.$$

Индукционный переход. При $r \geq 9$ количество свободных от квадратов чисел, не превосходящих r , не превосходит $r - \left[\frac{r}{4}\right] - 1 < \frac{3}{4}r$. Значит, при $n \geq 7$ n -е свободное от квадратов число больше, чем $\frac{4}{3}n$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Флейшман Д.* Китайская теорема об остатках и гипотеза Ченцова // Квант. 1997. № 3.
- [2] *Сендеров В.* Об одной замечательной теореме Эрдеша // Квант. 2008. В печати.
- [3] *Erdős P., Selfridge J.L.* The product of consecutive integers is never a power // Illinois Math. J. 1975. Vol. 19. P. 292–301.
- [4] *Poorten A. van der, Woeginger G.* Squares from products of consecutive integers // Amer. Math. Monthly. 2002. Vol. 109. № 5. P. 459–461.

Products of consecutive Integers

Vadim Bugaenko, Konstantin Kokhas, Yaroslav Abramov, Maria Ilyukhina

8 августа 2008 г.

Problems

We shall consider the following problem:

Could a product of some consecutive integers be a power of an integer?

In other words we ask whether the equation

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1) = y^m \tag{1}$$

has a solution in positive integers (for each $k \geq 2$ and $m \geq 2$).

A solution of the problem for any partial case will be accepted as a progression. We recommend to consider the following cases first.

1 *Some partial cases*

1.1. $k = 2, m = 2$.

1.2. $k = 2, m$ is arbitrary.

1.3. $k = 3, m = 2$.

1.4. $k = 3, m$ is arbitrary.

1.5. $k = 4, m = 2$.

1.6. $k = m$.

1.7. $k = 8, m = 4$.

1.8. $k = 8, m = 2$.

1.9. $k = 4, m$ is arbitrary.

1.10. $k = 5, m = 2$.

2 *Variations of the question*

2.1. Prove that for $m = 2$ and even k the equation does not have infinitely many solutions (x, y) .

2.2. We take 5 consecutive integers, choose 4 of them and multiply. Is it possible the result to be an exact square?

2.3. Prove that the equation $x(x+d)(x+2d) = y^2$ has infinitely many solutions (x, y, d) in nonnegative integers.

2.4. Prove that for every $k \neq 2, 4$ a polynomial of a form $x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1) + c$, where c is a rational number, is not a square of a polynomial.

3 Convenient numbers

We call a number k *convenient* if among each k consecutive positive integers there is at least one which is relatively prime to the others.

We shall refer to our main equation (1) by the notation (k, m) . For example, in the very first problem we spoke about the equation (2, 2).

- 3.1. Prove that the equation (k, m) could not have infinitely many solutions for convenient k and $m > k$.
- 3.2. Prove that for each convenient k there is a number $m_0(k)$, such that for $m > m_0(k)$ the equation (k, m) has no solutions.
- 3.3. Prove that the equation (k, m) has no solutions for convenient k and $m \geq 2k$.
- 3.4. Prove that the equation (k, m) has no solutions for convenient k and $m \geq k + 2 \log_2 k$.
- 3.5. Prove that the equation (5, 7) has no solutions.
- 3.6. Prove that all positive integers less than or equal to 16 are convenient.
- 3.7. Prove that 17 is not convenient.
- 3.8. Prove that all positive integers greater than 17 are not convenient.

4 Common properties of solutions

You may apply the following two theorems in your solutions.

Tchebyshev theorem (Bertrand postulate). There are at least two primes between integers n and $2n$ if $n > 5$.

Sylvester theorem. There is a prime $p > k$ that divides $(n+1)(n+2)\dots(n+k)$ if $n > k$.

Let us write the factors from left hand side of the equation (k, m) in form

$$x + i = a_i z_i^m, \quad 0 \leq i \leq k - 1,$$

where integers a_i are free of m -th powers, i.e. the power of each prime factor of a_i is less than m .

- 4.1. Prove that $x > k$ for any solution of the equation (k, m) .
- 4.2. Prove that $x > k^m$ for any solution of the equation (k, m) .
- 4.3. Prove that all prime factors of integers a_i are less than k .
- 4.4. Solve the equation (7, 2).
- 4.5. Solve the equation (6, 2).
- 4.6. Let x be a solution of the equation (k, m) . Prove that the equality

$$(x + i_1) \dots (x + i_{m-1}) = (x + j_1) \dots (x + j_{m-1}), \quad \text{where } 0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{m-1} \leq k - 1; 0 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{m-1} \leq k - 1$$
 is possible only if the sets of indices coincide.
- 4.7. Prove that all the integers a_i are different.
- 4.8. Let $m = 3$. Prove that all the pairwise products $a_i a_j$, $0 \leq i \leq j \leq k - 1$, are different.
- 4.9. Let $m = 3$. Prove that the fractions of the form $\frac{a_i a_j}{a_r a_s}$, where $0 \leq i \leq j \leq k - 1$, $0 \leq r \leq s \leq k - 1$, are not equal to the cube of rational number (excluding 1).
- 4.10. Let $m = 3$, $k = 75$. Prove that at least 20 integers a_i have no prime factors greater than 10.
- 4.11. Prove that the equation (75, 3) has no solutions.
- 4.12. Denote by $\pi(k)$ the number of primes which are less or equal to k . Prove that almost all integers a_i are "small" in the following sense: we can choose $k - \pi(k)$ of them, such that the product of chosen numbers divides $k!$. (You may consider the cases $m = 2, 3$ only.)
- 4.13. Let $m = 2$, $B_x(k) = a_0 a_1 \dots a_{k-1}$. Prove that $B_x(k) > \left(\frac{4}{3}\right)^k k!$ for an arbitrary large k .

Solutions

The equation under consideration has no solutions at all. So the answer “There are no solutions” will not be repeated in each solution.

1 *Some partial cases*

1.1. Follows from the next problem.

1.2. Numbers x and $x + 1$ are relatively prime, thus both must be perfect m -th power. However this is impossible.

1.3. Follows from the next problem.

1.4. Let us denote that numbers $x + 1$ and $x(x + 2) = (x + 1)^2 - 1$ are relatively prime. So each of them is a perfect m -th power. Let $x + 1 = u^m$, then $x(x + 2) = (u^2)^m - 1 = v^m$. This is impossible because two perfect m -th powers differ by more than 1.

1.5. Let us apply an identity $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$.

1.6. Note that $x < y < x + k - 1$. Then the left hand side of the equation contains a factor $y + 1$, which is relatively prime with the right hand side.

1.7. Let us multiply factors pairwise (first with last, second with last but one etc.). We get

$$x(x + 1)(x + 2) \dots (x + 7) = (x^2 + 7x)(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12).$$

Let $a = x^2 + 7x$, we obtain the equation

$$a(a + 6)(a + 10)(a + 12) = y^4. \quad (2)$$

Direct calculation ensures us that if $a > 10$

$$(a + 6)^4 < a(a + 6)(a + 10)(a + 12) < (a + 7)^4$$

(right inequality also follows from Cauchy inequality).

1.8. Let us transform the product of eight consecutive integers to the form (2). Note that $a = x^2 + 7x$ is even number, set $a = 2b$, $y = 2y_1$ and cancel both sides of the equation by 2. We obtain

$$b(b + 3)(b + 5)(b + 6) = y_1^2.$$

Direct calculations ensure us that

$$(b^2 + 7b + 6)^2 < b(b + 3)(b + 5)(b + 6) < (b^2 + 7b + 7)^2.$$

It is easy to check because these inequalities are quadratic.

1.9.

1.10. Remark that greatest common divisor of each pair of these numbers is not more than 4. Thus all large prime factors of y must be contained in the decomposition of $x, \dots, x + 4$ in even powers. Hence each factor in the left hand side of the equation must be of one of the forms $n^2, 2n^2, 3n^2$ or $6n^2$. Since left hand side of the equation contains five factors, some two of them have the same form. But the difference between two numbers of the same form could not be small, hence the equation has no solution.

2 *Part 2*

2.1. This solution is from [4]. Denote by $f(x)$ the polynomial in the right hand side of equation (1).

Assume that for $m = 2$, $k = 2n$ equation (1) has infinitely many solutions (x_i, y_i) , where $x_i \rightarrow +\infty$ and $f(x_i) = y_i^2$. Remark that $f(x)$ is not a square of a polynomial, because all its roots have multiplicities 1. Find a polynomial $a(x)$ of degree n such that $\deg(f - a^2) \leq n - 1$. Let $r = f - a^2$, $a(x_i) = z_i$. Then $z_i \sim x_i^n$ for $i \rightarrow +\infty$ (the reader not familiar with the notion of limit could read this sentence as: $z_i > 0.99x_i^n$ for large i).

Moreover $y_i^2 - z_i^2 = r(x_i) \neq 0$ for large i and at the same time $|r(x_i)| \leq \text{const} \cdot x_i^{n-1}$. But on the other hand $|r(x_i)| = |y_i^2 - z_i^2| = (y_i + z_i)|y_i - z_i| \geq z_i \sim x_i^n$, which contradicts to the estimation just obtained.

2.2. Answer: Yes, it is possible. $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = 12^2$.

2.3. First solution. Let $x = kd$. Then $k(k+1)(k+2)d^3 = y^2$. Put $d = k(k+1)(k+2)$.

Second solution. It uses Pythagorean triples. Let $\bar{x} = x + d$. Then the equation will be written in a form $\bar{x}^2(\bar{x}^2 - d^2) = y^2$. We could take $d = 2ab(a^2 - b^2)$, $\bar{x} = (a^2 + b^2)^2$ as a solution.

Third solution. Note that if (x, y, d) — a solution then for each k the triple (k^2x, k^3y, k^2d) is also a solution. So to solve the problem it is enough to find one partial solution, for example $(1, 35, 24)$.

2.4. The proof is taken from [4]. Let us denote $P_{k,c}(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1) + c$. Suppose that $P_{k,c}(x) = a(x)^2$, $k = 2n$. Then

$$P_{k,c}(x+1) - P_{k,c}(x) = k(x+1)(x+2)\dots(x+k-1) = a(x+1)^2 - a(x)^2.$$

Hence

$$(a(x+1) - a(x))(a(x+1) + a(x)) = k(x+1)(x+2)\dots(x+k-1).$$

Since the graph of the polynomial $y = a(x+1)$ could be obtained by translation to the left by 1 from the graph $y = a(x)$, each of $n-1$ solutions of the equation $a(x+1) = a(x)$ lies between a pair of roots of the polynomial $a(x) + a(x+1)$ (which have n roots). Hence

$$\begin{aligned} a(x+1) - a(x) &= n(x+2)(x+4)\dots(x+2n-2), \\ a(x+1) + a(x) &= 2(x+1)(x+3)\dots(x+2n-1). \end{aligned}$$

Adding these expressions we get

$$2a(x+1) = 2(x+1)(x+3)\dots(x+2n-1) + n(x+2)(x+4)\dots(x+2n-2).$$

And substituting the same changing x by $x+1$ we obtain

$$2a(x+1) = 2(x+2)(x+4)\dots(x+2n) - n(x+3)(x+5)\dots(x+2n-1).$$

Two obtained expressions contradict to each other. To be ensure this put $x = 0$ to both and subtract one from another. We get

$$(n+2)(1 \cdot 3 \cdots (2n-1)) = 3n(2 \cdot 4 \cdots (2n-2)),$$

Here the right hand contains two as a factor with more power than left hand side.

3 Convenient numbers

3.1. Let an integer $x+i$ be relatively prime with all other factors from the left hand side. Then $x+i = u^m$ and

$$(u^m - k + 1)(u^m - k + 2)\dots u^m \leq x(x+1)\dots(x+k-1) \leq u^m(u^m + 1)\dots(u^m + k - 1).$$

Let us check that if u is large

$$(u^k - 1)^m < (u^m - k + 1)(u^m - k + 2)\dots u^m \leq u^m(u^m + 1)\dots(u^m + k - 1) < (u^k + 1)^m. \quad (3)$$

If this is true then for large u the inequality $u^k - 1 < y < u^k + 1$ fulfils. Obviously that $y = u^k$ is not a solution of the equation, hence the inequality has no solutions if u is large. Thus the equation has only finitely many solutions.

For checking left inequality (3) note than

$$(u^k + 1)^m > u^{km} + mu^{km-k}.$$

On the other hand

$$u^m(u^m + 1)\dots(u^m + k - 1) < u^{mk} + \frac{k(k-1)}{2}u^{km-m}$$

Hence if $m > k$ and u is large we have inequality

$$u^m(u^m + 1)\dots(u^m + k - 1) < u^{mk} + \frac{k(k-1)}{2}u^{km-m} <^* u^{km} + mu^{km-k} < (u^k + 1)^m. \quad (4)$$

Similarly for left inequality (3) we obtain

$$(u^m - k + 1)(u^m - k + 2) \dots u^m - (u^k - 1)^m = mu^{km-k} - \frac{k(k-1)}{2}u^{km-m} + \dots$$

Here the right hand side is a polynomial of u , missed summands have less degree of u , and leading term mu^{km-k} is positive. Hence this polynomial is positive if u is large. So the inequality we need is obtained.

3.2. Follows from the next point.

3.3. It is enough to prove that if $m \geq 2k$ the inequality (3) holds. Right inequality (3) is obvious because even if $m \geq k + 1$ the medium inequality (4) mark by asterisk is true.

Let us prove the left one (3). Since

$$(u^m - k + 1)(u^m - k + 2) \dots u^m > (u^m - k + 1)^k,$$

then it is enough to prove

$$(u^m - k + 1)^k > (u^k - 1)^m. \tag{5}$$

for $m \geq 2k$.

We would prove the inequality (5) by induction by m . Base, $m = 2k$

$$(u^{2k} - k + 1)^k > (u^k - 1)^{2k}.$$

Taking the root of degree k -th and expanding we get the obvious inequality $2u^k > k$. Step of induction. It is enough to check

$$(u^m - k + 1)^k(u^k - 1) < (u^{m+1} - k + 1)^k.$$

Let us write this inequality in the form

$$u^k - 1 < \left(\frac{u^{m+1} - k + 1}{u^m - k + 1} \right)^k.$$

This inequality is obvious because the fraction in parenthesis in the right hand side is not less than u

This inequality is obvious since the fraction in parenthesis in the right hand side is not less than u .

3.4. Let an integer $z = x + i$ be relatively prime with all other factors of the right hand side of the equations. Then $z = x + i = u^m$ and

$$(u^m - k + 1)^k < (z - k + 1) \dots (z - 1)z \leq x(x + 1) \dots (x + k - 1) \leq z(z + 1) \dots (z + k - 1) < (u^m + k - 1)^k.$$

Let us prove that for $m \geq k + 2 \log_2 k$ and $u \geq 2$ we have inequalities

$$(u^m + k - 1)^k < (u^k + 1)^m \tag{6}$$

$$(u^m - k + 1)^k > (u^k - 1)^m \tag{7}$$

Proof of inequality (6). Let us apply Bernoulli inequality for the quotient of right and left hand sides

$$\frac{(u^k + 1)^m}{u^{km}} \cdot \frac{u^{km}}{(u^m + k - 1)^k} = \left(1 + \frac{1}{u^k} \right)^m \left(1 - \frac{k - 1}{u^m + k - 1} \right)^k \geq 1 + \frac{m}{u^k} - \frac{k(k - 1)}{u^m + k - 1} - \frac{mk(k - 1)}{u^k(u^m + k - 1)}.$$

We want prove that the last expression is greater than 1. It is sufficient to establish that the sum of the three last expressions is positive, i. e.

$$\frac{m}{u^k} > \frac{k(k - 1)}{u^m + k - 1} + \frac{mk(k - 1)}{u^k(u^m + k - 1)}.$$

Multiply by the denominators

$$mu^m > k(k - 1)u^k + (k - 1)^2m.$$

Since $m > k + 2 \log_2 k \geq k + 2 \log_u k$, then $u^m > k^2 u^k$. Replacement of the expression u^m at the left hand side by $k^2 u^k$, and factors $k - 1$ at the right hand side by k makes the inequality stronger:

$$mk^2 u^k > k^2 u^k + k^2 m.$$

We obtained to the correct inequality $ab > a + b$.

Proof of inequality (7). Consider the quotient $\frac{(u^m-k+1)^k}{(u^k-1)^m} = \frac{(u^m-k+1)^k}{u^{km}} \frac{u^{km}}{(u^k-1)^m}$ and prove that it is greater than 1. Indeed due to Bernoulli inequality we have

$$\left(1 - \frac{k-1}{u^m}\right)^k \left(\frac{u^k}{u^k-1}\right)^m > \left(1 + \frac{m}{u^k-1}\right) \left(1 - \frac{k(k-1)}{u^m}\right).$$

Besides $1 - \frac{k(k-1)}{u^m} > 1 - \frac{k^2}{u^m}$. Hence it is sufficient to prove that

$$1 < \left(1 + \frac{m}{u^k-1}\right) \left(1 - \frac{k^2}{u^m}\right) = 1 + \frac{m}{u^k-1} - \frac{k^2}{u^m} - \frac{mk^2}{u^m(u^k-1)} = 1 + \frac{mu^m - k^2u^k + k^2 - mk^2}{u^m(u^k-1)}.$$

But $u^m \geq k^2u^k$, therefore,

$$mu^m - k^2u^k + k^2 - mk^2 > mk^2u^k - k^2u^k + k^2 - mk^2 = k^2(m-1)(u^k-1) > 0,$$

QED.

3.5. Like in previous problems it is sufficient to prove two inequalities

$$u^7(u^7+1)(u^7+2)(u^7+3)(u^7+4) < (u^5+1)^7, \tag{8}$$

$$u^7(u^7-1)(u^7-2)(u^7-3)(u^7-4) > (u^5-1)^7. \tag{9}$$

To prove (8) expand parenthesis

$$\begin{aligned} & u^{35} + 10u^{28} + 35u^{21} + 50u^{14} + 24u^7 < \\ < u^{35} + 7u^{30} + 21u^{25} + 35u^{20} + 35u^{15} + 21u^{10} + 7u^5 + 1. \end{aligned}$$

We see that if $u \geq 2$ then each summand of upper row less than corresponding one of the lower row.

To prove (9) expand parenthesis

$$u^{35} - 10u^{28} + 35u^{21} - 50u^{14} + 24u^7 > u^{35} - 7u^{30} + 21u^{25} - 35u^{20} + 35u^{15} - 21u^{10} + 7u^5 - 1.$$

Collect together summands of the same sign.

$$\begin{aligned} & 6u^{30} + u^{30} + 35u^{21} + 35u^{20} + 24u^7 + 21u^{10} + 1 > \\ > 10u^{28} + 21u^{25} + 35u^{15} + 50u^{14} + 7u^5 \end{aligned}$$

We see that if $u \geq 2$ then each summand of lower row less than corresponding one of the upper row.

3.6. This problem and next two ones are taken from [1].

3.7. As an example one can take a set of 17 integers starting from 2184.

3.8.

4 Общие свойства решений уравнения

4.1. If $x \leq k$ all integers between $x+k$ and $\frac{1}{2}(x+k)$ are factors of the left hand side of the equation. According to Bertrand postulate one of them is a prime number p . Obviously that the left hand side is not divisible by p^2 . Therefore it could not be an m -th power.

4.2. According to Sylvester theorem there is a factor $x+i$ that is divisible by a prime $p > k$. Since other factors at the left hand side are not divisible by p the product could be an m -th power only if $x+i$ is divisible by p^m . Then $x+i \geq p^m \geq (k+1)^m$. If at the same time $x \leq k^p$, then $k^p+i \geq x+i \geq (k+1)^p$. Hence $i > pk$, which is wrong.

4.3. If a number a_i has a prime divisor $p > k$, then other integers among $x, x+1, \dots, x+k-1$ are not divisible by p . Then $x+i$ is divisible by p^{dm} . Since $x+i = a_i z_i^m$, then p is relatively prime with a_i . We got a contradiction.

4.4. Note, if we find at least 5 integers a_i which are divisible by primes 2 and 3 only, then we deduce that the equation has no solutions similarly to the problem 1.10. Such 5 integers really exist, because we have 7 integers a_i with divisors 2, 3 and 5 only, and at most two of them are divisible by 5.

4.5. Similarly to the previous problem we would find 5 integers divisible by 2 and 3 only. The integers a_i have prime factors 2, 3, and 5 only (each factor in the power 0 or 1). The product of all a_i is a perfect square. At most 2 of initial consecutive numbers are divisible by 5, hence at most 2 of a_i are divisible by 5. It is sufficient to consider a case when we have exactly 2 integers a_i which are divisible by 5. This case is possible only if a_0 and a_5 are divisible by 5.

Consider 4 integers $x + 1, x + 2, x + 3, x + 4$. We know from the problem 1.5 that their product is not a perfect square. Hence the total power of divisor 2 or the total power of divisor 3 in the product $a_1 a_2 a_3 a_4$ is odd. It is possible only in two cases:

- 1) There is only one integer among a_1, a_2, a_3, a_4 divisible by 2;
- 2) There is only one integer among a_1, a_2, a_3, a_4 divisible by 3;

Besides that we have at most 2 integers a_i divisible by 2; the same is true for 3. Then it is easy to see that in each case we have among integers $x + 1, x + 2, x + 3, x + 4$ two integers either of the form t^2 or of the form $2t^2$, or of the form $3t^2$. But this is impossible.

4.6. This statement is a part of lemma 1 of [3]. Cancel equal factors. Since $\text{GCD}(n + i, n + j) < k$ and $n > k^m$, we see that any factor at the left hand side does not divide the product at the right hand side.

4.7. Let $a_i = a_j z_i^m$, where $0 \leq j < i < k + 1$. Since $n + i = a_i z_i^m > n + j = a_j z_j^m$, then $z_i \geq z_j + 1$. Therefore

$$k > a_j z_i^m - a_j z_j^m = a_j ((z_j + 1)^m - z_j^m) > a_j m z_j^{m-1} \geq a_j^{(m-1)/m} z_j^{m-1} = (a_j z_j^m)^{(m-1)/m} = (x + j)^{(m-1)/m} > x^{1/m},$$

that contradicts to the statement of the problem 4.2.

4.8. It follows from the next solution. One can put $u = v = 1$.

4.9. This statement is lemma 1 from [3]. Assume that

$$a_{i_1} a_{i_2} = a_{j_1} a_{j_2} t^3.$$

Let us check that $t = 1$ and sets of indices coincide. WLOG $(x + i_1)(x + i_2) > (x + j_1)(x + j_2)$ (the equality is impossible due to problem 4.6).

Let $t = u/v$ ($\text{GCD}(u, v) = 1$). Then $a_{i_1} a_{i_2} / u^3 = a_{j_1} a_{j_2} / v^3$ and both sides are integers. Let $A = a_{i_1} a_{i_2} / u^3 = a_{j_1} a_{j_2} / v^3$.

By the definition of a_i we have $x + i = a_i z_i^3$, then

$$(x + i_1)(x + i_2) = a_{i_1} a_{i_2} \cdot \frac{s^3}{u^3},$$

$$(x + j_1)(x + j_2) = a_{j_1} a_{j_2} \cdot \frac{r^3}{v^3},$$

where $s = u z_{i_1} z_{i_2}$, $r = v z_{j_1} z_{j_2}$. Then $As^3 > Ar^3$, so $s \geq r + 1$. Thus

$$(x + i_1)(x + i_2) - (x + j_1)(x + j_2) \geq A((r + 1)^3 - r^3) > 3Ar^2.$$

Note that $Ar^3 = (x + j_1)(x + j_2) > x^2$, then the last inequality could be rewritten as

$$(x + i_1)(x + i_2) - (x + j_1)(x + j_2) \geq 3A \cdot \left(\frac{x^2}{A}\right)^{2/3} \geq 3x^{4/3}.$$

On the other hand

$$(x + i_1)(x + i_2) - (x + j_1)(x + j_2) < (x + k)^2 - x^2 < 3kx.$$

Obtained estimations contradict to each other, because due to problem 4.2 we know that $x > k^3$, and therefore $3kx < 3x^{4/3}$.

4.10. We need to find 20 integers a_i , which are divisible by primes 2, 3, 5, 7 only.

We know that integers a_i are divisible by the primes are not greater than 75 only, i.e. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73. The integers a_i are divisors of 75 consecutive integers therefore:

- 1) for every prime $p \in [41; 73]$ (there are 9 prime numbers in this interval) at most 2 of a_i are divisible by p ;
- 2) for every prime $p \in [29; 37]$ (there are 3 prime numbers in this interval) at most 3 of a_i are divisible by p ;
- 3) at most 4 of a_i are divisible by 23; at most 4 of a_i are divisible by 19;
- 4) at most 5 of a_i are divisible by 17;
- 5) at most 6 of a_i are divisible by 13;

6) at most 7 of a_i are divisible by 11;
So we have at most

$$18 + 9 + 8 + 5 + 6 + 7 = 53$$

integers. Hence at least $75 - 23 = 52$ integers have prime divisors 2, 3, 5, 7 only.

4.11. Consider integers a_i which have prime divisors 2, 3, 5, 7 only. By the previous problem we know that at least 20 integers have that property, but for our purposes it is sufficient to take 10 of them. If we have 10 numbers a_i , we can construct $90 = 10 \cdot 9$ different formal quotients of the form a_i/a_j .

On the other hand, due to the statement of problem 4.9 the quotient of two products of the form $a_i a_j$ (including quotients of the form a_i/a_j) does not equal to cube of rational number. Therefore there exist at most $3^4 = 81$ classes for the values of quotients a_i/a_j for our 10 numbers (each prime 2, 3, 5, 7 divides this quotient in power $0 + 3s, 1 + 3s, 2 + 3s$). Hence two quotients belong to the same class and we have a relation

$$\frac{a_i}{a_j} = \frac{a_u}{a_v} \cdot t^3,$$

which is restricted by the statement of problem 4.9.

4.12. This beautiful solution we take from [3].

For each prime $p_0 < k - 1$ choose a_i for which $x + i$ is divisible by p_0 to the highest power. Then for $j \neq i$ the the power of p_0 dividing $x + j$ is the same as the power of p_0 dividing $(x + i) - (x + j) = j - i$. Thus, if $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_d}$ is a list of numbers that was NOT chosen (then $d \geq k - \pi(k)$) and p_0^a is a maximal power of p_0 that divides the product $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_d}$, then p^a divides also the product $(k - i_1)!(i_1 - 1)!$, and hence p^a divides $(k - 1)!$ (because $\frac{(k-1)!}{(k-i_1)!(i_1-1)!}$ is integer). So the the product of integers that was not chosen divides $(k - 1)!$.

4.13. This proof of Erdős we cite by [2].

Since the integers a_i are square free and pairwise different, $B_x(k) > B'(k)$, where $B'(k)$ is a product of first k square free numbers. It is sufficient to prove that $B'(k) > (4/3)^k k!$ when $k \geq 24$.

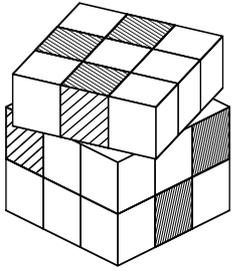
Induction by k . Base, $k = 24$.

$$\frac{26 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 37}{4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 24} > \left(\frac{4}{3}\right)^{24}.$$

Step of induction. For $r \geq 9$ the number of square free integers that does not exceed r is at most $r - \left[\frac{r}{4}\right] - 1 < \frac{3}{4}r$. Therefore for n -th square free integer for $n \geq 7$ is at most $\frac{4}{3}n$.

REFERENCES

- [1] Флейшман Д. Китайская теорема об остатках и гипотеза Ченцова // Квант. 1997. № 3.
- [2] Сендеров В. Об одной замечательной теореме Эрдеша // Квант. 2008. В печати.
- [3] Erdős P., Selfridge J.L. The product of consecutive integers is never a power // Illinois Math. J. 1975. Vol. 19. P. 292–301.
- [4] Poorten A. van der, Woeginger G. Squares from products of consecutive integers // Amer. Math. Monthly. 2002. Vol. 109. № 5. P. 459–461.



Кубик Рубика и проблема Хигмана

Объектом нашего изучения будет кубик Рубика и похожие на него головоломки. Прежде, чем приступить к изучению непосредственно кубика Рубика, мы решим несколько подготовительных задач.

Подготовительные задачи.

◆ **Р1.** В ряд стоят 12 кубиков, пронумерованных по порядку числами от 1 до 12. (На самом левом — 1, на самом правом — 12). При каждом ударе волшебного барабана какие-то два соседних кубика меняются местами. После 333 ударов каждый кубик начинает прыгать от счастья, если видит справа от себя нечётное число кубиков с меньшим номером. Могут ли запрыгать от счастья ровно 6 кубиков?

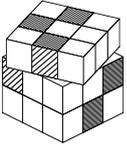
◆ **Р2.** В ряд стоят 42 кубика, пронумерованных в порядке возрастания. За один ход можно переставить местами любые два. Может ли ровно через 2008 ходов оказаться так, что первые два кубика поменялись местами, а остальные оказались на тех же местах?

◆ **Р3.** По кругу стоят 20 разноцветных кубиков. За один ход можно поднять любые три и поставить первый на место второго, второй на место третьего, третий — на место первого. Могло ли так получиться, что после какого-то хода все кубики оказались сдвинуты по циклу на один по сравнению с первоначальным положением?

◆ **Р4.** Грани кубика раскрашены в различные цвета. Из нескольких таких кубиков выложен прямоугольник $m \times n$. Можно выбрать любой ряд кубиков (по вертикали или горизонтали) и повернуть все кубики одновременно относительно горизонтали (или вертикали). Докажите, что все кубики можно повернуть вверх одинаковыми гранями.

А. Кубик Рубика.

Для определённости кубом будем называть весь большой куб, а кубиками — маленькие кубики, из которых он состоит. Любую грань куба, состоящую из 9 кубиков, можно повернуть по часовой или против часовой стрелки.



Можно провести несколько таких поворотов подряд, это будет называться *комбинация поворотов* или просто *комбинация*.

Грани куба будем обозначать заглавными буквами, например, A , B , C . Поворот по часовой стрелке соответствующей грани будем обозначать той же буквой, например A . Поворот против часовой стрелки A^{-1} . Комбинацию поворотов будем записывать как последовательность букв: например, запись $ABA^{-1}C$ означает, что *сначала поворачивают грань A по часовой стрелке, потом грань B по часовой стрелке, потом грань A против часовой стрелки, потом грань C по часовой стрелке.*

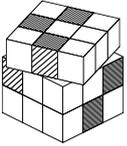
Для поворотов (или комбинаций) X и Y назовём их *коммутатором* комбинацию $XYX^{-1}Y^{-1}$.

Кубики бывают трёх видов: центральные — в серединах граней, угловые — в углах куба, и средние — в серединах рёбер куба. Ясно, что центральные кубики не меняют своего положения относительно друг друга, угловые всегда остаются угловыми, а средние — средними.

Представим, что средние и угловые кубики ни с чем не скреплены, то есть их можно свободно вытаскивать и переставлять. При этом средние кубики меняются местами со средними, а угловые — с угловыми так, что грани маленьких кубиков, смотрящие наружу до перестановки, остаются наружными и после неё. (Центральные же кубики никогда переставлять не будем.) Любое положение, достигаемое такой перестановкой, назовём *состоянием*. Будем говорить, что кубик, все грани которого одноцветны, находится в *правильном состоянии*. Будем говорить, что маленький кубик находится в *правильном положении*, если цвета его граней такие же, как и при правильном состоянии всего куба. Если из одного состояния можно с помощью некоторой комбинации получить другое, то эти состояния назовём *связанными*. *Разрешённое состояние* — состояние, связанное с правильным.

◆ **A1.** Некоторая комбинация поворотов вывела куб из начального состояния. Докажите, что если повторить ее еще несколько раз, можно опять получить начальное состояние.

◆ **A2.** Существует ли такая универсальная комбинация поворотов, применяя которую разное количество раз, можно собирать кубик из любого разрешенного положения?



◆ **A3.** Придумайте комбинацию поворотов, позволяющую циклически переставить кубики 1, 2, 3 и оставляющую остальные средние кубики на своих местах (рис. 1).

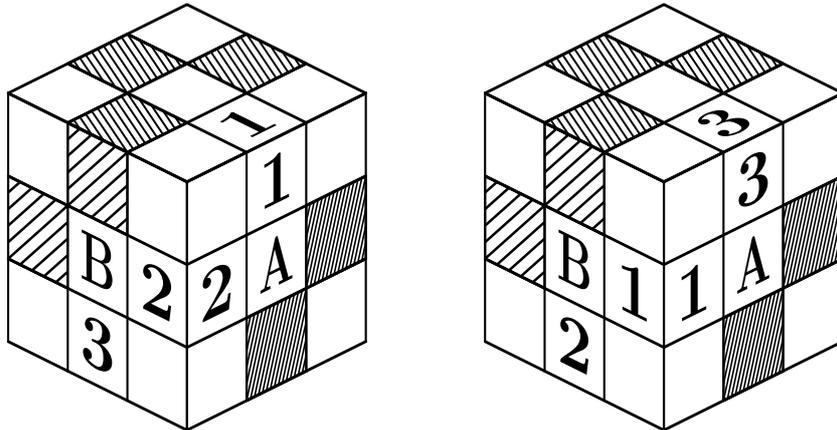


Рисунок 1.

◆ **A4.** Покажите, что комбинация $A^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}BAC$ меняет местами кубики 1 и 2 и оставляет остальные средние кубики на своих местах (рис. 2).

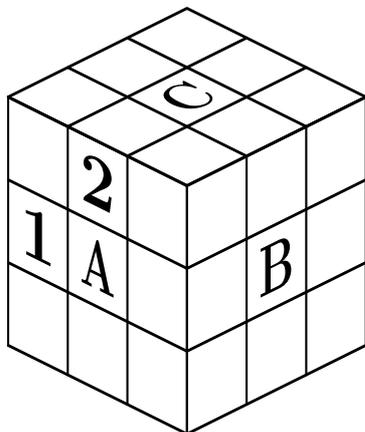


Рисунок 2.

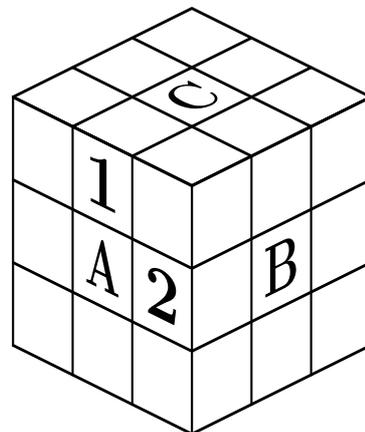
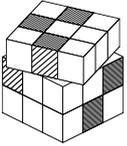


Рисунок 3.

◆ **A5.** Найдите комбинацию, позволяющую одновременно повернуть в своих гнездах кубики 1 и 2 и оставляющую остальные средние кубики на тех же местах и в тех же положениях (рис. 3)?

◆ **A6.** Докажите, что не существует комбинации, позволяющей повернуть кубик 1 в своём гнезде и оставляющей остальные средние кубики на тех же местах и в тех же положениях (рис. 3).



◆ **A7.** Допустим, состояние куба — разрешённое. Опишите, как расставить все средние на свои места. Пусть состояние куба не обязательно разрешенное. Рассмотрите состояния средних кубиков и опишите все связанные возможные положения.

◆ **A8.** Найдите нетривиальную комбинацию поворотов, такую, что будучи повторенной трижды, она не вызывает никаких изменений.

◆ **A9.** Придумайте комбинацию поворотов, позволяющую циклически переставить кубики 1, 2, 3 (рис. 4), не меняющую положение остальных угловых кубиков и оставляющую все средние кубики на тех же местах и в тех же положениях.

◆ **A10.** Допустим, состояние куба — разрешённое. Опишите, как расставить все угловые кубики на свои места, не меняя положений средних кубиков. Пусть состояние куба не обязательно разрешенное. Рассмотрите положения угловых кубиков и опишите возможные связанные состояния.

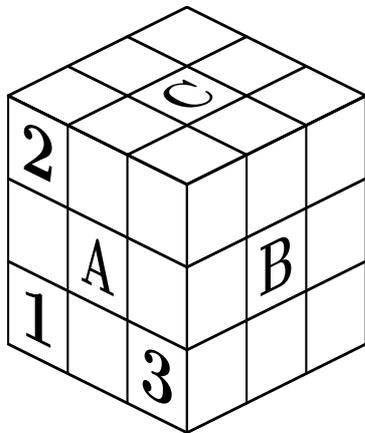


Рисунок 4.

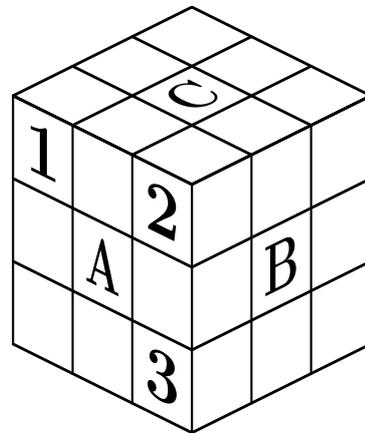
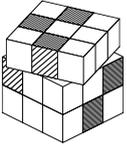


Рисунок 5.

◆ **A11.** Докажите, что не существует комбинации поворотов, позволяющих повернуть только один угловой кубик и оставляющих все остальные кубики в тех же положениях.

◆ **A12.** Придумайте комбинацию поворотов, позволяющую одновременно повернуть кубики 1, 2, 3 (рис. 5) на 120 градусов по часовой стрелке и не меняющую положение остальных кубиков.

◆ **A13.** Опишите, как собрать кубик Рубика, если известно, что состояние разрешённое.



◆ **A14.** Как по положению угловых кубиков определить, можно ли собрать кубик Рубика, если они стоят на своих местах, а средние находятся в правильных положениях?

◆ **A15.** Найдите максимальное количество попарно несвязанных состояний кубика.

◆ **A16.** Посчитайте число разрешённых состояний кубика Рубика.

Цикл В.

В задачах этого цикла мы разберём несколько похожих ловоломок. Будем считать две комбинации (поворотов) *различными*, если, применяя их к одному состоянию, мы получаем разные результаты.

◆ **B1.** На шахматной доске расставили все натуральные числа от 1 до 64. Разрешается выбрать любой квадратик 2×2 и переставить числа в нем по часовой стрелке. Докажите, что используя эту операцию, можно добиться любой расстановки.

◆ **B2.** Рассмотрим кубик $2 \times 2 \times 2$. Опишите все разрешенные состояния. Сколько их существует?

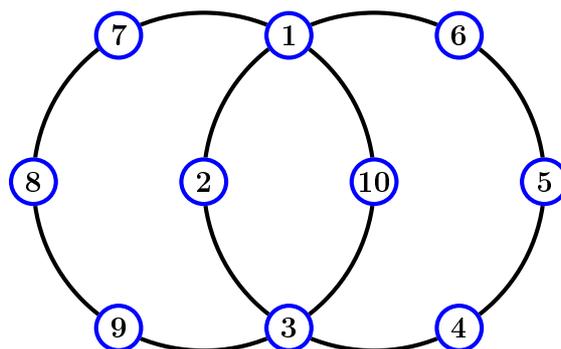
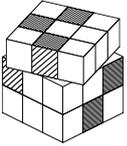


Рисунок 6.

◆ **B3.** Рассмотрим игру «Венгерские кольца» (рис. 6). Это плоская головоломка, состоящая из двух или более связанных овалов, на каждом из которых отмечено несколько пронумерованных кружков. Некоторые из этих кружков могут принадлежать более чем одному овалу. Ход состоит в движении одного из овалов на одно или несколько *делений*, вместе со всеми его кружками. Расстояния между кружками-делениями одинаковые. Кружок, лежащий более



чем на одном овале, может двигаться вместе с любым из них. Для простоты, рассмотрим головоломку с двумя овалами, каждый из которых содержит 6 кружков.

Кружки 1 и 3 могут перемещаться с любым из овалов. Обратите внимание, что каждый ход отвечает своей перестановке на множестве чисел $\{1, 2, \dots, 10\}$.

Опишите все возможные допустимые состояния.

◆ **В4.** Рассмотрим игру «Экватор» (рис. 7). Головоломка состоит из сферы, опоясанной 3 лентами, каждая из которых разделена на 12 частей, имеющих форму части сферы. Любые две ленты пересекаются под прямым углом и имеют два общих куска, назовем их узлами. Всего есть 6 узлов. Разрешено сдвигать любую ленту так, чтобы ее части переходили друг в друга. Общее число перемещающихся частей $3 \times 12 - 6 = 30$.

Опишите все возможные допустимые состояния.

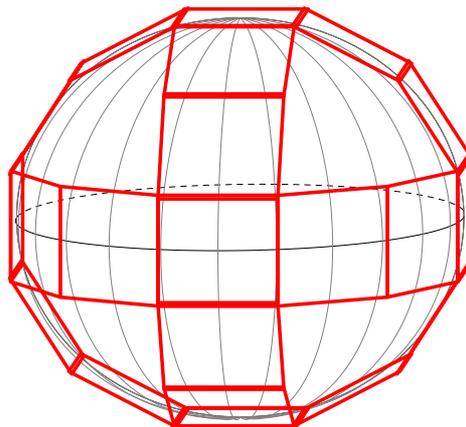


Рисунок 7.

◆ **В5.** Рассмотрим кубик $4 \times 4 \times 4$. Опишите все возможные допустимые состояния.

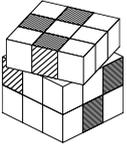
◆ **В6.** Рассмотрим игру «15». В квадрате 4×4 расположены 15 пронумерованных плиток. Одно поле остаётся свободным. За один ход разрешается выбрать соседнюю по стороне со свободным полем плитку и переместить её на свободное место.

Опишите все возможные допустимые состояния игры.

◆ **В7.** Каково максимальное количество несвязанных состояний у куба $4 \times 4 \times 4$?

◆ **В8.** Найдите систему инвариантов для куба $4 \times 4 \times 4$.

◆ **В9.** Найдите систему инвариантов для куба $n \times n \times n$.



Цикл С.

◆ **С1.** Рассмотрим правильный тетраэдр. Его можно повернуть так, что он перейдёт в себя, но при этом какие-то вершины и ребра могут поменяться местами. Сколько различных движений существует?

◆ **С2.** Тот же вопрос для куба. Как ведут себя большие диагонали куба при движениях?

Пусть у нас есть правильный многогранник. Аналогично поворотам в кубике Рубика и других головоломках, мы можем провести комбинацию двух движений. Ясно, что эта комбинация сама по себе является движением, переводящим многогранник в себя. Будем считать такую комбинацию двух движений *произведением*.

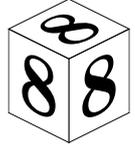
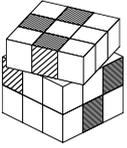
Будем называть *единичным* такое движение при котором многогранник вообще не сдвигается, и все вершины остаются на своих местах. Если какое-нибудь движение «умножить» на единичное движение, то ничего не изменится.

◆ **С3.** Пусть есть n элементов. Рассмотрим все преобразования, переставляющие эти n элементов в другом порядке. Например, если $n = 3$, то таких перестановок 6:

- 1) поменять местами 1 и 2, 3 оставить на месте;
- 2) поменять местами 2 и 3, 1 оставить на месте;
- 3) поменять местами 1 и 3, 2 оставить на месте;
- 4) поставить 1 на место 2, 2 на место 3, 3 на место 1 (цикл длины 3);
- 5) поставить 1 на место 3, 3 на место 2, 2 на место 1 (второй цикл длины 3);
- 6) оставить все элементы на месте.

Аналогично можно выписать все перестановки в случае любого n . Произведением двух перестановок назовём перестановку, полученную применением сначала первой, потом второй. Какая перестановка будет *единичной*? Проверьте, что для каждого движения A найдётся движение A^{-1} такое, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E — единичное движение. Проверьте выполнение закона $(AB)C = A(BC)$.

◆ **С4.** Рассмотрим множество A — все движения куба, переводящие его в себя, и множество B — все возможные перестановки четырёх элементов. Проведите соответствие между этими множествами так, чтобы произведение в одном множестве соответствовало произведению в другом.



Определение. Множество G , для которого выполнены следующие требования:

1) для любых двух элементов определено произведение, подчиняющееся ассоциативному закону $(AB)C = A(BC)$ ($A, B, C \in G$);

2) присутствует единичный элемент $E \in G$: $AE = EA = A$ для любого $A \in G$;

3) для каждого элемента $A \in G$ есть обратный ему $A^{-1} \in G$: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$;

называется *группой*.

Группа перестановок из задачи С3 обозначается S_n .

◆ **С5.** Докажите, что следующие множества с операциями являются группами:

1) множество целых чисел по сложению;

2) множество положительных рациональных чисел по умножению;

3) множество последовательностей поворотов кубика Рубика относительно композиции.

◆ **С6.** Являются ли группами следующие множества:

1) множество рациональных чисел по умножению;

2) множество слов в конечном алфавите (включая пустое слово) относительно приписывания (конкатенации) одного слова к другому;

3) множество слов из букв $\{a, b, c\}$ (включая пустое слово), при условии, что можно заменять любое из слов $XabcY$, $XbcaY$, $XcabY$ на XY для любых слов X и Y (то есть вычёркивать abc , bca , cab из любых слов), а также делать обратную операцию (добавлять соответствующие слова);

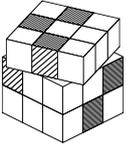
4) множество двойных транспозиций четырёх элементов $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$ и тождественное преобразование?

Примечание: запись $(123)(4567)$ означает, что в каждой скобке элементы меняются по циклу: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ и $4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 4$.

Определение. Пусть G — группа, H — подмножество G . Если H содержит единицу (так мы будем называть единичный элемент) группы G , а также все произведения элементов из H и их обратные, то H называется *подгруппой*.

◆ **С7.** Пусть H — подгруппа в G . Докажите, что H — группа.

◆ **С8.** Найдите все подгруппы S_3 .



◆ **С9. Теорема Лагранжа.** Докажите, что количество элементов в любой группе делится на число элементов в любой её подгруппе.

◆ **С10.** Найдите подгруппу из $\frac{n!}{2}$ элементов в S_n , где $n \geq 2$.

Группа из предыдущей задачи обозначается A_n .

◆ **С11.** Докажите, что любой элемент A_n является произведением *тройных циклов* — перестановок, представляющих собой цикл длины 3).

Определение. Элемент $aba^{-1}b^{-1}$ называется *коммутатором* элементов a и b .

Определение. *Коммутантом* группы G называется подгруппа из всевозможных произведений коммутаторов.

◆ **С12.** Найдите коммутанты групп S_3, A_3, A_4, S_n, A_n .

Выберем в некоторой группе G элемент a . Каждому элементу группы g поставим в соответствие элемент $a^{-1}ga$. Этот элемент называется сопряженным к g относительно a , или просто сопряженным.

◆ **С13.** Пусть H — подгруппа G . Докажите, что $a^{-1}Ha$ — множество элементов, сопряженных к H — тоже подгруппа. Подгруппы H и $a^{-1}Ha$ называются *сопряженными*.

Определение. Подгруппа, которая при всех сопряжениях переходит в себя, называется *нормальной*.

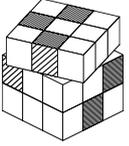
◆ **С14.** Докажите, что коммутант группы, единичный элемент и вся группа являются нормальными подгруппами.

В любой группе всегда есть две *тривиальные* нормальные подгруппы — единичный элемент и вся группа целиком. Остальные нормальные подгруппы, если они есть, называются *нетривиальными*. Группы, в которых нет нетривиальных нормальных подгрупп, называются *простыми*.

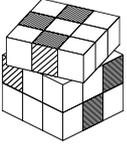
◆ **С15.** При каких n S_n является простой группой?

◆ **С16.** Докажите, что A_n — простая при $n \geq 5$.

◆ **С17.** Каким из групп S_n или A_n соответствуют группы движений куба и тетраэдра.



- ◆ **C18.** Докажите, что группа движений икосаэдра соответствует A_5 .
- ◆ **C19.** Придумайте группу из 8 элементов такую, что в ней найдутся два элемента a и b , для которых $ab \neq ba$.



Цикл D. Группы.

Определение. Группы G и H называются изоморфными, если между ними можно провести взаимно однозначное соответствие (*изоморфизм*) φ , такое, что единица переходит в единицу и произведение двух элементов в одной группе переходит в произведение соответствующих двух элементов в другой группе: $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1) \times \varphi(g_2)$.

◆ **D1.** Докажите, что следующие пары групп изоморфны:

- 1) группа движений куба и S_4 ;
- 2) группа действительных чисел по сложению и группа параллельных переносов вдоль оси OX ;
- 3) группа целых чисел по сложению и группа чисел вида 2^k (для целых k) по умножению;
- 4) группа движений додекаэдра (икосаэдра) и A_5 .

Изоморфные группы, это, в некотором смысле, одинаковые группы.

Пусть G — группа, M — множество. Говорят, что G *действует* на M , если каждому $m \in M$ и $g \in G$ соответствует элемент $m' = g(m)$, при этом $(g_1g_2)m = g_1(g_2m)$ для любого $m \in M$.

Примеры.

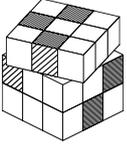
1. Группа всех движений действует на трехмерном пространстве.
2. Группы S_n и A_n действуют на множестве $\{1, \dots, n\}$.
3. Группа действует сама на себе *левыми умножениями*: каждый элемент $h \in G$ определяет отображение $\varphi_h(g) = hg$.
4. Группа G действует сама на себе сопряжениями: каждому $h \in G$ соответствует отображение $\varphi_h(g) = h^{-1}gh$.

◆ **D2.** Проверьте, что это действительно действия.

◆ **D3.** Пусть n — количество элементов в группе G (обозначение $n = |G|$). Докажите, что в S_n можно найти подгруппу, которая изоморфна G .

◆ **D4.** Группа G раскрашена в несколько цветов так, что цвет произведения зависит только от цветов сомножителей. Единица красная. Докажите, что множество красных элементов образует нормальную подгруппу.

Пусть H подгруппа в G . *Левой раскраской* называется раскраска элементов G в несколько цветов, такая, что



- 1) для любого $g \in G$ и $h \in H$ элементы g и hg раскрашены в один цвет;
 - 2) если g_1 и g_2 раскрашены в один цвет, то $g_1 = hg_2$ для некоторого $h \in H$.
- Аналогично определяется правая раскраска.

◆ **D5.**

а) Докажите, что левая раскраска совпадает с правой тогда и только тогда, когда H — нормальна.

б) Докажите, что если H — нормальна, то цвет произведения однозначно определяется цветами сомножителей, а цвет обратного элемента однозначно определяется цветом элемента.

Пусть H — подгруппа в G . Для любого $g \in G$ можно рассмотреть множество gH — совокупность элементов gh_i для различных $h_i \in H$. Это множество называется *левым классом смежности по подгруппе H* (обратите внимание, что это то же самое, что одноцветные элементы при левой раскраске). Каждый элемент G лежит в каком-то смежном классе, причем, только в одном. Два элемента лежат в одном и том же классе, если они оба представляются в виде gh_i для различных элементов $h_i \in H$. Каждый элемент $g_1 = g_1e$ содержится в классе g_1H (так как $e \in H$). Элемент g_2 попадает в этот же класс, если существует такой h , что $g_2h = g_1$, или, что тоже самое, $g_1g_2^{-1} = h$.

Произведением двух смежных классов g_1H и g_2H назовем смежный класс g_1g_2H . Конечно, мы можем выбрать других представителей этих двух смежных классов, например, $g'_1 \in g_1H$ и $g'_2 \in g_2H$. вместо g_1 и g_2 . Тогда произведением будет класс $g'_1g'_2H$.

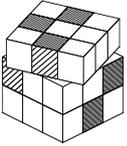
◆ **D6.** Докажите, что произведение не зависит от выбора представителей, то есть $g_1g_2H = g'_1g'_2H$.

Аналогично можно назначить обратный элемент на множестве смежных классов: обратным к классу gH будет класс $g^{-1}H$.

Множество смежных классов (или множество цветов из задачи D5) можно рассматривать как группу. Эта группа называется *факторгруппой* по нормальной подгруппе. Ее элементами являются смежные классы.

◆ **D7.** Найдите факторгруппы G по H :

- 1) $G = S_n$ и $H = A_n$;
- 2) $G = A_4$ и H — группа двойных транспозиций четырёх элементов $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$ плюс тождественное преобразование;
- 3) G — группа действительных чисел по сложению и H — подгруппа целых чисел.



◆ D8.

а) Докажите, что группа комбинаций поворотов кубика $2 \times 2 \times 2$ есть факторгруппа группы комбинаций поворотов кубика Рубика $3 \times 3 \times 3$.

б) Докажите, что группа комбинаций поворотов кубика Рубика $3 \times 3 \times 3$, а также кубика $4 \times 4 \times 4$ есть факторгруппа группы поворотов кубика $5 \times 5 \times 5$.

Определение. Орбитой элемента $m \in M$ называется множество $\{g_i m\}$ для всех различных $g_i \in G$.

◆ D9. Опишите орбиты элементов при следующих действиях:

1) угловой кубик при действии группы комбинаций поворотов кубика Рубика;

2) произвольная точка плоскости при действии группы параллельных переносов вдоль оси OX ;

3) цикл из трех элементов при действии группы перестановок на себе сопряжениями.

◆ D10. Докажите, что любые две орбиты либо не пересекаются, либо совпадают.

Пусть задано действие φ группы G на множестве M . Некоторые элементы группы не сдвигают элементов множества:

Определение. Стабилизатором элемента $m \in M$ называется множество элементов $g \in G$ таких, что $g(m) = m$.

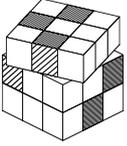
Определение. A set of elements $g \in G$ is called a *stabilizer* of an element $m \in M$ if $g(m) = m$.

◆ D11. Докажите, что стабилизатор $\text{Stab } m$ есть подгруппа. Докажите, что $|O_m| \cdot |\text{Stab } m| = |G|$.

Определение. Действие называется *хорошим*, если стабилизатор любого элемента состоит из одной единицы.

Определение. An act is called *good* if stabilizer of any element is unity only.

Рассмотрим два действия группы G на множествах M_1 и M_2 . Пусть множества взаимно однозначно соответствуют друг другу: каждому элементу M_1 соответствует свой элемент M_2 , и наоборот: $\Psi(M_1) = M_2$. Тогда эти два действия φ и ψ называются одинаково устроенными или *сопряженными*, если группа действует на этих множествах одинаковым образом: элементы $g_\varphi(M_1)$ и $g_\psi(M_2)$ соответствуют друг другу при отображении Ψ .



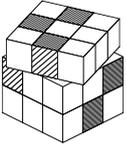
В качестве множеств M_1 и M_2 может выступать одно и то же множество M .

◆ **D12.** а) Пусть даны два хороших действия G φ_1 и φ_2 на множестве M . Обязательно ли они сопряжены?

б) Пусть даны два хороших действия G φ_1 и φ_2 на множестве M и количество орбит в этих действиях одинаково (либо счетно в обоих случаях). Докажите, что они сопряжены.

Пусть G — группа, g — ее элемент. Вместе с каждым элементом h можно рассмотреть элемент $g^{-1}hg$. При этом, произведению h_1h_2 соответствует элемент $g^{-1}h_1gg^{-1}h_2g = g^{-1}h_1h_2g$. То есть, $h \rightarrow g^{-1}hg$ — взаимно однозначное соответствие, которое произведение переводит в произведение. Таким образом, получается изоморфизм группы на себя.

◆ **D13.** Пусть G — группа, H_1 и H_2 — изоморфные подгруппы, $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$ — изоморфизм. Всегда ли φ можно продолжить до изоморфизма всей группы на себя?



◆ **D14.** Пусть G — группа, H_1 и H_2 — изоморфные подгруппы G такие, что количества элементов в смежных классах по H_1 и по H_2 одинаковы (либо счётны в обоих случаях). Докажите, что тогда существует такая группа G' , что G — её подгруппа в G' $t \in G'$ и в этой группе для любого $h \in H_1$ выполнено:

$$tht^{-1} = \varphi(h) \in H_2.$$

◆ **D15.** То же, но если в H_1 -классах и H_2 -классах не обязательно равное количество элементов.

Определение. Группа G порождена элементами x_i (мы будем писать $G = \langle x_i \rangle$), если любой элемент из G является произведением каких-то элементов из $\{x_i\}$.

Определение. Группа называется n -порождённой, если $\{x_i\}$ состоит из n элементов.

Определение. Группа называется свободно порождённой, если она изоморфна группе слов в алфавите $\{g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1}, \dots, g_n, g_n^{-1}\}$.

◆ **D16.** Пусть группа G содержит пары изоморфных подгрупп $\varphi_i : H_i \rightarrow H'_i$ при $i = 1 \dots n$. Докажите, что тогда существует такая группа G' , что G — её подгруппа и в этой группе выполнено:

- 1) $t_i h_i t_i^{-1} = \varphi_i(h_i)$;
- 2) $\langle t_i \rangle$ порождена ими свободно.

◆ **D17.** Докажите, что если группа G свободно порождена элементами t_i $i \in \mathbb{N}$, то существует изоморфизм между G и $H = \langle t_2, t_3, \dots \rangle$.

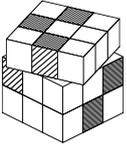
◆ **D18.** Докажите, что любая счётная группа может быть представлена в качестве подгруппы 3-порождённой группы.

Цикл Е. Группы и сборка кубика Рубика высших порядков

Мы говорим, что куб почти собран, если все кубики стоят на своих местах, но возможен беспорядок с ориентацией. Следующие несколько пунктов относятся к почти сборке кубика.

◆ **E1.** а) Даны два зацепляющихся цикла длины 4 с одной общей вершиной. Докажите, что они порождают всю группу S_7 .

б) Даны два зацепляющихся цикла длины 4 с парой общих соседних вершин. Докажите, что они порождают всю группу S_6 .



- ◆ **Е2.** а) Покажите, что группа A_{12} порождается 11-членными циклами.
б) Пусть $x \in S_8$. Докажите, что тогда $x^{8!}$ есть единичная перестановка. Пусть s – 11-членный цикл. Докажите, что тогда $s = t^{8!}$ для некоторого 11-членного цикла t .
в) Докажите, что если переставить в кубе $3 \times 3 \times 3$ средние и угловые кубики перестановками одинаковой чётности, то кубик почти собирается.
г) Докажите, что любая расстановка в кубике $4 \times 4 \times 4$ почти собирается.

Определение. Говорят, что группа G является *прямой суммой* групп G_1 и G_2 , если она состоит из пар (g_1, g_2) , таких что $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$. При этом произведение пар подчиняется закону $(g_1, g_2) \times (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$. Прямая сумма обозначается как $G = G_1 \oplus G_2$.

◆ **Е3.** Пусть G_1 есть простая конечная группа с образующими a_1, \dots, a_k , G_2 есть простая конечная группа с образующими b_1, \dots, b_k , $G = G_1 \oplus G_2$, H есть подгруппа в G порожденная элементами $z_i = (a_i, b_i), i = 1, \dots, k$. Докажите, что либо $H = G$, либо для некоторого изоморфизма $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ выполняется равенство $b_i = \varphi(a_i)$. Докажите, что группа комбинаций поворотов кубика $3 \times 3 \times 3$ содержит $A_8 \oplus A_{12}$ в качестве подгруппы.

◆ **Е4.** Докажите, что любая расстановка в кубике $2n \times 2n \times 2n$ почти собирается.

◆ **Е5.** Докажите, что куб $2 \times \dots \times 2$ почти собирается в любой размерности.

◆ **Е6.** Докажите, что куб $(2n)^m$ почти собирается в любой размерности.

Из того факта, что куб $2 \times 2 \times 2 \times 2$ почти собирается, следует полезное наблюдение. Пусть можно развернуть k угловых кубиков. Тогда можно развернуть любые другие k угловых кубиков аналогичным образом. Это помогает исследовать ситуацию с полной сборкой кубика.

◆ **Е7.** Докажите, что в четырёхмерном пространстве куб $2 \times 2 \times 2 \times 2$ имеет 3 класса связанных состояний. Указание: Используйте то, что факторгруппа A_4 по группе пар транспозиций (пример 2 из задачи D7) это группа из трёх элементов.

◆ **Е8.** Докажите, что в пространстве размерности 5 и выше у куба $2 \times 2 \times \dots \times 2$ все состояния разрешённые (инвариантов нет).

◆ **Е9.** Найдите число классов связанных состояний у куба $3 \times 3 \times \dots \times 3$ для пространств размерности 4 и выше.

◆ **Е10.** Найдите число классов связанных состояний у куба $n \times n \times \dots \times n$ для пространств размерности 4 и выше.

Кубик Рубика с высшей точки зрения.

9 августа 2008 г.

Мы поместили Квантовую статью и книгу, посвященную Кубику в раздаточные материалы. В статье содержится решение п.а), а в книге – серии а, б) и необходимую теоретико групповую технику.

Мы не исключаем, что часть пунктов перейдет в заочный конкурс, поэтому здесь мы постараемся прежде всего показать логику исследования, каким образом общий подход позволяет разобраться в ситуации, как математик, не имея дела с кубиком может создать общую теорию.

Допустим, мы ничего не знаем про кубик и нам надо разобраться в общей ситуации. Что значит общая ситуация? Это

- кубик $n \times n \times n$
- многомерный куб.
- прочие головоломки.

Нелепо сразу пытаться разобраться в общей ситуации. Нужно

- сперва разобрать классический кубик
- кубик $4 \times 4 \times 4$
- кубик $5 \times 5 \times 5$
- кубик $n \times n \times n$

Рассмотрим k -мерный куб $n \times \dots \times n$. Он разбит на n^k кубиков. Разрешается взять один слой из n^{k-1} кубика, представляющий собой $(k-1)$ -мерный куб и повернуть его как единое целое внутри слоя так чтобы он совместился. (Так, в случае обычного трехмерного куба действие заключается в повороте слоя.)

Каждая грань такого куба раскрашена в свой цвет. Вопрос заключается в возможности сборки. Если $n = 2$, то такой куб называется *дамским*. Ключевое значение имеет

- многомерный дамский куб.

Поскольку группа движений n -мерного кубика, переводящих фиксированную вершину в себя есть A_n , группа самосовмещений углового кубика есть A_n . Поэтому дамский куб ведет себя по-разному в размерностях 3, 4, (когда эта группа разрешима) и в размерности 5 (когда она

проста и некоммутативна). Высшие размерности должны себя вести как пятимерье.

– общий случай.

С чего начать при изучении классического кубика?

С очевидных, но полезных наблюдений.

- 1) Центральные и угловые кубики не смешиваются.
- 2) Можно временно забыть об ориентации – от ориентаций не зависят перестановки кубиков.
- 3) Центральные кубики неподвижны.
- 4) Интересно взаимодействие соседних граней.

Отсюда — программа исследований.

1. Изучить почти сборку кубика.

(Мы говорим, что куб *почти собран*, если все кубики стоят на своих местах, но возможен беспорядок с ориентацией.)

2. Изучить ориентации.

Чтобы осуществить (1) нужно

а) Изучить почти сборку углов.

б) Изучить почти сборку ребер.

в) Изучить взаимодействие а) и б), лучше всего – научиться расщеплять а) и б).

Но прежде всего надо рассмотреть ключевую ситуацию – *взаимодействие поворотов двух соседних граней*. Это составляет содержание задачи

Е1 а) Даны два зацепляющихся цикла длины 4 с одной общей вершиной. Докажите, что они порождают всю группу S_7 .

б) Даны два зацепляющихся цикла длины 4 с парой общих соседних вершин. Докажите, что они порождают всю группу S_6 .

Теперь интуитивно ясно, как можно почти собрать дамский куб почти собирается в любой размерности. Ясно также, что что множества реберных и угловых кубиков кубика $3 \times 3 \times 3$ почти собирается, правда по-отдельности. Более того, видно, как установить что множество реберных кубиков каждого сорта кубика $n \times n \times n$ почти собирается, правда – по отдельности. Ясно также, что аналогичное утверждение для многомерного кубика доказывается.

Теперь нам надо понять, как почти собирать кубики разных сортов вместе. Отсюда – такие задачи.

Е3 а) Покажите, что группа A_{12} порождается 11-членными циклами.

б) Пусть s – 11-членный цикл. Тогда $s = s'^{8!}$ для некоторого 11-членного цикла s' . Пусть $x \in S_8$. Тогда $x^{8!}$ есть единичная перестановка.

в) Если переставить реберные и угловые кубики перестановками одинаковой четности, то такая перестановка почти собирается.

г) Докажите, что любая расстановка в кубике $4 \times 4 \times 4$ почти собирается.

Приведенное решение все же использует специфику чисел 8 и 12 – а именно то, что между ними есть простое число. Основное наблюдение надо обобщить.

Отсюда возникает следующая задача

Пусть G_1 есть простая конечная группа с образующими a_1, \dots, a_k , G_2 есть простая конечная группа с образующими b_1, \dots, b_k , $G = G_1 \oplus G_2$, H есть подгруппа в G порожденная элементами $z_i = (a_i, b_i), i = 1, \dots, k$.

Доказать, что либо $H = G$, либо для некоторого изоморфизма $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ выполняется равенство $b_i = \varphi(a_i)$.

Хочется уметь расщеплять несколько объектов одновременно. Тогда мы приходим к следующему утверждению:

Пусть G_1 есть простая конечная группа с образующими a_1, \dots, a_k , G_2 есть простая конечная группа с образующими b_1, \dots, b_k , G_3 есть простая конечная группа с образующими c_1, \dots, c_k , $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$, H есть подгруппа в G порожденная элементами $z_i = (a_i, b_i, c_i), i = 1, \dots, k$.

Тогда либо $H = G$, либо для некоторого изоморфизма $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ выполняется равенство $b_i = \varphi(a_i)$ и при этом $H = H_{12} \oplus G_3$, где $H_{12} = \{(x, \varphi(x))\}$ есть подгруппа в $G_1 \oplus G_2$, либо аналогично $H = H_{23} \oplus G_1$ либо аналогично $H = H_{31} \oplus G_2$, либо для некоторых изоморфизмов $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ и $\psi : G_1 \rightarrow G_3$ выполняются равенства $b_i = \varphi(a_i)$ $c_i = \psi(a_i)$.

Можно сформулировать аналогичное утверждение для прямых сумм от произвольного числа элементов.

Теперь можно разобраться с почти сборкой. При этом лучше начать с изучения полной системы инвариантов для почти-сборки куба $5 \times 5 \times 5$, перейти к кубу $n \times n \times n$, а затем изучить многомерье.

Теперь займемся **ориентацией**. Все реберные инварианты нам известны. Однако из решения не совсем ясно, как их можно придумать. Поэтому полезно получить общее объяснение, позволяющее понять и общую ситуацию (пусть даже неоправданно длинное если иметь в виду только кубик Рубика).

Хулиган Вася может взять реберный кубик (стоящий на некотором месте) и, перевернув его, поставить на исходное место. Из данной расстановки Васиными действиями можно получить 2^{12} степени различных расстановок. e_i означает Васино действие с i -м ребром. Тогда результат Васиной деятельности определяется множеством $I \subset \{1, \dots, 12\}$ таким,

что произошло переключение на ребрах с номерами $i \in I$. Иногда результат Васиных действий можно обозначить в виде $f = \sum_{i \in I} e_i$. Легко видеть, что результаты складываются по модулю 2. Действие называется *честным*, если его можно осуществить только вращая кубик.

В следующие утверждения и рассуждения совершенно стандартны с точки зрения линейной алгебры и теории инвариантов.

Пусть u, v – честные действия, тогда $u+v$ тоже честное действие. Если $\sum_{i \in I} e_i$ – честное действие, $\sigma \in S_{12}$, то $\sum_{i \in I} e_{\sigma(i)}$ также является честным действием.

Пространством называется группа, порожденная множеством действий. Множество честных действий называется *честным пространством*. Пусть L – пространство. Назовем L *инвариантным*, если для любого $\sigma \in S_n$ и $\sum_{i \in I} e_i \in L$ величина $\sum_{i \in I} e_{\sigma(i)}$ снова попадает в L . Мы установили, что пространство честных действий есть инвариантное пространство.

Пусть L есть инвариантное пространство. Тогда имеет место одна из следующих возможностей.

- 1) $L = 0$
- 2) L совпадает со всем пространством.
- 3) L порождено элементами $e_i + e_j$.
- 4) $L = \{0, \sum e_i = 1^{12} e_i\}$.

Это утверждение проясняет природу реберного инварианта в кубике Рубика, и показывает, как к ним можно прийти. Вторая возможность для честного пространства исключается проверкой справедливости инварианта, а первая и четвертая – указанием способа осуществить разворот. Несложно сформулировать и доказать аналог утверждения F8 для вращения угловых кубиков. Кроме того, несложно показать, что реберные и угловые действия разделяются, даже если учитывать ориентацию.

Этих идей достаточно чтобы найти полную систему инвариантов для кубика $n \times n \times n$ а также полную систему инвариантов для додекаэдра и икосаэдра Рубика произвольного размера.

Чтобы провести исследование в многомерье, надо рассмотреть ключевой случай дамского куба. (Ladies Cube).

Прежде всего, необходимо изучить группы вращений. Отсюда – вспомогательные утверждения.

а) Пусть K – куб в n -мерном пространстве, G – группа, порожденная его поворотами. Тогда $G \simeq S_n$.

b) Пусть K – куб в n -мерном пространстве, B – его вершина, H – группа, порожденная его поворотами, переводящими вершину B в себя. Тогда $H \simeq A_n$.

Изучим четырехмерный дамский куб. Известно, что $A_4/K_4 = A_3$. Выберем две пары ребер, выходящих из вершины B (это можно сделать 3 разными способами). На этих способах действует группа $A_4/K_4 = A_3$.

Таким образом находится нетривиальный инвариант для четырехмерного дамского куба. Неожиданным образом он оказывается по модулю 3!

Чтобы получить этот инвариант достаточно покрасить пары двумерных граней, выходящих из вершин кубика плоскости которых пересекаются по точке (XOY, ZOT) , и рассуждать так же как и для трехмерного куба.

Можно показать (это будет следовать из дальнейших рассмотрений) что других инвариантов нет.

Как разворот части (некоторых, но не всех!!) угловых кубиков дамского $n > 3$ мерного куба, при котором каждый кубик будет оставаться на своем месте?

Это очень просто – надо действовать так, чтобы кубики, у которых первые три координаты совпадают, вращались как единое целое. Это рассуждение работает для любой размерности.

Изучим возможные развороты кубика.

Пусть G – простая некоммутативная конечная группа. $R = G \oplus G \oplus \dots \oplus G$. Назовем подгруппу H группы G удобной, если ее проекция покрывает каждое слагаемое. Назовем группу элементарной, если она имеет вид $(h, \varphi_1(h), \dots, \varphi_l(h))$, $h \in G$, φ_i – изоморфизмы G на себя.

Тогда удобная группа есть прямая сумма элементарных.

Из этого утверждения выводится, что у пятимерного дамского кубика нет инвариантов, т.е. количество его допустимых состояний равно $2^5! \cdot 60^3$.

Аналогично обстоит дело в пространстве большей размерности.

Чтобы изучить ситуацию в четырехмерном пространстве, надо изучить поведение групп S_3 и A_4 .

Пусть $G = S_3$. $R = G \oplus G \oplus \dots \oplus G$. Назовем подгруппу H группы G удобной, если ее проекция покрывает каждое слагаемое. Назовем группу элементарной, если она имеет вид $(h, \varphi_1(h), \dots, \varphi_l(h))$, $h \in G$, φ_i – изоморфизмы G на себя.

Тогда удобная группа есть прямая сумма элементарных, либо она содержит $A_3 \oplus A_3 \oplus \dots \oplus A_3$.

Пусть $G = A_4$. $R = G \oplus G \oplus \dots \oplus G$. Назовем подгруппу H группы G удобной, если ее проекция покрывает каждое слагаемое. Назовем группу элементарной, если она имеет вид $(h, \varphi_1(h), \dots, \varphi_l(h))$, $h \in G$, φ_i –

изоморфизмы G на себя.

Тогда удобная группа есть прямая сумма элементарных, либо она содержит $K_4 \oplus K_4 \oplus \dots \oplus K_4$.

Для завершения исследования в кубе произвольного размера и произвольной размерности надо выбрать такую систему координат, чтобы координаты центра куба были нулями, а координаты центров кубиков по модулю не превосходили n . Каждый сорт определяется набором M_k координат, по модулю равных k для всех k . Группа разворотов для каждого сорта суть $\bigoplus_k S_{|M_k|}$ если $|M_0| \neq 0$ и $\bigoplus_k A_{|M_k|}$ если $|M_0| = 0$.

Приведенных выше соображений достаточно для нахождения полной системы инвариантов. С группами S_i связаны только инварианты по модулю 2, с группами A_3 и A_4 – только инварианты по модулю 3, с группами A_n при $n \geq 5$ – вообще никакие инварианты не связаны.

Следующая задача завершает исследование.

F1

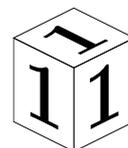
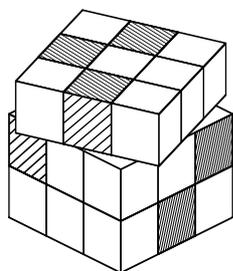
а) Пусть координаты центра четырехмерного куба $3 \times \dots \times 3$ суть $(0, 0, 0, 0)$, а координаты центров кубиков – $0, \pm 1$. Покажите, что инварианты разворота, связанные с кубиками с координатами центров $(0, \pm 1, \pm 1, \pm 1), (\pm 1, 0, \pm 1, \pm 1)$ связаны только с четностью.

б) Пусть координаты центра пятимерного куба $4 \times \dots \times 4$ суть $(0, 0, 0, 0, 0)$, а координаты центров кубиков – $0, \pm 1, \pm 2$. Покажите, что инварианты разворота, связанные с кубиками с координаты центров которых суть: $(0, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1), (\pm 1, 0, \pm 1, \pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm 1, 0, \pm 1, \pm 1), (\pm 1, \pm 1, \pm 1, 0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, 0)$ связаны только с модулем 3.

F2 Какие несмешиваемые типы кубиков есть в k -мерном кубе размера n ?

F3 Приведите разные примеры инвариантов для k -мерного куба размера n .

F4* Постройте полную систему инвариантов для k -мерного куба размера n .



Rubic's cube and Higman problem

In this project we shall explore Rubic's cube and similar puzzles. Before this we should solve some preliminary problems.

Preliminary problems.

◆ **P1.** There are 12 labeled cubes in a row. The left cube is labeled with 1 and the right one with 12. If the crazy drummer beats his magic drumhead then two neighboring cubes transpose. After 333 beats every cube goes crazy if there are odd number of cubes with less number to the right of him. Can the number of the crazy cubes be equal to 6?

◆ **P2.** There are 42 cubes in the row labeled in the increased order. One can transpose every two neighboring cubes. Is it possible to transpose the first two cubes and leave the remaining cubes at their places by 2008 moves?

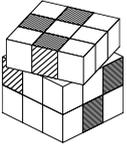
◆ **P3.** There are 20 color cubes in the circle. One can choose every three cubes and put the first one on the second one's place, second one to the third one's place and the third one to the first one's place. Is it possible to obtain the situation that all the cubes would be cyclically shifted in comparison with the initial position?

◆ **P4.** The facets of a cube are painted into different colors. Some of these cubes are used to form a rectangle $m \times n$. One can choose a row or a column and rotate all the cubes with regard to the common axis. Prove that it is possible to obtain the situation that all the cubes be rotated to the up with the same color.

A. Rubic's cube.

Let us call the whole large cube by *cube* and small cubes by *bricks*. Every 9-bricks facet of the cube can be rotated clockwise or counter-clockwise. One can do several such rotates in series. This sequence of rotates is simply called *combination*.

Denote the facets of the cube by A, B, C . We shall say that clockwise rotation of the facet is denoted by the same letter, for example, A . We also denote the counter-clockwise rotation by A^{-1} . Further, we shall denote the sequence of rotations by the sequence of the letters. For example, $ABA^{-1}C$ means "clockwise rotation of the A facet then clockwise rotation of the B facet then counter-clockwise rotation of the A facet then clockwise rotation of the C facet".



The sequence $XYX^{-1}Y^{-1}$ is called the *commutator* of the rotations X and Y .

There are three types of bricks inside the cube: *central* bricks are located in the centers of facets, *corner* bricks form the corners of the cube and middle ones are located in the centers of the cube's edges. It is clear that the central bricks don't move (with regard to each other). Also corner bricks will stay corner and middle ones will stay middle.

Suppose that middle and corner bricks don't fasten with anything. Hence we can easily take them out, transpose and put them in. Let us transpose middle bricks with other middle ones. Similarly we do with the corner ones. (We shall not transpose the central bricks.) Moreover, we check that the external facets of the bricks stay external after any transformation. Any position after such transformations is called a *state*. A state of the cube is called *right* if every facet of this cube is one-color. We shall say that a brick has the *right position* if it has the same colors of the facets as for right state of the whole cube. States are called *connected* if there exists a sequence of rotations such that the first state converts to the second one. A state is said to be *admissible* if it is connected with the right state.

◆ **A1.** Suppose that we apply a sequence of rotations to the initial cube. Prove that it is possible to apply this combination several times again and return to the initial state.

◆ **A2.** Is there exists a sequence of rotations that would arrange the cube starting from any state (by applying it several times)?

◆ **A3.** Find a combination of rotations that would cause to cyclically shift the bricks 1, 2, 3 and leave the remaining middle-bricks at their places (fig. 1).

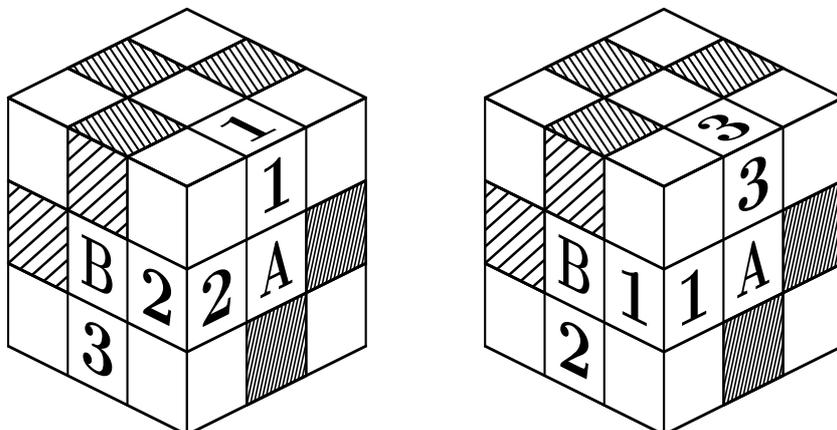
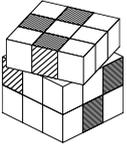


Figure 1.



◆ **A4.** Show that the combination $A^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}BAC$ cause to transpose the 1 and 2 bricks and leave the remaining middle-bricks at their places (fig. 2).

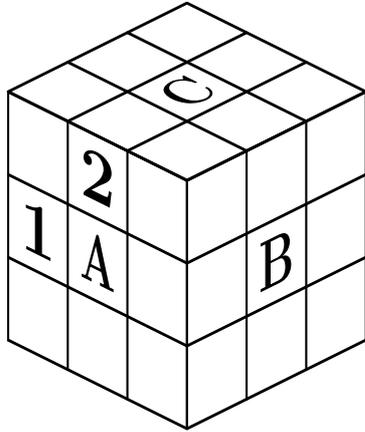


Figure 2.

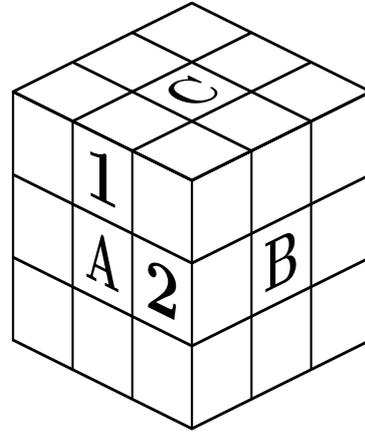


Figure 3.

◆ **A5.** Find a combination that would cause to rotate the bricks 1 and 2 within their sockets and leave the remaining middle-bricks at their places and states (fig. 3)?

◆ **A6.** Prove that there is no combination that would cause to rotate the brick 1 within its socket and leave the remaining middle-bricks at their places and states (fig. 3).

◆ **A7.** Suppose that the state of the cube is admissible. Show how to place all the middle bricks to the right states. Suppose that the state is not necessarily admissible. Consider the states of the middle bricks and describe all possible connected states.

◆ **A8.** Find a non-trivial combination of rotations that would cause no effect to the cube while applying it exactly three times.

◆ **A9.** Find a combination of rotations that would cause to cyclically shift the bricks 1, 2, 3 (fig. 4), and leave the remaining corner-bricks at their places and middle-bricks at their places and states.

◆ **A10.** Consider an admissible state of the cube. Find a combination that would arrange all the corner bricks to their places and leave the middle-bricks at their places and states. Suppose that the state is not necessarily admissible. Consider the states of the corner bricks and describe all possible connected states.

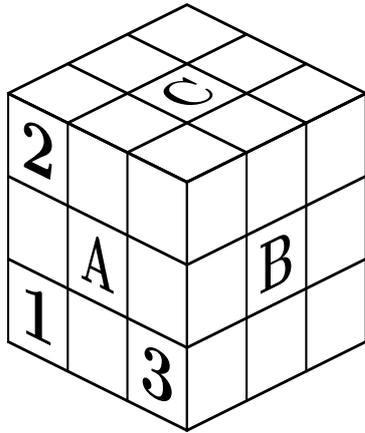
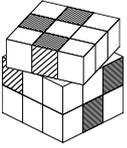


Figure 4.

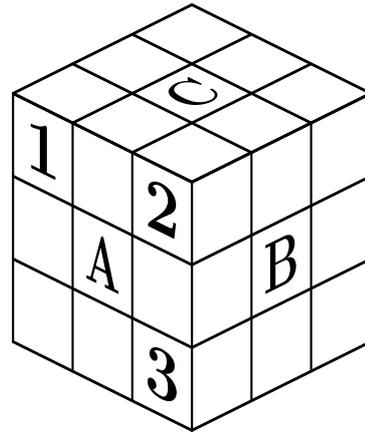


Figure 5.

- ◆ **A11.** Prove that there is no combination that would rotate exactly one corner brick and leave the remaining bricks at their places and states.
- ◆ **A12.** Find a combination that would cause to rotate clockwise the bricks 1, 2, 3 (fig. 5) by 120 degrees , and leave the remaining bricks at their places and states.
- ◆ **A13.** Suppose that the state of the cube is admissible. How to arrange the cube?
- ◆ **A14.** Suppose that the all corner bricks are in the right places and middle ones are in the right states. Consider the states of the corner bricks. How to define if it possible to arrange the cube?
- ◆ **A15.** How many pairwise unconnected states of the cube would be?
- ◆ **A16.** Calculate the number of admissible states of the cube.

Section B.

In this section we shall consider some similar puzzles. Let us apply two combinations (of rotations) at the same state. We shall say that these two combinations are *different* if they make different results.

- ◆ **B1.** The chessboard is labeled with all integer numbers from 1 to 64. One can choose a square 2×2 and rotate clockwise the numbers inside it. Prove that it is possible to achieve any possible numbers arrangement.
- ◆ **B2.** Consider the $2 \times 2 \times 2$ cube. Describe all the admissible states of this cube. How many such states are there?

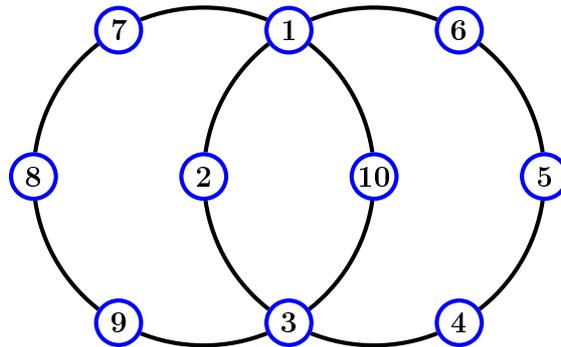
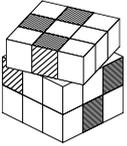


Figure 6.

◆ **B3.** Consider the game “Hungarian rings” (fig. 6). There is a planar puzzle consisting of two or more interwoven ovals each of which has several labeled pieces, some of which may belong to more than one oval. A puzzle move consists of shifting an oval by one or more “increments”, and hence all the pieces on it, along the oval’s grooved track. The pieces are equally spaced apart (in spite of the typed depiction below) and whose pieces which lie on more than one oval can be moved along either oval. For simplicity, consider the puzzle consisting of only two ovals, each having 6 pieces.

The pieces 1 and 3 can be moved along either oval. Note that each move corresponds to a unique permutation of the numbers in $\{1, 2, \dots, 10\}$.

Describe all the admissible states.

◆ **B4.** Consider the game ‘Equator’ (fig. 7). This puzzle is in the shape of the sphere but has 3 circular bands encircling a sphere, each having 12 square-shaped pieces and each band intersecting each other at a 90 degree angle. Each pair of circles intersects at two points, or “nodes” and at each such node there is a puzzle piece shared by the two circular bands. There are 6 nodes total. One can rotate any band such that their pieces would transfer to each other. The total number of movable pieces is therefore $3 \times 12 - 6 = 30$.

Describe all the admissible states.

◆ **B5.** Consider the $4 \times 4 \times 4$ cube. Describe all the admissible states.

◆ **B6.** Consider the game “15”. There are 15 numerated tiles placed in the 4×4 square. One square is empty. One can choose a neighboring (by side) tile of the empty square and move it on the empty place.

Describe all the admissible states of the game.

◆ **B7.** How many pairwise unconnected states of the cube $4 \times 4 \times 4$ would be?

◆ **B8.** Find the invariants system for $4 \times 4 \times 4$ cube.

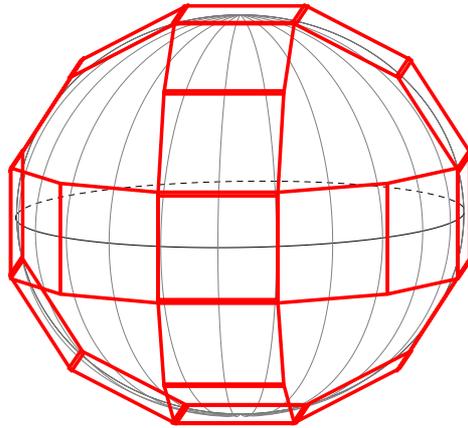
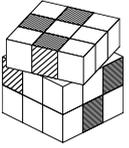
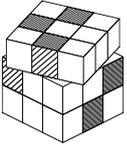


Figure 7.

◆ **B9.** Find the invariants system for $n \times n \times n$ cube.



Section C.

◆ **C1.** Consider a regular tetrahedra. We can rotate it such that it maps to itself and some edges and vertexes may transpose. Find the number of the different rotations.

◆ **C2.** Similar task for cube. Describe behavior of the main diagonals of cube.

Consider a regular polyhedra. Similarly to Rubic's cube rotations we can apply a sequence of two motions. It is easy to see that this composition is a motion itself. This composition is called a *product*.

The motion of polyhedra is called an *identity* if it preserves all its vertexes. Composition of every motion F with identical motion I does not change F , i.e. $F = IF = FI$. Identical motion of a polyhedra is an identity of all space.

◆ **C3.** Let M be an n -element set. Consider the permutations of M elements. For example, if M consists of 3 elements, then there are 6 such permutations:

- 1) exchange 1 and 2, 3 does not move;
- 2) exchange 2 and 3, 1 does not move;
- 3) exchange 1 и 3, 2 does not move;
- 4) sent 1 into 2, 2 into 3, 3 into 1 (cycle of length 3);
- 5) $1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$ (cycle of length 3);
- 6) don't move anything.

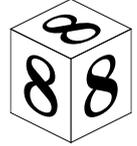
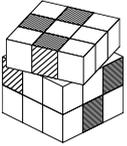
Similarly for each n all permutations can be listed. Suppose that we apply some permutation then apply another one. This combination of two permutations is called a *product* of them. Which permutation is identical? Prove that for any motion A there exists a motion A^{-1} such that $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, there E is the identical motion. Check the associative law: $(AB)C = A(BC)$.

◆ **C4.** Let A be a set of all motions of a cube. Find a correspondence between A and the set B of permutations of 4 elements such that product in A corresponds to the product in B .

Definition. A *group* is a set G with operation of multiplication such that the following properties are satisfied:

- 1) $(AB)C = A(BC)$ (associative law) ;
- 2) there is an unit element E such that $AE = EA = A$ for any A ;
- 3) for any element A there exists an inverse A^{-1} such that $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Permutation group from problem C3 is denoted by S_n .



◆ **C5.** Prove that the following sets with operations are groups:

- 1) the set of integers with respect to addition;
- 2) the set of all positive rational numbers with respect to multiplication;
- 3) Rubic's cube transformation with respect to composition.

◆ **C6.** Which of the following objects are groups?

- 1) the rational numbers with respect to multiplication;
- 2) set of all words in the Latin alphabet (including empty word) with respect to concatenation (concatenation of u and v is uv).

3) set of all words in the alphabet $\{a, b, c\}$ (including empty word), if for any words X, Y we can replace any of the words $XabcY, XbcaY, XcabY$ with the word XY (in other words, we can remove abc, bca, cab from any word) and do inverse operation (add these words);

- 4) Three double transpositions $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$ and identity?

Note: $(123)(4567)$ means that the elements are cyclically shifted in every bracket: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ and $4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 4$.

Definition. Let G be a group, H be a subset of G . Suppose that H contains unit element of G , (we just call it *unit*) and also all products of any two elements in H together with their inverses, then H is called a *subgroup*.

◆ **C7.** Let H be a subgroup of G . Prove that H is a group.

◆ **C8.** Find all subgroups of S_3 .

◆ **C9. Lagrange theorem.** Prove that the number of subgroup elements divides the number of group elements.

◆ **C10.** Find a $\frac{n!}{2}$ -elements subgroup of S_n , for $n \geq 2$.

We shall denote the group in the previous problem by A_n .

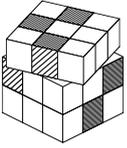
◆ **C11.** Prove that any element of A_n is a product of cycles of length 3 (they may intersect with each other).

Definition. $aba^{-1}b^{-1}$ is called a *commutator* of a and b .

Definition. *Commutant* of G is the set of all products of commutators.

◆ **C12.** Find the commutants of S_3, A_3, A_4, S_n, A_n .

Let us fix $a \in G$. For any $g \in G$ consider corresponding element $a^{-1}ga$. This element is called a *conjugate g respect to a* , or just *conjugate*.



◆ **C13.** Let H be a subgroup of G . Suppose that $a^{-1}Ha$ is the set of all conjugates of the H elements with respect to a . Prove that $a^{-1}Ha$ is a subgroup as well. Subgroups H and $a^{-1}Ha$ are called *conjugated*.

Definition. A subgroup is called *normal* if it is equal to all its conjugates.

◆ **C14.** Prove that commutant, unit element E and whole group G are normal subgroups of G .

The whole group G and unit element E are the *trivial* normal subgroups of G . All other subgroups are called *non-trivial*. If G has the trivial normal subgroups only, then G is *simple* group.

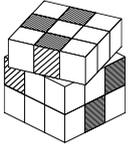
◆ **C15.** Find all n such that group S_n is simple.

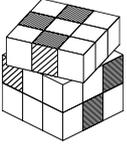
◆ **C16.** Prove that group A_n is simple for $n \geq 5$.

◆ **C17.** Find all n such that S_n or A_n are equal to the groups of motions of cube or tetrahedra.

◆ **C18.** Prove that the group of icosahedra motions are equal to A_5 .

◆ **C19.** Find a 8-element group such that there exist two elements a, b and $ab \neq ba$.





Section D. Groups

Definition. Groups G and H are called *isomorphic* if there exists a one-to-one mapping (*isomorphism*) φ such that unit element maps to unit element and composition of any two elements in G maps to composition of the corresponding two elements in H : $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1) \times \varphi(g_2)$.

◆ **D1.** Prove that the following groups are isomorphic:

- 1) group of cube's motions and S_4 ;
 - 2) group of real numbers with respect to addition and group of horizontal motions;
 - 3) group of integer numbers with respect to addition and group of 2^k for integer k with respect to composition.
 - 4) group of dodecahedra's (icosahedra's) motions and A_5 ;
- Isomorphic groups are really equivalent groups.

Suppose that G is a group, and M is a set. We shall say that G acts on M , if for any $m \in M$ and $g \in G$ there exists an corresponding element $m' = g(m)$ such that $(g_1g_2)m = g_1(g_2m)$.

Examples.

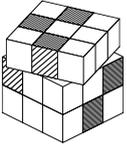
1. The group of all motions acts on 3-dimensional space.
2. The groups S_n и A_n act on the set $\{1, \dots, n\}$.
3. A group acts on itself by *left multiplications*: every $h \in G$ defines a mapping $\varphi_h(g) = hg$.
4. A group acts on itself by conjugates: every $h \in G$ defines a mapping $\varphi_h(g) = h^{-1}gh$.

◆ **D2.** Prove that these are really the acts.

◆ **D3.** Suppose that n is the number of elements in the group G (we shall denote it by $n = |G|$). Prove that there exists a subgroup in S_n such that it is isomorphic to G .

◆ **D4.** A group G is colored into several colors such that the color of the product depends on colors of the factors only. The unity is red. Prove that the set of red elements is a normal subgroup.

Suppose that H is a subgroup in G . The coloring of G is called *left* if:



1) for any $g \in G$ and $h \in H$ the elements g and hg are colored in the same color;

2) if g_1 and g_2 are colored in the same color then $g_1 = hg_2$ for some $h \in H$.

◆ **D5.**

a) Prove that the left coloring coincides to the right one if and only if H is a normal group.

b) Prove that if H is a normal group then the color of the product depends on colors of the factors only and the color of the inverse element depends on color of the original one.

Suppose that H is a subgroup in G . For any $g \in G$ consider the set of all gh_i for $h_i \in H$. This set is called *left H -class with respect to H* and denoted by gH (note that this is essentially just the same as one-colored elements). Every element G belongs to one left H -class only. Two elements belong to the same class if they can be presented in the form gh_i for some $h_i \in H$. Every $g_1 = g_1e$ belongs to g_1H (because of $e \in H$). The element g_2 belongs to the same class if there exists h such that $g_2h = g_1$ (or $g_1g_2^{-1} = h$).

The product of two classes g_1H and g_2H is the class g_1g_2H . We can choose other representatives of these two classes, namely, $g'_1 \in g_1H$ and $g'_2 \in g_2H$. Then the product would be $g'_1g'_2H$.

◆ **D6.** Prove that a product is well-defined (because of $g_1g_2H = g'_1g'_2H$).

Similarly we can define an inverse element on the left H -classes set: the class $g^{-1}H$ is inverse for gH .

The set of left H -classes (or the set of colors from D5) can be considered as a group. This group is called a *factorgroup* with respect to the normal subgroup H . The left H -classes are the elements of this group.

◆ **D7.** Find factorgroups of G with respect to the H :

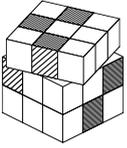
1) $G = S_n$ and $H = A_n$;

2) $G = A_4$ and H is a group of three double transpositions $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(23)$ and identity?

3) G is a group of real numbers with respect to addition and H is the subgroup of integers.

◆ **D8.**

a) Prove that the group of rotations combinations of the cube $2 \times 2 \times 2$ is the factorgroup of the $3 \times 3 \times 3$ -cube group.



b) Prove that the groups of rotations combinations of the cubes $3 \times 3 \times 3$ and $4 \times 4 \times 4$ is the factorgroups of the $5 \times 5 \times 5$ -cube group.

Definition. An *orbit* of an element $m \in M$ is the set $\{g_i m\}$ for some $g_i \in G$.

◆ **D9.** Describe the orbits of elements for the following acts:

- 1) the group of rotations combinations acts on the corner brick;
- 2) the horizontal translation group acts on the point of the plane;
- 3) group S_n of permutations acts by conjugates on itself. The element is 3-cycle.

◆ **D10.** Prove that any two orbits are disjoint or coincide.

Definition. Стабилизатором элемента $m \in M$ называется множество элементов $g \in G$ таких, что $g(m) = m$.

Suppose that G acts on set M . Some elements of the group don't shift the elements of the set:

Definition. A set of elements $g \in G$ is called a *stabilizer* of an element $m \in M$ if $g(m) = m$.

◆ **D11.** Prove that stabilizer $\text{Stab } m$ is a subgroup. Prove that $|O_m| \cdot |\text{Stab } m| = |G|$.

Definition. Действие называется *хорошим*, если стабилизатор любого элемента состоит из одной единицы.

Definition. An act is called *good* if stabilizer of any element is unity only.

Consider two actions of G on the sets M_1 и M_2 . Suppose that these sets one-to-one correspond to each other: every element M_1 corresponds to the unique element M_2 and vice-versa: $\Psi(M_1) = M_2$. Then these two actions are called *conjugated* if the group acts on these sets by the similar way: element $g_\varphi(M_1)$ corresponds to $g_\psi(M_2)$.

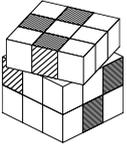
Note that we can choose $M_1 = M_2 = M$.

◆ **D12.**

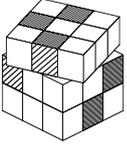
a) Suppose that φ_1 and φ_2 are two good actions on M . Is it always true that they are conjugated?

b) The same question if the numbers of orbits are equal.

Suppose that G is a group and $g \in G$. Consider an element $g^{-1}hg$ for each g . It is easy to see that the element $g^{-1}h_1gg^{-1}h_2g = g^{-1}h_1h_2g$ correspond to the product h_1h_2 . Hence, $h \rightarrow g^{-1}hg$ is one-to-one mapping such that a product maps to a product. Thus, we have obtain an isomorphism of G to itself.



◆ **D13.** Suppose that G is a group, H_1 and H_2 are isomorphic subgroups with isomorphism $\varphi : H_1 \rightarrow H_2$. Is it always possible to continue φ to the isomorphism of G to itself.



◆ **D14.** Suppose that G is a group and H_1 and H_2 are isomorphic subgroups of G . Let the numbers of elements in the H_1 -classes and H_2 be equal (or both are countable). Prove that there exists a group G' such that G is a subgroup of G' , $t \in G'$ and the following condition holds for any $h \in H_1$:

$$tht^{-1} = \varphi(h) \in H_2.$$

◆ **D15.** Suppose that the numbers of elements in the H_1 -classes and H_2 not be equal. Prove the same fact.

Definition. If every element of group G can be presented by the product of some elements of $\{x_i\}$ then G is called *generated by elements x_i* . We denote this by $G = \langle x_i \rangle$.

Definition. A group is called *n -generated* if there are n elements in $\{x_i\}$.

Definition. A group is called *n -free-generated*, if it is isomorphic to the group of words in the alphabet $\{g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1}, \dots, g_n, g_n^{-1}\}$.

◆ **D16.** Suppose that G contains the following pairs of isomorphic subgroups: $\varphi_i : H_i \rightarrow H'_i$ for $i = 1 \dots n$. Prove that there exists a group G' , such that G is a subgroup of G' and the following condition hold in G' :

- 1) $t_i h_i t_i^{-1} = \varphi_i(h_i)$;
- 2) the group generated by $\langle t_i \rangle$ is free.

◆ **D17.** Suppose that group G is free-generated by the elements t_i $i \in \mathbb{N}$. Prove that there is a isomorphism between G and $H = \langle t_2, t_3, \dots \rangle$.

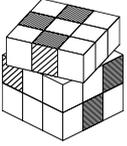
◆ **D18.** Prove that any countable group can be presented by the subgroup of a 3-generated group.

Section E. Groups and arrangement of a high-dimensional cubes

We shall say that a cube is *almost solved* if all the bricks returned to their places but maybe some of them aren't rotated well. We use some following problems to almost solve a cube.

◆ **E1.** a) Suppose that two 4-cycle contain one common vertex. Prove that they generate a group S_7 .

b) Suppose that two 4-cycle contain two common consecutive vertexes. Prove that they generate a group S_6 .



- ◆ **E2.** a) Prove that the group A_{12} is generated by 11-cycles.
 b) Let $x \in S_8$. Prove that $x^{8!}$ is the unity. Suppose that s is a 11-cycle. Prove that there exists a 11-cycle t such that $s = t^{8!}$.
 c) Suppose that middle bricks and corner brick in the $3 \times 3 \times 3$ cube are transposed with permutations of equal parity. Prove that it is possible to almost solve the cube.
 d) Prove that it is possible to almost solve the cube $4 \times 4 \times 4$ starting from any state.

Definition. We shall say that a group G is a *sum* of groups G_1 and G_2 if it consists of pairs (g_1, g_2) such that $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$. Besides, the following rule describes the multiplication in G : $(g_1, g_2) \times (h_1, h_2) = (g_1 h_1, g_2 h_2)$. We denote a sum by $G = G_1 \oplus G_2$.

◆ **E3.** Suppose that G_1 is simple finite group with generators a_1, \dots, a_k and G_2 is simple finite group with generators b_1, \dots, b_k . Let $G = G_1 \oplus G_2$. Suppose that H is a G -subgroup generated by the elements $z_i = (a_i, b_i), i = 1, \dots, k$. Prove that $H = G$ or there is an isomorphism $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ such that $b_i = \varphi(a_i)$. Prove that the group of rotations combinations of the $3 \times 3 \times 3$ cube contains a subgroup $A_8 \oplus A_{12}$.

- ◆ **E4.** Prove that any state in the cube $2n \times 2n \times 2n$ can be almost solved.
- ◆ **E5.** Prove that $2 \times 2 \times \dots \times 2$ cube can be almost solved for any dimension.
- ◆ **E6.** Prove that $2n \times 2n \times \dots \times 2n$ cube can be almost solved for any dimension.

Using the fact that a $2 \times 2 \times 2 \times 2$ cube can be almost solved we can do the useful note. *Suppose that we can rotate k corner bricks. Then we can similarly rotate any other k corner bricks.* This note helps us to describe a full cube solvability.

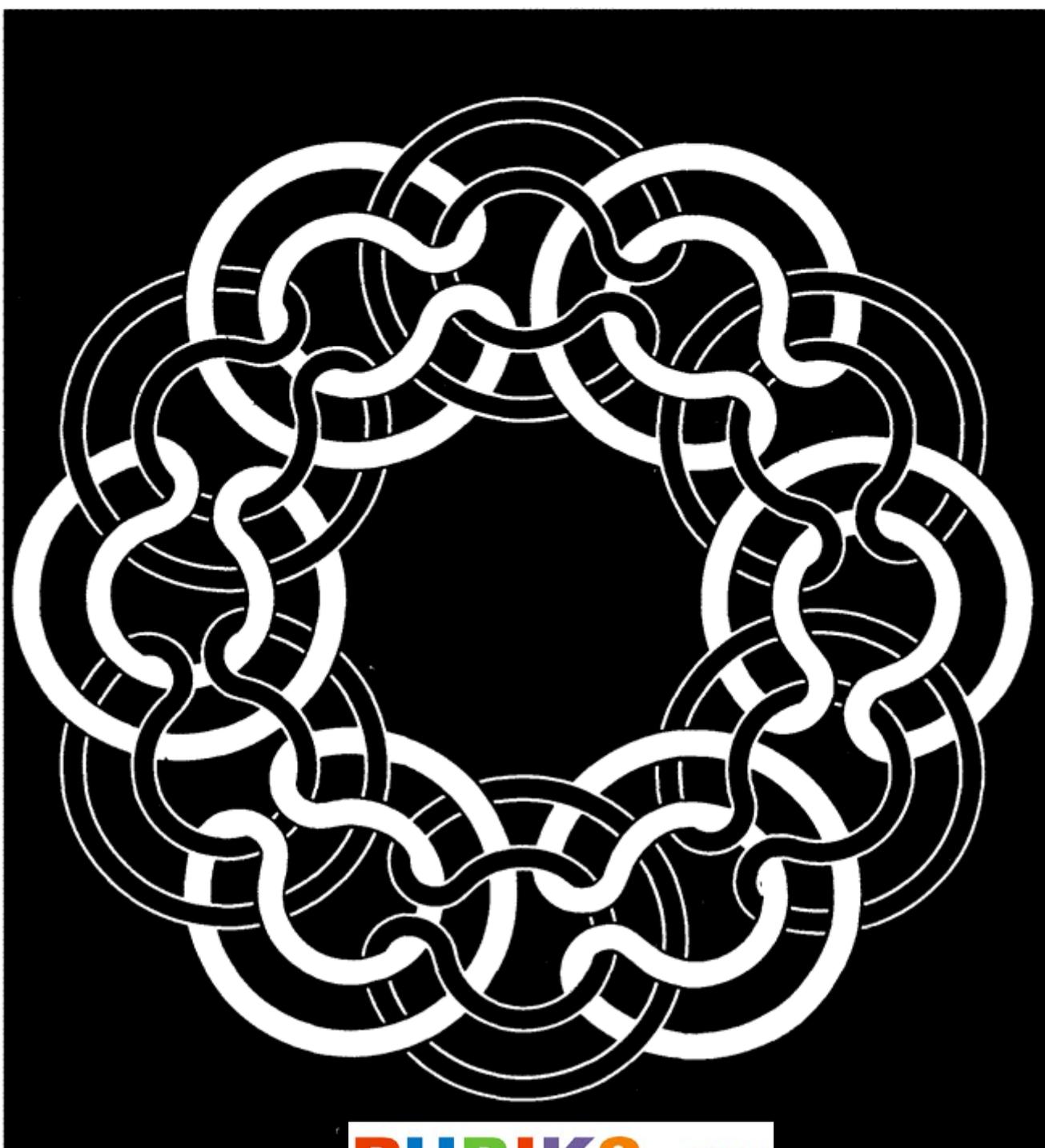
- ◆ **E7.** Prove that $2 \times 2 \times 2 \times 2$ cube has 3 classes of connected states in 4-dimensional space. Note: Use the fact that factorgroup of A_4 with respect to the group of double transpositions (example 2 in D7) is a 3-element group.
- ◆ **E8.** Prove that all states of the $2 \times 2 \times \dots \times 2$ cube are admissible in the dimension 5 or higher.
- ◆ **E9.** Find the number of classes of connected states for $3 \times 3 \times \dots \times 3$ cube in the dimension 4 or higher.
- ◆ **E10.** Find the number of classes of connected states for $n \times n \times \dots \times n$ cube in the dimension 4 or higher.

ISSN 0130-2221

Квант

12
1980

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





В. Залгаллер,
С. Залгаллер

Венгерский шарнирный кубик

В Венгерской Народной Республике распространена занятная математическая головоломка, созданная в 1975 г. венгерским архитектором, профессором Эрнё Рубиком. Ее внешний вид показан на четвертой странице обложки: это пластмассовый куб, разбитый на 27 конгруэнтных кубиков. Внутренний кубик удален, а 26 наружных кубиков с помощью специальных выступов сцеплены так, что любая плитка из 9 кубиков, прилегающих к одной грани куба, может быть повернута в любую сторону на 90° . (Начало двух таких поворотов изображено на рисунке 1.) После поворота на 90° вся система сохраняет прежнюю свободу вращений: снова любую плитку в любую сторону можно повернуть в ее плоскости на 90° .

Об устройстве шарнирного скрепления этих кубиков можно написать отдельную статью — сейчас же мы будем обсуждать другой вопрос.

Первоначально каждая из граней большого куба была окрашена в свой цвет (красный, оранжевый, желтый, зеленый, синий, белый). После ряда случайно выбранных вращений окраска граней куба становится пестрой: на грани присутствуют клетки разных цветов. Головоломка состоит в том, чтобы, получив в руки такой пестрый куб, добиться с помощью вращений *правильной* расстановки кубиков, то есть такой расстановки,

при которой каждая грань куба снова будет одного цвета.

Задача эта совсем не проста. Не вооруженному теорией человеку, даже способному, редко удается сразу собрать более одной грани. Число расстановок кубиков, которые можно получить (подсчитано, что их $N = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$), делает ее недоступной для перебора даже на ЭВМ. Заметим, впрочем, что не любая расстановка может быть получена вращениями плиток куба: если разрешить разборку куба на составляющие его 26 кубиков, то можно составить $12 \cdot N = 529\,024\,039\,393\,878\,272\,000$ разных расстановок (см. задачу 8 из Добавления).

В настоящей заметке мы предлагаем читателю правила (они не являются самыми экономными по числу вращений), позволяющие от любой из N возможных расстановок кубиков вернуться к их *правильной* расстановке.

Описание вращений

Чтобы изложить предлагаемые правила, условимся сначала о терминологии.

Будем называть *центральными* кубики, стоящие в центрах граней куба. Каждый центральный кубик всегда (при любых вращениях) остается центральным и смотрит наружу одной клетки определенного цвета.

Поскольку нас интересуют не изменения положения всего куба в пространстве, а лишь изменения взаимного расположения его частей, мы будем считать его положение в пространстве фиксированным. Это озна-

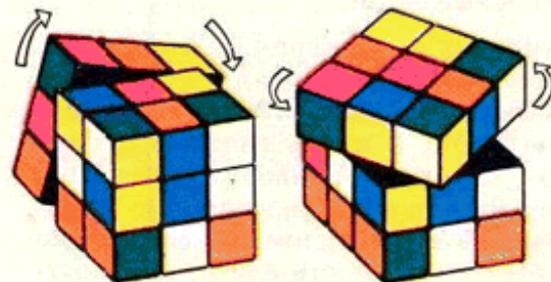


Рис. 1.

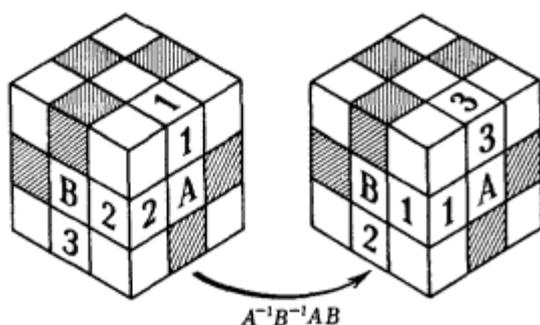


Рис. 2.



Рис. 3.

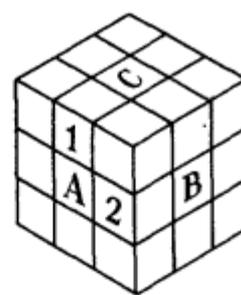


Рис. 4.

чает, что положение всех центральных кубиков в пространстве остается неизменным. Это означает также, что из девяти плоскостей куба мы будем поворачивать только шесть.

Если на рисунке некоторая центральная клетка отмечена буквой A , то поворот (не «средней») плитки, содержащей эту клетку, на 90° по часовой стрелке мы будем обозначать через A , а поворот этой же плитки на 90° против часовой стрелки будем обозначать через A^{-1} . Очевидно, $A^{-1}A^{-1}A^{-1}=A^{-3}$ и $A^2=A^{-2}$, где $A^2=A \cdot A$ и $A^{-2}=A^{-1} \cdot A^{-1}$.

Кубики, содержащие среднюю часть ребра большого куба, будем называть *средними*. Средний кубик всегда остается средним и смотрит наружу двумя клетками определенного цвета. Для каждой пары цветов (кроме тех пар цветов, которыми первоначально были раскрашены противоположные грани куба) имеется единственный средний кубик с клетками этих цветов.

Угловыми назовем кубики, занимающие в составе куба угловые места. Каждый угловой кубик всегда остается угловым и смотрит наружу тремя клетками, окрашенными в разные цвета. Сочетание этих трех цветов у каждого из угловых кубиков свое.

Основные этапы

Заманчивый, на первый взгляд, путь: постепенно увеличивая пятно одноцветных клеток, получить одноцветную грань, а потом взяться за другую — видимо, приводит лишь к непреодолимым трудностям. Не справившись с головоломкой, ее нередко портят — от злости или из любопытства к устройству шарнира. Мы на-

деемся, что предлагаемый ниже способ решения сделает головоломку доступной, но и он требует определенных усилий при реализации.

Предлагаемые действия разобьем на четыре больших этапа. Мы уже договорились, что в ходе решения головоломки центральные кубики не меняют своего положения в пространстве. Что касается средних кубиков, то каждый из них должен в процессе решения занять вполне определенное место: оказаться на ребре между двумя «своими» гранями куба, то есть теми гранями, чьи центральные клетки такого же цвета, как две клетки данного среднего кубика. Кроме того, он должен быть правильно повернут: его цветные клетки должны прилегать к центральным клеткам того же цвета. Совершенно аналогично обстоит дело с угловыми кубиками: у каждого из них есть свое место (на стыке трех граней с центральными клетками его цветов) и единственный правильный разворот. В соответствии с этим порядок наших действий будет следующим:

Этап 1: поставить на нужные места все средние кубики.

Этап 2: правильно повернуть на своих местах все средние кубики.

Этап 3: поставить на нужные места все угловые кубики.

Этап 4: правильно повернуть все угловые кубики.

Каждый из этапов мы будем выполнять только после того, как предыдущий этап полностью закончен. При этом очередной этап будем выполнять так, чтобы после его завершения оказались не нарушенными достижения предшествующих этапов.

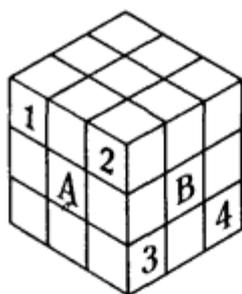


Рис. 5.



Рис. 6.

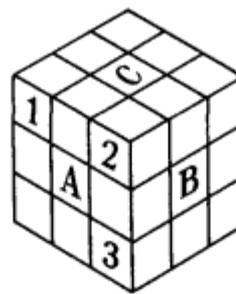


Рис. 7.

После выполнения второго этапа на каждой из граней куба образуется крест из пяти клеток одного цвета. После выполнения четвертого этапа задача окажется решенной — каждая грань куба станет одноцветной.

Невозможные положения

Достаточность предлагаемых ниже «комбинаций» для выполнения перечисленных этапов опирается на три свойства рассматриваемого шарнирного куба. В рамках этой статьи мы будем считать эти свойства экспериментальными фактами. Их можно, однако, доказать, решив задачи, придуманные В. Дубровским (см. Приложение).

Если кубики выведены из правильного положения только допустимыми вращениями (а не разборкой и новой сборкой всего устройства или перекраской граней), то не может возникнуть положение, при котором:

I. все средние кубики стоят на своих местах и только один из них повернут неправильно;

II. все средние кубики и стоят, и повернуты правильно, а все угловые кубики, кроме двух, стоят (в любых положениях) на своих местах;

III. все средние кубики и стоят, и повернуты правильно, а все угловые кубики стоят на своих местах и только один из них повернут неправильно.

Предварительные комбинации

Чтобы привыкнуть к тому, как записываются повороты, мы сначала рассмотрим несколько важных для дальнейшего стандартных комбинаций.

Первая комбинация $A^{-1}BA$ (в отличие от школьного учебника, это будет означать, что сначала совершается поворот A^{-1} , затем B , затем A) называется *сопряжением* элемента B с помощью элемента A . На рисунке 2 показано, как эта комбинация позволила собрать белую грань целиком, поставив белую клетку 1 на место желтой 2.

Вторая комбинация $A^{-1}B^{-1}AB$ называется *коммутатором* элементов A, B . Проверьте, что в положении куба, изображенном на рисунке 2, серые клетки остаются на месте, а средние кубики 1, 2, 3 *циклически переставляются*, то есть переходят по схеме $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Проследите еще, как переставляют средние кубики комбинации $ABA^{-1}B^{-1}$, $AB^{-1}A^{-1}B$, $A^2B^2A^2B^2$, $A^2BA^2B^{-1}$, $A^2B^{-1}A^2B$, $AB^2A^{-1}B^2$, $A^{-1}B^2AB^2$ — коммутаторы других поворотов (каких?).

Этап I: средние кубики — на место

Комбинация из семи поворотов

$$K_1 = A^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}BAC$$

взаимно переставляет местами средние кубики 1, 2 (рис. 3) и сохраняет местоположение остальных средних кубиков (проверьте!*).

Комбинация K_1 фактически позволяет менять местами любые два средних кубика. Если они не прилегали к одной грани куба или не были на ней соседними, то всегда можно вспомогательными поворотами (запомнив эти повороты по цвету центра поворачиваемой плитки) привести желаемые кубики в положение 1, 2 (рис. 3), переставить их комбинацией K_1 , а затем, в обратном направлении повторить сделанные вспомогательные повороты.

*) Если у вас нет экземпляра игрушки, советуем нарисовать развертку куба (чернилами на хорошем листе бумаги) и, пользуясь карандашом и ластиком, следить за передвижением клеток на развертке.

Очевидно, попарные перестановки средних кубиков позволяют осуществить этап 1: поставить на свои места все средние кубики.

Этап 2: повернем средние кубики

Комбинация из двенадцати поворотов

$$K_2 = (AB^{-1}A^{-1}B)(BC^{-1}B^{-1}C)(CA^{-1}C^{-1}A)$$

одновременно поворачивает в своих гнездах кубики 1, 2 (рис. 4) и не меняет ни местоположений, ни поворотов остальных средних кубиков (проверьте!).

Комбинация K_2 позволяет повернуть на своих местах любые два средних кубика. Действительно, если они не прилегали к одной грани куба или не были на ней соседними, то всегда можно вспомогательными поворотами (запомнив эти повороты по цвету центра поворачиваемой плитки) привести желаемые два кубика в положение 1, 2 (рис. 4), повернуть их комбинацией K_2 , а затем, в обратной очередности и в обратных направлениях повторить вспомогательные повороты.

Попарные совместные повороты средних кубиков позволяют осуществить этап 2, поскольку (ввиду свойства I) не может случиться, чтобы требовал поворота только один средний кубик.

Этап 3: угловые кубики — на место

Комбинация из двенадцати поворотов

$$K_3 = (ABA^{-1}B^{-1})^3$$

осуществляет одновременно перестановки кубиков 1, 2 и кубиков 3, 4 (рис. 5), сохраняет все достижения этапов 1, 2 и не изменяет местоположения угловых кубиков, отличных от 1, 2, 3, 4 (проверьте!).

Комбинация из двадцати четырех поворотов

$$K_4 = (ACA^{-1}C^{-1})^3(B^{-1}A^{-1}BA)^3$$

осуществляет перестановку кубиков 1, 2, 3 (рис. 6) по схеме $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, сохраняет все достижения этапов 1, 2 и не изменяет местоположения угловых кубиков, отличных от 1, 2, 3.

Поясним, как, пользуясь комбинациями K_3 и K_4 , осуществлять этап 3.

Допустим, что после завершения этапа 2 часть угловых кубиков не стоит на своих местах. Ввиду свойства II таких кубиков будет не менее, чем три. Выберем один из них и отметим его номером 1. Кубик, занимающий то место, куда должен встать кубик 1, отметим номером 2.

Если кубик 2 сам должен перейти на место кубика 1, то номером 3 отметим любой, отличный от первых двух и стоящий не на своем месте угловой кубик, а номером 4 — кубик, стоящий там, куда должен перейти кубик 3. Затем, с помощью вспомогательных поворотов (запоминая их) поставим кубики 1, 2 и 3, 4 в положение пар 1, 2, и 3, 4, изображенных на рисунке 5. С помощью комбинации K_3 осуществим перестановку $1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4$, после чего в обратной очередности и обратных на-

правлениях повторим вспомогательные повороты. В итоге, кроме ранее стоявших на своих местах угловых кубиков, заведомо попадут на свои места кубики 1, 2, 3.

Если же кубик 2 не должен был перейти на место кубика 1, то отметим номером 3 кубик, стоящий там, куда должен перейти кубик 2. Если кубик 3 не должен перейти на место кубика 1, то отметим номером 4 кубик, который стоит там, куда должен перейти кубик 3. После этого, как и выше, то есть с помощью вспомогательных поворотов и комбинации K_3 , осуществляем перестановку $1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4$, которая ставит на свои места кубики 1 и 3.

Остается случай, когда требуется перестановка кубиков $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. В этом случае, с помощью вспомогательных поворотов (запоминая их) ставим кубики 1, 2, 3 в каком-то порядке на места 1, 2, 3 (рис. 6). Одна из двух комбинаций K_4, K_4^{-1} , которые осуществляют перестановки мест $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, будет осуществлять перестановку кубиков $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ (находящихся сейчас на местах 1, 2, 3). Выполним именно эту комбинацию. После этого в обратной очередности и обратных направлениях повторим вспомогательные повороты. В итоге кубики 1, 2, 3 станут на место.

Повторяя указанный процесс, мы выполним этап 3 — поставим на свои места все угловые кубики.

Этап 4: повернем угловые кубики

Нам потребуются следующие две комбинации:

$$K_5 = [(A^{-1}CAC^{-1})(C^{-1}BCB^{-1})(B^{-1}ABA^{-1})]^2, \\ K_5^{-1} = [(AB^{-1}A^{-1}B)(BC^{-1}B^{-1}C)(CA^{-1}C^{-1}A)]^2.$$

Комбинация K_5 поворачивает одновременно каждый из кубиков 1, 2, 3 (рис. 7) вокруг оси, идущей от его центра к центру куба, на 120° по часовой стрелке. Комбинация K_5^{-1} поворачивает те же кубики против часовой стрелки. Местоположение и поворот любого из остальных кубиков при этом не меняются.

Знание комбинаций K_5 и K_5^{-1} позволяет совместно повернуть в желаемом направлении (но в одну и ту же сторону) любые три угловых кубика. Достаточно собрать их с помощью вспомогательных поворотов в одну грань, совместно повернуть с помощью комбинации K_5 или K_5^{-1} (в зависимости от нужного направления поворота), а затем вернуть на своим места поворотами, обратными вспомогательным.

Поясним теперь, как, пользуясь комбинациями K_5 и K_5^{-1} , осуществить этап 4.

Если после завершения этапа 3 имеются неправильно повернутые угловые кубики, то, ввиду свойства III, таких кубиков не менее двух.

Допустим, что их больше двух. Возьмем любые три из них. Хотя бы два из этих трех кубиков требуют поворота в одну и ту же сторону. Повернув в эту сторону все три кубика, мы уменьшим число неверно повернутых кубиков. Так мы придем к положению, когда неверно повернутых кубиков либо нет, либо ровно два.

Если неверно повернутых кубиков только два, они не могут оба требовать поворота в одну и ту же сторону. Иначе мы бы совместно повернули их и еще один кубик — появилось бы положение с одним неверно повернутым кубиком, что невозможно в силу III.

Итак, два неверно повернутых кубика требуют поворота в разные стороны. Повернем в нужную сторону один из этих кубиков и два кубика, ранее стоявших правильно. А затем — в другую сторону — эти два новых кубика и второй из ранее повернутых неправильно. В результате все кубики займут правильное положение!

Приложение*

Обозначим через S_0 правильное состояние куба. Занумеруем числами $i=1, 2, \dots, 8$ его вершины (угловые кубики) и числами $j=1, 2, \dots, 12$ его ребра (средние кубики). На ребрах выберем (и запомним) любую ориентацию (и нарисуем соответствующие стрелки на средних кубиках) так, чтобы параллельные ребра были сонаправлены.

Предположим, что в некотором законном состоянии** S куба j -й средний кубик попал на ребро j' ; сравним ориентацию ребра j' (которую мы запомнили) со стрелкой, нарисованной на j -м кубике. Обозначим через $n_j(S)$ величину, равную 0, если указанные ориентации совпадают, и равную 1 в противном случае. Если сумма

$$n_1(S) + n_2(S) + \dots + n_{12}(S)$$

четна, мы полагаем $n(S) = 0$, иначе $n(S) = 1$; можно сказать, что $n(S)$ — это «четность суммарного поворота средних кубиков». Докажите, что

1. Величина n является инвариантом, то есть одинакова при всех законных состояниях куба: $n(S) = n(S_0) = 0$. (Указание. Достаточно показать, что $n(S)$ не меняется при любом повороте одной плитки).

2. В законном состоянии куба не может быть повернут ровно один средний кубик (свойство I, с. 19). (Указание. В таком состоянии $n(S) = 1$).

Вспомним, что положение центральных клеток куба в пространстве не меняется при поворотах; для определенности предположим, что нижний центральный кубик — зеленый, верхний — синий; эти два цвета будем считать выделенными. Возьмем i -й угловой кубик нашего куба, находящегося в состоянии S . Ровно одна клетка углового кубика выделена (почему?). Если эта клетка горизонтальна, положим (по определению) $N_i(S) = 0$; если эта клетка становится горизонтальной при повороте кубика на 120° (по часовой стрелке) вокруг диагонали большого куба, положим $N_i(S) = 1$; если же горизонтальность получается поворотом на

240° , то $N_i(S) = -1$. Если сумма

$$N_1(S) + N_2(S) + \dots + N_8(S)$$

при делении на 3 дает в остатке 0, 1, 2, мы полагаем величину $N(S)$ равной 0, 1, -1 соответственно. Можно сказать, что величина N — это «направление суммарного поворота угловых кубиков». Докажите, что

3. Величина N является инвариантом, то есть одинакова при всех законных состояниях куба: $N(S) = N(S_0) = 0$.

4. В законном состоянии у куба не может быть повернут неправильно ровно один угловой кубик (свойство III, с. 19).

Предположим теперь, что в состоянии S средние кубики с номерами 1, 2, ..., 12 занимают места с номерами j_1, j_2, \dots, j_{12} соответственно, а угловые кубики 1, 2, ..., 8 — места i_1, i_2, \dots, i_8 . Наборы $I(S) = (i_1, i_2, \dots, i_8)$ и $J(S) = (j_1, j_2, \dots, j_{12})$ — это просто номера кубиков, записанные в другом порядке; математики такие наборы называют перестановками. Перестановку называют четной, если в ней имеется четное число беспорядков, то есть четное число пар цифр, стоящих не в порядке возрастания, и нечетной в противном случае. Например, перестановка (12453687) нечетна, так как она содержит 3 беспорядка: (4, 3), (5, 3), (8, 7). Обозначим через $\epsilon(S)$ число, равное 0, если $I(S)$ и $J(S)$ имеют одинаковую четность, и равное 1 в противном случае. Можно сказать, что ϵ — это «четность расстановки всех кубиков». Докажите, что

5. Величина ϵ является инвариантом, причем $\epsilon(S) = \epsilon(S_0) = 0$ для любого законного состояния S . (Указание. Покажите, что при любом повороте плитки меняется четность I и четность J).

6. Ровно два угловых кубика не могут поменяться местами (свойство II, с. 19).

7*. Состояние S куба законно тогда и только тогда, когда

$$n(S) = N(S) = \epsilon(S) = 0.$$

8*. Все состояния (в том числе полученные разборкой и сборкой куба) разбиваются на 12 классов; при этом два состояния S, S' переводятся друг в друга поворотами плит тогда и только тогда, когда $n(S) = n(S')$, $N(S) = N(S')$, $\epsilon(S) = \epsilon(S')$.

*Автор Приложения — В. Дубровский.

** То есть в состоянии, полученном из правильного поворотами плиток (без перекрашивания клеток или разборки кубика).

Три параболы

Ф.Нилов, А.Заславский

Мы будем рассматривать следующую конфигурацию: треугольник и три параболы, каждая из которых проходит через две его вершины и касается в этих вершинах соответствующих сторон. Основная задача — изучение свойств этой конфигурации.

1 Необходимые теоретические сведения

Определение 1. *Параболой* называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки и данной прямой. Эти точка и прямая называются соответственно *фокусом* и *директрисой* параболы.

Определение 2. Пусть дан треугольник ABC и произвольная точка P . Прямые, симметричные прямым AP , BP , CP относительно биссектрис соответствующих углов, пересекаются в одной точке, которая называется *изогонально сопряженной* P . Точка L , изогонально сопряженная центру тяжести M , называется *точкой Лемуана*.

Определение 3. Треугольник, образованный проекциями точки P на стороны треугольника ABC , называется *педальным треугольником* P относительно ABC . Окружность, описанная около педального треугольника, называется *педальной окружностью* P .

Определение 4. Два треугольника называются *перспективными*, если прямые, соединяющие их соответствующие вершины, пересекаются в одной точке, которая называется *центром перспективы*.

Теорема Дезарга. Два треугольника перспективны тогда и только тогда, когда точки пересечения их соответствующих сторон лежат на одной прямой. Эта прямая называется *осью перспективы*.

Определение 5. Два треугольника называются *ортологичными*, если перпендикуляры, опущенные из вершин одного на соответствующие стороны другого, пересекаются в одной точке, которая называется *центром ортологичности*. Свойство ортологичности является симметричным, так что ортологичные треугольники имеют два, в общем случае различных, центра ортологичности.

В любом треугольнике точки M , O и ортоцентр H лежат на одной прямой, которая называется *прямой Эйлера*. Середины сторон и основания высот лежат на одной окружности, которая называется *окружностью Эйлера*.

Определение 6. Точки Q_1 , Q_2 , такие что $\angle Q_1AB = \angle Q_1BC = \angle Q_1CA$ и $\angle Q_2BA = \angle Q_2CB = \angle Q_2AC$, называются *точками Брокара* треугольника ABC . Угол $\phi = \angle Q_1AB = \angle Q_2BA$ называется *углом Брокара*.

Для любого неравностороннего треугольника существуют две точки, педальные треугольники которых правильные. Эти точки инверсны друг другу относительно описанной окружности треугольника. Та, которая лежит внутри окружности, называется *первой точкой Аполлония*, а другая — *второй точкой Аполлония*. Точки, изогонально сопряженные точкам Аполлония называются *первой и второй точками Торричелли*.

2 Вводные задачи

1. Докажите *оптическое свойство* параболы: прямая, касающаяся параболы с фокусом F в точке X , образует равные углы с прямой FX и осью симметрии параболы.
2. Докажите, что точка, симметричная фокусу параболы относительно касательной к ней, лежит на директрисе параболы, причем совпадает с проекцией на директрису точки касания.
3. Пусть касательные к параболе в точках X и Y пересекаются в точке P . Докажите, что P — центр окружности, описанной около треугольника FXY , где F — фокус параболы, а X', Y' — проекции X и Y на директрису.
4. Докажите, что в обозначениях предыдущей задачи медиана треугольника PXY параллельна оси параболы.
5. Докажите, что в обозначениях задачи 3 ось параболы и прямая PF образуют равные углы с биссектрисой угла P .
6. Докажите, что pedalные окружности изогонально сопряженных точек совпадают. Пусть дан треугольник ABC . Обозначим параболу, проходящую через A и B и касающуюся в этих точках прямых AC и BC , через Π_c , а ее фокус — через F_c . Аналогично определим параболы Π_a, Π_b и их фокусы F_a, F_b .
7. Докажите, что Π_a, Π_b имеют, помимо C , ровно одну общую точку C' .
8. Определим точки A', B' аналогично точке C' . Докажите, что треугольники ABC и $A'B'C'$ перспективны.
9. Докажите, что треугольники ABC и $F_a F_b F_c$ перспективны.
10. Докажите, что треугольник, образованный директрисами парабол, перспективен треугольнику ABC .

Три параболы

3 Основные задачи

11. Докажите, что F_cC — биссектриса угла AF_cB .
12. Докажите, что точки A , B , F_c и центр O описанной около ABC окружности лежат на одной окружности.
13. Докажите, что парабола P_c касается средней линии, параллельной AB .
14. Докажите, что точки F_a , F_b , F_c , O , L лежат на одной окружности.
15. Докажите, что директриса параболы P_c проходит через точку пересечения медианы, проведенной из вершины C , с окружностью Эйлера.
16. Докажите, что центры тяжести ABC и треугольника, образованного директрисами парабол, совпадают.
17. Докажите, что ABC и треугольник, образованный директрисами парабол, ортологичны и их центры ортологичности совпадают.
18. Докажите, что прямая Эйлера треугольника ABC проходит через точку Лемуана треугольника, образованного директрисами.
19. Докажите, что прямая Эйлера треугольника, образованного директрисами, проходит через точку L .
20. Пусть прямые AF_a , BF_b , CF_c пересекают противоположные стороны треугольника ABC в точках P_a , P_b , P_c . Докажите, что треугольник $P_aP_bP_c$ перспективен треугольнику, образованному директрисами парабол.
21. Докажите, что попарные центры перспективы ABC , $P_aP_bP_c$ и треугольника, образованного директрисами, лежат на одной прямой.
22. Докажите, что треугольник, образованный директрисами перспективен ортотреугольнику ABC .
23. Докажите, что углы Брокара треугольника ABC и треугольника, образованного директрисами, равны.

Три параболы

4 Дополнительные задачи

24. Пусть T — любая точка Торричелли треугольника ABC , T_d — соответствующая точка Торричелли треугольника, образованного директрисами. Докажите, что прямые, соединяющие T и T_d с соответствующими вершинами треугольников, параллельны.
25. Докажите, что прямая TT_d и прямая, соединяющая соответствующие точки Аполлония, проходит через центр тяжести ABC .
26. Вычислить $\frac{S'}{S}$, где S' — площадь криволинейного "параболического" треугольника $A'B'C'$, а S — площадь ABC .
27. Докажите, что N_1N_2 делит пополам отрезок, соединяющий центры тяжести ABC и $P_aP_bP_c$, где N_1 и N_2 — центры перспективы треугольника, образованного директрисами, и треугольников ABC и $P_aP_bP_c$ соответственно.
28. Пусть F'_a, F'_b, F'_c — точки, изогонально сопряжённые точкам F_a, F_b, F_c , H — ортоцентр, M — точка пересечения медиан. Докажите, что
- F'_a, F'_b, F'_c лежат на окружности, построенной на отрезке HM как на диаметре.
 - точки F_a и F'_a равноудалены от центра окружности Эйлера треугольника ABC .
- Назовём *проекцией* точки C на параболу Π_c точку параболы, ближайшую к C . Обозначим через C^* проекцию точки C на параболу Π_c .
29. Докажите, что прямая CC^* перпендикулярна параболе Π_c .
30. Докажите, что $\angle AC^*C = \angle BC^*C$.
31. Обозначим через C_1 и C_2 точки пересечения касательной, проведённой к параболе Π_c в точке C^* , с CA и CB . Обозначим через C^{**} точку пересечения медианы треугольника ABC , проведённой из вершины C с C_1C_2 . Докажите, что $C_1C^* = C^{**}C_2$.
Определим точки A^* и B^* аналогично C^* .
32. (**Гипотеза**) Прямые AA^* , BB^* и CC^* пересекаются в одной точке.

Три параболы

5 Похожий сюжет

Рассмотрим множество прямых, делящих периметр треугольника ABC пополам.

33. Докажите, что эти прямые огибают три параболы, каждая из которых касается двух прямых, содержащих стороны треугольника ABC , в тех же точках, что и соответствующая вневписанная окружность.

Обозначим через Π_A параболу, которая касается прямых AB и AC . Аналогично определим Π_B и Π_C .

34. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC является центром ортологичности треугольника ABC и треугольника, образованного директрисами парабол Π_A , Π_B и Π_C .
35. Докажите, что ортоцентр треугольника ABC лежит на прямой Эйлера треугольника, образованного директрисами парабол.
36. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC и центр описанной окружности треугольника, образованного директрисами парабол, симметричны относительно центра окружности Эйлера треугольника ABC .
37. Пусть T — любая точка Торричелли треугольника ABC , T_d — соответствующая точка Торричелли треугольника, образованного директрисами. Докажите, что прямые, соединяющие T и T_d с соответствующими вершинами треугольников, параллельны.

6 Похожий сюжет №2

Рассмотрим точки A_c и A_b на сторонах AB и AC такие, что $CA = CA_c$ и $BA = BA_b$. Рассмотрим параболу Π'_a , касающуюся сторон AC и AB в точках A_b и A_c . Аналогично определим параболы Π'_b и Π'_c .

38. Докажите, что фокусы парабол Π'_a , Π'_b и Π'_c совпадают с точками F'_a , F'_b и F'_c .
39. Докажите, что треугольник, образованный директрисами парабол Π'_a , Π'_b и Π'_c , перспективен треугольнику ABC .
40. Докажите, что треугольник, образованный директрисами парабол Π'_a , Π'_b и Π'_c , ортологичен треугольнику ABC , причём их центры ортологичности совпадают.
41. Докажите, что треугольник, образованный директрисами парабол Π'_a , Π'_b и Π'_c , перспективен ортотреугольнику треугольника ABC .
42. Обозначим через O' и M' центр описанной окружности и центр тяжести треугольника, образованного директрисами. Докажите, что прямые $O'M$ и $M'O$ пересекаются в точке Лемуана треугольника ABC .

Три параболы
Решения
Ф.Нилов, А.Заславский

2 Вводные задачи

1. Обозначим проекцию точки X на директрису параболы через X' . Тогда $FX = XX'$. Утверждение задачи равносильно тому, что прямая l , содержащая биссектрису угла $X'XF$, является касательной к параболе. Предположим противное. Тогда l не является касательной и пересекает параболу в некоторой точке Y , отличной от X . Заметим, что треугольники FXY и $X'XY$ равны. Значит, $FY = YX'$. Обозначим через Y' проекцию точки Y на директрису параболы. Тогда $YY' = FY = YX'$. Значит, $YY' = YX'$. Но этого быть не может, поскольку отрезки YY' и YX' являются гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника $YX'Y'$.
2. Обозначим через l касательную, через X — точку касания, через F — фокус, через X' — проекцию X на директрису. По определению параболы $FX = XX'$. Из задачи 1 следует, что l содержит биссектрису равнобедренного треугольника FXX' . Поэтому l является серединным перпендикуляром к отрезку FX' . Значит, точки X' и F симметричны относительно l .
3. По задаче 2 прямые PX и PY являются серединными перпендикулярами к отрезкам FX' и FY' . Поэтому их точка пересечения P является центром описанной окружности треугольника $FX'Y'$.
4. Рассмотрим среднюю линию трапеции $XX'Y'Y$. Она перпендикулярна директрисе и поэтому параллельна оси параболы. Кроме того, она является медианой треугольника PXY , поскольку она проходит через середину M отрезка XY и через точку P (по задаче 3). Поэтому медиана PM параллельна оси параболы.
5. Рассмотрим прямую l , параллельную оси параболы и проходящую через P . Утверждение задачи равносильно тому что угол ϕ между прямыми l и PX равен углу FPY . Обозначим через X'' и Y'' проекции точки F на прямые PX и PY . По задаче 2 точки X'' и Y'' являются серединами отрезков FX' и FY' . Поэтому прямые $X'Y'$ и $X''Y''$ параллельны. Значит, прямые l и $X''Y''$ перпендикулярны. Поэтому $\angle\phi = 90^\circ - \angle PX''Y'' = 90^\circ - \angle PFY'' = \angle FPY$, что и требовалось.
6. Обозначим через P и Q изогонально сопряженные точки. Обозначим через P_c и Q_c , P_a и Q_a , P_b и Q_b точки, симметричные P и Q относительно сторон AB , BC и AC . Ясно, что $BP_c = BP = BP_a$ и что $\angle P_cBP_a = 2\angle B$. Заметим, что $\angle QBC = \angle PBA = \angle ABP_c$. Поэтому $\angle P_cBQ = \angle B = 1/2\angle P_cBP_a = \angle P_aBQ$. Поэтому $QP_c = QP_a$. Аналогично $QP_a = QP_b$ и $PQ_c = PQ_a = PQ_b$. Понятно, что окружность ω центром в середине отрезка PQ и радиусом, равным $1/2QP_c$ проходит через проекцию точки P на сторону AB . Аналогично ω проходит и через остальные вершины педальных треугольников точек P и Q .
7. Поскольку параболы Π_a и Π_b вписаны в углы A и B , то их точки пересечения должны принадлежать пересечению углов A и B . Значит, точки пересечения парабол лежат

внутри или на границе треугольника ABC . Понятно, что C — не единственная точка пересечения парабол: иначе параболы касались бы в точке C и касательные к параболом в точке C совпадали, но это не так. Значит, существует вторая точка пересечения парабол C' . Ясно, что точек пересечения, отличных от C и лежащих на границе треугольника ABC , нет. Поэтому все точки пересечения, отличные от C , лежат внутри треугольника ABC . Предположим, что у Π_a и Π_b есть третья точка пересечения C'' . Легко убедиться в том, что любые четыре точки параболы являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Поскольку точки A, C, C' и C'' лежат на Π_b , то $ACC'C''$ — выпуклый четырёхугольник. По аналогичным соображениям $BCC'C''$ — выпуклый, чего быть, очевидно, не может. Поэтому Π_a и Π_b имеют ровно две общие точки.

8. Известно, что образ параболы при произвольном аффинном преобразовании является параболой. Рассмотрим аффинное преобразование, которое переводит треугольник ABC в правильный. Понятно, что в правильном треугольнике рассматриваемые параболы пересекаются на его медианах. Поэтому прямые AA' , BB' и CC' являются медианами треугольника ABC и пересекаются в одной точке.
9. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника ABC . Из задач 4 и 5 следует, что прямые AM и AF_a симметричны относительно биссектрисы угла A . Поэтому прямые AF_a , BF_b и CF_c пересекаются в точке Лемуана L треугольника ABC .
10. Обозначим через d_a директрису параболы Π_a . Обозначим точку пересечения d_a и BC через A' . Обозначим проекции точек B и C на d_a через B_1 и C_1 . Ясно, что $BB_1 = BF_a$ и $CC_1 = CF_a$. Из подобия треугольников $A'BB_1$ и $A'CC_1$ получаем, что $\frac{A'B}{A'C} = \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{BF_a}{CF_a}$. Из задач 1 и 5 следует, что $\angle F_aBA = \angle F_aAC$ и $\angle F_aCA = \angle F_aAB$. По теореме синусов для треугольника F_aBA получаем, что $BF_a = \frac{\sin(\angle F_aAB) \cdot AF_a}{\sin(\angle ABF_a)}$. Аналогично $CF_a = \frac{\sin(\angle F_aAC) \cdot AF_a}{\sin(\angle ACF_a)}$. Поэтому $\frac{BF_a}{CF_a} = \frac{\sin^2(\angle F_aAB)}{\sin^2(\angle F_aAC)}$. Обозначим через d_b и d_c директрисы парабол Π_b и Π_c . Обозначим через B' точку пересечения d_b с AC , а через C' — точку пересечения d_c с AB . Тогда

$$\frac{A'B \cdot B'C \cdot C'A}{A'C \cdot B'A \cdot C'B} = \frac{BF_a \cdot CF_b \cdot AF_c}{CF_a \cdot AF_b \cdot BF_c} = \frac{\sin^2(\angle F_aAB) \cdot \sin^2(\angle F_bBC) \cdot \sin^2(\angle F_cCB)}{\sin^2(\angle F_aAC) \cdot \sin^2(\angle F_bBA) \cdot \sin^2(\angle F_cCA)} = 1.$$

Последнее равенство в этой цепочке следует из тригонометрической теоремы Чебы, записанной для чевиан AF_a , BF_b и CF_c . Следовательно, по теореме Менелая точки A' , B' и C' лежат на одной прямой. Поэтому из теоремы Дезарга следует перспективность рассматриваемых в задаче треугольников.

Три параболы
Решения
Ф.Нилов, А.Заславский

3 Основные задачи

11. Обозначим середину отрезка AB через C_0 . Тогда $\angle C_0CB = \angle F_cCA$. Из задач 1, 4 и 5 следует, что $\angle C_0CB = \angle F_cBC$ и $\angle C_0CA = \angle F_cAC$. Поэтому $\angle AF_cC = 180^\circ - \angle F_cAC - \angle F_cCA = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - \angle F_cCB - \angle F_cBC = \angle BF_cC$.
12. Из решения задачи 11 следует, что $\angle AF_cC = \angle BF_cC = 180^\circ - \angle C$. Поэтому $\angle AF_cB = 360^\circ - 2(180^\circ - \angle C) = 2\angle C = \angle AOB$. Значит, точки A, B, F_c и O лежат на одной окружности ω .
13. Обозначим через A_0 и B_0 середины сторон BC и AC . Из задачи 5 легко выводится следующая полезная лемма.

Лемма. Описанная окружность треугольника, описанного около некоторой параболы проходит через фокус этой параболы.

Поэтому достаточно доказать, что описанная окружность треугольника A_0B_0C проходит через F_c . Обозначим через C' точку пересечения CF_c с описанной окружностью треугольника ABC . Из задач 1 и 5 следует, что $\angle F_cBC = \angle F_cCA$ и $\angle F_cAC = \angle F_cCB$. Поэтому $\angle C'BA = \angle F_cCA = \angle F_cBC$ и $\angle BAC' = \angle F_cCB$. Значит, треугольники F_cCB и $C'AB$ подобны и $\frac{CF_c}{C'A} = \frac{BF_c}{BC'}$. По задаче 11 $\angle BF_cC' = \angle AF_cC'$. Кроме того, $\angle C'BF_c = \angle ABC = \angle AC'F_c$. Поэтому треугольники F_cBC' и $F_cC'A$ подобны. Значит, $\frac{F_cC'}{C'A} = \frac{BF_c}{BC'} = \frac{CF_c}{C'A}$. Следовательно, $F_cC = F_cC'$. При гомотетии с центром в точке C и коэффициентом $\frac{1}{2}$ точки B и A переходят в A_0 и B_0 , и C' переходит в F_c . Откуда и следует утверждение.

14. По задаче 11 точки A, B, F_c и O лежат на одной окружности ω . Рассмотрим точку O' пересечения прямой CF_c с окружностью ω . По задаче 10 $\angle AF_cO' = \angle BF_cO'$. Поэтому O' — середина дуги AB окружности ω , т.е. отрезок OO' является диаметром ω . Значит, $\angle LF_cO = \angle OF_cO' = 90^\circ$. Аналогично $\angle LF_aO = \angle LF_bO = 90^\circ$. Следовательно, точки F_a, F_b и F_c лежат на окружности с диаметром OL .
15. Обозначим через A_0 и B_0 середины сторон BC и AC . Рассмотрим точку F'_c , симметричную точке F_c относительно A_0B_0 . По задаче 13 A_0B_0 касается параболы Π_c . Поэтому по задаче 2 точка F' лежит на директрисе Π_c . Из решения задачи 13 следует, что четырёхугольник $CA_0F'_cB_0$ вписанный. Поэтому $\angle A_0F'_cB_0 = \angle A_0F_cB_0 = 180^\circ - \angle C$. Значит, точка F'_c лежит на окружности Эйлера треугольника ABC . Обозначим через M' середину отрезка A_0B_0 . Из решения задачи 13 следует, что прямая A_1B_1 делит угол $CM'F_c$ пополам. Значит, точка F'_c лежит на медиане CM' . Поэтому точка пересечения медианы и окружности Эйлера лежит на директрисе параболы Π_c .
16. Пусть A'', B'', C'' — точки пересечения d_b и d_c , d_a и d_c , d_a и d_b . Обозначим через A', B' и C' точки пересечения медиан треугольника ABC с его окружностью Эйлера.

По задаче 15 эти точки лежат на сторонах $A''B''C''$. Обозначим через C_0 середину AB . Пусть G — центр тяжести треугольника $A''B''C''$. Заметим, что

$$\frac{\sin(\angle GC''B'')}{\sin(\angle GC''A'')} = \frac{\sin(\angle B'')}{\sin(\angle A'')} = \frac{\sin(\angle C_0MA)}{\sin(\angle C_0MB)} = \frac{MB}{MA} = \frac{MA'}{MB'} = \frac{\sin(\angle MC''B'')}{\sin(\angle MC''A'')}.$$

Здесь первое и третье равенства следуют из того, что $C''G$ и MC_1 — медианы треугольников $A''B''C''$ и AMB . Поэтому $\angle GC''B'' = \angle MC''B''$. Значит, точка G лежит на $C''M$. Аналогично G лежит на $A''M$ и B'' . Следовательно, точки G и M совпадают.

17. Из задачи 4 следует, что прямая AM перпендикулярна d_a . Аналогично BM перпендикулярна d_b и CM перпендикулярна d_c . Поэтому рассматриваемые треугольники ортологичны и точка M является центром их ортологичности. Обозначим через A' , B' и C' точки пересечения директрис d_b и d_c , d_a и d_c , d_a и d_b . То, что медианы треугольника ABC перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника $A'B'C'$, можно записать так:

$$(1) (\overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{A'B'}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0.$$

$$(2) \overrightarrow{A'B'} \cdot (2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = 0.$$

$$(3) \overrightarrow{C'A'} \cdot (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = 0.$$

Складывая (1) и (3) и вычитая из результата (2), получаем, что $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{AB}$. Из этого и равенства (1) получаем, что $(\overrightarrow{C'A'} - \overrightarrow{A'B'}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0$, что равносильно тому, что прямые $A'G$ и BC перпендикулярны, где G — центр тяжести $A'B'C'$. По задаче 16 точки G и M совпадают. Значит, прямые $A'M$ и BC перпендикулярны. Аналогично перпендикулярны прямые $B'M$ и AC , $C'M$ и AB . Поэтому центры ортологичности треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают с точкой M .

18. Поскольку директриса d_a перпендикулярна медиане AA_0 , то из задачи 15 следует, что она проходит через точку A'' пересечения высоты AA' с окружностью Эйлера. Аналогично точки пересечения B'' и C'' окружности Эйлера с высотами BB' и CC' лежат на d_b и d_c . Заметим, что окружность Эйлера треугольника ABC является pedalной окружностью точки M относительно треугольника, образованного директрисами. По задаче 16 точка M является точкой пересечения медиан треугольника, образованного директрисами. Поэтому прямые $A''L'$, $B''L'$ и $C''L'$ параллельны соответствующим медианам треугольника ABC , где L' — точка Лемуана треугольника, образованного директрисами. Как известно, треугольники $A''B''C''$ и ABC гомотетичны с центром гомотетии H и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Следовательно, L' является серединой отрезка HM , поскольку L' является точкой пересечения медиан треугольника $A''B''C''$. Откуда и следует утверждение.

19. Обозначим через T треугольник, образованный директрисами. Рассмотрим параболы Π'_a , Π'_b и Π'_c , касающиеся сторон треугольника T в его вершинах. Обозначим через T' треугольник, образованный директрисами этих парабол. Заметим, что соответствующие стороны треугольников T' и ABC перпендикулярны соответствующим медианам треугольника T . Поэтому они параллельны. Поэтому треугольники T' и ABC гомотетичны, причём их центр гомотетии совпадает с M , поскольку по задаче 16 центры тяжести T' и ABC совпадают. Обозначим точку Лемуана треугольника T' через L' . Из гомотетичности T' и ABC следует, что точки M , L и L' лежат на одной

прямой, где L — точка Лемуана треугольника ABC . По задаче 18 точка L' лежит на прямой Эйлера треугольника T . Значит, прямая, проходящая через точки L , M и L' совпадает с прямой Эйлера треугольника T . Откуда и следует утверждение задачи.

20. Обозначим через C' точку пересечения прямых AB и P_aP_b . Заметим, что четвёрка точек C' , P_c , A и B является гармонической, т.е. $\frac{C'A}{C'B} = \frac{AP_c}{P_cB}$. Из задачи 11 следует, что $\frac{AP_c}{P_cB} = \frac{AF_c}{F_cB}$. Обозначим через C'' точку пересечения d_c и AB . Из решения задачи 10 следует, что $\frac{C''A}{C''B} = \frac{AF_c}{F_cB}$. Поэтому $\frac{C'A}{C'B} = \frac{AF_c}{F_cB} = \frac{C''A}{C''B}$. Значит, точки C' и C'' совпадают. Из решения задачи 10 следует, что точки A' , B'' и C'' лежат на одной прямой. Поэтому и точки A' , B' и C' лежат на одной прямой и из теоремы Дезарга следует перспективность треугольников ABC и $P_aP_bP_c$.

21. Из решения задачи 20 следует, что прямые перспективы треугольников ABC , $P_aP_bP_c$ и треугольника, образованного директрисами, совпадают. Осталось лишь воспользоваться следующей леммой.

Лемма. Центры перспективы трёх взаимно перспективных треугольников, оси перспективы которых совпадают, лежат на одной прямой.

Доказательство леммы. Рассмотрим проективное преобразование, которое переводит общую ось перспективы треугольников в бесконечно удалённую прямую. При таком преобразовании рассматриваемые треугольники перейдут в гомотетичные треугольники. По теореме о трёх центрах гомотетии центры перспективы этих треугольников лежат на одной прямой. Откуда и следует лемма.

22. Обозначим через A_1 , B_1 и C_1 середины сторон треугольника ABC , а через A_2 , B_2 и C_2 — основания соответствующих высот. Пусть C''' — точка пересечения медианы CC_1 и окружности Эйлера. По задаче 15 C''' принадлежит d_c . Обозначим через C' точку пересечения d_c и $A'B'$, а через C'' — точку пересечения CC_1 и A_2B_2 . Заметим, что $B_2C_1 = AC_1 = BC_1 = A_2C_1$. Поэтому $\angle B_2C'''C_1 = \angle A_2C'''C_1$, поскольку $A_2C'''B_2C_1$ — вписанный. По задаче 5 d_c перпендикулярна $C'''C''$. Поэтому $C'''C'$ является биссектрисой внешнего угла C'' . Значит, $\frac{C'A_2}{C'B_2} = \frac{C''A_2}{C''B_2}$. Аналогично $\frac{B'C_2}{B'A_2} = \frac{B''C_2}{B''A_2}$ и $\frac{A'B_2}{A'C_2} = \frac{A''B_2}{A''C_2}$, где A' и B' — точки пересечения d_a и B_2C_2 , d_b и A_2C_2 , а A'' и B'' — точки пересечения медиан AA_1 и BB_1 с окружностью Эйлера. Заметим, что

$$\frac{C'A_2 \cdot B'C_2 \cdot A'B_2}{C'B_2 \cdot B'A_2 \cdot A'C_2} = \frac{C''A_2 \cdot B''C_2 \cdot A''B_2}{C''B_2 \cdot B''A_2 \cdot A''C_2} = 1.$$

Поэтому по теореме Менелая точки A' , B' , C' лежат на одной прямой и по теореме Дезарга треугольник, образованный директрисами, и ортотреугольник перспективны.

23. Как известно, из медиан треугольника можно составить треугольник. Рассмотрим треугольник, составленный из медиан треугольника ABC . Из задачи 5 следует, что углы треугольника, образованного директрисами, равны углам треугольника, образованного медианами. Поэтому достаточно доказать, что равны углы Брокара треугольника ABC и треугольника, составленного из его медиан. Воспользуемся следующими формулами, справедливыми для произвольного треугольника:

$$(1) \operatorname{ctg} \phi = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma.$$

$$(2) \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

$$(3) S = \frac{3}{4}S_m.$$

$$(4) a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{4}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2).$$

где α , β и γ — углы треугольника, а ϕ — его угол Брокара; S и S_m — площади данного треугольника и треугольника, составленного из его медиан; a , b и c — длины стороны треугольника; m_a , m_b и m_c — длины его медиан.

Применяя эти формулы к треугольнику ABC , получаем, что

$$\operatorname{ctg} \phi = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{4S_m} = \operatorname{ctg} \phi_m,$$

где ϕ_m — угол Брокара треугольника, составленного из медиан. Значит, $\phi = \phi_m$, что и требовалось.

Three parabolas

F.Nilov, A.Zaslavsky

We will examine the properties of the next configuration: a triangle and three parabolas, each passing through two vertices and touching in these vertices the respective sidelines.

1 Necessary definitions and theorems

Definition 1. A *parabola* is the locus of points with equal distances from a fixed point F and a fixed line l . F is the *focus* and l is the *directrix* of the parabola.

Definition 2. Given triangle ABC and point P . Then the reflections of lines AP , BP , CP in respective bisectors concur in point P' . This point is called *isogonally conjugate* to P . Point L , isogonally conjugate to the centroid M , is called *the Lemoine point*.

Definition 3. The projections of point P to the sidelines of ABC form the triangle called *the pedal triangle* of P wrt ABC . The circumcircle of the pedal triangle is called *the pedal circle* of P .

Definition 4. The triangles ABC and $A'B'C'$ are called *perspective* if the lines AA' , BB' and CC' concur. The common point of these lines is called *the perspective center*.

The Desargues theorem. Two triangles are perspective iff the common points of their respective sidelines are collinear. The line passing through these points is called *the perspective axis*.

Definition 5. Triangles ABC and $A'B'C'$ are called *orthological* if the perpendiculars from A to $B'C'$, from B to $A'C'$ and from C to $A'B'$ concur. The common point of these perpendiculars is called *the orthology center*. This property is reciprocal, so the orthological triangles have two orthology centers, distinct in general.

The centroid M , the circumcenter O and the orthocenter H of an arbitrary triangle lie on the line called *the Euler line*. The midpoints of the sides and the feet of the altitudes lie on the circle called *the Euler circle*.

Definition 6. For an arbitrary triangle ABC , there exist two points Q_1 , Q_2 , such that $\angle Q_1AB = \angle Q_1BC = \angle Q_1CA$ and $\angle Q_2BA = \angle Q_2CB = \angle Q_2AC$. These points are called *the Brocard points* of ABC . The angle $\phi = \angle Q_1AB = \angle Q_2BA$ is called *the Brocard angle*.

For any non-regular triangle there exist two points with regular pedal triangle. These points are inverse wrt the circumcircle of the triangle. The point lying inside the circumcircle is called *the first Apollonius point*, another point is called *the second Apollonius point*. Two points isogonally conjugate to the Apollonius points are called *the first and the second Torricelli points*.

2 Introductory problems

1. Prove *the optic property* of the parabola: the tangent to a parabola in a point X forms equal angles with the line FX and the axis of parabola.
2. Prove that the reflection of the focus in the tangent to the parabola in point X coincides with the projection of X to the directrix.
3. Let P be the common point of tangents to parabola in points X and Y . Prove that P is the circumcenter of triangle $FX'Y'$, where X' , Y' are the projections of X and Y to the directrix.
4. Prove that in notation of the previous problem, the median of PXY is parallel to the axis of parabola.
5. Prove that in notation of problem 3, the bisector of angle P forms equal angles with the line PF and the axis of the parabola.
6. Prove that two isogonally conjugate points have common pedal circle.
Given triangle ABC . Denote by Π_c the parabola touching the lines AC и BC in points A and B . Furthermore denote by F_c the focus of Π_c . The parabolas Π_a , Π_b and their focuses F_a , F_b are defined similarly.
7. Prove that Π_a and Π_b have only one common point C' , different from C .
8. Define points A' , B' similarly to C' . Prove that triangles ABC and $A'B'C'$ are perspective.
9. Prove that the triangles ABC and $F_aF_bF_c$ are perspective.
10. Prove that the triangle formed by the directrices of Π_a , Π_b , Π_c is perspective to ABC .

3 Basic problems

11. Prove that F_cC is the bisector of angle AF_cB .
12. Prove that A, B, F_c and the circumcenter O of ABC are cocyclic.
13. Prove that the medial line parallel to AB touches Π_c .
14. Prove that F_a, F_b, F_c, O, L are cocyclic.
15. Prove that the directrix of Π_c , the median from C and the Euler circle concur.
16. Prove that the centroids of ABC and of the triangle formed by three directrices coincide.
17. Prove that ABC and the directrix triangle are orthological and their orthology centers coincide.
18. Prove that the Euler line of ABC passes through the Lemoine point of the triangle formed by three directrices.
19. Prove that the Euler line of the directrix triangle passes through L .
20. Let AF_a, BF_b, CF_c intersect the respective sidelines of ABC in the points P_a, P_b, P_c . Prove that triangle $P_aP_bP_c$ is perspective to the directrix triangle.
21. Prove that the pairwise perspective centers of $ABC, P_aP_bP_c$ and of the directrix triangle are collinear. The respective line passes through the midpoint of the segment between the centroids of ABC and $P_aP_bP_c$.
22. Prove that the directrix triangle is perspective to the orthotriangle of ABC .
23. Prove that the Brocard angles of ABC and the directrix triangle are equal.

4 Additional problems

24. Let T be some Torricelli point of ABC and T_d the respective Torricelli point of the directrix triangle. Prove that the lines TA, TB, TC are parallel to the lines joining T_d with respective vertices of the directrix triangle.
25. Prove that TT_d and the line joining the respective Apollonius points pass through the centroid of ABC .
26. Find $\frac{S}{S'}$, where S' is the area of the curvilinear "parabolic" triangle $A'B'C'$, and S is the area of ABC .
27. Let N_1, N_2 be the perspective centers of the directrix triangle and the triangles $ABC, P_aP_bP_c$ respectively. Prove that the line N_1N_2 bisects the segment between the centroids of ABC and $P_aP_bP_c$.
28. Let F'_a, F'_b, F'_c be isogonally conjugate to F_a, F_b, F_c ; H is the orthocenter, M the centroid of ABC . Prove that
 - a) F'_a, F'_b, F'_c lie on the circle with diameter HM .
 - b) The distances from F_a and F'_a to the center of the Euler circle of ABC are equal.The point of parabola Π_c , nearest to point C , will be called the *projection* of point C to the parabola and will be denoted by C^* .
29. Prove that line CC^* is perpendicular to parabola Π_c .
30. Prove that $\angle AC^*C = \angle BC^*C$.
31. Denote by C_1 and C_2 the common points of the tangent to the parabola at point C^* with CA and CB respectively. Denote by C^{**} the common point of C_1C_2 and the median of triangle ABC drawn from vertex C . Prove that $C_1C^* = C^{**}C_2$.
Define points A^* and B^* similarly to C^* . r liner
32. (**Conjecture.**) Lines AA^*, BB^* and CC^* concur.

Three parabolas

5 Related problems

Consider the set of lines bisecting the perimeter of triangle ABC .

33. Prove that these lines envelop three parabolas, each touching two sidelines of ABC in the same points that the respective excircle.

Note by Π_A the parabola touching AB and AC . Define Π_B and Π_C similarly.

34. Prove that the circumcircle of ABC is the orthology center of ABC and the triangle formed by the directrix of Π_A , Π_B and Π_C .
35. Prove that the orthocenter of ABC lies on the Euler line of triangle formed by the directrix.
36. Prove that the incenter of ABC and the circumcenter of directrix triangle are symmetric wrt the center of Euler circle of ABC .
37. Let T be some Torricelli point of triangle ABC , T_d be the respective point of directrix triangle. Prove that the lines, joining T and T_d with respective vertex are parallel.

6 Related problems-2

Consider points A_c and A_b on rays AB and AC such that $CA = CA_c$ and $BA = BA_b$. Let parabola Π'_a touche AC and AB in points A_b and A_c . Parabolas Π'_b and Π'_c are defined similarly.

38. Prove that the focus of Π'_a , Π'_b and Π'_c coincide with F'_a , F'_b and F'_c .
39. Prove that the triangle formed by directrix of Π'_a , Π'_b and Π'_c is perspective to ABC .
40. Prove that the directrix triangle of Π'_a , Π'_b and Π'_c is orthologic to ABC and their orthology centers coincide.
41. Prove that the directrix triangle of Π'_a , Π'_b and Π'_c is perspective to the orthotriangle of ABC .
42. Let O' and M' be the circumcenter and the centroid of directrix triangle. Prove that the common point of lines $O'M$ and $M'O$ coincide with the Lemoine point of ABC .

**Three parabolas
Solutions**
F.Nilov, A.Zaslavsky

2 Introductory problems

1. Let X' be the projection of X to the directrix. Then $FX = XX'$. Suppose that the bisectrix l of the angle $X'XF$ isn't the tangent to parabola. Then l intersect the parabola in some point Y , distinct from X . Note that the triangles FXY and $X'XY$ are equal and so $FY = YX'$. Let Y' be the projection of Y to the directrix. Then $YY' = FY = YX'$. But it is impossible because YY' and YX' are the hypotenuse and the cathetus of rectangle triangle $YX'Y'$.
2. Let l touche the parabola in the point X . Then $FX = XX'$. By problem 1 l is the bisectrix of isosceles triangle FXX' . So l is the medial perpendicular to the segment FX' , and the points X' and F are symmetric wrt l .
3. By problem 2 the lines PX and PY are medial perpendiculars of segments FX' и FY' . So their common point P is the circumcenter of $FX'Y'$.
4. Consider the medial line of the trapezoid $XX'Y'Y$. It is perpendicular to the directrix and so parallel to the axis of the parabola. Also it is the median of PXY , because it pass through the midpoint of segment XY and (by problem 3) through P .
5. Consider the line l passing through P and parallel to the axis of the parabola. We must prove that the angle ϕ between l and PX is equal to the angle FPY . Let X'' and Y'' be the projections of F to the lines PX and PY . By problem 2 X'' and Y'' are the midpoints of FX' and FY' . So the lines $X'Y'$ and $X''Y''$ are parallel. This yields that l and $X''Y''$ are perpendicular. Now we have $\angle\phi = 90^\circ - \angle PX''Y'' = 90^\circ - \angle PFY'' = \angle FPY$, q.e.d.
6. Let P and Q be isogonal conjugated. Note as P_c and Q_c , P_a and Q_a , P_b and Q_b the reflections of P and Q in AB , BC and AC . It is evident that $BP_c = BP = BP_a$ and $\angle P_cBP_a = 2\angle B$. Note that $\angle QBC = \angle PBA = \angle ABP_c$. So $\angle P_cBQ = \angle B = 1/2\angle P_cBP_a = \angle P_aBQ$, and $QP_c = QP_a$. Similarly $QP_a = QP_b$ и $PQ_c = PQ_a = PQ_b$. Using the homothety with center P and coefficient $1/2$ we receive that the circle ω with center in the midpoint of PQ and the radius $QP_c/2$ is the pedal circle of P . Similarly ω is the pedal circle of Q .
7. As Π_a and Π_b are inscribed in the angles A and B their common points lie inside or on the sidelines of the triangle ABC . C isn't the unique common point of parabolas because their tangents in C doesn't coincide. So there exists the common point C' distinct from C . It is clear that the sidelines of ABC doesn't contain the common points distinct from C . Suppose that Π_a and Π_b have inside the triangle the common point C'' distinct from C' . As A , C , C' и C'' lie on Π_b , they are the vertex of convex quadrilateral. Similarly B , C , C' , and C'' are the vertex of convex quadrilateral. But it is impossible. So Π_a and Π_b have exactly two common points
8. It is known that an arbitrary affine map transforms any parabola to the parabola. Consider the map transforming the triangle ABC to regular triangle. It is evident that in regular

triangle the common points of parabolas lie on the medians. So AA' , BB' and CC' are the medians of ABC and concur in its centroid M .

9. By problems 4 and 5 the lines AM and AF_a are symmetric wrt the bisectrix of angle A . So AF_a , BF_b and CF_c concur in the Lemoine point L of ABC .

10. Let the directrix d_a of Π_a intersect BC in the point A' . Note the projections of B and C to d_a as B_1 and C_1 . It is clear that $BB_1 = BF_a$ and $CC_1 = CF_a$. As the triangles $A'BB_1$ and $A'CC_1$ are similar $\frac{A'B}{A'C} = \frac{BB_1}{CC_1} = \frac{BF_a}{CF_a}$. By problems 1 and 5 $\angle F_aBA = \angle F_aAC$ and $\angle F_aCA = \angle F_aAB$. Using the sinus theorem for the triangle F_aBA we receive that $BF_a = \frac{\sin(\angle F_aAB) \cdot AF_a}{\sin(\angle ABF_a)}$. Similarly $CF_a = \frac{\sin(\angle F_aAC) \cdot AF_a}{\sin(\angle ACF_a)}$. So $\frac{BF_a}{CF_a} = \frac{\sin^2(\angle F_aAB)}{\sin^2(\angle F_aAC)}$.

Let d_b and d_c be the directrix of Π_b and Π_c . Note as B' , C' the common points of d_b and AC , d_c and AB . Then

$$\frac{A'B \cdot B'C \cdot C'A}{A'C \cdot B'A \cdot C'B} = \frac{BF_a \cdot CF_b \cdot AF_c}{CF_a \cdot AF_b \cdot BF_c} = \frac{\sin^2(\angle F_aAB) \cdot \sin^2(\angle F_bBC) \cdot \sin^2(\angle F_cCB)}{\sin^2(\angle F_aAC) \cdot \sin^2(\angle F_bBA) \cdot \sin^2(\angle F_cCA)} = 1.$$

The last equality follows from the Ceva theorem for the cevians AF_a , BF_b and CF_c . By Menelaus theorem A' , B' and C' are collinear. So by Desargues theorem the triangles are perspective.

Three parabolas

Solutions

F.Nilov, A.Zaslavsky

3 Basic problems

11. Note the midpoint of AB as C_0 . We have $\angle C_0CB = \angle F_cCA$. By problems 1, 4 and 5 $\angle MCB = \angle F_cBC$ и $\angle MCA = \angle F_cAC$. So $\angle AF_cC = 180^\circ - \angle F_cAC - \angle F_cCA = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - \angle F_cCB - \angle F_cBC = \angle BF_cC$.

12. By problem 11 $\angle AF_cC = \angle BF_cC = 180^\circ - \angle C$. So $\angle AF_cB = 360^\circ - 2(180^\circ - \angle C) = 2\angle C = \angle AOB$. This follows that A, B, F_c and O lie on the circle ω .

13. Let A_0 и B_0 be the midpoints of BC and AC . The problem 5 yields next

Lemma. The focus of the parabola inscribed in the triangle lies on the circumcircle of this triangle

Prove that the circumcircle of A_0B_0C pass through F_c . Note as C' the second common point of CF_c with the circumcircle of ABC . By problems 1 and 5 $\angle F_cBC = \angle F_cCA$ and $\angle F_cAC = \angle F_cCB$. So $\angle C'BA = \angle F_cCA = \angle F_cBC$ и $\angle BAC' = \angle F_cCB$. From this the triangles F_cCB and $C'AB$ are similar and $\frac{CF_c}{C'A} = \frac{BF_c}{BC'}$. By problem 11 $\angle BF_cC' = \angle AF_cC'$. Also $\angle C'BF_c = \angle ABC = \angle AC'F_c$. So the triangles F_cBC' and $F_cC'A$ are similar and $\frac{F_cC'}{C'A} = \frac{BF_c}{BC'} = \frac{CF_c}{C'A}$. It follows that $F_cC = F_cC'$. The homothety with center C and coefficient $\frac{1}{2}$ transforms B, A and C' to A_0, B_0 and F_c , q.e.d.

14. By problem 11 the points A, B, F_c and O lie on the circle ω . Let O' be the second common point of CF_c and ω . By problem 10 $\angle AF_cO' = \angle BF_cO'$. So O' is the midpoint of an arc AB of ω and the segment OO' is the diameter of ω . From this $\angle LF_cO = \angle OF_cO' = 90^\circ$. Similarly $\angle LF_aO = \angle LF_bO = 90^\circ$. So F_a, F_b lie F_c lie on the circle with diameter OL .

15. Let A_0 and B_0 be the midpoints of BC and AC . Consider the point F'_c symmetric to F_c wrt A_0B_0 . By problem 13 A_1B_1 touches Π_c . So by problem 2 F' lies on the directrix of Π_c . By problem 13 the quadrilateral $CA_1F'_cB_1$ is cyclic. So $\angle A_1F'_cB_1 = \angle A_1F_cB_1 = 180^\circ - \angle C$ and F'_c lies on the Euler circle of ABC . Note as M' the midpoint of A_0B_0 . By problem 13 A_1B_1 is the bisectrix of angle CMF_c . So F'_c lies on CM' . Thus the common point of the median and Euler circle lies on the directrix of Π_c .

16. Let A'', B'', C'' be the vertex of directrix triangle. Note as A', B' and C' the common points of medians of ABC and its Euler circle. By problem 15 these points lie on the sidelines of $A''B''C''$. Note as C_0 the midpoint of AB . Let G be the centroid of $A''B''C''$. Note that

$$\frac{\sin(\angle GC''B'')}{\sin(\angle GC''A'')} = \frac{\sin(\angle B'')}{\sin(\angle A'')} = \frac{\sin(\angle C_0MA)}{\sin(\angle C_0MB)} = \frac{MB}{MA} = \frac{MA'}{MB'} = \frac{\sin(\angle MC''B'')}{\sin(\angle MC''A'')}.$$

The first and the third equalities are correct because $C''G$ and MC_0 are the medians of $A''B''C''$ and AMB . So $\angle GC''B'' = \angle MC''B''$ and G lies on $C''M$. Similarly G lies on $A''M$ and $B''M$. this follows that G and M coincide.

17. By problem 4 AM is perpendicular to d_a . Similarly BM is perpendicular to d_b and CM is perpendicular to d_c . So M is the orthology center of considering triangles. Let A', B' и C' be the common points of respective directrix. As the medians of ABC are perpendicular to the sidelines of $A'B'C'$ we have :

$$(1) (\overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{A'B'}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0.$$

$$(2) \overrightarrow{A'B'} \cdot (2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = 0.$$

$$(3) \overrightarrow{C'A'} \cdot (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = 0.$$

Summing (1) and (3) and substracting from the result (2), we receive that $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'A'} \cdot \overrightarrow{AB}$. From this and (1) $(\overrightarrow{C'A'} - \overrightarrow{A'B'}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 0$. This follows that BC is perpendicular to the median $A'G$ of $A'B'C'$. By problem 16 the points G and M coincide. So $A'M$ and BC are perpendicular. Similarly $B'M$ and AC , $C'M$ and AB are perpendicular. So M is the common orthology center of ABC and $A'B'C'$.

Note that two orthological triangles with coinciding orthology centers are perspective. So we receive another solution of problem 10.

18. As d_a is perpendicular to the median AA_0 , then by problem 15 d_a pass through the common point A'' of an altitude AA' and the Euler circle. Similarly the common points of Euler circle B'', C'' of Euler circle and the altitudes BB', CC' lie on d_b and d_c . Note that Euler circle of ABC is the pedal circle of M wrt the directrix triangle. By problem 16 M is the centroid of directrix triangle. So the medians of ABC are parallel to the lines $A''L', B''L'$ and $C''L'$, where L' is the Lemoine point of the directrix triangle. It is known that the triangles $A''B''C''$ and ABC are homothetic with center H and coefficient $1/2$. So, as L' is the centroid of $A''B''C''$ it is the midpoint of HM and lies on the Euler line of ABC .

19. Let T be the directrix triangle. Consider the parabolas Π'_a, Π'_b и Π'_c , touching the sidelines of T in its vertex. Note as T' the triangle formed by the directrix of these parabolas. The respective sidelines of T' and ABC are perpendicular to the medians of T . So T' and ABC are homothetic and M is the homothety center because by problem 16 the centroids of T' and ABC coincide. Note the Lemoine point of T' as L' . By th homothety of T' and ABC the points M, L and L' are collinear. By problem 18 L' Lies on the Euler line of T . So the line passing through L, M and L' coincide with the Euler line of T .

20. Let C' be the common point of AB and P_aP_b . The points C', P_c, A, B are harmonic because $\frac{C'A}{C'B} = \frac{AP_c}{P_cB}$. By problem 11 $\frac{AP_c}{P_cB} = \frac{AF_c}{F_cB}$. Let C'' be the common point of d_c and AB . By problem 10 $\frac{C''A}{C''B} = \frac{AF_c}{F_cB}$. So $\frac{C'A}{C'B} = \frac{AF_c}{F_cB} = \frac{C''A}{C''B}$ and the points C' and C'' coincide. By problem 10 A'', B'' and C'' are collinear. So A', B' and C' are also collinear and by the Desargues theorem the triangles ABC and $P_aP_bP_c$ are perspective.

21. By problem 20 the perspective axis of $ABC, P_aP_bP_c$ and the directrix triangle coincide. Now use next

Lemma. If the perspective axis of three mutually perspective triangles coincide then their pair perspective centers are collinear.

Proof. Consider the projective map transforming the commo perspective axis to the infinite line. It transforms given triangles to the homothetic triangles. Their homothety centers are collinear.

22. Let A_1, B_1 и C_1 be the midpoints of the sides of ABC and A_2, B_2 и C_2 be the feet of its altitudes. Note as C''' the common point of CC_1 and the Euler circle. By problem 15 C''' lies on d_c . Let C' be the common point of d_c and $A'B'$, and C'' be the common point of CC_1 and A_2B_2 . Note that $B_2C_1 = AC_1 = BC_1 = A_2C_1$. So $\angle B_2C'''C_1 = \angle A_2C'''C_1$, because the quadrilateral $A_2C'''B_2C_1$ is cyclic. By problem 5 d_c is perpendicular to $C'''C''$. So $C'''C'$ is the external bisectrix of angle C''' , and $\frac{C'A_2}{C'B_2} = \frac{C''A_2}{C''B_2}$. Similarly $\frac{B'C_2}{B'A_2} = \frac{B''C_2}{B''A_2}$ and $\frac{A'B_2}{A'C_2} = \frac{A''B_2}{A''C_2}$, where A', B' are the common points of d_a and B_2C_2 , d_b and A_2C_2 ; A'', B'' are the common points of AA_1, BB_1 and the Euler circle. Note that

$$\frac{C'A_2 \cdot B'C_2 \cdot A'B_2}{C'B_2 \cdot B'A_2 \cdot A'C_2} = \frac{C''A_2 \cdot B''C_2 \cdot A''B_2}{C''B_2 \cdot B''A_2 \cdot A''C_2} = 1.$$

So by Menelaus theorem A', B', C' are collinear and by Desargues theorem the directrix triangle and the orthotriangle are perspective .

23. Consider the triangle formed by the medians of ABC . By problem 5 its angles are equal to the angles of directrix triangle. Prove that the Brocard angles of ABC and the triangles formed by its medians are equal. Next formulae are correct for any triangle:

$$(1) \text{ctg } \phi = \text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma.$$

$$(2) \text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$

$$(3) S = \frac{3}{4}S_m.$$

$$(4) a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{4}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2).$$

there α, β and γ are the angles of triangle, ϕ is its Brocard angle; S and S_m are the areas of the triangle and the triangle formed by its medians; a, b and c are the lengths of the sides; m_a, m_b and m_c are the lengths of the medians.

Using these formulae to ABC we receive

$$\text{ctg } \phi = \text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{4S_m} = \text{ctg } \phi_m,$$

where ϕ_m is the Brocard angle of the triangle formed by the medians. So, $\phi = \phi_m$, q.e.d.

Взвешивания со сломанными весами

К.А. Кноп, Г.Р. Челноков, И.И. Богданов

1 Постановка проблемы

Базовые понятия

Как обычно, у нас имеется множество из нескольких одинаковых на вид монет, одна из которых фальшивая — она немного легче, чем настоящая; требуется определить, какая именно. При этом в разных задачах мы можем пользоваться разными тестирующими устройствами.

Детектор — это устройство, которое за одно действие (*тестирование*) про любое выбранное подмножество монет сообщает, содержится в нем фальшивая или нет. Таким образом, детектор при любом разбиении полного множества на 2 подмножества определяет, в каком из подмножеств оказалась фальшивая монета).

Рычажные весы (или просто весы) — это устройство, позволяющее сравнивать между собой веса двух подмножеств. Таким образом, для двух подмножеств из равного количества монет весы сравнивают количества фальшивых в них. Поэтому в нашей задаче весы говорят нам, в каком из трех подмножеств разбиения находится фальшивая монета (при этом два из подмножеств должны иметь поровну элементов).

Главная изюминка данной задачи: мы разрешаем некоторым устройствам сообщать неверную информацию. При этом устройства не уподобляются лжецам, которые «всегда врут». Они просто сломаны — то есть информация от такого устройства может быть как истинной, так и ложной. Грубо говоря, вместо правильного работающего устройства у нас работает генератор случайных ответов. Итого, у нас есть несколько устройств, и мы знаем лишь, сколько из них сломаны, но не знаем, какие. (При этом за одну операцию тестирование проводится только на одном из устройств!)

Введем обозначения. Пусть $D_{x,y}(z)$ обозначает минимальное число тестирований детекторами, необходимое для **гарантированного** нахождения одной фальшивой монеты среди z при помощи x детекторов, из которых y сломаны (эту тестирующую систему мы будем обозначать через $xд[y]$). Аналогично, $V_{x,y}(z)$ будет обозначать то же для весов (а соответствующая система обозначается $xв[y]$).

На протяжении первых разделов мы будем приводить для каждой задачи две формулировки: с использованием введенных обозначений, и (для тех, кому этот язык еще непривычен) без их использования.

2 Вводные задачи: конкретные случаи

Что точно можно?

2.1. Тремя весами, из которых одни сломаны, можно из 3 монет найти фальшивую за 3 взвешивания (На удобном языке: $V_{3,1}(3) \leq 3$).

2.2. а) Тремя детекторами, из которых один сломан, можно из 8 монет найти фальшивую за 6 тестирований. (На удобном языке: $D_{3,1}(8) \leq 6$.)

б) Тремя весами, из которых одни сломаны, можно из 9 монет найти фальшивую за 4 взвешивания. (На удобном языке: $V_{3,1}(9) \leq 4$).

2.3. а) Тремя детекторами, из которых один сломан, можно из 32 монет найти фальшивую за 9 тестирований. (На удобном языке: $D_{3,1}(32) \leq 9$.)

b) Тремя весами, из которых одни сломаны, можно из 81 монеты найти фальшивую за 7 взвешиваний. (На удобном языке: $V_{3,1}(81) \leq 7$).

Что точно нельзя?

2.4. Из двух монет нельзя найти фальшивую за 2 тестирования/взвешивания (любым числом любых устройств, среди которых есть сломанные). (На удобном языке: $D_{x,1}(2) \geq 3$, $V_{x,1}(2) \geq 3$).

2.5. a) Любым числом детекторов, среди которых есть сломанный, нельзя найти фальшивую монету из 2^k монет за k тестирований. (На удобном языке: $D_{x,1}(2^k) > k$).

b) Любым числом весов, среди которых есть сломанные, нельзя найти фальшивую монету из 3^k монет за k взвешиваний. (На удобном языке: $V_{x,1}(3^k) > k$.)

2.6. a) Любым числом детекторов, среди которых есть сломанные, нельзя найти фальшивую монету из 2^k монет за $k + 1$ тестирование. (На удобном языке: $D_{x,1}(2^k) > k + 1$).

b) Любым числом весов, среди которых есть сломанные, нельзя найти фальшивую монету из 3^k монет за $k + 1$ взвешивание. (На удобном языке: $V_{x,1}(3^k) > k + 1$.)

c) Любым числом весов, среди которых есть **двое** сломанных, нельзя найти фальшивую монету из $n > 3^6$ монет за 11 взвешиваний. (На удобном языке: $V_{x,2}(n) > 11$, если $n > 3^6$.)

3 Грубые, но серийные результаты

Серийные оценки сверху

В этом разделе k — натуральное число.

3.1. a) Для каждого k найдите минимальное такое K , что $D_{K,k}(n) < \infty$ при любом n (то есть, найдите минимальное число детекторов, при котором вообще *возможно* найти фальшивую монету).

b) Для каждого k найдите минимальное такое K , что $V_{K,k}(n) < \infty$ при любом n .

3.2. a) Докажите, что $D_{3,1}(2^k) \leq 2k + 1$.

b) Докажите, что $V_{3,1}(3^k) \leq 2k + 1$.

Как видно из предыдущей задачи, при наличии одного сломанного устройства из n монет фальшивая ищется примерно за $2 \log_2 n$ тестирований детекторами, и примерно за $2 \log_3 n$ взвешиваний весами. Но эта оценка очень неточна. Задачи этого раздела будут посвящена уменьшению константы при логарифме, то есть числа c в оценках вида $D_{x,1}(n) \lesssim c \log_2 n$ и $V_{x,1}(n) \lesssim c \log_3 n$.

3.3. a) Докажите, что $V_{3,1}(3^{2k}) \leq 3k + 1$.

b) Докажите, что $D_{3,1}(2^{2k}) \leq 3k + 2$.

Предыдущая задача показывает, что коэффициент c можно уже сделать строго меньшим 2. Следующая цель — доказать, что он на самом деле равен 1. Сначала предлагается это сделать для бóльшего числа устройств.

Обозначение $o(k)$ означает функцию, растущую медленнее, чем k , то есть $f(k) = o(k)$, если $f(k)/k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Например, $\log_2 k = o(k)$ и $\sqrt{k} = o(k)$.

3.4. a) Докажите, что при бесконечном числе детекторов, из которых один сломан, можно выявить одну фальшивую монету из 2^k за $k + o(k)$ взвешиваний. Иными словами, $D_{\infty,1}(2^k) = k + o(k)$.

b) Докажите, что при бесконечном числе весов, из которых одни сломаны, можно выявить одну фальшивую монету из 3^k за $k + o(k)$ взвешиваний. Иными словами, $V_{\infty,1}(3^k) = k + o(k)$.

3.5. a) Докажите, что существует x такое, что $D_{x,1}(2^k) = k + o(k)$.

b) Докажите, что существует x такое, что $V_{x,1}(3^k) = k + o(k)$.

- 3.6. a) Докажите, что $D_{3,1}(2^{k(k+1)}) \leq (k+1)^2$ при $k \geq 5$.
 b) Докажите, что $V_{3,1}(3^{k(k+1)}) \leq (k+1)^2$ при $k \geq 2$.

Серийные оценки снизу

- 3.7. a) Докажите, что $D_{x,1}(n) \leq D_{x,1}(2^k)$ при $n < 2^k$.
 b) Докажите, что $V_{x,1}(n) \leq V_{x,1}(3^k)$ при $n < 3^k$.
 3.8. a) Докажите, что $D_{x,1}(n) \leq D_{x,1}(N)$ при $n < N$.
 b) Докажите, что $V_{x,1}(n) \leq V_{x,1}(N)$ при $n < N$.
 3.9. a) Докажите, что если $D_{x,1}(n) = d$, то $\frac{2^d}{d+1} \geq n$. (Эта оценка не зависит от x)
 b) Докажите, что если $V_{x,1}(n) = d$, то $\frac{3^d}{2d+1} \geq n$.

4 Точные результаты

Этот раздел посвящен сведению верхних оценок с нижними. Поэтому он начнется опять с разбора «маленьких частных случаев».

- 4.1. a) Докажите, что $D_{4,1}(2^4) = 7$.
 b) Докажите, что $V_{4,1}(3^6) = 9$.
 4.2. a) Среди какого наибольшего числа монет можно выявить фальшивую на 4д[1] за 15 тестирований? (Иначе говоря, найдите наибольшее n такое, что $D_{4,1}(n) \leq 15$.)
 b) Среди какого наибольшего числа монет можно выявить фальшивую на 4в[1] за 13 тестирований? (Иначе говоря, найдите наибольшее n такое, что $V_{4,1}(n) \leq 13$.)
 c) А за 40 тестирований?
 4.3. Приведите пример такого n , что $V_{4,1}(n) < V_{3,1}(n)$.
 4.4. a) Докажите, что $D_{4,1}(2^k) = k + \log_2 k + c_{dk}$, где последовательность c_{dk} ограничена.
 b) Докажите, что $V_{4,1}(3^k) = k + \log_3 k + c_{bk}$, где последовательность c_{bk} ограничена.
 c) Найдите возможно лучшее ограничение сверху на эту последовательность.
 4.5. a) Докажите, что $D_{x,1}(n) = D_{4,1}(n)$ для любого n и $x > 4$.
 b) Докажите, что $V_{x,1}(n) = V_{4,1}(n)$ для любого n и $x > 4$.

Если (при фиксированном s) для некоторого t выполняются равенства $D_{t,s}(n) = D_{x,s}(n)$ ($V_{t,s}(n) = V_{x,s}(n)$) при всех $x > t$, то такое число устройств мы будем называть *идеальным* (для данного числа сломанных устройств s). Иными словами, увеличивать количество устройств бессмысленно. Предыдущая задача показывает, что 4 устройства — идеальное число для одного сломанного.

- 4.6. a) Верна ли оценка того же вида, что и в задаче 4.4, для $D_{3,1}(n)$?
 b) Тот же вопрос про $V_{3,1}(n)$.

Взвешивания со сломанными весами. Решения

К. Кноп, Г. Челноков, И. Богданов

2 Вводные задачи: конкретные случаи

Что точно можно?

Мы будем для краткости называть фальшивую монету ФМ.

Заметим, что если есть всего один сломанный тестер, и показания двух тестеров на каком-то наборе совпали, то эти показания истинны.

2.1. Условие. *Тремя весами, из которых одни сломаны, можно из 3 монет найти фальшивую за 3 взвешивания (На удобном языке: $V_{3,1}(3) \leq 3$).*

Решение. Взвесим первые две монеты на всех трех весах. Как минимум два результата совпадут — это и будет правильный результат этого взвешивания. По нему, очевидно, определяется ФМ.

2.2. а) Условие. *Тремя детекторами, из которых один сломан, можно из 8 монет найти фальшивую за 6 тестирований. (На удобном языке: $D_{3,1}(8) \leq 6$.)*

Решение. Разделим все монеты на 4 группы по две монеты. Проверим первым детектором группы 1 и 2, а вторым — группы 1 и 3. Без ограничения общности можно считать, что оба ответа положительны (почему?). Тогда третьим детектором проверим группы 2 и 3. Возможны два случая.

1. Пусть ответ отрицателен; тогда ФМ в группе 1 (иначе хотя бы два детектора соврали!). Проверив одну монету из этой группы на всех трех детекторах, мы найдем ФМ.

2. Пусть ответ на третьем испытании положителен. Тогда уже точно один из детекторов соврал (и если бы у нас имелся в наличии четвертый, то он точно бы был рабочим — но и без него все получается!). Проверим группы 1 и 2 — теперь на втором детекторе. Если ответ положителен, то ФМ точно в этих группах, так как это утверждают два детектора; значит, первый детектор на первом испытании говорил правду, а врал тогда либо второй, либо третий. Если же ответ отрицателен, то либо первый, либо второй детектор лжет, а значит, третий — рабочий, поэтому ФМ в группе 2 или 3.

Итого, после 4 тестирования мы определили рабочий детектор и две группы, в которых находится ФМ. Тогда ее легко найти за 2 оставшихся испытания.

б) Условие. *Тремя весами, из которых одни сломаны, можно из 9 монет найти фальшивую за 4 взвешивания. (На удобном языке: $V_{3,1}(9) \leq 4$).*

Решение. Для удобства занумеруем монеты числами от 0 до 8 и запишем их в троичной записи (таким образом, каждой монете сопоставлена пара цифр от 0 до 2). Первое взвешивание делаем первыми весами в соответствии с первой цифрой номера: на левую чашу кладем монеты, у номера которых первая цифра 0, на правую — у которых она 1. Второе взвешивание делаем аналогично вторыми весами в соответствии со второй цифрой номера. Без ограничения общности можем считать, что оба раза весы говорили, что фальшивая монета на левой чаше. Тогда 4 монеты без нулей в номере точно не фальшивые (иначе соврали и первые, и вторые весы).

Теперь разобьем монеты на три группы следующим образом: в одну поместим 00, в другую 01 и 02, в третью — 10 и 20; дополним все группы до трех монет точно не фальшивыми и взвесим третьими весами.

Если весы сказали, что фальшивая в группе с 00, то это и есть 00 (иначе двое весов соврали), и четвертое взвешивание не понадобилось. Если взвешивание сказало, что фальшивая в группе с 01 и 02, то третьи весы противоречат вторым. Поэтому хотя бы одни из них соврали, а значит, первые точно исправны. Но тогда у фальшивой первая цифра действительно 0; таким образом, остались лишь три кандидата на ФМ и одни точно исправные весы, которыми мы находим ФМ за 1 ход. Аналогично поступаем, если третьи взвешивание сказало, что фальшивая в группе с 10 и 20.

2.3. а) Условие. *Тремя детекторами, из которых один сломан, можно из 32 монет найти фальшивую за 9 тестирований. (На удобном языке: $D_{3,1}(32) \leq 9$.)*

Решение. Разобьем все монеты на 4 группы по 8 монет в каждой и применим тот же алгоритм, что и в задаче 2.2а). Тогда в случае 1 мы за 3 тестирования найдем группу из 8 монет, которая содержит фальшивую; применяя ту же задачу, мы сделаем требуемое. Во втором же случае мы за 4 тестирования найдем две группы, одна из которых содержит фальшивую, а также найдем один рабочий детектор. С помощью него мы еще за 4 испытания найдем ФМ — в этом случае мы даже обошлись 8 тестированиями.

б) Условие. *Тремя весами, из которых одни сломаны, можно из 81 монеты найти фальшивую за 7 взвешиваний. (На удобном языке: $V_{3,1}(81) \leq 7$).*

Решение. Аналогично 2.2б), занумеруем монеты последовательностями из 4 цифр 0, 1 или 2, и проведем первое взвешивание по первой цифре на первых весах, а второе по второй цифре — на вторых. Без ограничения общности можем считать, что оба раза весы говорили, что фальшивая монета имеет цифру 0 в соответствующем разряде. Отсюда опять же следует, что монеты, у которых первая и вторая цифра точно не нули — настоящие.

Теперь разобьем монеты на три группы следующим образом: в одну поместим 9 монет, у которых первые две цифры — 00, в другую — 18 монет с первыми двумя цифрами 01 или 02, а в третью — с цифрами 10 и 20; дополним все группы до 27 монет точно не фальшивыми и взвесим третьими весами.

Если весы сказали, что фальшивая в группе с 00, то это действительно так, и у нас осталось 9 монет, среди которых есть фальшивая, и 4 взвешивания. Это сводит задачу к 2.2b).

Если взвешивание сказало, что фальшивая в группе с 01 и 02, то третьи весы противоречат вторым. Значит, хотя бы одни из них соврали, поэтому первые точно исправны. Но тогда у ФМ первая цифра действительно 0. Теперь мы имеем 27 монет, среди которых есть фальшивая, и одни точно исправные весы; с помощью них мы находим фальшивую за 3 хода (а седьмой даже не понадобился). Аналогично мы поступаем, если третье взвешивание сказало, что фальшивая в группе с 10 и 20.

Что точно нельзя?

2.4. Условие. Из двух монет нельзя найти фальшивую за 2 тестирования/взвешивания (любым числом любых устройств, среди которых есть сломанные). (На удобном языке: $D_{x,1}(2) \geq 3$, $V_{x,1}(2) \geq 3$).

Решение. Если оба тестирования мы делаем одним устройством, то оно может оказаться сломанным, и мы не получим никакой информации. Если мы использовали разные устройства, то в случае противоречащих ответов мы не можем определить фальшивую.

2.5. а) Условие. Любым числом детекторов, среди которых есть сломанный, нельзя найти фальшивую монету из 2^k монет за k тестирований. (На удобном языке: $D_{x,1}(2^k) > k$).

Решение. Предположим, что это возможно.

Пусть некоторые тестирования уже сделаны. Рассмотрим все монеты, которые сейчас могут оказаться фальшивыми. Заметим, что при некотором исходе следующего взвешивания их количество уменьшится не более, чем вдвое (ибо каждый кандидат на фальшивость хотя бы при одном из исходов следующего взвешивания продолжит оставаться таким кандидатом).

На первом ходу количество кандидатов в фальшивые не уменьшалось (ибо первый детектор мог соврать). Поэтому за k шагов при некотором наборе исходов оно уменьшилось не более, чем в 2^{k-1} раз, то есть осталось больше 1. Таким образом, при этом наборе исходов мы явно не смогли однозначно определить фальшивую монету.

б) Условие. Любым числом весов, среди которых есть сломанные, нельзя найти фальшивую монету из 3^k монет за k взвешиваний. (На удобном языке: $V_{x,1}(3^k) > k$).

Решение. Аналогично, только количество кандидатов делится на 3, а не на 2.

2.6. а) Условие. Любым числом детекторов, среди которых есть сломанные, нельзя найти фальшивую монету из 2^k монет за $k + 1$ тестирование. (На удобном языке: $D_{x,1}(2^k) > k + 1$).

Решение. Будем говорить, что тестирование *отказало* данной монете, если оно показало, что монета находится в другой группе, нежели фальшивая. Иными словами, если тестирование отказало монете, то или монета не фальшивая, или детектор сломан.

Аналогично доказанному в предыдущей задаче, если бы за $k + 1$ тестирование можно было определить фальшивую, то после второго тестирования монет, которые могут оказаться фальшивыми, должно быть не более 2^{k-1} . Но любая монета, которой не отказало хотя бы одно тестирование из первых двух, может оказаться фальшивой (если другое тестирование делалось на сломанном детекторе).

Первое тестирование при одном из исходов отказывает не более, чем $\frac{1}{2}$ всех монет; таким образом, в этом случае первое тестирование *не отказывает* хотя бы половине всех монет. Второе же при некотором исходе не откажет еще какой-нибудь монете. Значит, строго больше половины монет могут оказаться фальшивыми — противоречие.

б) Условие. Любым числом весов, среди которых есть сломанные, нельзя найти фальшивую монету из 3^k монет за $k + 1$ взвешивание. (На удобном языке: $V_{x,1}(3^k) > k + 1$).

Решение. Аналогично: получаем, что первое взвешивание не откажет хотя бы трети всех монет, а второе не откажет еще какой-нибудь монете. Поэтому после первых двух взвешиваний кандидатов будет больше, чем треть всех монет.

с) Условие. Любым числом весов, среди которых есть двое сломанных, нельзя найти фальшивую монету из $n > 3^6$ монет за 11 взвешиваний. (На удобном языке: $V_{x,2}(n) > 11$, если $n > 3^6$.)

Решение. Решение этого пункта находится в конце раздела 3.

3 Грубые, но серийные результаты

Серийные оценки сверху

3.1. Условие. а) Для каждого k найдите минимальное такое K , что $D_{K,k}(n) < \infty$ при любом n (то есть, найдите минимальное число детекторов, при котором вообще возможно найти фальшивую монету).

б) Тот же вопрос для весов.

Решение. Решение не зависит от типа тестеров.

Ответ. $K = 2k + 1$.

Пусть число тестеров $\leq 2k$, а фальшивая монета — A . Заставим все сломанные тестеры действовать так, как будто фальшивая монета — B . Тогда никогда не удастся выяснить, то ли все сломанные сломаны (и фальшивая — A), то ли все наоборот (и фальшивая — B).

Если же тестеров $2k+1$, то можно каждую монету (или каждую пару для весов) проверить на всех тестерах; $k+1$ из результатов совпадут — это и будут истинные результаты.

3.2. а) Условие. Докажите, что $D_{3,1}(2^k) \leq 2k+1$.

Решение. Индукция по k . При $k=1$ проверим первую монету всеми тремя детекторами; два совпавших ответа будут истинными.

Пусть при $k=t$ утверждение доказано. Рассмотрим 2^{t+1} монет и проверим первые 2^t из них на первых двух тестерах. Если результаты совпадают, то они истинны, и мы сократили число монет до 2^t ; применяя предположение индукции, получаем требуемое.

Если же результаты различны, то один из первых двух детекторов сломан; тогда третьим (заведомо рабочим) детектором мы за $t+1$ испытание найдем ФМ; в этом случае мы использовали не более $t+3 \leq 2(t+1)+1$ испытаний.

б) Условие. Докажите, что $V_{3,1}(3^k) \leq 2k+1$.

Решение. Совершенно аналогично.

3.3. а) Условие. Докажите, что $V_{3,1}(3^{2k}) \leq 3k+1$.

Решение. Опять индукция; база при $k=1$ — это задача 2.2b). Переход абсолютно аналогичен решению 2.3b).

б) Условие. Докажите, что $D_{3,1}(2^{2k}) \leq 3k+2$.

Решение. Аналогично, индукция; переход аналогичен решению 2.3a). База доказывается из тех же соображений; именно, мы либо за 3 испытания находим ФМ, либо за 4 детекции находим пару монет, среди которых есть фальшивая, и рабочий детектор. Тогда за оставшееся испытание мы найдем ФМ.

3.4. а) Условие. Докажите, что при бесконечном числе детекторов, из которых один сломан, можно выявить одну фальшивую монету из 2^k за $k+o(k)$ взвешиваний. Иными словами, $D_{\infty,1}(2^k) = k+o(k)$.

Решение. Занумеруем все монеты k -значными двоичными числами (от $0\dots 0$ до $1\dots 1$). Первыми k взвешиваниями применим первые k детекторов: каждый — к своему двоичному разряду. Без ограничения общности, пусть каждый из них ответил, что у фальшивой монеты в соответствующем разряде стоит 0. Значит, в любом случае единиц в номере ФМ не больше одной.

Применим $(k+1)$ -й детектор к монете $0\dots 0$. Если он говорит, что она фальшивая, то так оно и есть (иначе два детектора солгали!). Иначе мы понимаем, что какой-то детектор из первых $k+1$ солгал, и при этом остался $k+1$ кандидат на фальшивость. Из этих кандидатов можно найти ФМ $(k+2)$ -м (рабочим!) детектором за $\leq \log_2(k+1)+1$ испытаний. Итого мы справились не более, чем за $k+1+\log_2(k+1)+1 = k+o(k)$ испытаний.

б) Условие. Докажите, что при бесконечном числе весов, из которых одни сломаны, можно выявить одну фальшивую монету из 3^k за $k+o(k)$ взвешиваний. Иными словами, $V_{\infty,1}(2^k) = k+o(k)$.

Решение. Абсолютно аналогично.

3.5. Условие. а) Докажите, что существует x такое, что $D_{x,1}(2^k) = k+o(k)$.

б) Докажите, что существует x такое, что $V_{x,1}(3^k) = k+o(k)$.

Решение. Следует из следующей задачи.

3.6. б) Условие. Докажите, что $V_{3,1}(3^{k(k+1)}) \leq (k+1)^2$ при $k \geq 2$.

Решение. Решим задачу индукцией по k , база для $k=1$ доказана в 2.2.b).

Как и раньше, нумеруем монеты в троичной системе счисления. Первые k взвешиваний делаем по первым k разрядам на первых весах, вторые k взвешиваний — по следующим k разрядам на вторых весах. Без ограничения общности можно считать, что все взвешивания показывали, что у фальшивой монеты в соответствующем разряде стоит 0. Теперь, если у номера ФМ есть не ноль как в первых k разрядах, так и во вторых, то и первые, и вторые веса соврали. Значит, все такие монеты точно настоящие (будем их называть *эталонами*).

Для $(2k+1)$ -го взвешивания разделим все неэталоны так: в одну группу поместим монеты, у которых в первых $2k$ разрядах только нули, во вторую — монеты, у которых нули в первых k разрядах, но есть не нули в разрядах с $(k+1)$ -го по $2k$ -й, а в третью — монеты, у которых есть не нули в первых k разрядах, но в разрядах с $(k+1)$ -го по $2k$ -й все цифры — нули. Ясно, что во второй и третьей группах монет поровну; взвесим их третьими весами. Если взвешивание указало на первую группу, то все результаты взвешиваний верны (иначе хотя бы двое весов давали неверный результат); значит, нам осталось за k^2 взвешиваний узнать $k(k-1)$ разрядов, что возможно по предположению индукции. Если $(2k+1)$ -е взвешивание указало на вторую группу (для третьей аналогично), то показания третьих весов противоречат показаниям вторых, значит, первые веса точно исправны. Тогда мы уже выяснили первые k разрядов, и за оставшиеся k^2 взвешиваний исправными весами выясним оставшиеся.

а) Условие. Докажите, что $D_{3,1}(2^{k(k+1)}) \leq (k+1)^2$ при $k \geq 5$.

Решение. Аналогично пункту б) можно получить чуть более слабую оценку $D_{3,1}(2^{k(k-1)/2-1}) \leq k(k+1)/2-1$. Похоже, что более сильная, к сожалению, следует лишь из 4.4.

Серийные оценки снизу

3.7. а) Условие. Докажите, что $D_{x,1}(n) \leq D_{x,1}(2^k)$ при $n < 2^k$.

Решение. См. решение 3.8а).

б) Условие. Докажите, что $B_{x,1}(n) \leq B_{x,1}(3^k)$ при $n < 3^k$.

Решение. Жюри не известно простого доказательства этого факта.

3.8. а) Условие. Докажите, что $D_{x,1}(n) \leq D_{x,1}(N)$ при $n < N$.

Решение. Пусть есть какой-то алгоритм, позволяющий определить фальшивую монету из N штук. Рассмотрим n монет и добавим к ним $N - n$ фиктивных. Применим к ним тот же алгоритм; при этом, если нам надо будет класть в детектор фиктивные монеты, не будем класть вместо них ничего. Ясно, что при этом мы найдем фальшивую монету за то же число испытаний.

б) Условие. Докажите, что $B_{x,1}(n) \leq B_{x,1}(N)$ при $n < N$.

Решение. Жюри не известно простого доказательства этого факта.

3.9. Мы приведем два решения этой задачи. Оба решения годятся для обоих пунктов с незначительными изменениями; мы напишем одно из них для первого пункта, а другое — для второго.

а) Условие. Докажите, что если $D_{x,1}(n) = d$, то $\frac{2^d}{d+1} \geq n$. (Эта оценка не зависит от x !)

Решение. Рассмотрим алгоритм, позволяющий найти ФМ за d ходов. Пусть мы каким-то образом его провели; запишем результаты испытаний в строчку. У нас получилась строка из d знаков «Д» и «Н» (означающих «да» и «нет»). При этом по строчке мы умеем восстановить, какие именно взвешивания мы делали (ибо по первым i результатам алгоритм определяет, что за взвешивание делается на $(i + 1)$ -м шаге), а значит, каждой такой строчке однозначно соответствует ФМ.

Теперь выясним, сколько таких строчек соответствует одному варианту ФМ. Их хотя бы $d + 1$; действительно, есть как минимум такие строчки: 0) в которой все ответы правильные; 1) в которой ровно первый ответ неверен; 2) в которой только второй ответ неверен; ... ; k) в которой ровно k -й ответ неверен. Ясно, что строка 0) отличается от всех остальных; строки же i) и j) (при $i < j$) отличаются хотя бы в i -м разряде.

Таким образом, строк не меньше, чем $n(d + 1)$; с другой стороны, всех возможных строк не больше, чем 2^d . Таким образом, $n(d + 1) \leq 2^d$, что и требовалось.

Замечание. Из этого доказательства видно, как должен быть устроен алгоритм, если мы хотим его сделать близким к этой оценке. Она будет точной, если а) (почти) все строчки будут возможны и б) (!!!) если какой-то тестер сохотит, то мы сможем это распознать до второго его использования. Действительно, если мы этого не сделаем, то количество строк, соответствующих одной ФМ, увеличится.

б) Условие. Докажите, что если $B_{x,1}(n) = d$, то $\frac{3^d}{2d+1} \geq n$.

Решение. Введем обозначения. При каждом взвешивании мы делим монеты на три группы, и очередные веса отказывают монетам двух групп. Пусть уже сделаны некоторые взвешивания. Тогда монеты, которые всегда оказывались в «фальшивой» группе при взвешивании на i -х весах, назовем *фальшивыми с точки зрения* этих весов.

Тогда после нескольких шагов алгоритма все монеты делятся на следующие группы. 1) Монеты, фальшивые с точки зрения всех весов; такие монеты мы будем называть *подозреваемыми*. 2) Монеты, фальшивые с точки зрения всех весов, кроме i -х; такие монеты мы будем называть *отказниками i -го типа*. Ясно, что эти монеты могут оказаться фальшивыми, только если i -е веса сломаны. 3) Монеты, которые хотя бы двое весов помещали в группу настоящих; тогда они и являются настоящими, и их мы будем называть *эталонами*.

Пусть у нас имеется алгоритм, позволяющий найти фальшивую из n монет за d шагов. Мы можем считать, что он всегда заканчивает свою работу ровно через d шагов (если это происходит раньше, просто сделаем еще несколько произвольных взвешиваний).

Введем понятие *значимости* монеты в некоторый момент алгоритма. Если осталось еще t шагов до конца алгоритма (то есть сделано $d - t$ шагов), то будем говорить, что значимость любой подозреваемой монеты равна $2t + 1$, а значимость любого отказника — 1 (значимость эталона равна нулю). Значимостью ситуации назовем суммарную значимость всех монет.

Заметим, что если в ситуации со значимостью x делается некоторое взвешивание (скажем, на первых весах), то сумма значимостей трех ситуаций, в которые мы придем при трех возможных результатах взвешивания, не меньше x . Для этого достаточно доказать, что сумма возможных значимостей каждой монеты после взвешивания не меньше, чем ее исходная значимость. Подозреваемая со значимостью $2t + 1$ при единственном исходе останется подозреваемой (со значимостью $2(t - 1) + 1$), а при двух других исходах становится отказником со значимостью 1. Отказник не первого типа при одном исходе остается отказником, при двух других становится эталоном. Для отказников же первого типа (и только для них!) сумма значимостей после взвешивания будет больше их нынешней значимости (1 превращается в 3).

Итак, если значимость ситуации была равна x , то при одном из исходов она станет не меньше, чем $x/3$. Предположим, что при каждом взвешивании и получается такой исход. В начале алгоритма значимость была равна $(2d + 1)n$ (все монеты подозрительны), а в конце она должна стать равной 1 (так как после d шагов значимость любой монеты равна 1). Значит, $(2d + 1)n \leq 3^d$, что и требовалось доказать.

Замечание. Это доказательство тоже говорит немало о том, как должен выглядеть оптимальный алгоритм. Именно, значимость должна каждый раз уменьшаться втрое.

Задумаемся, а что может нам мешать каждый раз уменьшать значимость ровно в 3 раза? Во-первых, если мы взвешиваем весами того типа, которого есть отказники, то вес этих отказников не делится на три. Значит, мы должны построить процесс так, чтобы этой ситуации не возникало. Во-вторых, для каждого кон-

кретного взвешивания значимости ситуаций, к которым ведут три различных возможных исхода, должны быть примерно равны.

2.6. c) Условие. Любым числом весов, среди которых есть двое сломанных, нельзя найти фальшивую монету из $n > 3^6$ монет за 11 взвешиваний. (На удобном языке: $V_{x,2}(n) > 11$, если $n > 3^6$.)

Решение. Рассмотрим произвольный алгоритм, позволяющий найти ФМ из n монет за 11 ходов. Пусть мы каким-то образом его провели; запишем результаты испытаний в строчку. У нас получилась строка из 11 знаков «<», «=» и «>». Как и в решении 3.9а), каждой такой строчке однозначно соответствует ФМ.

Теперь выясним, сколько таких строчек соответствует одному варианту ФМ. Их хотя бы $1+2\cdot 11+4\cdot 55 = 243$; действительно, есть как минимум такие строчки: 0) в которой все ответы правильные; 1) в которых ровно один ответ неверен (таких строчек 22: можно выбрать место, в котором стоит неверный ответ, 11 способами, и в каждом из них может стоять один из двух возможных неверных ответов); 2) в которых ровно два ответа неверны (таких $4\cdot 55$, ибо есть 55 пар мест и 4 варианта пар неверных ответов). Нетрудно понять, что все описанные строчки различны.

Таким образом, строк не меньше, чем $243n$; с другой стороны, всех возможных строк не больше, чем 3^{11} . Таким образом, $n\cdot 243 \leq 3^{11}$, откуда $n \leq 3^6$.

4 Точные результаты

4.1. Условие. a) Докажите, что $D_{4,1}(2^4) = 7$.

b) Докажите, что $B_{4,1}(3^6) = 9$.

Решение. См. решение 4.4. Хотя это можно сделать и без применения столь общих приемов.

4.2. Условие. a) Среди какого наибольшего числа монет можно выявить фальшивую на $4\sigma[1]$ за 15 тестирований? (Иначе говоря, найдите наибольшее n такое, что $D_{4,1}(n) \leq 15$.)

b) Среди какого наибольшего числа монет можно выявить фальшивую на $4\sigma[1]$ за 13 тестирований? (Иначе говоря, найдите наибольшее n такое, что $B_{4,1}(n) \leq 13$.)

c) А за 40 тестирований?

Решение. Ответы. а) 2^{11} ; б) 3^{10} ; в) 3^{36} .

Верхние оценки следуют из задачи 3.9. Доказательство того, что эти оценки достигаются, вытекает из решения 4.4. Тем не менее, при желании эти алгоритмы можно найти ручными методами.

4.3. Условие. Приведите пример такого n , что $B_{4,1}(n) < B_{3,1}(n)$.

Решение. Решение этой задачи находится после 4.4.

4.4. a) Условие. Докажите, что $D_{4,1}(3^k) = k + \log_2 k + c_{dk}$, где последовательность c_{dk} ограничена.

Решение. Мы докажем, что $D_{4,1}(2^k) = k + t$ для наименьшего t такого, что $2^t \geq k + t + 1$ (тогда $t = \log_2(k + t) + O(1)$, откуда $t = \log_2 k + O(1)$, что и требовалось). Из решения 3.9 мы уже знаем, что $D_{4,1}(2^k) \geq k + t$. Осталось привести алгоритм, позволяющий найти фальшивую за $k + t$ взвешиваний.

Здесь и далее во всех задачах с детекторами значимостью подозреваемой монеты будем называть величину $i + 1$, где i — число ходов до конца процесса (по умолчанию), или же до специально оговоренного момента этого процесса. Значимость отказника всегда равна 1, эталона — нулю. Значимость ситуации есть сумма значимостей монет. Заметим, что сумма значимостей возможных ситуаций после тестирования не меньше исходной значимости; значит, при одном из исходов испытания она уменьшается не более, чем вдвое.

При этом значимость исходной ситуации равна $(k + t + 1)2^k \leq 2^{k+t}$. Значит, для достижения $k + t$ шагов мы должны добиться того, что значимость всегда уменьшается вдвое (или почти вдвое). Таким образом, мы будем строить алгоритм так, чтобы в каждый момент существовали отказники не более, чем трех различных типов; при этом значимость ситуации за m шагов до конца не будет превосходить 2^m . Ясно, что в начальный момент это так.

Сначала опишем шаг алгоритма в общих чертах. Пусть до конца осталось m шагов. Мы делим монеты на группы так, чтобы (i) возможные значимости ситуаций после тестирования не превосходили 2^{m-1} , и (ii) в каждой группе были бы отказники не более, чем двух типов. Затем проводим испытание тем детектором, для которого нет отказников его типа. Пусть он указал на некоторую группу, как на содержащую фальшивую. Тогда отказниками после этого хода будут только старые отказники из этой группы (среди которых не больше двух разных типов) и отказники текущего детектора (которые все одного типа) — то есть мы по индукции сохранили требуемое число типов отказников.

Теперь разберемся в деталях. Во-первых, заметим, что при таком распределении сумма значимостей возможных ситуаций после взвешивания будет равна исходной значимости. Поэтому, если мы смогли распределить подозреваемых так, чтобы эти значимости не превосходили 2^{m-1} , то заведомо можно как-то распределить отказников так, чтобы это продолжалось выполняться.

Однако, нам надо распределять отказников с выполнением условия (ii). Такую возможность обеспечивает следующая

Лемма о двух автобусах. Даны несколько школьников из трех классов (пусть их количества равны $a_1 \leq a_2 \leq a_3$) и два автобуса (их вместимости равны $b_1 \leq b_2$; при этом $a_1 + a_2 + a_3 \leq b_1 + b_2$). Школьников надо рассадить по автобусам так, чтобы в каждом автобусе были школьники не более, чем из двух классов. Тогда это можно сделать если и только если $b_1 \geq a_1$.

Доказательство. Пусть $b_1 \geq a_1$; покажем, как можно разместить школьников. Если суммарная вместимость автобусов больше, чем количество школьников, то можно уменьшить одно из чисел b_1 или b_2 на единицу так, чтобы условие продолжало выполняться (если $b_2 > b_1$, то уменьшим b_2 , иначе можно уменьшить b_1). Итого, можно считать, что $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2$

Выстроим всех школьников в ряд: сначала все из первого класса, затем — из третьего, и в конце — из второго. Затем рассадим первых b_1 из них в первый автобус, затем следующих b_2 во второй. Тогда все первоклассники окажутся в первом автобусе (непосредственно из условия), а все второклассники окажутся во втором автобусе (в противном случае $b_2 < a_2$, $b_1 > a_1 + a_3 > a_3 \geq b_2$, что неверно).

Обратно, если $b_1 < a_1$, то также $b_1 < a_2$ и $b_1 < a_3$. То есть никакой класс не может целиком находиться в первом автобусе, а значит представители всех трех классов попадут во второй автобус. \square

Таким образом, если мы знаем, сколько отказников мы должны положить в каждую группу, то по лемме мы сможем определить, правда ли, что отказники распределяются так, как требует условие (ii).

Вернемся к построению алгоритма. На первых k тестированиях мы делим и подозреваемых, и отказников на две равные части; тогда, очевидно, при любом исходе значимость уменьшится ровно вдвое, поэтому условие (i) выполняется. При этом условие леммы, очевидно, выполняется (отказников какого-то типа не больше половины!), поэтому здесь мы шаг выполнить смогли. После k -ого такого хода останется ровно одна подозреваемая и несколько отказников трех типов.

Разберемся подробнее, что происходит на следующих ходах. Если к какому-то ходу подозреваемых не осталось, то всех отказников мы можем разделить на две группы поровну (или почти поровну, если их число нечетно) с выполнением условия (ii) — по тем же причинам. При этом, так как значимость не превосходила 2^m до этого шага, то число монет в группах не превосходит 2^{m-1} , а значит, условие (i) также выполнено.

Осталось разобрать случай, когда подозреваемая осталась. Положим ее в первую группу; тогда в эту группу можно положить еще максимум $2^{m-1} - m$ отказников, а остальных — в другую. Теперь, если лемма об автобусах неприменима, то отказников каждого из трех типов больше, чем $2^{m-1} - m + 1$. Но тогда общая значимость монет сейчас равна $(m + 1) + 3(2^{m-1} - m + 1) = 2^m + (2^{m-1} - 2m + 4)$; нетрудно видеть, что вторая скобка всегда положительна, поэтому эта ситуация невозможна.

б) Условие. Докажите, что $V_{4,1}(3^k) = k + \log_3 k + c_{ek}$, где последовательность c_{ek} ограничена.

Решение. Аналогично, мы докажем, что $V_{4,1}(3^k) = k + t$ для наименьшего t такого, что $3^t \geq 2(k + t) + 1$ (тогда $t = \log_3 k + O(1)$). Оценка $V_{4,1}(3^k) \geq k + t$ опять следует из задачи 3.9. Алгоритм мы будем строить, руководствуясь такими же соображениями (здесь значимость подозрительной монеты за m шагов до конца равна $2m + 1$). В этом случае условия разбиения на три группы будут выглядеть так: (i) возможные значимости ситуаций после тестирования не превосходят 3^{m-1} ; (ii) в каждой группе есть отказники не более, чем двух типов; и (iii) в двух группах (возможно, после добавления эталонов) поровну монет (именно эти две группы мы и положим на чашки весов).

Выполнимость условия (ii) гарантирует аналогичная

Лемма о трех автобусах. Даны несколько школьников из трех классов (пусть их количества равны $a_1 \leq a_2 \leq a_3$) и три автобуса (их вместимости равны $b_1 \leq b_2 \leq b_3$; при этом $a_1 + a_2 + a_3 \leq b_1 + b_2 + b_3$). Школьников надо рассадить по автобусам так, чтобы в каждом автобусе были школьники не более, чем из двух классов. Тогда это можно сделать тогда и только тогда, когда $b_1 + b_2 \geq a_1$.

Доказательство. Покажем, как рассадить школьников при условии $b_1 + b_2 \geq a_1$. Опять же, если $a_1 + a_2 + a_3 < b_1 + b_2 + b_3$, то можно уменьшить одно из b_i с соблюдением этого условия.

Выстроим всех школьников в ряд: сначала все из первого класса, затем — из третьего, и в конце — из второго. Затем рассадим первых b_1 из них в первый автобус, затем следующих b_2 во второй, и оставшихся в третий. В первый автобус попадает не больше трети, то есть второклассники в него не попадут. В третий не попадут первоклассники из условия леммы. Наконец, если во второй автобус попали дети из всех трех классов, то в него попали хотя бы $a_3 + 2$ человека, а в третий — не больше $a_2 - 1 < a_3$. Это невозможно, так как $b_2 \leq b_3$.

Обратно, если $b_1 + b_2 < a_1$, то также $b_1 + b_2 < a_2$ и $b_1 + b_2 < a_3$. Таким образом, никакой класс не может целиком находиться в первых двух автобусах, а значит, представители всех трех классов попадут в третий автобус. \square

Замечание. На самом деле, лемма о двух автобусах — частный случай этой, когда в одном автобусе нет мест.

Вернемся к алгоритму. На первых k взвешиваниях мы делим и подозреваемых, и отказников на три равные части; тогда все три условия выполнены. После k -ого такого хода останется ровно одна подозреваемая и несколько отказников трех типов. Заметим, что после двух первых взвешиваний у нас уже получилось $4 \cdot 3^{k-2}$ эталона. Это позволит нам гарантировать выполнение условия (iii).

На следующих ходах, если к какому-то ходу подозреваемых не осталось, то всех отказников мы можем разделить на три группы почти поровну с выполнением условия (ii); при этом в двух группах будет поровну монет. Пусть, наконец, подозреваемая осталась. Положим ее в первую группу; это можно сделать, так как ее значимость после этого взвешивания будет равна $2m - 1 \leq 3^{m-1}$. Можно считать, что во вторую и третью группы мы должны положить поровну отказников. Тогда сумма двух минимальных вместимостей групп больше трети суммарной вместимости, поэтому лемма применима. При этом условие (iii) также выполняется. Последний случай разобран.

с) Найдите возможно лучшее ограничение сверху на эту последовательность.

4.3. Условие. Приведите пример такого n , что $B_{4,1}(n) < B_{3,1}(n)$.

Решение. Например, годится $n = 3^{10}$. Из решения задачи 4.2b) следует, что $B_{4,1}(n) = 13$. Далее мы будем пользоваться терминологией, введенной в 3.9b).

Докажем, что $B_{3,1}(n) > 13$. Предположим противное; это может случиться, только если значимость на каждом шагу уменьшается ровно втрое (при любом исходе взвешивания!). А это, в свою очередь, значит, что в любой момент существуют отказники не более, чем двух типов — а именно **не** того типа, на котором производится очередное взвешивание.

Рассмотрим, как это может происходить. Будем обозначать ситуацию тройкой чисел (a, b, c) , где a — количество подозреваемых, а b и c — количества отказников присутствующих двух типов. Тогда исходная ситуация есть $(3^{10}, 0, 0)$, после первого взвешивания — $(3^9, 2 \cdot 3^9, 0)$. Пусть во втором взвешивании количества подозреваемых в группах равны a, b, c .

Пусть это взвешивание показало на первую группу, тогда мы пришли к ситуации $(a, 3^9 - a, t)$, где число t вычисляется из суммарной значимости: $23a + (3^9 - a) + t = 3^{11}$, откуда $t = 8 \cdot 3^9 - 22a$. Заметим, что $t \geq 0$, то есть $a \leq \frac{4}{11}3^9$. Аналогично $b, c \leq \frac{4}{11}3^9$, поэтому $a = 3^9 - (b + c) \geq \frac{3}{11}3^9$.

Посмотрим на третье взвешивание. Если все a подозреваемых лежат в одной группе, то значимость этой группы будет не меньше $21 \cdot \frac{3}{11}3^9 > 3^{10}$, что невозможно. Значит, подозреваемые попадут хотя бы в две группы. Тогда, чтобы после каждого возможного исхода оставались отказники лишь двух типов, необходимо, чтобы в каждой группе лежали бы отказники только одного типа. Значит, в какой-то группе будут лежать **все** отказники одного типа — пусть их количество равно s . Если на ней лежат еще x подозреваемых, то ее значимость после взвешивания равна $3^{10} = 21x + (a - x) + s = s + a + 20x$; таким образом, $3^{10} - s - a$ должно делиться на 20. При этом $s = 3^9 - a$ либо $s = t = 8 \cdot 3^9 - 22a$. В первом случае получаем, что $3^{10} - s - a = 2 \cdot 3^9$ не делится на 20, что невозможно. Значит, выполнен второй случай, а тогда $3^{10} - s - a = 21a - 5 \cdot 3^9$. Так как это число делится на 20, то a должно делиться на 5. Аналогично, b и c также должны делиться на 5; это противоречит тому, что $a + b + c = 3^9$, которое на 5 не делится.

4.5. а) Условие. Докажите, что $D_{x,1}(n) = D_{4,1}(n)$ для любого n и $x > 4$.

Решение. Пусть мы должны найти фальшивую из n монет. Заметим, что если t таково, что $2^t < n(t + 1)$, то найти фальшивую за t испытаний не удастся из соображений значимости. Аналогично, если $2^{t-1} < \lceil n/2 \rceil \cdot t + (n - \lceil n/2 \rceil)$ (верхняя целая часть $\lceil x \rceil$ есть наименьшее целое число, не меньшее x), то невозможно найти фальшивую. В самом деле, как бы мы не разделили монеты для первого теста, в одну из групп попадут хотя бы $\lceil n/2 \rceil$ монет; тогда, если первый тест скажет, что фальшивая в этой группе, определение будет невозможно по соображениям значимости. Понятно, что второе неравенство сильнее первого, то есть достаточно проверять его.

Итак, если мы приведем алгоритм, который для любого такого t , что $2^{t-1} \geq \lceil n/2 \rceil \cdot t + (n - \lceil n/2 \rceil)$ ищет фальшивую за t ходов при помощи 4 детекторов, то мы доказали, что $D_{4,1}(n) = D_{\infty,1}(n)$. Сделаем это.

Построим алгоритм, отвечающий двум условиям: (i) за i шагов до конца значимость ситуации не больше 2^i ; (ii) присутствуют отказники не более чем трех типов. На первом шаге разделим монеты почти пополам (т.е. на группы из $\lceil n/2 \rceil$ и $n - \lceil n/2 \rceil$) монет. По предположению, значимость ситуации после взвешивания $\leq 2^{t-1}$. Далее каждый раз делим подозреваемых почти пополам, а отказников распределяем исходя из соображений значимости, после чего выбираем, каких именно отказников куда помещать — по лемме о двух автобусах.

Рассмотрим i -й шаг до конца. Если значимость ситуации меньше 2^i , то добавим *фиктивных* отказников так, чтобы новая значимость была равна 2^i . Нетрудно понять, что если отказников (считая виртуальных!) не меньше, чем $3(i - 2) - 1$, то мы, во-первых, можем добиться того, чтобы значимости возможных после взвешивания ситуаций отличались не больше, чем на 1. Тогда в обоих случаях значимости за $i - 1$ шаг до конца будут не больше 2^{i-1} , ибо их сумма не больше 2^i , что и требовалось. Более того, в этом случае количества отказников в двух группах будут отличаться не более, чем вдвое, поэтому в данном случае лемма об автобусах также применима (проверьте это!).

Осталось показать, что количество отказников за i шагов до конца не меньше, чем $3(i - 2) - 1$, то есть суммарная значимость подозреваемых не превосходит $2^i - 3(i - 2) + 1$. Это можно сделать аккуратным подсчетом; мы не будем проводить его здесь.

б) Условие. Докажите, что $B_{x,1}(n) = B_{4,1}(n)$ для любого n и $x > 4$.

Решение. Аналогично; нужно вдобавок добиться, чтобы в двух из получающихся на очередном шаге групп будет поровну элементов. Это можно сделать добавлением эталонов.

Замечание. Теми же методами (хотя и с большим числом технических подробностей) можно показать, что идеальное число тестеров существует для любого числа сломанных тестеров.

4.6. а) Условие. Верна ли оценка того же вида, что и в задаче 4.4, для $D_{3,1}(n)$?

Решение. Пусть мы хотим (при достаточно большом n) из n монет найти фальшивую тремя детекторами, из которых один сломан.

Рассмотрим минимальное d , такое что $2^d + d + 1 \geq n(2d + 1)$. Докажем, что нам хватит d ходов для того, чтобы осталось не более двух монет, которые могут оказаться фальшивыми; это и будет момент, относительно которого мы определяем значимость. Тогда исходная значимость равна $n(2d + 1)$.

Обозначим $x_i = 2^i + i + 1$. Построим процесс так, чтобы за i взвешиваний до конца значимость не превосходила x_i , а отказники всегда были не более, чем двух разных типов. Заметим, что если мы этого добились, то после d -го хода значимость не превосходит 2, значит, не более чем две монеты являются подозреваемыми или отказниками.

Построим процесс по индукции. До первого взвешивания оба условия выполнены. Пусть осталось построить i последних взвешиваний, покажем, как сделать очередное. Здесь вместо леммы об автобусах используется следующая (очевидная)

Лемма о разрезании. Пусть в ряд выстроены несколько предметов, стоимость каждого не превосходит x , а общая их стоимость равна S . Тогда ряд можно разбить на t частей так, чтобы стоимость каждой части не превосходила $\frac{S + (t-1)x}{t}$.

Пусть, без ограничения общности, присутствуют отказники первого и второго типа. Расставим монеты в ряд: сначала отказников первого типа, затем подозреваемых, и в конце отказников второго типа. Обозначим количество подозреваемых через a . Посчитаем отказников с коэффициентом 1, а подозреваемых — $i-1$. Тогда сумма коэффициентов не превосходит $x_i - 2a$; значит, по лемме о разрезании этот ряд можно разрезать на две части так, чтобы сумма коэффициентов в каждой части была $\leq \frac{x_i - 2a + i - 1}{2}$. Теперь, если протестировать детектором монеты любой из частей разрезания, то значимость полученной части будет равна сумме ее коэффициентов, увеличенной на количество подозреваемых (ибо подозреваемых в этой части мы должны считать с коэффициентом i вместо $i-1$, а в другой — с коэффициентом 1 вместо 0). Таким образом, при любом исходе значимость не превысит $\frac{x_i + i - 1}{2} = x_{i-1}$. При этом, что если в какую-то часть разбиения попали отказники обоих типов, то туда же попали все подозреваемые; поэтому при любом исходе проверки остались отказники не больше, чем двух типов.

Итак, через d взвешиваний у нас осталось не более двух кандидатов на ФМ. Осталось заметить, что из двух монет одну фальшивую можно найти за ограниченное число ходов (например, за 3). Таким образом, доказано, что $d + 3$ тестирований хватит. Осталось заметить, что $d = \log_2(n(2d+1)) - d - 1$, откуда $d = \log_2 n + \log_2 \log_2 n + O(1)$, как и требовалось.

б) Условие. Тот же вопрос про $B_{3,1}(n)$.

Решение. Аналогично, мы собираемся (при достаточно больших n) из n монет оставить только 3 кандидатов в фальшивые за d взвешиваний. Мы утверждаем, что достаточно выбрать d таким, что

$$(2d+1) + 2 \cdot 3^d \geq n(2d+1).$$

Тогда (по задаче 2.1) мы найдем ФМ за $d+3$ взвешивания; при этом $d = \log_3 n + \log_3 \log_3 n + O(1)$.

Опять же, моментом, относительно которого отсчитывается значимость, мы называем момент после d -го взвешивания; тогда исходная значимость равна $n(2d+1)$.

Обозначим $y_i = (2i+1) + 2 \cdot 3^i$; мы будем строить процесс так, чтобы за i взвешиваний до конца значимость не превосходила y_i , а отказники всегда были не более, чем двух разных типов; тогда после d -го взвешивания значимость не превосходит 3, что и требовалось.

Шаг алгоритма строится опять же аналогично. Присвоим всем подозреваемым коэффициент $D = 2i - 2$, а отказникам коэффициент 1; тогда сумма всех коэффициентов не превосходит $y_i - 3a$, где a — количество подозреваемых. Разложим все монеты в ряд: сначала отказников первого типа, затем подозреваемых, и в конце отказников второго типа. Тогда по лемме о разрезании, из можно разрезать на три части так, что сумма коэффициентов в каждой части не больше $\frac{y_i - 3a + 2D}{3}$. Это значит, что значимость любой ситуации после взвешивания с такими тремя частями не превосходит $\frac{y_i - 3a + 2D}{3} + a = y_{i-1}$, что и требовалось.

Здесь может возникнуть еще одна проблема: количества монет в трех полученных группах могут различаться. Покажем, что нам хватит эталонов для того, чтобы сделать две группы равными; тогда мы можем соорудить требуемое взвешивание. Легко видеть, что на первых двух шагах таких проблем не возникает: в первом взвешивании две из трех групп имеют равное количество монет, а во втором взвешивании легко распределить отказников и подозреваемых по трем группам так, что в двух из них монет будет поровну (немного изменив алгоритм разбиения, но не ухудшив оценку!). После этих взвешиваний появится хотя бы $\frac{4}{9}n - 2$ эталонов. Тогда мы раскладываем по трем группам не более, чем $\frac{5}{9}n + 2$ монет, и значит, разность количеств монет в двух из этих групп будет не больше, чем $\frac{5}{27}n + 1 \leq \frac{4}{9}n - 2$ при $n \geq 12$. Тогда эталонов хватит. Решение окончено.

Weighings using broken balances

K. Knop, G. Chelnokov, I. Bogdanov

1 Introduction

Basic notions

As in the usual weighing problems, we have a set of coins indistinguishable by sight, though one of them is false. The weight of a false coin is a bit smaller than the weight of a genuine one, and we want to find this false coin. In different problems we will use the different types of testers.

A *detector* is a tester, which at one turn (or *testing*) tells whether a given subset of coins contains a false one or not. Thus, for any subdivision of the total set into two subsets, a detector shows which one of them contains a false coin.

A bi-scaled balance (or simply *balance*) is a tester comparing the weights of two subsets. Thus, for two subsets with equal numbers of coins, the balance compares the numbers of false coins in these subsets. In our problem, the balance shows which of three subsets in a subdivision contains a false coin (two of three subsets should have the same cardinality).

The zest of this problem set is that some testers can report a wrong information. Actually, such a tester does not behave as a “liar”: it does **not** necessarily tell the wrong messages each time. It is simply broken, so its responses may appear wrong and correct from time to time; they have no relation to the reality, and we can consider this balance as a generator of random answers. So, we have several testers, and we know only the number of broken testers among them; but we do not know, which ones are broken. (Note that at each testing, only one tester is used!)

Let us introduce the notation. We denote by $D_{x,y}(z)$ the minimal number of testings by detectors which are necessary to find one false coin from n using x detectors with y broken ones among them. (We should be able to specify the false coin for **each** possible sequence of detector responses.) Analogously, by $B_{x,y}(z)$ we denote the same number for the testing system consisting of x balances with y broken ones among them. The systems of x detectors (balances) with y broken ones will be referred to as $xd[y]$ ($xb[y]$).

Throughout the first sections, we will write down two formulations of the problem: one in an usual language, and another in our notation. This is to get all the readers acquainted with the notation.

2 Introductory problems: some particular cases

What are we able to achieve?

2.1. Using three balances with one broken among them, we can find a false coin of 3 ones in 3 weighings. (Using the notation: $B_{3,1}(3) \leq 3$.)

2.2. a) Using three detectors with one broken among them, we can find a false coin of 8 ones in 6 detections. (Using the notation: $D_{3,1}(8) \leq 6$.)

b) Using three balances with one broken among them, we can find a false coin of 9 ones in 4 weighings. (Using the notation: $B_{3,1}(9) \leq 4$.)

2.3. a) Using three detectors with one broken among them, we can find a false coin of 32 ones in 9 detections. (Using the notation: $D_{3,1}(32) \leq 9$.)

b) Using three balances with one broken among them, we can find a false coin of 81 ones in 7 weighings. (Using the notation: $B_{3,1}(81) \leq 7$.)

What are we unable?

2.4. If we have two coins with one of them being false, it is not possible to find the false one in 2 testings using any number of testers with at least one broken among them. (Using the notation: $D_{x,1}(2) \geq 3$, $B_{x,1}(2) \geq 3$.)

2.5. a) It is not possible to find a false coin from 2^k ones in k detections by any number of detectors with one broken among them. (Using the notation: $D_{x,1}(2^k) > k$).

b) It is not possible to find a false coin from 3^k ones in k weighings by any number of balances with one broken among them. (Using the notation: $B_{x,1}(3^k) > k$).

2.6. a) It is not possible to find a false coin from 2^k ones in $k + 1$ detections by any number of detectors with one broken among them. (Using the notation: $D_{x,1}(2^k) > k + 1$).

b) It is not possible to find a false coin from 3^k ones in $k + 1$ weighings by any number of balances with one broken among them. (Using the notation: $B_{x,1}(3^k) > k + 1$).

c) It is not possible to find a false coin from $n > 3^6$ ones in 11 weighings by any number of balances with **two** broken ones among them. (Using the notation: $B_{x,2}(n) > 11$, if $n > 3^6$).

3 Rough but serial results

Upper bounds

In this section, k is always a positive integer.

3.1. a) For each k find the minimal value of K such that $D_{K,k}(n) < \infty$ for every n (in other words, find the least number of detectors with k broken among them such that it is possible to find the false coin using them).

b) For each k find the minimal value of K such that $B_{K,k}(n) < \infty$ for every n .

3.2. a) Prove that $D_{3,1}(2^k) \leq 2k + 1$.

b) Prove that $B_{3,1}(3^k) \leq 2k + 1$.

It follows from the previous problem that, using some balances with one broken, one can find a false coin from n in approximately $2 \log_2 n$ detections, or in approximately $2 \log_3 n$ weighings. But this estimate is not sharp. The aim of this section is to find the correct constant in the estimates of the form $D_{x,1}(n) \lesssim c \log_2 n$ and $B_{x,1}(n) \lesssim c \log_3 n$.

3.3. a) Prove that $B_{3,1}(3^{2k}) \leq 3k + 1$.

b) Prove that $D_{3,1}(2^{2k}) \leq 3k + 2$.

The previous problem shows that c can be made less than 2. Our next aim is to prove that $c = 1$. It is easier to make this using more than 3 testers.

We write $f(k) = o(k)$ for the function growing slower than k , that is, $f(k)/k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). For instance, $\log_2 k = o(k)$ and $\sqrt{k} = o(k)$.

3.4. a) Prove that having an infinite number of detectors with one broken, one can find a false coin from 2^k in $k + o(k)$ weighings; that is, $D_{\infty,1}(2^k) = k + o(k)$.

b) Prove that having an infinite number of balances with one broken, one can find a false coin from 3^k in $k + o(k)$ weighings; that is, $B_{\infty,1}(3^k) = k + o(k)$.

3.5. a) Prove that there exists x such that $D_{x,1}(2^k) = k + o(k)$.

b) Prove that there exists x such that $B_{x,1}(3^k) = k + o(k)$.

3.6. a) Prove that $D_{3,1}(2^{k(k+1)}) \leq (k + 1)^2$ for every $k \geq 5$.

b) Prove that $B_{3,1}(3^{k(k+1)}) \leq (k + 1)^2$ for every $k \geq 2$.

Lower bounds

3.7. a) Prove that $D_{x,1}(n) \leq D_{x,1}(2^k)$ if $n < 2^k$.

b) Prove that $B_{x,1}(n) \leq B_{x,1}(3^k)$ if $n < 3^k$.

3.8. a) Prove that $D_{x,1}(n) \leq D_{x,1}(N)$ if $n < N$.

b) Prove that $B_{x,1}(n) \leq B_{x,1}(N)$ if $n < N$.

3.9. a) Suppose that $D_{x,1}(n) = d$; prove that $\frac{2^d}{d+1} \geq n$. (This bound does not depend on x !)

b) Suppose that $B_{x,1}(n) = d$; prove that $\frac{3^d}{2d+1} \geq n$.

4 Sharp results

The aim of this section is to bring upper and lower bounds together. So it begins with some particular cases again.

4.1. a) Prove that $D_{4,1}(2^4) = 7$.

b) Prove that $B_{4,1}(3^6) = 9$.

4.2. a) Find the maximal number of coins n such that $D_{4,1}(n) \leq 15$.

b) Find the maximal number of coins n such that $B_{4,1}(n) \leq 13$.

c) Find the maximal number of coins n such that $B_{4,1}(n) \leq 40$.

4.3. Find some value of n such that $B_{4,1}(n) < B_{3,1}(n)$.

4.4. a) Prove that $D_{4,1}(3^k) = k + \log_2 k + c_{dk}$, where the sequence c_{dk} is bounded.

b) Prove that $B_{4,1}(3^k) = k + \log_3 k + c_{bk}$, where the sequence c_{bk} is bounded.

c) Try to find a better upper bound for these sequences.

4.5. a) Prove that $D_{x,1}(n) = D_{4,1}(n)$ for every n and $x > 4$.

b) Prove that $B_{x,1}(n) = B_{4,1}(n)$ for every n and $x > 4$.

Fix some value of s . If there exists t such that $D_{t,s}(n) = D_{x,s}(n)$ ($B_{t,s}(n) = B_{x,s}(n)$) for all $x > t$, then we say that t is an *ideal* number of testers (for the given number s of broken ones). In other words, it is senseless to increase the number of testers. The previous problem states that 4 testers is an ideal number for 1 broken tester.

4.6. a) Find whether the estimate of the same form as in problem 4.4 is valid for $D_{3,1}(n)$.

b) The same question for $B_{3,1}(n)$.

Weighings using broken balances. Solutions

K. Knop, G. Chelnokov, I. Bogdanov

2 Introductory problems: some particular cases

What are we able to achieve?

For convenience, we will denote a false coin as FC.

Note that in the situation with only one broken tester, if the readings of two testers on identical questions coincide, then this reading is true since one of the testers is operable.

2.1. Statement. *Using three balances with one broken among them, we can find a false coin of 3 ones in 3 weighings. (Using the notation: $B_{3,1}(3) \leq 3$.)*

Solution. Compare two coins consecutively on all three balances. At least two results will coincide — these ones will be correct. From this result, one can easily find a FC.

2.2. a) Statement. *Using three detectors with one broken among them, we can find a false coin of 8 ones in 6 detections. (Using the notation: $D_{3,1}(8) \leq 6$.)*

Solution. Split the coins into 4 groups with 2 coins in each. Apply the first detector to groups 1 and 2, and the second one to groups 1 and 3. Without loss of generality, we may assume that both answers are affirmative (why?). Then apply the third detector to groups 2 and 3. Two cases may occur.

1. If the answer is negative, then FC is in group 1 (otherwise two balances made wrong statements). Then we check one coin from this group by all three detectors; these results show which coin from group 1 is false.

2. Suppose that the third answer is affirmative. Then one of detectors lied (note that if we had the fourth detector, then it would be operable, and the remaining would be easy; nevertheless, we can also proceed without it!).

Check groups 1 and 2 — now by the second detector. If the result is affirmative (so it coincides with the result of the first detector), then it is true, and FC is in group 1 or 2. Moreover, the first balance told the truth on first use, hence either second or third balance lied. Otherwise, if the result of the third detection is negative, then either first or second balance is broken; hence the third one is operable, and FC is in group 2 or 3.

So, in each case we get one operable balance and 4 candidates to be FC. It is now easy to find FC in 2 detections.

b) Statement. *Using three balances with one broken among them, we can find a false coin of 9 ones in 4 weighings. (Using the notation: $B_{3,1}(9) \leq 4$.)*

Solution. For the convenience, we enumerate the coins by numbers from 0 to 8, and write these numbers in a ternary notation (so, each coin corresponds to an ordered pair of digits from 0 to 2). In the first weighing, we apply the first balance to the groups constructed by the leftmost digit: the left hand contains the coins with 0 at this digit, and the right hand contains those with 1. Analogously, the second weighing (on the second balance) compares the coins with 0 in the last digit with those with 1. Without loss of generality, we may assume that both weighings told that a false coin has 0 in a corresponding digit. Then 4 coins having no zeroes in a ternary notation are surely genuine.

Now we split all the coins into three parts in a following way: put coin 00 into one group, coins 01 and 02 into the second one, and 10 and 20 into the third. Complete each group by genuine coins so that each group would contain 3 coins. Compare two of these groups by the third balance.

This weighing claims that FC is in one of these groups. If this is a group with 00, then this is true (otherwise two balances lie), and we do not need the fourth weighing. If this is a group with 01 and 02, then this claim contradicts the readings of the second balance. Hence, the first balance is operable, so the false coin has 0 as its first digit, and there are three candidates for FC. Thus, we can easily find FC in one weighing. If the false coin is in a group with 10 and 20, we proceed analogously.

2.3. a) Statement. *Using three detectors with one broken among them, we can find a false coin of 32 ones in 9 detections. (Using the notation: $D_{3,1}(32) \leq 9$.)*

Solution. Split all the coins into 4 groups with 8 coins in each, and apply the same algorithm as in 2.2a). In case 1, after 3 detections we get 8 candidates for FC; applying problem 2.2a) again, we make the desired. In case 2, in 4 detections we find two groups with FC in one of them, and we find one operable detector. So in 4 other detections we find FC; in this case we do not need a 9th detection.

b) Statement. *Using three balances with one broken among them, we can find a false coin of 81 ones in 7 weighings. (Using the notation: $B_{3,1}(81) \leq 7$.)*

Solution. Analogously to problem 2.2b), we identify the coins with the sequences of 4 digits, each being from 0 to 2. Again, we take the first weighing on first balance according to the first digit of a coin, and the second weighing on the second balance by the second digit. Again, without loss of generality we may assume that zero digits are suspicious by opinions of the balances, and then the coins with nonzero first two digits are genuine.

Now we again split coins into three groups: first one containing 9 coins beginning with 00, the second containing 18 coins beginning with 01 and 02, and the third one containing the coins beginning with 10 or 20. We can distribute the genuine coins so that each group would contain 27 coins; then we compare two groups on the third balance.

If the result claims that FM is in the group beginning with 00, then this claim is true, and we are left to work out 9 coins in 4 weighings; this is possible by problem 2.2b).

Otherwise, suppose that the result claims that the false coin begins either with 01 or with 02 (the case with 10 and 20 is analogous). Then the readings of the third balance contradict those of the second balance; hence the first one is surely operable, and (by the first weighing) the false coin should begin with 0. Thus we get 27 coins and one operable balance; then we are able to find FC in 3 weighings (in this case we do not need the 7th weighing).

What are we unable?

2.4. Statement. *If we have two coins with one of them being false, it is not possible to find the false one in 2 testings using any number of testers with at least one broken among them. (Using the notation: $D_{x,1}(2) \geq 3$, $B_{x,1}(2) \geq 3$.)*

Solution. If both weighings are made on one tester, then it can appear to be broken, and we get no information at all. Otherwise, we cannot find FC if the readings of two balances contradict each other.

2.5. a) Statement. *It is not possible to find a false coin from 2^k ones in k detections by any number of detectors with one broken among them. (Using the notation: $D_{x,1}(2^k) > k$.)*

Solution. Suppose this is possible.

Suppose that some tests are already taken. Consider all the coins which can appear to be false. For each of them, there exists a result of the next test which allows this coin to remain false. Hence the number of such coins divides by not more than 2 for some result of the next test.

Note that this number did not change on the first test, since this test might use the broken tester. Hence after d steps (with an appropriate choice of test results) we get not less than $2^k/2^d$ possible FCs. Hence, if we find FC, then $2^k/2^d \leq 1 \iff d \geq k$, QED.

b) Statement. *It is not possible to find a false coin from 3^k ones in k weighings by any number of balances with one broken among them. (Using the notation: $B_{x,1}(3^k) > k$.)*

Solution. Analogously, but the number of candidates divides by 3 instead of 2.

2.6. a) Statement. *It is not possible to find a false coin from 2^k ones in $k+1$ detections by any number of detectors with one broken among them. (Using the notation: $D_{x,1}(2^k) > k+1$.)*

Solution. We say that a testing *refuses* to a coin, if it claimed that this coin is not in a group with a false one. In other words, if a testing refused to a coin, then either the coin is genuine or the tester is broken.

By the same reasons as in a previous problem, if one can find FC in $k+1$ testing, then after the second testing we get not more than 2^{k-1} candidates to be false. On the other hand, each coin, to which at least one of first two testings did not refuse, is such a candidate (if another testing was made on a broken detector). Let us estimate the number of such coins.

The first testing (for one of the results) refuses to not more than $\frac{1}{2}$ of coins; hence it *does not refuse* to a half at least. The second testing — for one of the results — does not refuse to some coin such that the first one refused to it. Then, the number of candidates is more than a half on a total number of coins; hence the desired is not possible.

b) Statement. *It is not possible to find a false coin from 3^k ones in $k+1$ weighings by any number of balances with one broken among them. (Using the notation: $B_{x,1}(3^k) > k+1$.)*

Solution. Analogously: we get that the first weighing does not refuse to at least a third of the total number of coins, and the second one does not refuse to at least one more coin. Hence, after these weighings the number of candidates is greater than a third of the total number of coins.

c) Statement. *It is not possible to find a false coin from $n > 3^6$ ones in 11 weighings by any number of balances with two broken ones among them. (Using the notation: $B_{x,2}(n) > 11$, if $n > 3^6$.)*

Solution. The solution of this problem is in the end of Section 3.

3 Rough but serial results

Upper bounds

3.1. Statement. a) *For each k find the minimal value of K such that $D_{K,k}(n) < \infty$ for every n (in other words, find the least number of detectors with k broken among them such that it is possible to find the false coin using them).*

b) *For each k find the minimal value of K such that $B_{K,k}(n) < \infty$ for every n .*

Solution.

The solution does not depend on the type of testers.

Answer. $K = 2k + 1$.

Suppose the number of testers is $\leq 2k$, and the coin A is false. Let all broken testers work so as the false coin is B . In this case we cannot determine whether all broken testers are broken (and the false coin is A) or we have the opposite case (and the false coin is B). If the number of testers is $2k + 1$ then each coin (or, in the case of balances, each pair of coins) can be tested by all testers; $k + 1$ results will coincide, and this will be the valid result.

3.2. a) Statement. *Prove that $D_{3,1}(2^k) \leq 2k + 1$.*

Solution. We use induction on k . For $k = 1$ we test the first coin by all three detectors; two coincident answers are valid.

Suppose the assertion is proved for $k = t$. Consider 2^{t+1} coins and test first 2^t of them by first two detectors. If the results coincide then they are valid, so we reduce the number of coins to 2^t ; by the induction hypothesis, we obtain our assertion.

In the case of distinct results, one of two first detectors is broken; then the third (apparently operable) detector can find FC in $t + 1$ detections; in this case we have used not more than $t + 3 \leq 2(t + 1) + 1$ detections.

b) Statement. Prove that $B_{3,1}(3^k) \leq 2k + 1$.

Solution. Quite similarly.

3.3. a) Statement. Prove that $B_{3,1}(3^{2k}) \leq 3k + 1$.

Solution. Again by induction; the base case $k = 1$ is Problem 2.2b). The induction step is quite similar to the solution of 2.3b).

b) Statement. Prove that $D_{3,1}(2^{2k}) \leq 3k + 2$.

Solution. Similarly, by induction; the induction step is similar to the solution of 2.3a). The base case is proved by a similar argument; namely, we either find FC in 3 detections, or in 4 detections we find a pair of coins including the false one, and an operable detector. Then the remaining testing enables to find FC.

3.4. a) Statement. Prove that having an infinite number of detectors with one broken, one can find a false coin from 2^k in $k + o(k)$ weighings; that is, $D_{\infty,1}(2^k) = k + o(k)$.

Solution. Enumerate all coins by k -digit binary numbers (from $0 \dots 0$ to $1 \dots 1$). In the first k testings we apply first k detectors, each to the corresponding position. Without loss of generality, we may assume that each detector responds that the false coin has 0 in the corresponding position. Hence the number corresponding to FC contains not more than one 1.

Apply $(k + 1)$ th detector to the coin $0 \dots 0$. If the response is that it is false then this is valid (otherwise two detectors lie!). In the opposite case, some detector among first $k + 1$ ones has lied, and we have $k + 1$ coins possibly false. Among them, we can find FC by $(k + 2)$ th (operable!) detector in $\leq \log_2(k + 1) + 1$ testings. In all, we have used not more than $k + 1 + \log_2(k + 1) + 1 = k + o(k)$ testings.

b) Statement. Prove that having an infinite number of balances with one broken, one can find a false coin from 3^k in $k + o(k)$ weighings; that is, $B_{\infty,1}(2^k) = k + o(k)$.

Solution. Quite similarly.

3.5. a) Statement. Prove that there exists x such that $D_{x,1}(2^k) = k + o(k)$.

b) Statement. Prove that there exists x such that $B_{x,1}(3^k) = k + o(k)$.

Solution. Follows from the next problem.

3.6. b) Statement. Prove that $B_{3,1}(3^{k(k+1)}) \leq (k + 1)^2$ for every $k \geq 2$.

Solution. We will use induction on k . The base case $k = 1$ was proved in 2.2.b).

As above, enumerate coins in the ternary notation. In the first k weighing, we examine first k position by the first balance, and in the next k weighings we examine the next k positions by the second balance. Without loss of generality, we may assume that according to all weighings, the false coin has 0 in the corresponding positions. Now if FC has not 0 both in the first and in the second group of positions, then both balances have lied. Hence all such coins are genuine (we call them *standards*).

For the $(2k + 1)$ th weighing, we split all non-standards as follows. The first group includes coins having only zeros in the first $2k$ positions; the second group includes coins having only zeros in the first k positions but not only zeros in the next k positions; and the third group consists of coins which have not only zeros in the first k positions but only zeros in the next k positions. Clearly the second and the third group include equal number of coins; apply the third balance to them. If the weighing indicates the first group then the results of all weighings are valid (otherwise at least two balances lied); hence it remains to determine $k(k - 1)$ positions in k^2 weighings which is possible by the induction hypothesis. If k^2 th weighing indicates the second group (similarly for the third group) then the indicating of the second and of the third balance contradict each other. Hence the first balance is definitely operable. Then we already know the first k positions, and in the remaining k^2 testing, we can determine the remaining positions by the operable balance.

a) Statement. Prove that $D_{3,1}(2^{k(k+1)}) \leq (k + 1)^2$ for every $k \geq 5$.

Solution. An estimate analogous to part b) would be weaker, namely, $D_{3,1}(2^{k(k-1)/2-1}) \leq k(k + 1)/2 - 1$. Unfortunately, it seems that this problem does not have a solution much easier than 4.4.

Lower bounds

3.7. a) Statement. Prove that $D_{x,1}(n) \leq D_{x,1}(2^k)$ if $n < 2^k$.

Solution. See the solution of 3.8a).

b) Statement. Prove that $B_{x,1}(n) \leq B_{x,1}(3^k)$ if $n < 3^k$.

Solution. The authors know no simple proof of this fact.

3.8. a) Statement. Prove that $D_{x,1}(n) \leq D_{x,1}(N)$ if $n < N$.

Solution. Suppose we have an algorithm which finds the false coin among N coins. Consider n coins and add $N - n$ dummy ones to them. Apply the same algorithm to them; and if we have to put a dummy coin to the detector, we put nothing. Clearly we will find FC by the same number of testings.

b) Statement. Prove that $B_{x,1}(n) \leq B_{x,1}(N)$ if $n < N$.

Solution. The authors know no simple proof of this fact.

3.9. We will present two solutions of the problem. Both are valid for both parts of the problem with minor changes; we will present one of them for the first part, and another one for the second part.

a) Statement. Suppose that $D_{x,1}(n) = d$; prove that $\frac{2^d}{d+1} \geq n$. (This bound does not depend on x !)

Solution. Consider an algorithm which finds FC in d moves. Suppose we have executed such an algorithm; write down the results of detections in a line. We obtain a sequence of d symbols “Y” and “N” (meaning “yes” and “no”). This sequence enables us to reconstruct the detections performed (since the first i results determine uniquely the detection performed at the $(i+1)$ -th step), hence each of these sequences uniquely determines an FC.

Now let us find out, how many such sequences correspond to an arbitrary FC. Their number is not less than $d+1$; in fact, at any rate we have the following sequences: 0) with all answers valid; 1) with just the first answer wrong; 2) with just the second answer wrong; ...; k) with just the k th answer wrong. Obviously sequence 0) differs from all the others; and sequences i) and j) (for $i < j$) differ at least in the i th position.

Thus the number of sequences is not less than $n(d+1)$; on the other hand, the possible number of sequences does not exceed 2^d . Hence $n(d+1) \leq 2^d$ as required.

Remark. This proof shows how should we arrange the algorithm if we wish to approach the above estimate. The latter will be precise if a) (almost) all sequences are possible and b) (!!!) if any tester made a wrong statement then we can recognize this before its next use. Actually, if this is not done then the number of sequences corresponding to the same FC increases.

b) Statement. Suppose that $B_{x,1}(n) = d$; prove that $\frac{3^d}{2d+1} \geq n$.

Solution. We use the following notation. For each weighing, we split the coins in three groups, and the next balance refuses to coins of two groups. Suppose some weighings have been already performed. If some coin was **always** in the “false” group when using i th balance, then we shall call it *false relative to this balance*.

After several steps of the algorithm, all coins may be split into the following groups. 1) Coins which are false relative to all balances; we will call these coins *suspected*. 2) Coins which are false relative to all balances except the i th one; we will call them *refusers of the i th type*. Clearly these coins can occur to be false only in the case when the i th balance is broken. 3) Coins tested as genuine by at least two balances; then they are in fact genuine, and we will call them *standard*.

Suppose we have an algorithm which allows to find the false coin among n coins in d steps. We may assume that it finishes its work always in just d steps (if before then we carry out several arbitrary weighings).

We will introduce the notion of the *significance* of a coin at some moment of performing the algorithm. If we have m steps since that till the end of the algorithm (that is, $d-m$ steps are over), we will say that the significance of any suspected coin equals $2m+1$, and the significance of any refuser is 1 (the significance of a standard equals 0). The significance of a situation equals the sum of significances of all coins.

Note that if in a situation of significance x we perform a weighing (for instance, by the first balance) then the sum of significances of three possible situations in which the weighing can result is not less than x . It suffices to prove that the sum of possible significances of each coin after weighing is not less than the initial significance. A suspected coin of significance $2m+1$ remains suspected for a single result (with significance $2(m-1)+1$), and two other results make it a refuser of significance 1. A “not-first-type” refuser remains a refuser for one result, and for two others it becomes a standard. And for refusers of the first type (and only for them!) the sum of significances after weighing exceeds their initial significance (1 turns to 3).

Thus, if the initial significance of the situation was x then some of the results makes it not less $x/3$. Suppose that we have such a result in each weighing. The initial significance was equal to $(2d+1)n$ (all coins were suspected), and in the end it must be 1 (because after d steps the significance of any coin equals 1). Hence $(2d+1)n \leq 3^d$ as required.

Remark. This proof also is rather informative as regards the form of the optimal algorithm. Namely, each step must make the significance three times smaller.

Now let us realize what can be an obstacle to make the significance three times smaller at each step? First, if we use a balance of a type containing a refuser then the significance of these refusers does not decrease thrice. Hence we have to arrange the process so that this situation does not occur. Second, for each weighing the significances of situations arising for three possible results have to be roughly equal.

2.6. c) Statement. It is not possible to find a false coin from $n > 3^6$ ones in 11 weighings by any number of balances with **two** broken ones among them. (Using the notation: $B_{x,2}(n) > 11$, if $n > 3^6$).

Solution. Consider an arbitrary algorithm which enables to find FC among n coins in 11 steps. Suppose we have carried it out; write down the results of detections in a line. We obtain a sequence of 11 symbols “<”, “=” and “>”. By the same reasons as in 3.9a), each of these sequences uniquely determines an FC.

Now we shall find the number of sequences corresponding to the same FC. This number is not less than $1 + 2 \cdot 11 + 4 \cdot 55 = 243$; indeed, we have at least the sequences of the following types: 0) all answers are valid; 1) just one answer is wrong (the number of such sequences is 22: there are 11 ways to choose the position for the wrong answer, and each of them may contain one of two possible wrong answers); 2) just 2 answers are wrong (the number of such sequences is $4 \cdot 55$, since there are 55 pairs of positions and 4 pairs of wrong answers). Clearly all the above sequences are distinct.

Thus the number of sequences is not less than $243n$; on the other hand, the number of all possible sequences does not exceed 3^{11} . Hence $n \cdot 243 \leq 3^{11}$, and so $n \leq 3^6$.

4 Sharp results

4.1. Statement. a) Prove that $D_{4,1}(2^4) = 7$.

b) Prove that $B_{4,1}(3^6) = 9$.

Solution. See the solution 4.4. Nevertheless, these problems can be solved without use of such general methods.

4.2. Statement. a) Find the maximal number of coins n such that $D_{4,1}(n) \leq 15$.

b) Find the maximal number of coins n such that $B_{4,1}(n) \leq 13$.

c) Find the maximal number of coins n such that $B_{4,1}(n) \leq 40$.

Solution. Answers. a) 2^{11} ; b) 3^{10} ; c) 3^{36} .

The upper bounds follow from 3.9. Their attainability follows from the solution of 4.4. Nevertheless it is possible to obtain the corresponding algorithms by direct methods.

4.3. Statement. Find some value of n such that $B_{4,1}(n) < B_{3,1}(n)$.

Solution. The solution of this problem is put after 4.4.

4.4. a) Statement. Prove that $D_{4,1}(3^k) = k + \log_2 k + c_{dk}$, where the sequence c_{dk} is bounded.

Solution. We will prove that $D_{4,1}(2^k) = k + t$ for the least t such that $2^t \geq k + t + 1$ (then $t = \log_2(k + t) + O(1)$, hence $t = \log_2 k + O(1)$ as required). From the solution of 3.9 we already know that $D_{4,1}(2^k) \geq k + t$. It remains to present an algorithm which enables to find the false coin in $k + t$ weighings.

Hereinafter, in all problems on testers the *significance* of a suspected coin means $i + 1$ where i is the number of steps until the end of the process (by default) or until a specified moment of the process. The significance of any refuser is 1, and that of a standard is 0. The significance of a situation is the sum of significances of coins. Note that the sum of significances of possible situations after testing is not less than the initial significance; hence, for some result of the detection is decreases not more than twice.

Note that the significance of the initial situation is $(k + t + 1)2^k \leq 2^{k+t}$. Hence to obtain $k + t$ steps we have to obtain diminishing twice (or near that) at each step. Thus we will construct an algorithm such that at any moment there exist refusers of not more than three distinct types, and the significance of the situation at m steps before the end of the process does not exceed 2^m . Obviously this hold at the initial moment.

First we describe a step of the algorithm roughly. Suppose there are m steps until the end of the process. We split the coins into groups so that (i) possible significances of situations after testing do not exceed 2^{m-1} , and (ii) each group includes refusers of not more than 2 types. After that we apply such tester that there are no refusers of its type. Suppose it indicates some group as including the false coin. Then the refusers after this step are just the former refusers from this group (of not more than two types) and the refusers of the tester in question (all of a single type), hence we have retained the required number of types of refusers.

Now we go in some detail. First we observe that, for the above distribution, the sum of significances of possible situations after weighing equals the initial significance. Hence if we are able to distribute the suspected coins so that these significances do not exceed 2^{m-1} then **at any rate** we can distribute the refusers so that this retains.

However we have to retain condition (ii) as well. This is provided by

Lemma on two buses. Given several students of three classes (let their quantities in the classes be $a_1 \leq a_2 \leq a_3$) and two buses (of capacities $b_1 \leq b_2$ where $a_1 + a_2 + a_3 \leq b_1 + b_2$). We have to distribute the students between the buses so that each bus contains students of not more than two classes. Then this is possible iff $b_1 \geq a_1$.

Proof. Suppose $b_1 \geq a_1$; we will present the required distribution. If the total capacity of the buses exceeds the number of students then we may decrease some of the numbers b_1 or b_2 by 1 so that the condition retains (if $b_2 > b_1$ then we decrease b_2 , otherwise we decrease b_1). Thus we may assume $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2$.

Put all the students in a line: first, all the students from the first class, then from the third, and after that from the second one. Then place first b_1 of them in the first bus, the next b_2 ones in the second bus. Then all students from the first class will be in the first bus (by the condition), and the students from the second class will be in the second bus (otherwise $b_2 < a_2$ and $b_1 > a_1 + a_3 > a_3 \geq b_2$, which is wrong).

Conversely, if $b_1 < a_1$ then $b_1 < a_2$ and $b_1 < a_3$. Thus no class can be put entirely into the first bus, hence the second bus will contain students from all three classes. \square

Thus, if we know the number of refusers we have to place in each group then the lemma enables to determine the validity of condition (ii) in the distribution of refusers.

Now we proceed the construction of the algorithm. At the first k detections, we bisect both suspected coins and refusers; then obviously any result the significance decreases just twice, hence condition (i) holds. The condition of the lemma holds as well (since there is a type such that not more than a half of all refusers belongs to this type!), so we have managed in performing the step. After k th step of this kind we have only one suspected coins and some refusers of three types.

Now we consider subsequent steps in more detail. If at some moment there are no suspected coins then, on the same reasons, all the refusers can be split in two equal groups (or almost equal if their number is odd) so that condition (ii) holds. And since the significance did not exceed 2^m before this step, the number of coins in the groups does not exceed 2^{m-1} , so condition (i) holds as well.

It remains to consider the case when some suspected coin remains. Place it in the first group; then we may add to this group not more than $2^{m-1} - m$ refusers, and the rest of them will be in the other group. If the bus lemma does not apply then the number of refusers of each type exceeds $2^{m-1} - m + 1$. But the total significance of coins is

now $(m+1) + 3(2^{m-1} - m + 1) = 2^m + (2^{m-1} - 2m + 4)$; it is not difficult to see that the expression in the brackets is always positive, so this situation is impossible.

b) Statement. Prove that $B_{4,1}(3^k) = k + \log_3 k + c_{bk}$, where the sequence c_{bk} is bounded.

Solution. Similarly we will prove that $B_{4,1}(3^k) = k + t$ for the least t such that $3^t \geq 2(k+t) + 1$ (then $t = \log_3 k + O(1)$). The estimate $B_{4,1}(3^k) \geq k + t$ follows again from 3.9. We will construct the algorithm using the same argument (here the significance of a suspected coin in m steps before the end of the process equals $2m+1$). In this case, the conditions on distribution into three groups are as follows: (i) possible significances of situations after weighing do not exceed 3^{m-1} ; (ii) each group includes refusers of not more than two types; (iii) some two groups (possibly after adding standards) contain equal number of coins (these will be two groups put on the scales).

Condition (ii) is guaranteed by the similar

Lemma on three buses. Given several students from three classes (let their numbers be $a_1 \leq a_2 \leq a_3$) and three buses (of capacities $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ where $a_1 + a_2 + a_3 \leq b_1 + b_2 + b_3$). We have to distribute the students between the buses so that each bus contains students of not more than two classes. Then this is possible iff $b_1 + b_2 \geq a_1$.

Proof. First we will present the distribution for the case $b_1 + b_2 \geq a_1$. Again if $a_1 + a_2 + a_3 < b_1 + b_2 + b_3$ then we may decrease some of b_i so that the above condition holds.

Put all the students in a line: first all the students of the first class, then from the third, and after that from the second one. Then place first b_1 of them into the first bus, the next b_2 ones into the second bus, and all the remaining ones into the third bus. The first bus contains not more than one third of all the students, hence there are no students of the second class in it. The third bus does not contain students of the first class, by condition. And if the second bus contains students from all three classes, then it contains not less than $a_3 + 2$ students, and the third bus contains not more than $a_2 - 1 < a_3$ students. This is impossible since $b_2 \leq b_3$.

Conversely, if $b_1 + b_2 < a_1$ then also $b_1 + b_2 < a_2$ and $b_1 + b_2 < a_3$. Thus no class can be put entirely into the first two buses. Hence the third bus contains students from all three classes. \square

Remark. In fact, lemma on two buses is a special case of the above lemma when one bus contains no places.

Now we proceed with the algorithm. At the first k weighings we split both suspected coins and refusers into three equal parts; then all three conditions are satisfied. After the k th step of this kind we have a single suspected coin and some refusers of three types. Observe that after two first we already have $4 \cdot 3^{k-2}$ standards. This easily follows that condition (iii) is valid.

At subsequent steps, if to some moment no suspected coins remain, we can split all refusers into three almost equal groups so that condition (ii) is fulfilled; furthermore two groups include equal numbers of coins. Finally, suppose a suspected coin did remain. Then we put it into the first group; it is possible since its significance after this weighing is equal to $2m-1 \leq 3^{m-1}$. We may assume that we have to put equal number of refusers into the second and the third groups. Then the sum of two minimal capacities of groups is greater than one third of the total capacity, so the lemma applies. Condition (iii) holds as well. So the last case is done.

c) Try to find a better upper bound for these sequences.

4.3. Statement. Find some value of n such that $B_{4,1}(n) < B_{3,1}(n)$.

Solution. For example, $n = 3^{10}$ fits. The solution of 4.2b implies $B_{4,1}(n) = 13$. In the sequel, we use terminology introduced in 3.9b).

Now we will prove that $B_{3,1}(n) > 13$. Suppose the contrary; this is possible only if the significance decreases exactly thrice at each step (for any result of weighing!). This in turn means that at any moment there exist refusers of not more than two types, namely **not** of the type involved in the weighing in question.

Let us examine how this occurs. Denote a situation by a triple of numbers (a, b, c) where a is the number of suspected coins, and b and c are the numbers of refusers of two existing types. Then the initial situation is $(3^{10}, 0, 0)$, and after the first weighing we have $(3^9, 2 \cdot 3^9, 0)$. In the second weighing, let the numbers of suspected coins in the groups be a, b, c .

Suppose the weighing indicates the first group. Then we have the situation $(a, 3^9 - a, t)$ where the number t is determined by the total significance: $23a + (3^9 - a) + t = 3^{11}$ and so $t = 8 \cdot 3^9 - 22a$. Note that $t \geq 0$, hence $a \leq \frac{4}{11} 3^9$. Similarly $b, c \leq \frac{4}{11} 3^9$, hence $a = 3^9 - (b + c) \geq \frac{3}{11} 3^9$.

Consider the third weighing. If all a suspected coins are in the same group then its significance is not less than $21 \cdot \frac{3}{11} 3^9 > 3^{10}$ which is impossible. Hence the suspected coins belong to at least two groups. To have refusers of not more than two types for each possible result, it is necessary to have refusers of a single type in each group. Thus one of the groups will contain **all** refusers of some type; let their number be s . If this group contains x suspected coins besides that then its significance after weighing equals $3^{10} = 21x + (a - x) + s = s + a + 20x$; thus $3^{10} - s - a$ is divisible by 20. Furthermore, we have either $s = 3^9 - a$ or $s = t = 8 \cdot 3^9 - 22a$. In the first case $3^{10} - s - a = 2 \cdot 3^9$ is not divisible by 20 which is impossible. Hence we have the second case, and then $3^{10} - s - a = 21a - 5 \cdot 3^9$. Since 20 divides this number, 5 divides a . Similarly, 5 divides b and c ; this contradicts $a + b + c = 3^9$ since the last number is not divisible by 5.

4.5. a) Statement. Prove that $D_{x,1}(n) = D_{4,1}(n)$ for every n and $x > 4$.

Solution. Suppose we must find the false coin among n coins. Note that if t satisfies the inequality $2^t < n(t+1)$ then we cannot find the false coin in t testing using any number of detectors on the reasons of significance. Similarly, if $2^{t-1} < \lceil n/2 \rceil \cdot t + (n - \lceil n/2 \rceil)$, then we also cannot find FC in t detections. Indeed, for any division for the first testing, some group contains not less than $\lceil n/2 \rceil$ coins; and if the first testing indicates FC in this group then we

cannot determine it on significance reasons. Clearly the second inequality is stronger than the first one, so it suffices to check only it.

Thus if we present an algorithm such that for any t with $2^{t-1} < \lceil n/2 \rceil \cdot t + (n - \lceil n/2 \rceil)$ it allows to find FC in t steps by 4 detectors then we have proved that $D_{4,1}(n) = D_{\infty,1}(n)$.

We will construct such algorithm which satisfies two conditions: (i) in i steps before the end of the process, the significance of the situation does not exceed 2^i ; (ii) at each step, present are the refusers of not more than 3 types. At the first step we split coins into two almost equal groups (that is, groups of $\lceil n/2 \rceil$ and $n - \lceil n/2 \rceil$ coins). By assumption, the significance of the situation after weighing is $\leq 2^{t-1}$. At further steps we split suspected coins almost in half each time, and then we split refusers according to significance reasons, and the specific distribution of refusers is based on the lemma on buses.

Consider the i th step in more details. If the significance of the situation is less than 2^i then we add *dummy* refusers so that the new significance equals 2^i . It is not difficult to see that if the number of refusers (including dummy ones!) is not less than $3(i-2) - 1$ then we clearly can provide that the significances of the situations possible after weighing differ not more than in 1. Then the significances in $i-1$ steps before the end of the process will not exceed 2^{i-1} in both cases because their sum does not exceed 2^i as required. Moreover in this case the numbers of refusers in two groups differ not more than twice, so the bus lemma applies here as well (check it yourself!).

It remains to show that the number of refusers in i steps before the end of the process is not less than $3(i-2) - 1$, that is, the total significance of suspected coins does not exceed $2^i - 3(i-2) + 1$. It can be shown by some accurate calculation which we do not present here.

b) Statement. *Prove that $B_{x,1}(n) = B_{4,1}(n)$ for every n and $x > 4$.*

Solution. Similarly; in addition, we have to provide that two of groups obtained at any step contain equal number of elements. It is possible to do by adding standards.

Remark. The same methods (although with more technical details) enable us to show that the ideal number of testers does exist for any number of broken testers.

4.6. a) Statement. *Find whether the estimate of the same form as in problem 4.4 is valid for $D_{3,1}(n)$.*

Solution. Suppose we wish to find the false coin among 2^k coins using 3 testers one of which is broken.

Consider the minimal d such that $2^d + d + 1 \geq 2^k(2d + 1)$. We will prove that d steps are sufficient to retain not more than two coins which can occur to be false (this will be the moment relative to which we determine the significance).

Put $x_i = 2^i + i + 1$. We construct a process such that for i weighings before the end the significance does not exceed x_i , and refusers always belong to not more than two distinct types. Note that if have provided this then the significance after the last step does not exceed 2, hence not more than 2 coins will be suspected or refusers at the end.

We construct the process by induction. Before the first weighing, both conditions are satisfied. Suppose we have to carry out i last weighings. We will define the first of them. Instead of the bus lemma, we use the following (obvious)

Lemma on dissection. Suppose we have some objects arranged in a line such that each of them costs not more than x , and the total price of them is S . Then the line can be cut into t parts so that each part costs not more than $\frac{S + (t-1)x}{t}$.

Without loss of generality, we may assume that there are refusers of the first and the second types. Put coins in a line: first the refusers of the first type, then the suspected coins, and then the refusers of the second type. Denote the number of suspected coins by a . Sum the refusers with coefficient 1, and the suspected coins with coefficient $i-1$. Then the sum of the coefficients does not exceed $x_i - 2a$; hence by lemma on dissection this line can be dissected into two parts such that the sum of coefficients in each part is $\leq \frac{x_i - 2a + i - 1}{2}$. If now we test coins of any part of the dissection, the significance of the part obtained equals the sum of its coefficients plus the number of suspected coins (since the suspected coins in this part are summed with coefficient i instead of $i-1$, and in the other part with coefficient 1 instead of 0). Thus for any result the significance does not exceed $\frac{x_i + i - 1}{2} = x_{i-1}$. Moreover if some part of the dissection includes refusers of both types then it includes all suspected coins; hence for each result of testing refusers of not more than two types can remain.

Thus after d weighings we have not more than two possible FC. It remains to observe that a single false coin among two coins can be determined in a bounded number of steps (for instance, in 3 steps). Hence we have proved that $d + 3$ testings are sufficient. Furthermore $d = \log_2(2^k(2d + 1) - d - 1)$ hence $d = \log_2 k + \log_2 \log_2 k + O(1)$ as required.

b) Statement. *Тот же вопрос про $B_{3,1}(n)$.*

Solution. Similarly, we intend (for n sufficiently great) to keep only 3 possibly false coins among n coins in d weighings. We assert that it suffices to take d such that

$$(2d + 1) + 2 \cdot 3^d \geq n(2d + 1).$$

Then (by problem) we will find FC in $d + 3$ weighings; moreover $d = \log_3 n + \log_3 \log_3 n + O(1)$.

Again, the moment for determining the significance is the moment after the d th weighing; then the initial significance equals $n(2d + 1)$.

Denote $y_i = (2i + 1) + 2 \cdot 3^i$; we arrange the process so that in i weighings before the end of the process the significance does not exceed y_i and the number of types of refusers does not exceed 2; then the significance after the d th weighing does not exceed 3 as required.

The step of the algorithm again is constructed similarly. Attach the factor $D = 2i - 2$ to all suspected coins, and the factor 1 to all refusers; then the total sum of factors does not exceed $y_i - 3a$ where a is the number of suspected coins. Put all coins in a line: first the refusers of the first type, then the suspected coins, and at last the refusers of the second type. Then the lemma on dissection implies that they can be split into three parts so that the sum of factors in each part does not exceed $\frac{y_i - 3a + 2D}{3}$. This means that the significance of any situation after weighing with these three parts does not exceed $\frac{y_i - 3a + 2D}{3} + a = y_{i-1}$ as required.

The last obstacle which might appear is that the numbers of coins in three groups obtained may differ. We will show that the number of standards is sufficient to equalize two groups: then we can arrange the required weighing. As is easily seen, this trouble does not exist at the first two steps: in the first weighing, two groups contain equal number of coins, and in the second weighing we can easily redistribute refusers and suspected coins in three groups so that two groups will contain equal number of coins (by a slight modification of the algorithm for dissection but with no weakening of the estimate). After these weighings, we have not less than $\frac{4}{9}n - 2$ standards. We have distributed not more than $\frac{5}{9}n + 2$ coins in 3 groups, hence the difference of numbers of coins in two of these groups does not exceed $\frac{5}{27}n + 1 \leq \frac{4}{9}n - 2$ for $n \geq 12$. Thus the number of standards is sufficient. The solution is complete.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ПУТЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

П. Дергач, И. Нетай, А. Скопенков, М. Скопенков

Основными результатами являются критерии устойчивости самопересечений путей и циклов на плоскости (задачи D2d и D3d; доказательство намечено в задачах D2abc и D3abc; определения см. далее). Критерии даются в терминах дифференцирования графов и путей¹.

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение и надо доказать.

Части А, В, С предлагаются до промежуточного финиша, остальные — после.

0. Город N на плоскости состоит из нескольких площадей (кругов), соединенных непесекающимися дорогами (прямолинейными отрезками). Известно, что существует маршрут, проходящий по каждой дороге ровно один раз (этот маршрут может проходить по площадям несколько раз). Докажите, что существует *несамопересекающийся* маршрут, проходящий по каждой дороге ровно один раз.

А. Устойчивость пересечений пары путей.

Проблема устойчивости пересечений пары путей². Два охотника охотятся в лесу. Каждый из них ведет на коротком поводке собаку. Собаки слушаются охотников и движутся так, как те им говорят. Если одна из них пересечет следы другой, то она станет лаять и спугнет дичь. Как по данным путям охотников определить, смогут ли они избежать срыва охоты (если смогут, то пересечение путей охотников называется *неустойчивым*³)?

Будем считать, что пути охотников и собак составлены из конечного числа прямолинейных отрезков (т.е. *кусочно-линейны*). Для таких путей охотников известен *медленный*, "переборный" алгоритм распознавания устойчивости пересечений. Нахождение *быстрого* алгоритма — нерешенная проблема.

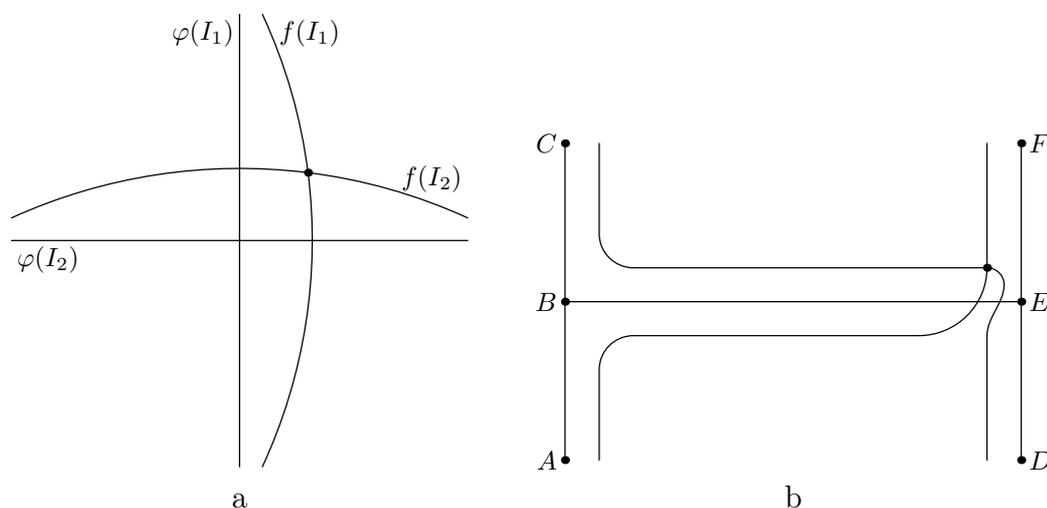


Рис. 1: Трансверсальное пересечение путей и пара путей в букве "H"

Везде в дальнейшем мы предполагаем, что охотники движутся по некоторой системе дорожек на плоскости. И охотника, и собаку, мы считаем точками (при этом мы разрешаем

¹Проблема устойчивости самопересечений путей интересна не только с точки зрения теории графов, но и с точки зрения топологии: она является частным случаем проблемы реализации отображений графов на плоскости [Si69, RS98, Ak00, Sk03]. Настоящий цикл задач основан на статьях [Mi97, Sk03] и пересекается с [RS00, §2, S, глава 7] только по задачам 0, B1 и D4.

²Многие задачи настоящего цикла можно начать решать экспериментально.

³Формальное определение приведено на стр. 5

охотнику и собаке находиться в один момент времени в одной и той же точке плоскости). Длины поводков считаются равными 1 м (то есть расстояние между охотником и его собакой в каждый момент времени не превосходит 1 м).

A-1. Два охотника движутся по дорожке в форме отрезка длины 1 км. При этом они могут менять направление своего движения. Докажите, что независимо от движения охотников собаки смогут двигаться так, чтобы не пересекать следы друг друга.

Пример. Два охотника прошли (равномерно не меняя направления) по прямолинейным дорожкам, пересекающимся под прямым углом в точке, отстоящей от каждого из их концов на 1 км (рис. 1.a, на котором $\varphi(I_1)$ и $\varphi(I_2)$ — пути охотников, а $f_1(I_1)$ и $f_2(I_2)$ — возможные пути собак). Тогда одна собака пересекала следы другой.

A-2. Система лесных дорожек имеет форму буквы "H" (см. рис. 1.b), причем длина каждого из отрезков AB, BC, BE, DE, EF равна 1 км. Один из охотников прошел по пути $ABEF$, а второй — по пути $CBED$. Тогда одна из собак пересекала следы другой.

Для доказательства того, что некоторые пути собак обязаны пересекаться, может оказаться полезной следующая теорема. Ей разрешается пользоваться без доказательства.

Циклом называется путь, начало и конец которого совпадают, и при этом забыто, где начало. Мы говорим, что два пути (или цикла) *пересекаются трансверсально*, если вблизи каждой точки пересечения они выглядят подобно двум путям на рис. 1.a.

Теорема о четности. *Два (кусочно-линейных) цикла на плоскости, пересекающихся трансверсально, пересекаются в четном числе точек.*

Заметим, что точки *самопересечения* (то есть точки, соответствующие пересечению собакой своих собственных следов) не считаются за точки *пересечения*.

A-3. Система лесных дорожек имеет форму буквы "Y", составленной из трех прямолинейных отрезков длины 1 км, образующих в их общей точке углы $2\pi/3$ (рис. 4.Y). Придумайте такие пути двух охотников, чтобы срыва охоты невозможно было избежать.

В. Устойчивость самопересечений пути и цикла.

Проблема устойчивости самопересечений пути. Охотник гуляет по лесу, ведя на коротком поводке собаку. Собака слушается охотника и движется так, как тот ей говорит. Если она пересечет свои следы, то залает и спугнет дичь. Как по данному пути охотника определить, сможет ли он избежать срыва охоты (если сможет, то самопересечения пути называются *неустойчивыми*)^{4 5}?

Основной результат данного цикла задач — *быстрый* алгоритм распознавания устойчивости самопересечений.

В-1. (a) Охотник гуляет по лесной дорожке, имеющей форму прямолинейного отрезка длины 1 км. При этом он может менять направление своего движения. Докажите, что независимо от движения охотника собака может двигаться так, чтобы не пересекать свой след.

(b) То же для дорожки в форме окружности (радиуса 1 км).

В-2. (a) Несамопересекающийся путь имеет неустойчивые самопересечения (наша терминология не должна смущать читателя).

(b) Если самопересечения пути неустойчивы, то то же верно для любого его подпути⁶.

⁴Формальное определение приведено на стр. 5

⁵Проблема устойчивости самопересечений путей похожа на классическую проблему планарности графов (т.е. реализуемости графов в плоскости без самопересечений) и даже сводится к распознаванию планарности графов (однако число графов, планарность которых надо выяснить, для одного данного пути, велико). Проблема реализуемости графов решается, например, критерием Куратовского. Для проблемы аппроксимируемости вложениями аналогичного критерия не существует [Sk03], см. задачу D8.

⁶Формальное определение *подпути* приведено на стр. 5

(с) Если пересечения некоторой пары подпутей данного пути устойчивы, то самопересечения этого пути устойчивы.

(d) Существует путь, не содержащий трансверсальных пересечений (рис. 1.а), и все равно имеющий устойчивые самопересечения.

Одним из основных результатов данного цикла задач является следующая теорема.

Теорема о паре подпутей. *Путь на плоскости имеет устойчивые самопересечения, если и только если некоторая пара его подпутей имеет устойчивые пересечения.*

В-3. Пусть система дорожек образует некоторый граф на плоскости, ребра которого являются отрезками длины 1 км. (Причем расстояние от любой вершины до любого ребра, ее не содержащего, больше 10 м). Предположим, что охотник прошел по этой системе дорожек, пройдя по каждой из них ровно 1 раз и меняя направление движения только в местах соединения дорожек. Докажите, что путь охотника имеет устойчивые самопересечения, если и только если он содержит трансверсальное самопересечение.

В-4. Существует алгоритм проверки устойчивости самопересечений для данного пути на плоскости.

В-5. (а) Охотник (равномерно не меняя направления) двигался по лесной дорожке в форме окружности диаметром 1 км, сделав два оборота. Он вел на поводке длиной 1 м собаку, которая в конце движения вернулась в исходную точку. Докажите, что собака обязательно пересекала свой след (в некоторый момент времени, отличный от конечного, рис. 2).

(b) Верно ли (а) без предположения о том, что собака в конце движения вернулась в исходную точку?

(с) Докажите аналог (а) для случая, когда охотник сделал *три* оборота.

(d) Для какого числа оборотов в (а) собака обязательно пересекала свой след?

(е) Предположим, что дорожка имеет форму отрезка длиной 1 км. Докажите, что независимо от движения охотника собака может двигаться так, чтобы не пересекать свои следы и в конце движения вернуться в исходную точку.

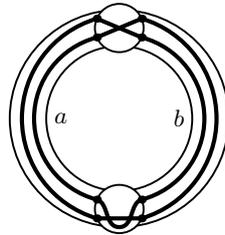


Рис. 2: Путь собаки

С. Производные графов и путей.

Производной G' графа G называется граф, вершины которого находятся во взаимно однозначном соответствии с ребрами графа G . Вершины e' и f' , соответствующие ребрам e и f , соединены ребром в графе G' , если ребра e и f имеют общую вершину (рис. 3).

С-1. Нарисуйте производные (см. рис. 4)

(а) дуги с n ребрами; (b) окружности с n ребрами;

(с) звезды с n лучами (n -ода); (d) буквы "H".

С-2. Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости без самопересечений. Производная планарного графа не обязательно планарна.

Путем в графе G назовем любую последовательность его вершин v_0, v_1, \dots, v_n , такую что v_i и v_{i+1} соединены ребром в G .

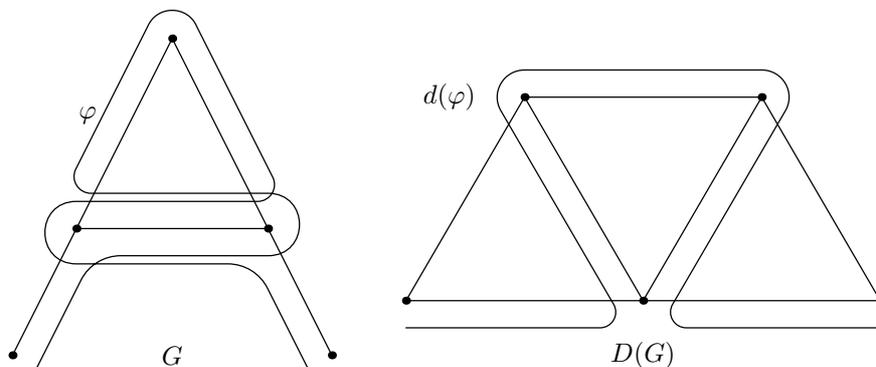


Рис. 3: Производная пути в графе

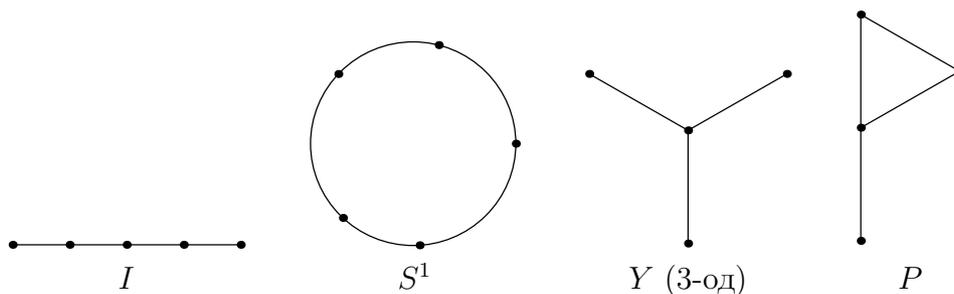


Рис. 4: Продифференцируйте нас!

Путь (цикл) v_0, \dots, v_n называется *эйлеровым*, если он проходит по каждому ребру ровно один раз, т.е. если среди ребер $v_0v_1, \dots, v_{n-1}v_n$ встречаются все ребра графа G ровно по одному разу.

Пусть путь φ в графе G задается последовательностью v_0, v_1, \dots, v_n вершин. Рассмотрим последовательность $(v_0v_1)', \dots, (v_{n-1}v_n)'$ вершин производной графа G . В этой последовательности могут стоять подряд одинаковые вершины. Для каждого такого набора одинаковых вершин (стоящих подряд в последовательности вершин производной) заменим этот набор на одну вершину. Полученный путь φ' в графе G' называется *производной* пути φ . Производная *пары путей* — это пара путей, определяемая аналогичным образом.

Пример. Пусть A — граф с вершинами a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и ребрами $a_1a_2, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4, a_4a_5$ (рис. 3). Обозначим через $b_1 = (a_1a_2)'$, $b_2 = (a_2a_3)'$, $b_3 = (a_2a_4)'$, $b_4 = (a_3a_4)'$, $b_5 = (a_4a_5)'$ вершины производной графа A . Пусть φ — путь $a_1a_2a_4a_2a_3a_4a_2a_4a_5$ в графе A . Тогда производная φ' — это путь $b_1b_3b_2b_4b_3b_5$. (На рис. 3 изображены не сами пути φ и φ' , а некоторые близкие к ним пути на плоскости).

С-3. (а) Найдите первые и вторые производные путей и пар путей с рис. 1, рис. 3 (а также путей и пар путей, построенных Вами в решениях задач А3 и В2d).

(б) Число вершин в производной пути с n вершинами не превосходит $n - 1$.

(с) Будем говорить, что путь имеет *точку возврата*, если по некоторому ребру он проходит два раза подряд. Путь φ без точек возврата является эйлеровым тогда и только тогда, когда путь φ' не имеет самопересечений.

Формальные определения.

Приведем эквивалентную формулировку наших задач на примере задачи В5. (эквивалентность доказана в [Mi97]). Рассмотрим две полянки (т.е. два круга), соединенных двумя тропинками (т.е. полосками) a и b , как на рис. 5 и рис. 2. Собака бегала по полянкам и тропинкам и вернулась в исходную точку. Каждый раз, когда собака перебежала с полянки на тропинку, она записывала обозначение этой тропинки. В задаче В5 утверждается, что если получилась запись $abab$, то собака обязательно пересекала свой след (в некоторый момент времени, отличный от конечного). Аналогично можно переформулировать другие задачи.

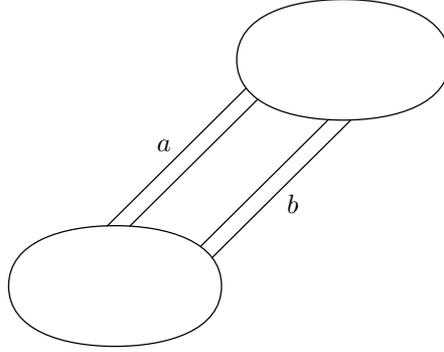


Рис. 5: Две полянки

Приведем формальное определение устойчивости пересечений и самопересечений. Обозначим через $I = [0, 1]$ отрезок, через S^1 окружность (т. е. отрезок со склеенными концами) и через \mathbb{R}^2 плоскость. *Кусочно-линейным путем* на плоскости называется отображение $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которого существуют такие точки $0 = v_0 < v_1 < \dots < v_n = 1$, что φ линейно на каждом из отрезков $[v_i, v_{i+1}]$. *Цикл* определяется аналогично с заменой I на S^1 . Будем рассматривать только кусочно-линейные пути и называть их просто *путями*. Путь $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *подпутем* пути $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, если J —отрезок, содержащийся в I и $\psi = \varphi|_J$.

Путь $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет *неустойчивые самопересечения* (или *допускает устранение самопересечений малым шевелением*, или *аппроксимируется вложениями*), если существует сколь угодно близкий к нему *несамопересекающийся* путь (т.е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой *несамопересекающийся* путь $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, что расстояние между точками $f(x)$ и $\varphi(x)$ меньше ε для любой точки $x \in I$). Аналогично определяется устойчивость самопересечений *цикла* $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Пара путей $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет *неустойчивые пересечения* (или *допускает устранение пересечений малым шевелением*), если существует пара сколь угодно близких к ним *непересекающихся* путей (т.е. если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие *непересекающиеся* пути $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, что расстояние между точками $f_i(x)$ и $\varphi_i(x)$ меньше ε для любой точки $x \in I$ и $i = 1, 2$).

Например, *трансверсальное пересечение* (рис. 1.a) двух путей устойчиво.

Скажем, задача В1аb на этом языке формулируется так:

Если образом $\varphi(I)$ пути $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ является отрезок или окружность, то его самопересечения неустойчивы.

Указания и решения к некоторым вводным задачам

0. Проведём сначала какой-нибудь эйлеров путь. Будем считать, что на площадях путь прямолинеен. Самопересечения случаются только на площадях. Рассмотрим какое-нибудь самопересечение. Оно состоит из четырёх вершин на окружности и двух диагоналей образованного ими выпуклого четырёхугольника. Изменим наш путь. Для этого в нашем четырёхугольнике вместо пары диагоналей проведём пару противоположных сторон. Это можно сделать так, чтобы мы снова получили эйлеров путь (а не путь и цикл, не связанные между собой). Будем действовать так, пока у нашего пути есть самопересечения. Таких операций может произойти только конечное число, потому что длина пути уменьшается, а на фиксированном множестве вершин при прямолинейных рёбрах возможно только конечное множество возможных длин графов.

A-1. Проведём прямую через нашу дорожку. Она разделяет плоскость на две полуплоскости. Пусть первый охотник прикажет своей собаке двигаться в одной из данных полуплоскостей, а второй охотник прикажет своей собаке двигаться в другой полуплоскости. Тогда следы собак не пересекутся.

A-2. Предположим, что собаки могут двигаться так, чтобы не пересекать следы друг друга. Пусть $A'F'$ и $C'E'$ — пути собак. Замкнём эти пути, добавив к ним ломаные $F'XA'$ и $E'XC'$, показанные на рисунке. Так как расстояние между охотником и собакой много меньше попарных расстояний между точками A, C, E, F , то ломаная $F'XA'$ не пересекает путь $C'E'$, а ломаная $E'XC'$ не пересекает путь $A'F'$. Значит, два цикла $A'F'XA'$ и $C'E'XC'$ пересекаются трансверсально в единственной точке X . А по теореме о чётности число их точек пересечения должно быть чётно. Полученное противоречие доказывает, что пути собак обязательно пересекаются.

Примеры к задачам A3 и B2d приведены на рис. 6, где для наглядности нарисован не сам путь, а близкий к нему путь общего положения. См., впрочем, [Mi97, Sk03].

Указание: можно свести к непланарности графов Куратовского K_5 и $K_{3,3}$. Пунктирная линия на рис. 6.d поможет сделать это.

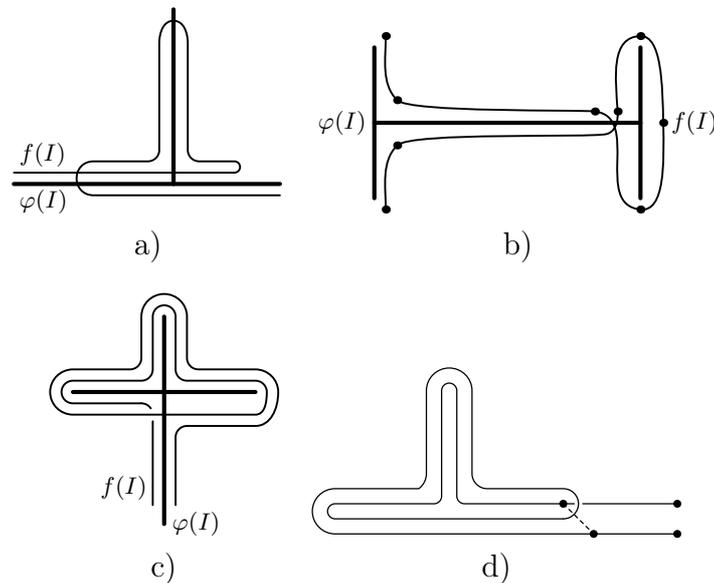


Рис. 6: Пути с устойчивыми самопересечениями

B-1. (a) Направим ось Ox вдоль дорожки, а ось Oy — перпендикулярно к ней. Предположим, что координата охотника (выраженная в метрах) задается функцией $x(t)$, а время охоты t изменяется в пределах от 0 до T . Пусть охотник прикажет собаке двигаться по графику функции $x(t)$, сжато к оси Ox , то есть положим координаты собаки в момент времени t равными $(x(t); t/T)$. Легко видеть, что тогда собака не будет пересекать свои следы, а в каждый момент времени будет находиться не дальше 1 м от охотника.

(b) Будем действовать аналогично пункту (a): пусть собака движется так, чтобы в каждый момент времени t она находилась на луче, направленном из центра окружности в точку, где

находится охотник, а ее расстояние от охотника равнялось t/T м (T — общее время охоты). Тогда собака не будет пересекать свои следы, а в каждый момент времени будет находиться не дальше 1 м от охотника.

В-2. (а) Пусть собака идет за охотником ”след в след”, то есть в каждый момент времени собака и охотник находятся в одной и той же точке (это не запрещено условием). Поскольку путь охотника не самопересекается, то и путь собаки не будет самопересекаться.

(б) Поскольку самопересечения пути неустойчивы, то собака может двигаться, не пересекая свои следы. Рассмотрим движение собаки только в отрезок времени, соответствующий выбранному подпути. Он также не самопересекается. Значит, выбранный подпуть также имеет неустойчивые самопересечения.

(с) Предположим, что самопересечения пути неустойчивы. Тогда собака может двигаться, не пересекая свои следы. Рассмотрим движение собаки только в те два отрезка времени, которые соответствуют выбранным подпутям. Эти два пути не пересекаются. Значит, самопересечения соответствующей пары подпутей неустойчивы.

В-3. Ясно, что если путь охотника содержит трансверсальное самопересечение, то его самопересечения устойчивы. Докажем, что если в рассматриваемом случае путь не содержит трансверсальных самопересечений, то его самопересечения неустойчивы. Нарисуем вокруг каждой точки соединения дорожек круг радиусом 1 м. Пусть все время, когда охотники находятся вне этих кругов, собака движется след в след за охотником. Как только охотник начинает двигаться внутри некоторого круга, собака срезает маршрут, двигаясь по хорде вместо пары радиусов, как показано на рисунке. Построенный путь собаки не самопересекается. Действительно, так как по каждой дорожке охотник проходит ровно 1 раз, то вне кругов собака не пересекает свои следы. Если же собака пересекает свои следы внутри некоторого круга, то некоторые две из построенных нами хорд пересекаются. А это возможно только в том случае, если путь охотника имеет в этом месте трансверсальное самопересечение.

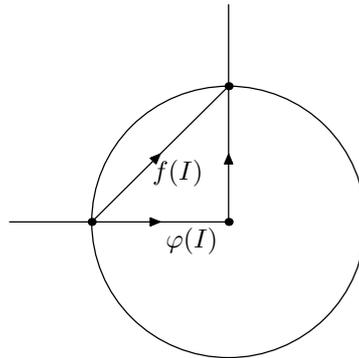


Рис. 7: Собака срезает путь.

В-4. Смотри формулировку задачи D7 (простой, но медленный алгоритм) или теоремы Минца D2d (более сложный, но быстрый алгоритм).

В-5. (а) *Указание.* Предположим, что собака может двигаться так, чтобы не пересекать свои следы. Пусть A — некоторая точка окружности. Рассмотрим луч OA , направленный из центра окружности в точку A . Ясно, что цикл собаки пересекал луч OA как минимум дважды: хотя бы раз, пока охотник делал первый оборот, и хотя бы раз — когда второй. Отметим на этом луче все его точки пересечения с путем собаки. Ясно, что найдутся две ”соседние” отмеченные точки A' и A'' (то есть такие отмеченные точки, на отрезке между которыми нет других отмеченных точек), одна из которых относится к моменту, когда охотник делал первый оборот по окружности, а вторая — к моменту, когда охотник делал уже второй оборот. ”Разорвем” цикл собаки в точках A' и A'' и добавим к ним пару путей p' и p'' , расположенных ”вблизи” отрезка $A'A''$ и пересекающихся трансверсально в точке X , как показано на рисунке. В итоге мы из цикла собаки получим пару циклов, которые пересекаются трансверсально в единственной точке X . А по теореме о четности количество точек пересечения у двух циклов должно быть четно. Полученное противоречие доказывает, что собака обязана пересекать свои следы.

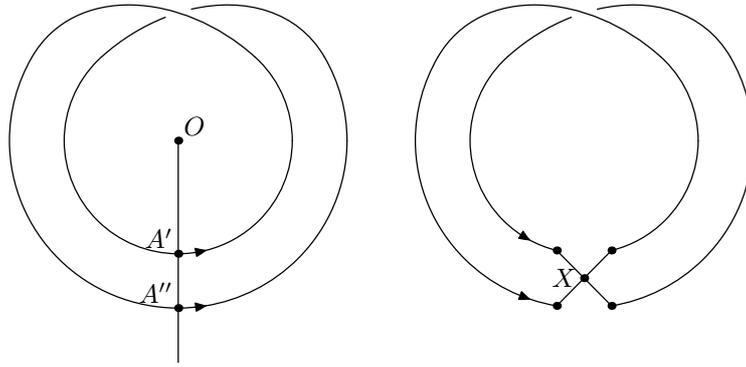


Рис. 8: Превращение цикла в пару циклов.

(b) Ответ: в этом случае собака может двигаться так, чтобы не пересекать свои следы.

(c) Доказательство дословно повторяет наше рассуждение из пункта (a).

(d) Ответ: для любого числа оборотов (в любом направлении), не меньшего двух. Доказательство дословно повторяет наше рассуждение из пункта (a).

(e) Без ограничения общности можно считать, что охотник побывал во всех точках дорожки, включая его концы (иначе мы просто уменьшим отрезок-дорожку, чтобы добиться этого условия.) Тогда можно считать, что цикл охотника начинается и заканчивается в одном из концов отрезка. Пусть собака движется по графику пути охотника, сжато в направлении дорожки (аналогично решению задачи В1а). Нам остается замкнуть путь собаки, добавив к нему ломаную, расположенную вблизи конца отрезка, как показано на рисунке. Полученный цикл не самопересекается.



Рис. 9: Замыкаем путь собаки.

С-1. (a) Дуга с $n - 1$ ребром; (b) окружность с n ребрами; (c) полный граф с n вершинами; (d) граф, составленный из двух треугольников ровно с одной общей вершиной.

С-2. Пример: звезда с 5 лучами — планарный граф, производная которого — непланарный граф (полный граф на 5 вершинах).

С-3. (a) См., например, рис. 10.

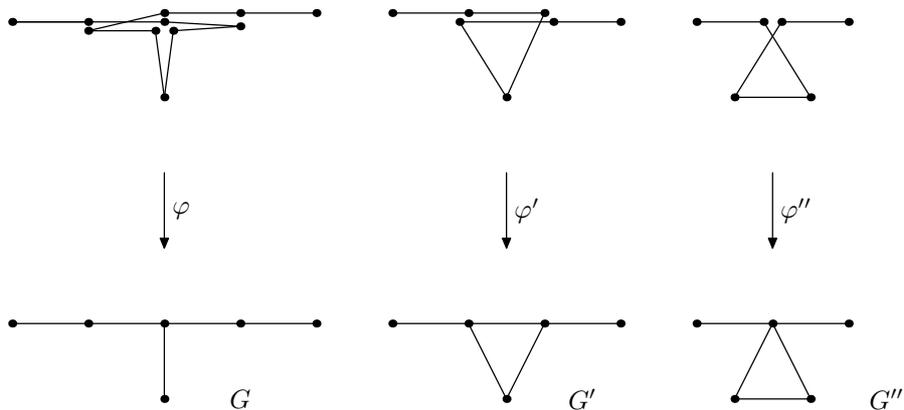


Рис. 10: Вторая производная пути

(b) Пусть исходный путь состоит из n вершин v_1, v_2, \dots, v_n . Тогда в последовательности $(v_1 v_2)', (v_2 v_3)', \dots, (v_{n-1} v_n)'$ ровно $(n - 1)$ вершин. Чтобы построить производный путь, мы из данной последовательности еще, возможно, выбрасываем несколько вершин. В итоге мы получим путь, содержащий не более $n - 1$ вершины.

(с) Докажем, что производная эйлерова пути не самопересекается. Пусть ϕ — эйлеров путь $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v_0$. Так как эйлеров путь проходит по каждому ребру ровно 1 раз, то в последовательности ребер $(v_1v_2), (v_2v_3), \dots, (v_{n-1}v_n)$ нет повторяющихся. Значит, в последовательности вершин производной данного пути $(v_1v_2)', (v_2v_3)', \dots, (v_{n-1}v_n)'$ нет повторяющихся. Значит, путь ϕ' — несамопересекающийся.

Докажем, что если некоторый путь не имеет точек возврата и его производная не самопересекается, то исходный путь — эйлеров. Пусть ϕ — данный путь $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v_0$. Так как он не имеет точек возврата, то в последовательности ребер $(v_1v_2), (v_2v_3), \dots, (v_{n-1}v_n)$ нет двух стоящих подряд одинаковых ребер. Значит, последовательность вершин производной данного пути — это в точности $(v_1v_2)', (v_2v_3)', \dots, (v_{n-1}v_n)'$. Так как производная не самопересекается, то в этой последовательности нет повторяющихся вершин. Значит, в последовательности ребер исходного пути нет повторяющихся. То есть, по определению, исходный путь — эйлеров.

Д. Основные задачи

Д-1. Самопересечения путей на рис. 6 устойчивы.

Для кусочно-линейного пути $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ образ $\varphi(I)$ можно рассматривать как граф с вершинами $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$. По любому кусочно-линейному пути φ однозначно строится путь в графе $\varphi(I)$. Обратно, пусть граф G нарисован на плоскости без самопересечений так, что все его ребра являются прямолинейными отрезками. Каждому пути в графе G , последовательно проходящему вершины v_1, v_2, \dots, v_n , сопоставим путь $\varphi : [0; 1] \rightarrow G$ на плоскости, полагая $\varphi(\frac{i}{n}) = v_i$ для всех $i = 0, \dots, n$ и линейно продолжая φ на отрезки $[\frac{i}{n}; \frac{i+1}{n}]$. Путь $\varphi : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, получающийся таким образом из некоторого пути в графе G , называется *симплициальным*.

Д-2. (а) Если путь φ не содержит трансверсальных самопересечений, то граф $\varphi'(I)$ планарен.

Зафиксируем "естественный" способ вложения графа $\varphi'(I)$ в плоскость (определение придумайте сами). Тогда $\varphi' : I \rightarrow \varphi'(I)$ будет некоторым путем на плоскости.

(б) Если самопересечения пути φ неустойчивы, то и самопересечения пути φ' неустойчивы.

В качестве следствия получите доказательство утверждения задачи А2.

(с) Если путь φ не содержит трансверсальных самопересечений и самопересечения пути φ' неустойчивы, то и самопересечения пути φ неустойчивы.

(д) (*Теорема Минца*) Самопересечения симплициального пути $\varphi : I \rightarrow G$, содержащего n точек, устойчивы тогда и только тогда, когда для некоторого $k = 0, \dots, n$ его k -я производная $\varphi^{(k)}$ содержит трансверсальное самопересечение.

(е) Докажите теорему о паре подпутей.

Д-3. (а) При каких m самопересечения цикла "намотки степени m " (рис. 2 для $m = 2$) устойчивы?

(б) Для любого цикла φ найдется k такое, что $\varphi^{(k)}$ является намоткой.

(с) Утверждения задач D2abc остаются в силе для цикла φ .

(д) Самопересечения симплициального цикла $\varphi : S^1 \rightarrow G$, содержащего n точек, устойчивы тогда и только тогда, когда для некоторого $k = 0, \dots, n$ его k -я производная $\varphi^{(k)}$ либо содержит трансверсальное самопересечение, либо является стандартной намоткой степени $m \neq 0, \pm 1$.

Д-4.* Как по циклу φ в графе определить m такое, что $\varphi^{(\infty)}$ есть m -кратная намотка?

Д-5.* Сформулируйте и докажите критерий того, что данный набор путей в графе на плоскости аппроксимируем набором

(а) непересекающихся и несамопересекающихся путей;

(б)* непересекающихся (но, возможно, самопересекающихся) путей.

Д-6. Как по пути построить его "интеграл"? Используйте это для построения новых примеров путей с устойчивыми самопересечениями.

Д-7. (а) Для симплициального пути $\varphi : I \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ заменим каждое ребро графа G на k близких кратных ребер, если путь φ проходит по этому ребру k раз. Обозначим через $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^2$ полученный граф, а через $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ проекцию, переводящую каждый набор кратных ребер с концами a и b в ребро ab . Самопересечения пути φ неустойчивы тогда и только тогда, когда существует путь $\psi : I \rightarrow \tilde{G}$ без трансверсальных самопересечений, такой что $\pi \circ \psi = \varphi$.

(б)* Придумайте быстрый алгоритм распознавания, имеет ли данный путь в графе на плоскости трансверсальные самопересечения.

Д-8. Существует бесконечное количество путей $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ с устойчивыми самопересечениями, образами которых

- (a) являются (содержащие друг друга) деревья,
- (b) является "буква Y " (см. рис. 4.Y),
- (c) (А. Халявин) является "буква P " (см. рис. 4.P), пути не имеют точек возврата, и ни один из которых не является подпутем другого.

D-9.* *Минором* графа называется граф, полученный из него несколькими операциями выкидывания (внутренности) ребра или стягивания ребра. Теорема Куратовского имеет следующую равносильную формулировку: граф планарен тогда и только тогда, когда у него нет миноров, изоморфных K_5 и $K_{3,3}$.

Придумайте понятие минора пути и выясните, существует ли бесконечное количество (кусочно-линейных) путей $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ с устойчивыми самопересечениями, ни один из которых не является минором другого. Решите ту же задачу для класса путей, образами которых является триод или являются (вложенные друг в друга) деревья.

Указания и решения к некоторым основным задачам.

D-1. Следует из **D2b**.

D-2. (а) Нарисуем граф $\varphi'(I)$ на плоскости следующим образом. Поместим вершины графа $\varphi'(I)$ в середины соответствующих рёбер исходного графа G .

Рёбра графа $\varphi'(I)$ будем рисовать, пользуясь следующим алгоритмом. Для каждой вершины v графа G сделаем следующее. Нарисуем на плоскости маленькую окружность с центром в этой точке v . Каждое ребро графа G , выходящее из вершины v , пересекает эту окружность в некоторой точке. Будем обходить окружность по часовой стрелке. Занумеруем рёбра графа G , выходящие из вершины v в том порядке, в котором эти точки пересечения расположены на окружности: v_1, v_2, \dots, v_n . Вблизи точки пересечения ребра v_i с окружностью отметим на окружности $n - 1$ точку $v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,i-1}, v_{i,i+1}, \dots, v_{i,n}$. В указанном порядке *против часовой стрелки*. Для каждого ребра $v'_i v'_j$ графа $\varphi'(I)$ сделаем следующее. Нарисуем его в виде трёхзвенной ломаной, соединяющей середины рёбер v_i и v_j и проходящей через точки $v_{i,j}$ и $v_{j,i}$. Сделаем это для всех рёбер графа $\varphi'(I)$.

Покажем, что при этом нарисованный граф не будет иметь самопересечений. Предположим, что он имеет самопересечение. Очевидно, что оно лежит внутри одной из построенных окружностей. Значит, для некоторых рёбер $v'_i v'_j$ и $v'_k v'_l$ графа $\varphi'(I)$ отрезки $v_{i,j} v_{j,i}$ и $v_{k,l} v_{l,k}$ пересекаются. А это возможно, только если исходный путь имеет трансверсальное самопересечение.

То же самое решение можно записать на языке полянок и тропинок (см. стр. 5). На рис. 11 показано, как по системе N полянок и тропинок для графа G построить систему N' полянок и тропинок для графа $\varphi'(I)$. На этом рисунке a и b обозначает пару смежных рёбер графа G , $N_{(a)}$ и $N_{(b)}$ — тропинки вокруг рёбер a и b , $N_{a \cap b}$ — полянка вокруг их общей вершины. В качестве полянок вокруг вершин a' и b' возьмем тропинки $N_{(a)}$ и $N_{(b)}$, а в качестве тропинки, соответствующей ребру $a' b'$ — узкую дорожку $N'_{a' b'}$, проходящую внутри полянки $N_{a \cap b}$. Если исходный путь не имеет трансверсальных самопересечений, то эти дорожки можно выбрать непересекающимися.

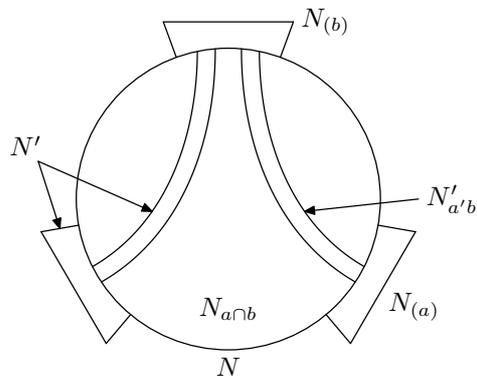


Рис. 11: Полянки и тропинки для производного графа

(b) *Указание.* Удобнее использовать эквивалентную формулировку рассматриваемой проблемы, приведённую на стр. 5. Рассмотрим систему тропинок и дорожек, соответствующую графу G . Проведём внутри неё несамопересекающийся путь собаки, соответствующий пути φ . Наша цель — построить в системе тропинок и дорожек, соответствующей графу $\varphi'(I)$, несамопересекающийся путь собаки, соответствующий пути φ' .

Будем считать, что границы полянок — это в точности окружности, построенные нами в решении пункта (а). Нарисуем внутри каждой полянки узкие дорожки вокруг отрезков $v_{i,j} v_{j,i}$, таких что ребро $v'_i v'_j$ принадлежит графу $\varphi'(I)$. Построенная система тропинок и дорожек является системой полянок и тропинок для производной исходного пути.

Посмотрим на исходный путь собаки, как на путь в этой новой системе тропинок и дорожек. В действительности, это почти тот путь, который нам нужен. Нам остаётся продеформировать его так, чтобы он не выходил за пределы дорожек. При этом в точках возврата (см. задачу СЗс), а также в начальной и конечной точках, путь нужно дополнительно продеформировать так, чтобы он не заходил на соответствующую полянку.

Подробное решение см. в статье [Sko03, Lemma 2.2.A].

(с) Данное утверждение доказывается аналогичным методом. Подробное доказательство приведено в статье [Sko03, Lemma 2.1].

(d) Теорема Минца следует из предыдущих двух пунктов таким образом: во-первых, если самопересечения пути неустойчивы, то все его производные также имеют неустойчивые самопересечения (по пункту (b)). Во-вторых, некоторая производная пути есть путь из единственного ребра, так как количество рёбер при дифференцировании строго убывает. Тогда, если бы все производные не имели трансверсальных пересечений, то отсюда бы следовало бы, что и самопересечения исходного пути неустойчивы по пункту (с).

(е) *Указание.* Пусть самопересечения пути устойчивы. Тогда есть некоторая производная, у которой есть трансверсальное самопересечение. Трансверсальное пересечение образовано двумя путями, каждый из которых состоит из двух ребер. Возьмём два подпути исходного пути, которые переходят при дифференцировании в эти два пути. Пересечение построенных подпутей исходного пути устойчиво.

Замечание. Построенные таким образом подпути могут иметь общие участки. Авторам задачи неизвестно, остается ли справедливой теорема о паре подпутей для подпутей без общих участков.

D-3. (а) Ответ: для всех t , кроме $\{-1, 0, 1\}$. *Указание.* Для остальных доказательство можно построить так же, как и для двух оборотов, посчитав всё, что после первого оборота, одним большим куском, основываясь на непланарности $K_{3,3}$: из центра круга выпустим 3 луча под углами 120° . В каждом луче соединим отрезком луча какую-то точку одного витка и какую-то другого. Если изначальный путь не самопересекался, то мы нарисовали на плоскости $K_{3,3}$ без самопересечений.

(b) *Указание.* Обратим внимание на следующий тип путей – пары подпутей исходного пути, где мы проходим по ним дважды, то есть либо отображения подпутей идут по одному и тому же набору рёбер в одном и том же порядке либо в противоположном. Среди таких путей нас интересуют максимальные, то есть те, что нельзя продолжить ребром в какую-то сторону так, чтобы это ребро продолжало оба подпути. Для завершения доказательства достаточно заметить два факта: что если таких нет, то есть любой такой путь хоть в какую-то сторону, но можно продолжить, то это обмотка, и что при дифференцировании длины таких путей уменьшаются, так что за число дифференцирований, равное максимальной длине такого пути, они все исчезнут.

Подробное решение см. в статье [Sko03, Lemma 2.3].

(с,d) Аналогично пунктам (с) и (d) предыдущей задачи. Подробное доказательство приведено в статье [Sko03, Lemma 2.2.A и Lemma 2.1]

Интересно обобщить критерии D2d и D3d на кусочно линейные отображения $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$, где K — произвольный граф. В этом случае не известно быстрого алгоритма распознавания устойчивости самопересечений (частный случай разобран в английской версии статьи [Sko03, Theorem 1.5]).

Устойчивость самопересечений отображения $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ определяется аналогично устойчивости самопересечений пути. Оказывается, для таких отображений тоже можно определить производную, причем утверждения задач D2b и D3b остаются в силе.

Определение производной. (см. рис. 10, а также часть рис. 12) Пусть дано *симплициальное* отображение $\varphi : K \rightarrow G$, то есть такое отображение, что каждое ребро графа K отображается в прямолинейный отрезок на плоскости. Сначала построим граф K'_φ , который будет областью определения производной φ' . Под φ -компонентой графа K мы подразумеваем любую связную

компоненту α множества $\varphi^{-1}a$, отображаемую на a , для некоторого ребра $a \subset G$. Множество вершин графа K'_φ находится в 1-1 соответствии с множеством всех φ -компонент. Для φ -компоненты $\alpha \subset K$ обозначим через $\alpha' \in K'_\varphi$ соответствующую вершину. Две вершины α' и β' соединены ребром в графе K'_φ , если и только если $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Производная $\varphi' : K'_\varphi \rightarrow G'$ — это симплициальное отображение, определенное на вершинах графа K'_φ формулой $\varphi'\alpha' = (\varphi\alpha)'$. В дальнейшем заменим φ' на сюръективное ограничение $\varphi' : K'_\varphi \rightarrow \varphi'K'_\varphi$.

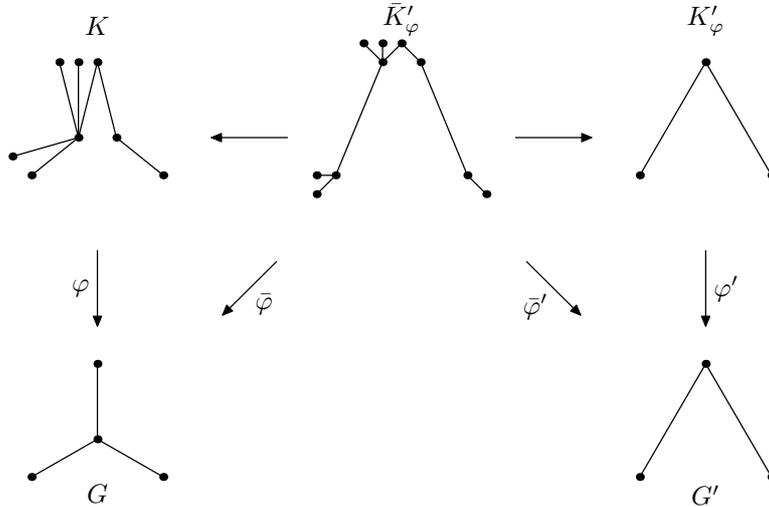


Рис. 12: Построение производной в два шага

Оказывается, что для произвольного графа K остается верным, что если отображение $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ имеет неустойчивые самопересечения, то и его производная имеет неустойчивые самопересечения. Рисунки 12 и 13 поясняют основную идею доказательства этого факта.

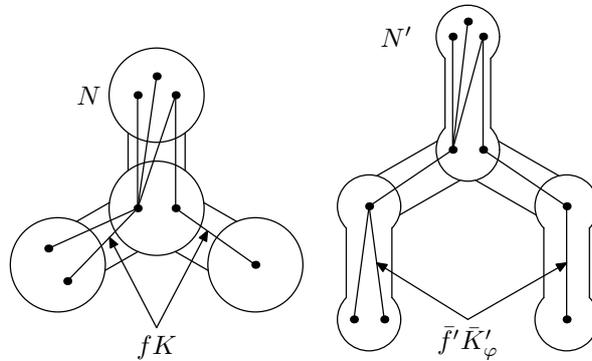


Рис. 13: Аппроксимация производной

Оказывается, что и у задач D2c, D3c тоже есть аналоги в случае произвольного графа K . А именно, если производная φ' имеет неустойчивые самопересечения, то и *полупроизводная* $\bar{\varphi}$ (определение которой ясно из рис. 12) также имеет неустойчивые самопересечения. Идею доказательства этого утверждения поясняет рис. 14.

D-5. (a) В этой ситуации теорема Минца (см. задачу D2d) остается справедливой; доказательство аналогично.

(b) Покажем, что в этой ситуации теорема Минца перестает быть верной [Sko03, Пример 3.3]. Рассмотрим пару путей, изображенных на рис. 15. Здесь $K, L \cong I$ — графы с вершинами k_1, \dots, k_5 и l_1, \dots, l_7 , и G — граф с вершинами a_1, \dots, a_6 и ребрами $a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_1a_5, a_2a_3, a_2a_4$ и a_2a_6 . Симплициальные пути φ, ψ задаются формулами $\varphi k_1 = a_1, \varphi k_2 = a_2, \varphi k_3 = a_3, \varphi k_4 = a_1, \varphi k_5 = a_2$ и $\psi l_1 = a_5, \psi l_2 = a_1, \psi l_3 = a_2, \psi l_4 = a_4, \psi l_5 = a_1,$

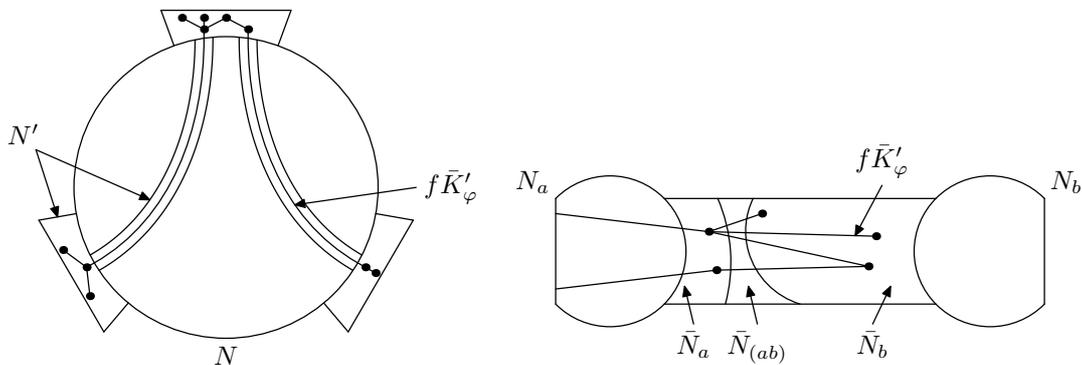


Рис. 14: Аппроксимация "полупроизводной"

$\psi l_6 = a_2$, $\psi l_7 = a_6$. Легко проверить, что пересечение данной пары путей устойчиво, а их производных — неустойчиво, при этом у них нет трансверсальных пересечений.

Нахождение удобного критерия представляет собой открытую проблему.

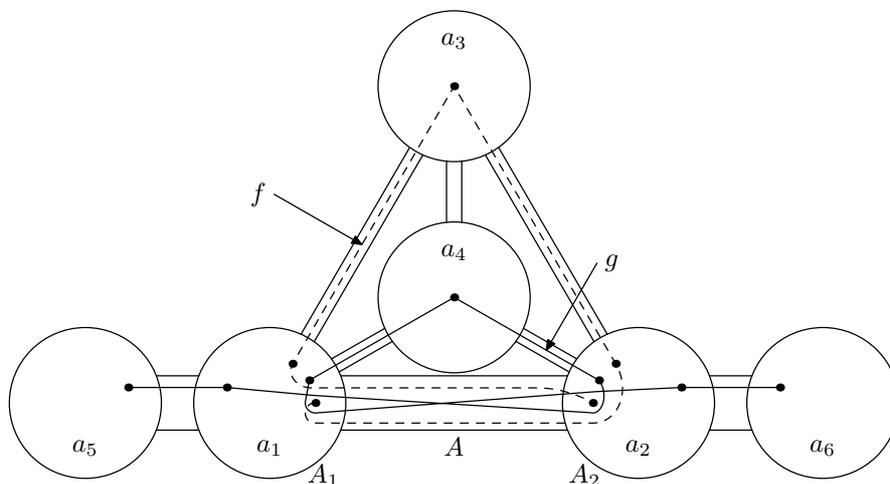


Рис. 15: Пара путей с устойчивым пересечением

Литература

- [Mi97] P. Minc. Embedding simplicial arcs into the plane, *Topol. Proc.* 1997. 22. 305–340.
- [RS98] D. Repovš and A. Skopenkov. A deleted product criterion for approximability of a map by embeddings, *Topol. Appl.* 1998. 87, 1–19.
- [RS02] Д. Реповш и А. Скопенков. Теория препятствий для начинающих, *Мат. Просвещение.* 2002. 6. 60–77.
- [KoSk00] П. Кожевников, А. Скопенков. Узкие деревья на плоскости. Материалы 12-й Летней конференции Турнира городов.
- [Si69] K. Sieklucki. Realization of mappings, *Fund. Math.* 1969. 65. 325–343.
- [Sk03] M. Skopenkov. On approximability by embeddings of cycles in the plane, *Topol. Appl.* 134 (2003), p. 1–22. Русский перевод: М. Скопенков, Об аппроксимируемости вложениями циклов на плоскости, <http://arxiv.org/abs/0808.1187>.

Stability of intersections of paths in the plane
P. Dergach, I. Netay, A. Skopenkov, M. Skopenkov

*He wants it rare, but something's there
that holds him back from the attack
Accept and Deaffy, Dogs on Leads.*

The main results are criteria for stability of intersections of paths and cycles in the plane (problems D-2.d, D-3.d; the proof is outlined in the problems D-2.abc and D-3.abc; all the definitions are given below). The criteria are formulated in terms of derivation of graphs and cycles.¹

In the following problems, let us agree that for any assertion formulated as a problem, a proof of this assertion is required.

The parts A, B, C are set before a half-way finish, the rest are set after it.

0. The city N in the plane is formed by several squares (of side 1) joined by disjoint roads (straight line segments). Suppose that there is a path passing through each road exactly once (this path can go through certain squares several times). Prove that there is a path *without self-intersections* passing through each road exactly once.

A. Stability of intersections of a pair of paths.²

Problem on the stability of intersections of a pair of paths. Two hunters hunt in a forest. Each leads a dog on a short lead. The dogs obey the hunters and move as they are commanded. If one dog intersects the path of another, it barks and scares off a game. Having fixed paths of the hunters, how to determine whether these hunters could maintain successful hunting (in this case the intersection of paths of the hunters is called *unstable*³)?

We shall assume that all the paths of hunters and dogs are formed by finite unions of rectilinear arcs (i.e. are *piecewise-linear*). For such paths of hunters there is a slow full search algorithm for recognition of the stability of intersections. Finding a fast algorithm is an unsolved problem.

In the following problems we assume that the hunters move along a certain system of roads in a plane. We assume that both the hunter and the dog are points (not necessarily distinct). The lengths of leads are 1 m.

A-1. Two hunters move along the road that has the form of a segment of 1 km length. The hunters may change the direction of movement. Prove that independently of hunters' movement one dog could move without intersections with the path of another dog.

Example. Two hunters moved (with constant speed and permanent direction) along rectilinear roads of length 2 km; the roads intersect at their middle points and form right angles at the intersection point (fig. 1.a, where $\varphi(I_1)$ and $\varphi(I_2)$ are paths of hunters, and f_1 and f_2 are possible paths of dogs). Then one dog did intersect the path of the other.

A-2. A system of roads has the form of letter "H" (see fig. 1.b); the lengths of AB , BC , BE , DE , EF are 1 km. The first hunter moved along the path $ABEF$ and the second along $CBED$. Then one dog did intersect the path of the other.

¹Problem of the stability of intersections of paths interesting not only with the point of view of graph theory but also with the point of view of topology. It is a particular case of problem on realization of mapping graphs in the plane. This sequence of problems is based on the articles [Mi97, Sk03] and overlaps with [RS00, §2, S, chapter 7] only in problems 0, B1 and D4.

²It is possible to solve many problems of this sequence by experiment. To carry out the experiments that involve dogs ask adults for permission.

³The formal definition is given in page 5.

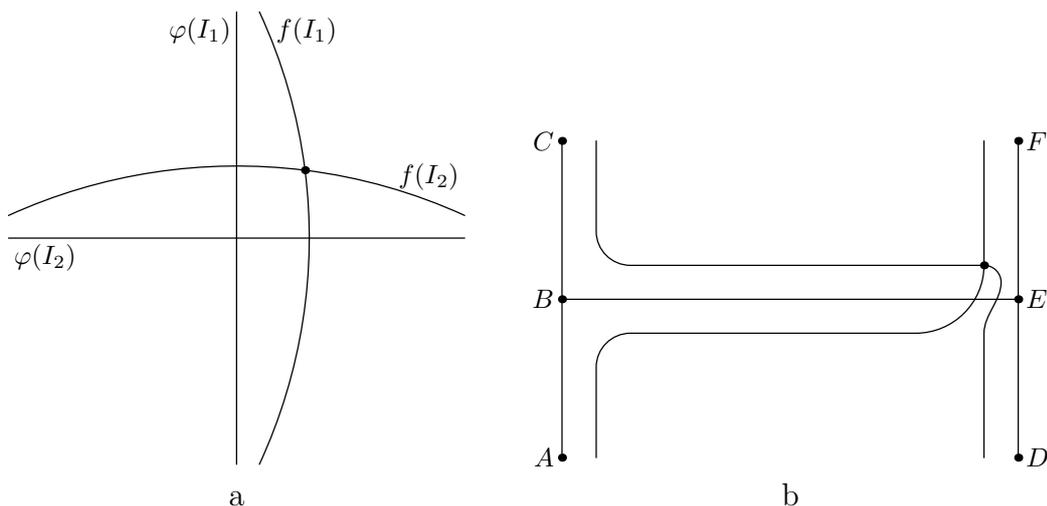


Figure 1: The transversal intersection and a path in letter "H"

For proving that certain paths of dogs must intersect the following theorem could be useful. You are allowed to use it without proof.

A *cycle* is a path whose starting point and endpoint are the same; it is not specified which point is the starting point (see Figure).

Note that *self-intersection* points (i.e. points corresponding to the dog's intersection of its own path) are not counted as *intersection* points.

Two piecewise-linear paths (or cycles) intersect *transversally*, if near each intersection point these paths look like two paths $\varphi(I_1)$ and $\varphi(I_2)$ in Fig. 1.

Even Number Theorem. *Two (piecewise linear) cycles in the plane that intersect transversally have an even number of intersection points.*

A-3. A system of roads has the form of letter "Y". This letter is formed by three straight-line segments making angles $2\pi/3$ at the common point (fig. 4.Y). Give an example of two hunters' paths such that the hunters could not maintain successful hunting.

B. Stability of self-intersections of path and of cycle.

Problem of the stability of self-intersections of path. One hunter walks in a forest and leads a dog on a short lead. The dog obeys the hunter and moves as it is commanded. If the dog intersects its path, it barks and scares off a game. How to determine, for the fixed path of the hunter, whether he could maintain successful hunting? (If he can, the self-intersection of the path of hunter is called **unstable**.)⁴

The main result of the presented problems is a fast algorithm recognizing the stability of self-intersections⁵.

B-1. (a) A hunter moves along the road that has the form of a segment of length 1km. The hunter may change the direction of movement. Prove that independently of the hunter's movement the dog can move without intersecting its trace.

(b) The same for the road that has the form of the circle of radius 1km.

⁴The formal definition is given in page 5.

⁵Problem on the stability of self-intersections of paths is similar to the classical problem on planarity of graphs (i.e. realization of graphs in the plane without self-intersections) and even is reduced to recognition of the planarity of graphs (however the number of graphs required for one path is large). Problem of the realization of graphs is solved, for example, by the Kuratowski criterion. For the problem on approximation by embeddings such a criterion does not exist [Sk03], see problem D8.

B-2. (a) Each path without self-intersections has unstable self-intersections (this should not confuse the reader).

(b) If self-intersections of a path are unstable, then the same is true for all subpaths of this path ⁶.

(c) If intersections of a certain pair of subpaths of a path are stable, then self-intersections of this path are stable.

(d) There exists a path that does not contain transversal intersections but does have stable self-intersections.

One of the main results of this sequence of problems is the following theorem (try to prove it, but not too hard!)

Theorem on subpaths. *A path in the plane has stable self-intersections if and only if there are two subpaths of this path that have stable intersections.*

B-3. Assume that a system of roads form certain graph in the plane, so that the edges are straight line segments of length at least 1 km and the distance from every vertex to every edge that does not contain this vertex is more than 10 m. Suppose that the hunter walked along this system of roads, passing along every road only once and changing the direction of his movement only at vertices. Prove that the path of the hunter has stable self-intersections if and only if the path contains transversal self-intersections.

B-4. There exists an algorithm recognizing stability of self-intersections for given path in the plane.

B-5. (a) The hunter moved along a circular path of diameter 1 km (with constant speed and permanent direction along the circle) and winded twice along the circle. He lead a dog on a lead of length 1 m. The dog returned to the starting point at the end of the movement. Prove that the dog necessarily intersect its own path (in a certain moment of time different from the final movent, fig. 2).

(b) Is the analogue (a) correct if we do not suppose that the dog returned to the starting point at the final moment?

(c) Prove the analogue of (a) for the case when the hunter winded *three* times along the circle.

(d) For which number of windings in the analogue of (a) the dog necessarily intersected its own path?

(e) Suppose that the road is the segment of length 1 km. Prove that independently of the hunter's movement the dog can move without self-intersections and so that at the final moment of movement it will return to the starting point.

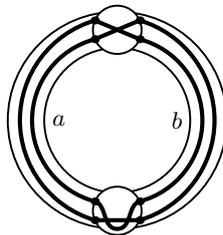


Figure 2: A path of the dog

C. Derivative of graphs and paths.

⁶The formal definition of a *subpath* is given in page 5

The *derivative* G' of a graph G is a graph whose vertices are in one-to-one correspondence with the edges of the graph G . Vertices e' and f' that correspond to edges e and f are connected by an edge in the graph G' , if the edges e and f have a common vertex (fig. 3).

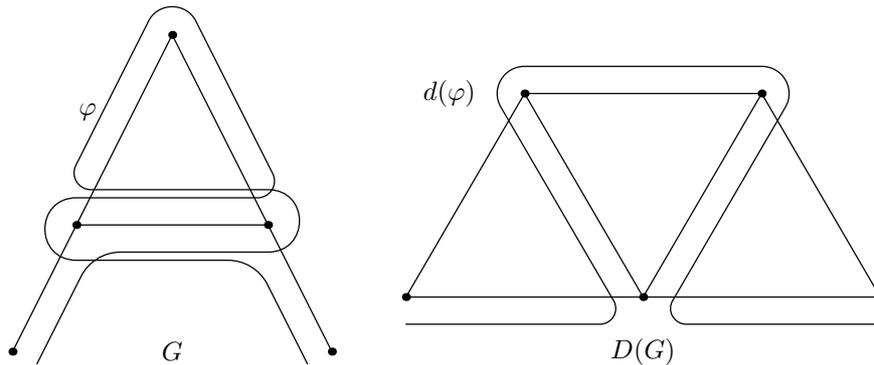


Figure 3: The derivative of a path in a graph

C-1. Draw the derivatives graphs of (fig. 4):

- (a) an arc with n edges; (b) a circle with n edges;
- (c) a star with n rays; (d) letter "H".

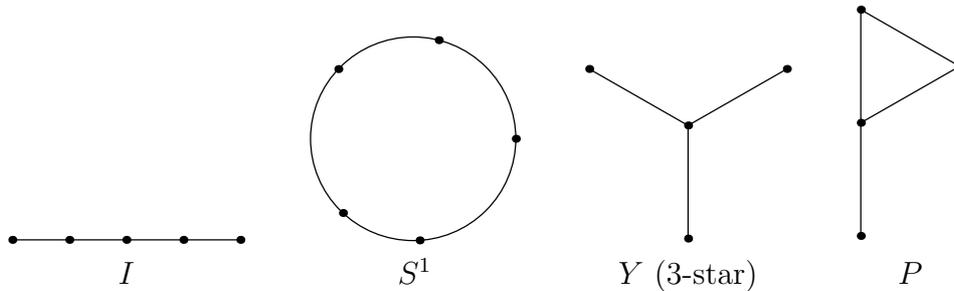


Figure 4: Differentiate us!

C-2. A graph is called *planar* if it can be drawn in the plane without self-intersections. The derivative of a planar graph is not necessarily planar.

A *path* in a graph G is a sequence of vertices v_0, v_1, \dots, v_n such that v_i and v_{i+1} are connected by an edge in the graph G .

A path (a cycle) v_0, \dots, v_n is called an **Euler path (cycle)** if it passes through each edge of the graph G only once, i.e. if each edge of the graph G is present among the edges $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n$ only once.

Suppose that a path φ in a graph G is defined by a sequence v_0, v_1, \dots, v_n of vertices. Consider the sequence $(v_0v_1)', \dots, (v_{n-1}v_n)'$ of vertices of the derivative graph. In this sequence there could be the same consecutive vertices. Substitute each set of the same consecutive vertices by one vertex. In this way we obtain a path φ' that is called the *derivative* of the path φ . The derivative of a pair of paths is a pair of paths defined analogously.

Example. Let A be the 'letter A' graph, i.e. the graph with vertices a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 and edges $a_1a_2, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4, a_4a_5$ (fig. 3). Denote by $b_1 = (a_1a_2)'$, $b_2 = (a_2a_3)'$, $b_3 = (a_2a_4)'$, $b_4 = (a_3a_4)'$, $b_5 = (a_4a_5)'$ the vertices of the derivative of A . Let φ be a path $a_1a_2a_4a_2a_3a_4a_2a_4a_5$ in the graph A . Then the derivative φ' is the path $b_1b_3b_2b_4b_3b_5$.

C-3. (a) Find the first and the second derivatives of the paths and the pairs of paths from fig. 3 and fig. 1 (and also of your paths constructed in problems A3 and B2d).

(b) Given a path with n vertices, the number of vertices in the derivative path does not exceed $n - 1$.

(c) We say that a path φ has a *return point*, if $v_i v_{i+1} = v_{i+1} v_{i+2}$ for some integer i . A path (cycle) φ is an Euler path if and only if it does not have return points and φ' does not have self-intersections.

Formal definitions.

Let us give an equivalent formulation of problem B-5 (the equivalence is proved in [Mi97]). Consider two clearings (i.e. two disks) in the plane connected by two paths (i.e. strips) a and b , as it is shown on Fig. 2. The dog moved on the clearings and paths, and at last returned into the starting point. Each time when the dog moved from the clearing to the path, it wrote down the letter corresponding to this path. It is stated in the problem B-5 that if we get the word $abab$ then the dog necessarily intersected its own path (at a certain moment of time different from the final moment).

The other problems can be reformulated in a similar way.

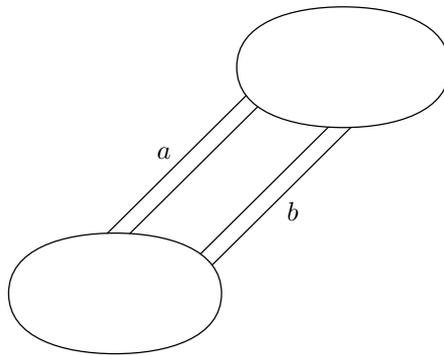


Figure 5: Two clearings

We shall give the formal definition of stability of intersections and self-intersections. Denote a segment by $I = [0, 1]$, a circle (i.e. a segment with the ends glued) by S^1 and the plane by \mathbb{R}^2 . A *piecewise-linear path* in the plane is a mapping $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ for which there exist points $0 = v_0 < v_1 < \dots < v_n = 1$ such that φ is linear on each of the segments $[v_i, v_{i+1}]$. A *cycle* is defined analogously substituting I by S^1 . We shall consider only piecewise-linear paths and we shall call them simply *paths*. A *subpath* of a path $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ is a path $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that $\psi = \varphi|_J$, where $J \subset I$.

A path $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ has *unstable self-intersections* (or *allows the removal of self-intersections by a small perturbation*, or *is approximable by embeddings*), if there exists a path without self-intersections, arbitrarily close to our path (i.e. if for each $\varepsilon > 0$ there exists a path $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ without self-intersections such that the distance between the points $f(x)$ and $\varphi(x)$ is less than ε for each point $x \in I$). The stability of self-intersections of the *cycle* $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is defined analogously.

A pair of paths $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ has *unstable intersections* (or *allows the removal of self-intersections by a small perturbation*), if there exist a non-intersecting pair of paths arbitrarily close to our paths (i.e. if for each $\varepsilon > 0$ there exist non-intersecting paths $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that distance between the points $f_i(x)$ and $\varphi_i(x)$ is less than ε for each point $x \in I$ and for each $i = 1, 2$).

For instance, the *transversal intersection* (Fig. 1) of two paths is stable.

For example, the problem B-1ab can be reformulated in this language as follows:

If the image $\varphi(I)$ of a path $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ is a segment or a circle then the self-intersections are unstable.

Hints and solutions of some problems from parts A, B, C.

A-1. Draw a straight line along our road. It splits the plane into two half-planes. The first hunter orders his dog to move in one of the given half-planes, and the second hunter orders his dog to move in another half-plane. Then the dogs' paths do not intersect.

A-2. Assume that the dogs may move so as not to intersect each other's paths. Let $A'F'$ and $C'E'$ be the paths of the dogs. We close these paths by adding to them broken lines $F'XA'$ and $E'XC'$ shown in the figure 6. The maximal distance between the hunter and the dog is much less than the distances between each two of the points A, C, E, F , hence the broken line $F'XA'$ does not intersect the path $C'E'$, and the broken line $E'XC'$ does not intersect the path $A'F'$. Thus the two cycles $A'F'XA'$ and $C'E'XC'$ transversally intersect in the unique point X . And according to the Even number Theorem the number of their intersection points has to be even. The obtained contradiction proves that the dogs' paths do intersect.

Examples to *the problems A3 and B2d* are presented in Fig. 6, where (for clarity) is shown not the initial path itself, but a general position path close to the initial path is drawn. However, see [Mi97, Sk03].

Hint: it is possible to reduce this problem to non-planarity of the Kuratowski graphs K_5 and $K_{3,3}$. The dotted line on the Fig. 6 will help to do this.

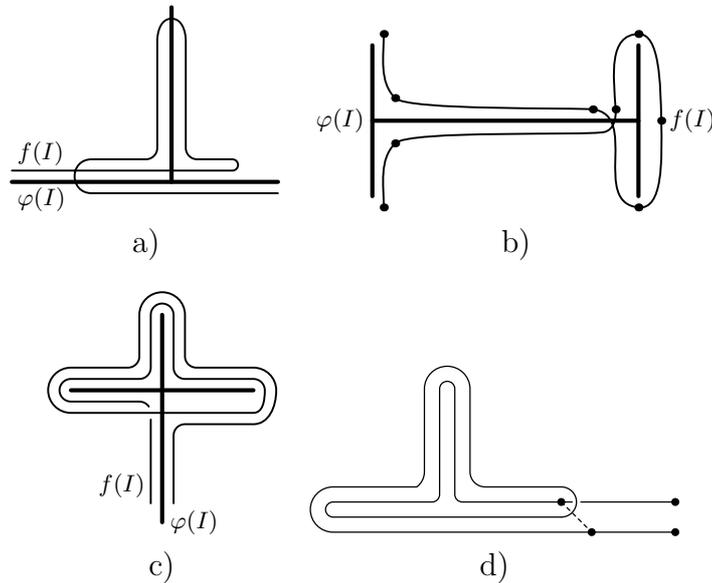


Figure 6: Paths with stable self-intersections

B-1. (a) Direct the axis $0x$ along the road, and take an axis $0y$ perpendicular to the road. Assume that the hunter's coordinate (expressed in meters) is given by the function $x(t)$, and the hunting time changes in the range from 0 to T . The hunter orders the dog to move along the graph of the function $x(t)$, compressed towards the axis $0x$, i.e. let the dog's coordinates at the moment t be $(x(t), t/T)$. It is easy to see that in this case the dog will not intersect its own path, and in every moment of time it will be closer than 1 m from the hunter.

(b) We will act analogously to the item (a): the dog moves so that in each moment of time it is on the ray that is directed from the center of the circle to the point where the hunter is situated, and its distance from the hunter is t/T m (where T is the total hunting time). Then the dog will not intersect its own traces, and in every moment of time it will be closer than 1 m from the hunter.

B-2. (a) Suppose that the dog follows in the tracks of the hunter, i.e. in each moment of time the dog and the hunter are in the same point (it is not prohibited by the conditions). The hunter's path will not self-intersect, and thus the dog's path also will not self-intersect.

(b) The self-intersections of the path are unstable, and so the dog can move without intersecting its own path. We shall consider the dog's movement only in the segment of time that corresponds to the chosen subpath. It also does not self-intersect. That's why the chosen subpath has unstable self-intersections too.

(c) Suppose that self-intersections of the path are unstable. Then the dog may move without intersecting its path. Concern the dog's movement only in two segments of time that correspond to the chosen subpaths. These two paths do not intersect. Thus self-intersections of the corresponding pair of subpaths are unstable.

B-3. It is clear that if the hunter's path contains transversal self-intersection then the hunter's self-intersections are stable. Prove that if the path does not contain transversal self-intersections in the considered case then the hunter's self-intersections are unstable. We shall draw a circle with the radius 1 m around every point of connection of roads. Let the dog follows the tracks of the hunter all the time when the hunter is outside of these circles. At the moment when the hunter begins to move inside a certain circle, the dog takes a short cut, moving along the chord instead of a pair of radii, as it is shown on the figure. The built path does not self-intersect. Indeed, the hunter passes along each road only once, so the dog does not intersect its own path outside the circles. If the dog intersects its path inside a circle then some two of chords drawn by us intersect. And it is possible only if the hunter's path has a transversal self-intersection in this point.

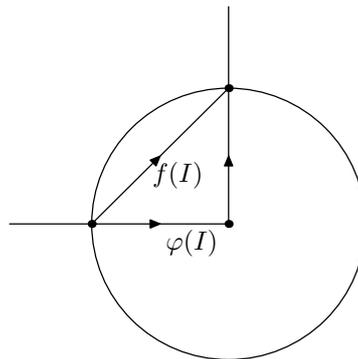


Figure 7: The dog takes a short cut

B-4. See the formulation of the problem D7 (simple but slow algorithm) and Minc theorem D2d (more complex but fast algorithm).

B-5. (a) Assume that the dog may move without intersecting its own traces. Let A be a certain point of the circle. Consider the ray OA that is directed from the center of the circle to the point A . It is obvious that the dog's cycle has intersected the ray OA at least twice: at least once when the hunter made the first cycle and at least once when he made the second cycle. We mark on this ray all its intersection points with the dog's path. It is obvious that there exist two "adjacent" marked points A' and A'' (i.e. such points that there are no marked points on the segment between these two ones), one of them is related to the moment when the hunter made his first turn along the circle, and the other - to the moment when the hunter made the second turn. Let us "tear" the dog's cycle in the points A' and A'' and add a pair of paths p' and p'' situated "near" the segment $A'A''$ which intersect transversally in the point X , as it is shown on the figure. As a result, we will obtain from the dog's cycle a pair of cycles that intersect transversally in the unique point X . But, according to the Even number Theorem,

the quantity of the intersection points of two cycles must be even. The obtained contradiction proves that the dog must intersect its own path.

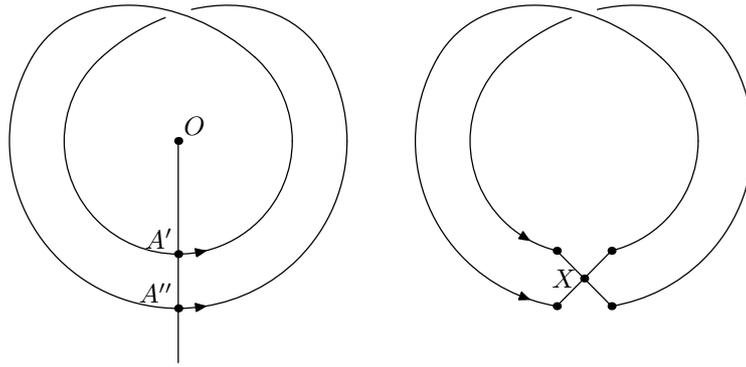


Figure 8: Transformation of the cycle

(b) Answer: in this case the dog may move without intersecting its own path.

(c) The proof repeats word-for-word our reasoning from the item (a).

(d) Answer: for every number of turns (in any direction) not less than two. The proof repeats word-for-word our reasoning from the item (a).

(e) We may consider (without lack of generality) that the hunter was in all of the points of the road, including its ends (otherwise we shall just diminish the segment of the road to obtain this condition). In this case it is possible to suppose that the hunter's cycle begins and finishes at one of the ends of the segment. Let the dog move along the graph of the hunter's movement, compressed towards the road (analogously to the solution of the problem B1a). Then we have only to close the dog's path, adding a broken line situated near the end of the segment, as it is shown on the figure. The constructed cycle does not self-intersect.



Figure 9: We close the dog's path

C-1. (a) Arch with $n - 1$ edges; (b) circle with n edges; (c) full graph with n vertices;

(d) graph made from the two triangles with a unique common vertex.

C-2. Example: a star with 5 rays - a planar graph which derivative is a non-planar graph (a full graph with 5 vertices).

C-3. (a) E. g., see fig. 10.

(b) Let the initial path consist of n vertices v_1, v_2, \dots, v_n . Then there are exactly $n - 1$ vertices in the sequence $(v_1v_2)', (v_2v_3)', \dots, (v_{n-1}v_n)'$. To construct an arbitrary path we (maybe) exclude some vertices from the given path. As a result we get the path containing not more than $n - 1$ vertices.

(c) Let ψ be the Euler path $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v_0$. Since the Euler path comes along every edge only once, there are not two same edges in the sequence $(v_1v_2), (v_2v_3), \dots, (v_{n-1}v_n)$. Thus in the sequence of the vertices of the derivative of the given path $(v_1v_2)', (v_2v_3)', \dots, (v_{n-1}v_n)'$ there are not two same vertices. So the path ψ' does not self-intersect.

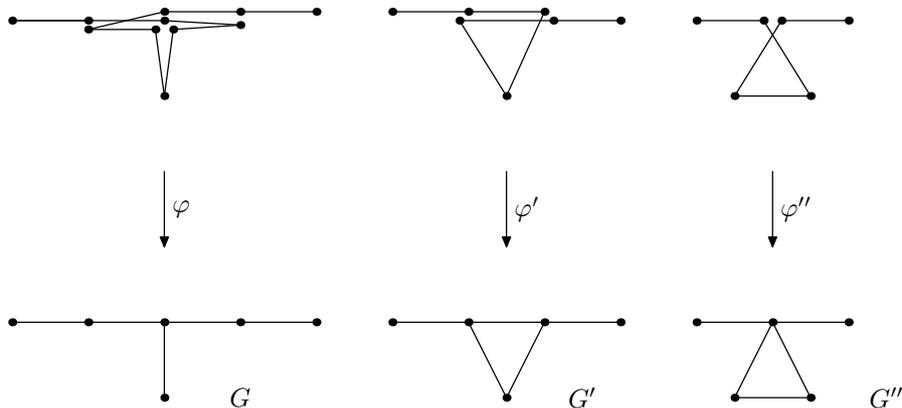


Figure 10: The second derivative of a path

D. Main problems

D-1. Self-intersections of the paths in Figure 6 are stable.

For a piecewise linear path $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ the image $\varphi(I)$ can be considered as a graph with vertices $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)$. From every piecewise linear path φ a path in the graph $\varphi(I)$ can be constructed in a unique way. Vice versa, suppose that the graph G be drawn in the plane without self-intersections so that all its edges are straight line segments. For every path v_1, \dots, v_n in the graph G we shall build a path $\varphi : [0, 1] \rightarrow G$ in the plane, setting $\varphi(\frac{i}{n}) = v_i$ for every $i = 0, \dots, n$ and extending φ linearly on the segments $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$. The path $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ that is constructed in this way from a certain path in the graph G , is called *simplicial*.

D-2. (a) If a path φ does not contain transversal self-intersections then the graph $\varphi'(I)$ is planar.

Fix the "natural" embedding of the graph $\varphi'(I)$ into the plane (invent the definition yourself). Then $\varphi' : I \rightarrow \varphi'(I)$ is a certain path in the plane.

(b) If self-intersections of a path φ are unstable then self-intersections of the path φ' are also unstable.

As a corollary, obtain the proof of the statement from problem A2.

(c) If a path φ does not contain transversal self-intersections and self-intersections of the path φ' are unstable then self-intersections of the path φ are also unstable.

(d) *The Minc Theorem.* Self-intersections of a simplicial path $\varphi : I \rightarrow G$ containing n points are stable if and only if for a certain $k = 0, \dots, n$ its k -th derivative $\varphi^{(k)}$ contains a transversal self-intersections.

(e) Prove the Theorem on two subpaths.

D-3. (a) For which m self-intersections of the cycle winding of degree m (Figure 2 for $m = 2$) are stable?

(b) For every cycle φ there is k such that $\varphi^{(k)}$ is a winding.

(c) The statements of the problems D2abc remain true for a cycle φ .

(d) *Theorem.* The self-intersections of a simplicial cycle $\varphi : S^1 \rightarrow G$ that contains n points are stable if and only if for certain $k = 0, \dots, n$ its k -th derivative $\varphi^{(k)}$ either contains a transversal self-intersection or is a standard winding of degree $m \neq 0, \pm 1$.

D-4.* Consider a cycle φ . How to determine m such that $\varphi^{(\infty)}$ is a winding of degree m ?

D-5.* Consider a set of paths in a given graph in the plane. Formulate and prove a criterion of approximating this set by a set of

(a) non-intersecting and non-self-intersecting paths;

(b)* non-intersecting (but possibly self-intersecting) paths.

D-6. How to construct an "integral" of a given path? Use this to invent new examples of paths with stable self-intersections.

D-7. (a) For a simplicial path $\varphi : I \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ substitute every edge of the graph G by k close edges if the path φ passes along this edge k times. Denote the constructed graph by $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^2$. Denote by $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ the projection mapping to an edge ab the union of multiple edges corresponding to the edge ab of G . Self-intersections of the path φ are stable if and only if there exists a path $\psi : I \rightarrow \tilde{G}$ without transversal self-intersections such that $\pi \circ \psi = \varphi$.

(b)* Invent a fast algorithm for recognition whether a given path in the graph in the plane has transversal self-intersections.

D-8. There exists an infinite set of paths $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ with stable self-intersections such that their images:

(a) are trees (containing each other);

(b) are "letter Y" (see the Figure 4.Y);

(c) are (A. Chalyavin) "letter P" (see the Figure 4.P), the paths do not have return points and no one of them is a subpath of any other.

D-9.* The *minor* of a graph is a graph that is obtained from the initial graph by several operations of throwing away (the interior of) an edge or gluing ends of an edge. The Kuratovski Theorem has the following equivalent formulation: a graph is planar if and only if it does not have minors isomorphic to K_5 and $K_{3,3}$.

Invent a notion of a minor of a path and find out whether there exists an infinite set of (piecewise linear) paths $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ with stable self-intersections so that no path of these is a minor of any other graph from this set. Solve the same problem for the set of paths whose images are triods or whose images are trees embedded into each other.

Hints and solutions of some main problems.

D-1. Follows by **D2b**.

D-2. (a) Draw the graph $\varphi'(I)$ in the plane as follows. Put the vertices of the graph $\varphi'(I)$ in the middle points of corresponding edges of the initial graph G . Edges of the graph $\varphi'(I)$ are drawn as follows.

For each vertex v of the graph G make the following construction. Draw a small circle in the plane centered at this point v . Every edge of the graph G issuing out of the vertex v intersects this circle at a certain point. Go clockwise along the circle. Enumerate the edges of the graph G issuing out of v in their order along the circle: v_1, v_2, \dots, v_n . Near the intersection point of the edge v_i and the circle take $n - 1$ points $v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,i-1}, v_{i,i+1}, \dots, v_{i,n}$ in the circle in this order *counterclockwise*.

For each edge $v'_i v'_j$ of the graph $\varphi'(I)$ make the following construction. Draw the edge as a broken line of three segments, so that the edge connects the middle point of the edge v_i with the middle point of the edge v_j and passes through the points $v_{i,j}$ and $v_{j,i}$.

We shall show that the drawn graph $\varphi'(I)$ does not have self-intersections. In the opposite case the self-intersection point is inside one of the constructed circles. Thus for certain edges $v'_i v'_j$ and $v'_k v'_l$ in the graph $\varphi'(I)$ the segments $v_{i,j} v_{j,i}$ and $v_{k,l} v_{l,k}$ intersect. But this is possible only if the initial path has a transversal self-intersection.

The same solution can be obtained by construction of the system of discs and strips for the graph $\varphi'(I)$ (cf. page 5). Figure 11 may help to realize this idea.

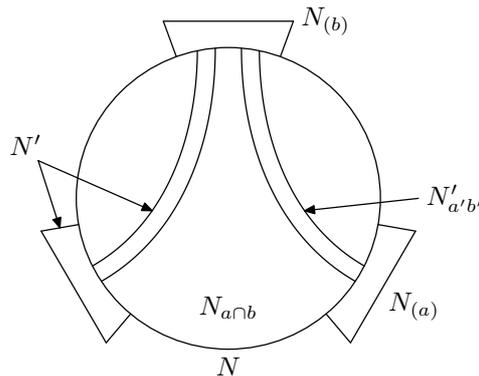


Figure 11: Discs and strips for the derivative graph

(b) A detailed solution can be found in the article [Sko03, Lemma 2.2A].

(c) The given statement is proved using an analogous method. A detailed proof is given in the article [Sko03, Lemma 2.1].

(d) The Minc theorem is deduced from the previous two items in the following way: first, if self-intersections of the path are unstable then by (b) all the derivatives of the path also have unstable self-intersections. Second, certain derivative of the path is a path which consists of a unique edge, because the quantity of edges strictly decreases when we differentiate the path. So if each derivative does not have transversal self-intersections then by (c) self-intersections of the initial path are also unstable.

(e) *Hint.* Suppose that self-intersections of the path are stable. Then there exists certain derivative having a transversal self-intersection. The transversal self-intersection is formed of 2 paths containing 2 edges each. Take two subpaths of the initial path whose derivatives are these paths. Then their self-intersection is stable.

D-3. (a) Answer: Each m except $\{-1, 0, 1\}$. A detailed solution is given in the article [Sko03, Lemma 2.3].

(c, d) Analogously to the items (c) and (d) of the previous problem. A detailed proof is given in the article [Sko03, Lemma 2.2.A and Lemma 2.1]

It is interesting to generalize these results to the case of maps $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$, where the graph K is arbitrary. This case is treated in [Sko03].

D-5. (a) A theorem analogous to the Minc theorem D2d is true. The proof is analogous.

(b) The analogue of the Minc theorem is not true in this situation. A counterexample is shown in Fig. 12. Finding a fast algorithm for checking the stability of the intersection of two paths is an open problem.

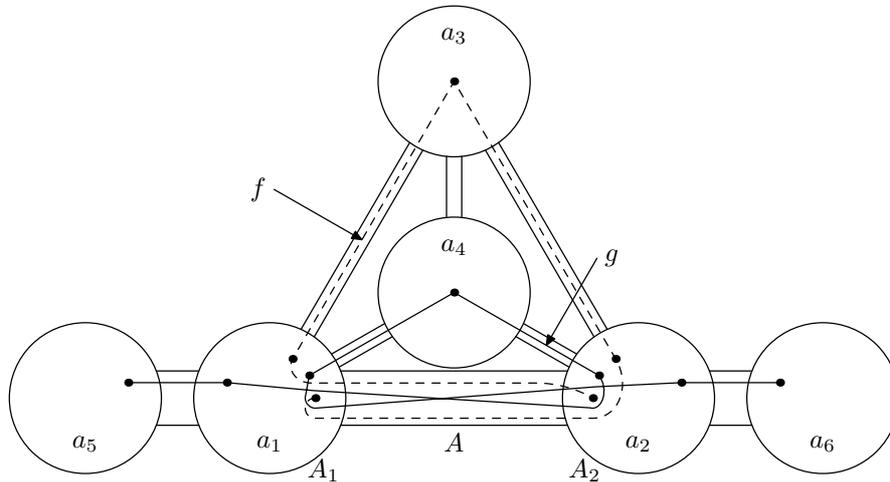


Figure 12: A pair of paths with stable intersection

References

- [Mi97] P. Minc. Embedding simplicial arcs into the plane, *Topol. Proc.* 1997. 22. 305–340.
- [RS98] D. Repovš and A. Skopenkov. A deleted product criterion for approximability of a map by embeddings, *Topol. Appl.* 1998. 87, 1–19.
- [RS02] D. Repovš and A. Skopenkov. The theory of obstacles for beginners, *Mathematical Education*, 2002. 6. 60–77.
- [Si69] K. Sieklucki. Realization of mappings, *Fund. Math.* 1969. 65. 325–343.
- [Sk03] M. Skopenkov. On approximability by embeddings of cycles in the plane, *Topol. Appl.* 134 (2003), p. 1–22. <http://arxiv.org/abs/0808.1187>

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ВЛОЖЕНИЯМИ ЦИКЛОВ НА ПЛОСКОСТИ

Михаил Скопенков

Аннотация. Мы получаем критерий аппроксимируемости вложениями кусочно линейных отображений $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, аналогичный доказанному Минцем для кусочно линейных отображений $I \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Теорема. Пусть $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — кусочно линейное отображение, которое является симплициальным для некоторой триангуляции S^1 с k вершинами. Отображение φ аппроксимируется вложениями, если и только если для каждого $i = 0, \dots, k$ его i -я производная $\varphi^{(i)}$ (определенная Минцем) не содержит трансверсальных самопересечений, и не является стандартной намоткой степени $\notin \{-1, 0, 1\}$.

Мы выводим из результата Минца полноту препятствия Ван Кампена к аппроксимируемости вложениями кусочно-линейных отображений $I \rightarrow \mathbb{R}^2$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Кусочно линейное отображение $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ графа K в плоскость *аппроксимируется вложениями*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует отображение $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ без самопересечений, ε -близкое к φ . В большей части статьи мы рассматриваем случай, когда φ является путем или циклом, то есть, $K \cong I$ или $K \cong S^1$.

Пример 1.1. [12] Стандартная d -намотка $S^1 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ аппроксимируется вложениями в плоскость, если и только если $d \in \{-1, 0, 1\}$.

Можно доказать также, что симплициальное отображение $S^1 \rightarrow S^1$ аппроксимируется вложениями, если и только если его степень $d \in \{-1, 0, 1\}$ (см. Теорему 1.3). *Трансверсальным самопересечением* кусочно линейного отображения $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется пара непересекающихся дуг $i, j \subset K$, таких что φi и φj пересекаются на плоскости трансверсально.

Пример 1.2. Эйлеров путь или цикл в графе на плоскости аппроксимируется вложениями, если и только если он не имеет трансверсальных самопересечений (следовательно, у любого эйлерова графа на плоскости есть эйлеров цикл, аппроксимируемый вложениями).

Понятие аппроксимируемости вложениями появилось в исследованиях вложимости компактов в \mathbb{R}^2 (см. [12, 15], актуальные обзоры можно найти в статьях [7, §9], [2, §4], [8, §1], мы вернемся к этому вопросу еще раз в конце §1). Существует алгоритм проверки того, является ли данное симплициальное отображение аппроксимируемым вложениями (см. [13]). Более удобный для применения критерий аппроксимируемости вложениями симплициального пути на плоскости был доказан в статье [6] (Теорема 1.3.I ниже, обобщающая Пример 1.2). Главный результат этой статьи — аналогичный критерий для аппроксимируемости вложениями цикла на плоскости (Теорема 1.3.S ниже, также обобщающая Пример 1.2). Эти критерии утверждают, что, в некотором смысле, трансверсальное самопересечение — единственное препятствие к аппроксимируемости вложениями. Ясно, что буквально это не верно [12], и нет никакого критерия для рассматриваемой проблемы, аналогичного критерию Куратовского.

Мы формулируем наш критерий (Теорему 1.3) в терминах *производной* пути [5, 6] (*операция d*). Дадим определение этого понятия (см. иллюстрацию 1). Сначала определим *производную* G' графа G (это — синоним для *реберного графа* и *двойственного графа*). Множество вершин графа G' находится в 1-1 соответствии с множеством ребер графа G . Для ребра $a \subset G$ обозначим через $a' \in G'$ соответствующую вершину. Вершины a' и b' в графе G' соединены ребром, если и только если ребра a и b являются смежными в графе G . Отметим, что производные G' и H' гомеоморфных, но не изоморфных графов G и H не обязательно гомеоморфны.

Теперь пусть φ — путь в графе G , заданный последовательностью своих вершин $x_1, \dots, x_k \in G$, где вершины x_i и x_{i+1} соединены ребром. Тогда $(x_1x_2)', \dots, (x_{k-1}x_k)'$ является последовательностью вершин графа G' . В этой последовательности заменим каждый отрезок вида

$$(x_i x_{i+1})', (x_{i+1} x_{i+2})', \dots, (x_{j-2} x_{j-1})', (x_{j-1} x_j)',$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 57Q35 (Primary); 54C25, 57M20 (Secondary).

Key words and phrases. Аппроксимируемость вложениями, препятствие Ван Кампена, реберный граф, производная графа, производная симплициального отображения, операция d , трансверсальное самопересечение, стандартная d -намотка, симплициальное отображение, утолщение графа.

Автор частично поддержан грантом ИНТАС 06-1000014-6277, грантами Российского Фонда Фундаментальных Исследований 05-01-00993-а, 06-01-72551-НЦНИЛ-а, 07-01-00648-а, Грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации, проект НШ-4578.2006.1, программой Министерства Образования и Науки "Развитие научного потенциала высшей школы", проект РНП 2.1.1.7988, Фондом поддержки молодых ученых "Конкурс Мёбиуса".

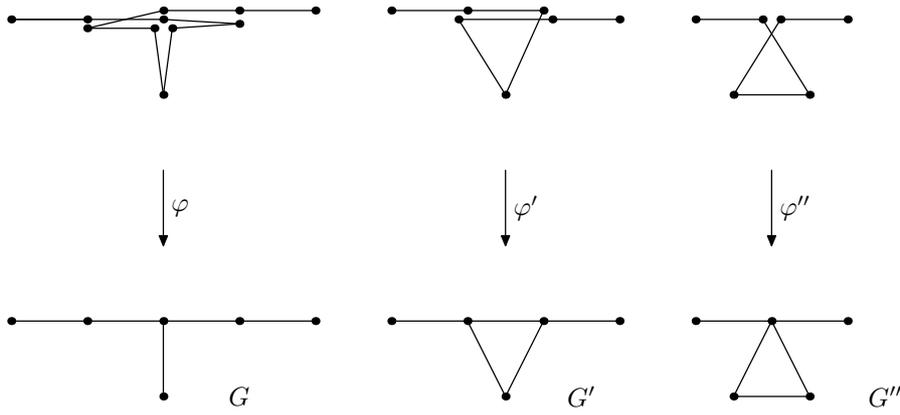


Рис. 1. Производные графов и путей

где $(x_i x_{i+1})' = (x_{i+1} x_{i+2})' = \dots = (x_{j-1} x_j)'$, единственной вершиной (то есть заменим несколько идущих подряд одинаковых вершин на одну вершину). Полученная последовательность вершин определяет путь в графе G' . Этот путь φ' называют *производной* пути φ .

Любой 5-од (то есть конус над 5 точками) является планарным графом, чья производная является графом Куратовского, то есть непланарным графом. Но если $G \subset \mathbb{R}^2$, и путь φ не имеет трансверсальных самопересечений, то образ отображения φ' является планарным подграфом $G'_\varphi \subset G'$ (мы приводим построение естественного вложения $G'_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^2$ в §2, см. Определение производной утолщения). Заменим граф G' на образ G'_φ , и отображение φ' — на ограничение $\varphi' : I \rightarrow G'_\varphi$. Определим k -ю производную $\varphi^{(k)}$ индуктивно. Для цикла φ определение *производной* φ' аналогично, и это будет снова некоторый цикл в графе на плоскости (который может выродиться в точку).

Приведем пример, который будет использоваться в дальнейшем: $\varphi' = \varphi$ для стандартной d -намотки $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ с $d \neq 0$. Ясно, что φ' — вложение для любого эйлерового пути или цикла φ . Таким образом, Пример 1.2 — действительно частный случай следующей теоремы.

Теорема 1.3. I) [6] Пусть $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ — кусочно линейное отображение, являющееся симплициальным для некоторой триангуляции отрезка I с k вершинами. Отображение φ аппроксимируется вложениями, если и только если для каждого $i = 0, \dots, k$ его i -я производная $\varphi^{(i)}$ не содержит трансверсальных самопересечений.

S) Пусть $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — кусочно линейное отображение, являющееся симплициальным для некоторой триангуляции окружности S^1 с k вершинами. Отображение φ аппроксимируется вложениями, если и только если для каждого $i = 0, \dots, k$ его i -я производная $\varphi^{(i)}$ не содержит трансверсальных самопересечений, и при этом не является стандартной намоткой степени $d \notin \{-1, 0, 1\}$.

Мы доказываем обе теоремы 1.3.I и 1.3.S в §2. Наше доказательство результата 1.3.I является более простым, чем приведенное в [6].

В §3 мы применяем Теорему 1.3 для получения следующего критерия.

Следствие 1.4. Кусочно линейное отображение $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ аппроксимируется вложениями, если и только если выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

D) (свойство взрезанного произведения) Существует отображение

$$\{(x, y) \in I \times I : x \neq y\} \rightarrow S^1,$$

такое что его ограничение на множество $\{(x, y) \in I \times I : \varphi x \neq \varphi y\}$ гомотопно отображению, заданному формулой $\tilde{\varphi}(x, y) = \frac{\varphi x - \varphi y}{\|\varphi x - \varphi y\|}$;

V) препятствие ван Кампена (определенное в §3) $v(\varphi) = 0$.

Хотя Критерий 1.4.V и труднее сформулировать, но его легче применять, чем 1.3.I и 1.4.D. В Следствии 1.4 отрезок I нельзя заменить на окружность S^1 : стандартная 3-намотка является контрпримером [8]. Препятствия, подобные 1.4.D и 1.4.V, существуют и в близкой теории аппроксимируемости сингулярными зацеплениями (то есть, отображениями с непересекающимися образами связных компонент), но критерии, аналогичные 1.4.I и 1.4.DV для них не верны (Пример 3.3 ниже).

Гипотеза. Кусочно-линейный путь $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ аппроксимируется вложениями, если и только если для любой пары дуг $I_1, I_2 \subset I$, такой что $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, пара ограничений $\varphi : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\varphi : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ аппроксимируется сингулярными зацеплениями.

Интересно обобщить критерии 1.3 и 1.4 на кусочно линейные отображения $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$, где K — произвольный граф (см. частный случай в [14]).

Гипотеза. Пусть $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ — кусочно линейное отображение, являющееся симплициальным относительно некоторой триангуляции графа K с k вершинами. Тогда отображение φ аппроксимируется вложениями, если и только если $v(\varphi) = 0$ и для каждого $i = 0, \dots, k$ его i -я производная $\varphi^{(i)}$ (определенная в §2) не содержит стандартных намоток степени $d \notin \{-1, 0, 1\}$.

Если данная гипотеза верна, то кусочно-линейное отображение $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ дерева K аппроксимируется вложениями, если и только если $v(\varphi) = 0$ [2, Problem 4.5].

Завершим §1 несколькими замечаниями по поводу истории возникновения понятия аппроксимируемости вложениями. Дадим определение разложения 1-мерного компакта в обратный предел и покажем, как понятие аппроксимируемости вложениями появляется при исследовании планарности этого компакта. (Мы не будем использовать это определение в нашей статье.) В качестве примера построим 2-адический соленоид Ван Данцига. Возьмем полноторие $T_1 \subset \mathbb{R}^3$. Пусть $T_2 \subset T_1$ — полноторие, обходящее дважды вдоль оси полнотория T_1 . Аналогично, возьмем полноторие $T_3 \subset T_2$, обходящее дважды вдоль оси полнотория T_2 . Продолжая далее подобным образом, мы получаем бесконечную последовательность полноторий $T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \dots$. Пересечение всех полноторий T_i является 1-мерным компактом и называется 2-адическим соленоидом Ван Данцига. Обратным пределом бесконечной последовательности графов и симплициальных отображений между ними $K_1 \xleftarrow{\varphi_1} K_2 \xleftarrow{\varphi_2} K_3 \xleftarrow{\varphi_3} \dots$ мы называем компакт

$$C = \{ (x_1, x_2, \dots) \in l_2 : x_i \in K_i \text{ и } \varphi_i x_{i+1} = x_i \}.$$

Можно видеть из нашего построения, что для соленоида Ван Данцига все $K_i \cong S^1$ и все φ_i суть 2-намотки. Можно доказать, что любой 1-мерный компакт может быть представлен в виде обратного предела. Такое представление показывает, что любой 1-мерный компакт может быть вложен в \mathbb{R}^3 . Оно также предоставляет простое достаточное условие планарности данного компакта: для каждого положительного целого числа i должно существовать вложение $f_i : K_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что отображение $f_i \circ \varphi_i$ аппроксимируется вложениями и f_{i+1} является 2^{-i} -близким к $f_i \circ \varphi_i$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КРИТЕРИЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ВЛОЖЕНИЯМИ

Теорема 1.3 следует из Примера 1.1 и Лемм 2.1, 2.2 (для $K \cong I, S^1$) и 2.3, которые интересны и сами по себе.

Лемма 2.1. (для $K \cong I$ [6]) Предположим, что симплициальное отображение $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ графа $K \cong S^1$ или $K \cong I$ не имеет трансверсальных самопересечений. Тогда если φ' аппроксимируется вложениями, то и φ аппроксимируется вложениями.

Лемма 2.2. А) [6] Если симплициальное отображение $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ аппроксимируется вложениями, то и отображение φ' аппроксимируется вложениями.

В) Если симплициальное отображение $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ аппроксимируется mod 2-вложениями, то отображение φ' аппроксимируется mod 2-вложениями.

Здесь mod 2-вложение — это отображение общего положения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$, такое что для каждой пары a, b непересекающихся ребер графа K множество $fa \cap fb$ состоит из четного числа точек. Определение производной для симплициального отображения произвольного графа K приводится ниже.

Лемма 2.3. Пусть $\varphi : S^1 \rightarrow G$ — кусочно линейное отображение, которое является симплициальным для некоторой триангуляции окружности S^1 с k вершинами. Тогда либо область определения отображения $\varphi^{(k)}$ пуста, либо $\varphi^{(k)}$ является стандартной намоткой степени $d \neq 0$.

Это число d можно рассматривать как обобщение степени для любого симплициального отображения $S^1 \rightarrow G$. Таким образом, интересно получить решение следующей задачи (оно может также сделать применение Критериев 1.3 более удобным): найти простой алгоритм для вычисления степени намотки $\varphi^{(\infty)}$ для данного кусочно линейного отображения $\varphi : S^1 \rightarrow G$.

Далее мы используем следующее обобщение определения производной (для пути), данного в §1.

Определение 2.4 (Производная симплициального отображения). [6] (см. иллюстрацию 1, а также часть иллюстрации 4 ниже) Пусть дано симплициальное отображение $\varphi : K \rightarrow G$. Сначала построим граф K'_φ , который будет областью определения производной φ' . Под φ -компонентой графа K мы подразумеваем любую связную компоненту α множества $\varphi^{-1}a$, отображаемую на a , для некоторого ребра $a \subset G$. Множество вершин графа K'_φ находится в 1-1 соответствии с множеством всех φ -компонент. Для φ -компоненты $\alpha \subset K$ обозначим через $\alpha' \in K'_\varphi$ соответствующую вершину. Две вершины α' и β' соединены ребром в графе K'_φ , если и только если $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Производная $\varphi' : K'_\varphi \rightarrow G'$ — это симплициальное отображение, определенное на вершинах графа K'_φ формулой $\varphi' \alpha' = (\varphi \alpha)'$. В дальнейшем заменим φ' на сюръективное ограничение $\varphi' : K'_\varphi \rightarrow \varphi' K'_\varphi$. (В оригинальном определении статьи [6] граф G' обозначается как $D(G)$, производная φ' как $d[\varphi]$, и граф K'_φ как $D(\varphi, K)$.)

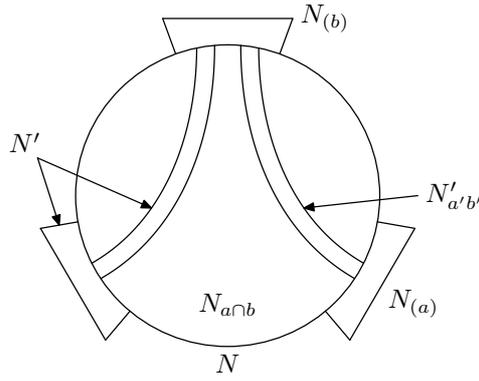


Рис. 2. Производная утолщения графа

Доказательство Леммы 2.3. Будем говорить, что симплициальное отображение $\varphi : K \rightarrow G$ является *сильно невырожденным*, если для каждого ребра $a \subset K$ образ φa является ребром G (а не вершиной) и для каждой пары $a, b \subset K$ смежных ребер мы имеем $\varphi a \neq \varphi b$. Обозначим через $|K|$ число вершин в графе K . Ясно, что если $K \cong S^1$, то $|K'_\varphi| \leq |K|$, причем $|K'_\varphi| = |K|$, только если φ является сильно невырожденным. Поэтому лемму достаточно доказать только в последнем случае (потому что случаи, когда $K'_\varphi \cong I$ или граф K'_φ является точкой, тривиальны). В случае сильно невырожденного отображения лемма очевидна, но мы приводим доказательство для полноты.

Докажем, что если сильно невырожденное сюръективное симплициальное отображение $\varphi : K \rightarrow G$ графа $K \cong S^1$ не является стандартной намоткой степени, отличной от нуля, то $|G'| > |G|$. Заметим, что для сильно невырожденного отображения $\varphi : S^1 \rightarrow G$ граф G не содержит висящих вершин. Если степень каждой вершины графа G равна двум, то φ является сильно невырожденным симплициальным отображением $S^1 \rightarrow S^1$, следовательно, φ является стандартной намоткой, вопреки нашему предположению. Значит, граф G содержит вершину степени по крайней мере 3. Тогда, по доказанному выше, число ребер графа G больше числа вершин, следовательно, $|G'| > |G|$. Поскольку для симплициального отображения $\varphi : K \rightarrow G$ мы имеем $1 \leq |G'| \leq |K|$, то $|G|, |G'|, \dots, |G^{(k)}| \leq k$ (напомним, что по определению отображение φ' сюръективно). Таким образом, есть только две возможности: любой одна (а значит, и k -я тоже) из производных $\varphi, \dots, \varphi^{(k)}$ — стандартная намотка ненулевой степени, либо $|G^{(k)}| = 0$, то есть область определения отображения $\varphi^{(k)}$ пуста. \square

Теперь приведем обещанное в §1 построение вложения $G'_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^2$. Нам будет удобнее рассматривать *утолщения* графов, а не вложения графов в плоскость. В этом смысле обещанное построение эквивалентно построению *производной утолщения* (см. определение утолщения N' ниже). Далее мы предполагаем, что фиксировано *утолщение* N графа G на плоскости (то есть, регулярная окрестность графа $G \subset \mathbb{R}^2$). Мы также предполагаем, что также фиксировано разложение на ручки (обозначаемое через S)

$$N = \bigcup_{x \in \text{множество вершин графа } G} N_x \cup \bigcup_{a \in \text{множество ребер графа } G} N_{(a)},$$

соответствующее графу G , где N_x обозначают 2-мерные диски, а $N_{(a)}$ — присоединенные к ним ленточки. Обозначим через N_a ограничение $N_x \cup N_{(a)} \cup N_y$ утолщения N на ребро $a = xy$. Фактически, мы не используем планарность N в последующих рассуждениях. Можно считать, что утолщение N является всего лишь ориентируемым (ориентируемость необходима для утверждения Примера 1.1). Дадим определение производной N' утолщения N . Это утолщение N' зависит от симплициального отображения $\varphi : K \rightarrow G \subset N$ и определено корректно, только если φ не содержит трансверсальных самопересечений. Кроме того, в случае произвольного графа K мы должны также предположить, что не существует пары дуг $i, j \subset K$ (не обязательно непересекающихся!), таких что пересечение $\varphi i \cap \varphi j$ трансверсально.

Определение 2.5 (Производная утолщения графа). (см. иллюстрацию 2) Пусть $\varphi : K \rightarrow G \subset N$ — симплициальное отображение, такое что для любой пары дуг $i, j \subset K$ пересечение $\varphi i \cap \varphi j$ (возможно пустое) не трансверсально. Возьмем по диску $N'_{a'}$ для каждой вершины $a' \in G'$ и по ленточке $N'_{(a'b')}$ для каждого ребра $a'b' \subset G'$. Тогда N' вместе с его разложением ручки S' определяется формулой $N' = \bigcup N'_{a'} \cup \bigcup N'_{(a'b')}$. Здесь мы полагаем $N'_{(a'b')} = N_{(a)}$ для каждого ребра $a \subset G$. Для каждой пары $a, b \subset G$ смежных ребер, для которых $(\varphi')^{-1}(a'b') \neq \emptyset$, мы соединяем два диска $N'_{a'}$ и $N'_{b'}$ узкой ленточкой $N'_{(a'b')}$ в $N_{a \cap b}$. Поскольку пересечение дуг $a \cup b$ и $c \cup d$ не трансверсально ни для какой пары смежных ребер $c, d \subset K$, то мы можем выбрать ленточки $N'_{(a'b')}$ так, чтобы они не пересекались для различных ребер $a'b'$.

Это определение можно рассматривать как построение вложения $N' \rightarrow N$, а также вложения $G'_\varphi \rightarrow \mathbb{R}^2$. Заметим, что разбиение на ручки S' и топологический тип утолщения N' не зависят от выбора ленточек $N'_{(a'b')}$

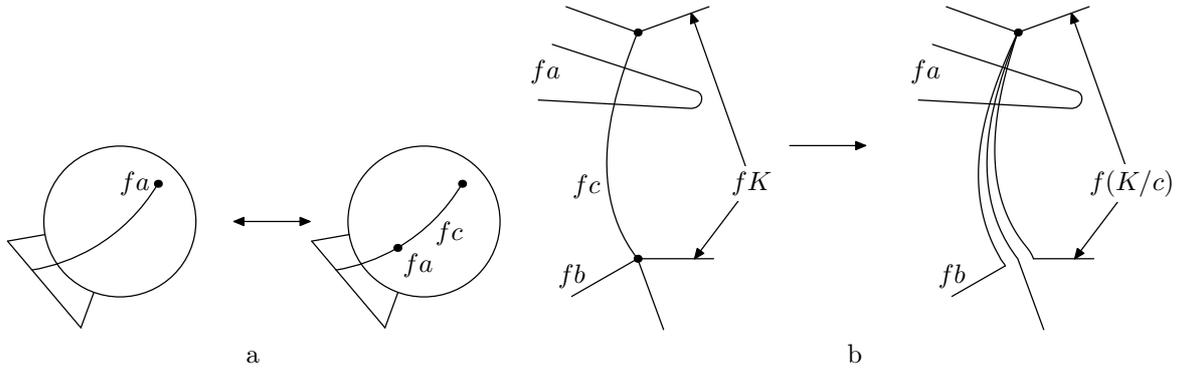


Рис. 3. Перестройки вырожденных отображений

в нашем определении. Альтернативное определение производной $D(N)$ утолщения N из статьи [6] не зависит также от выбора отображения φ . Утолщение N' в нашей статье является подутолщением утолщения $D(N)$ (определение которого приводится в статье [6]), соответствующим подграфу $G'_\varphi \subset G'$.

Ясно, что для исследования аппроксимируемости вложениями симплициальных отображений $K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ достаточно рассматривать только приближения $f : K \rightarrow N$. Теперь мы собираемся свести задачу аппроксимируемости вложениями данного отображения к задаче существования вложения, близкого к нему в некотором смысле (S -близкого).

Определение 2.6 (S -аппроксимация). [6] Отображение $f : K \rightarrow N$ называется S -аппроксимацией отображения φ , или, отображение f S -близко к φ , если выполняются следующие условия:

- (i) $fx \subset N_{\varphi x}$ для каждой вершины или ребра x графа K ;
- (ii) $x \cap f^{-1}N_{(\varphi x)}$ связно для каждого ребра x графа K с невырожденным образом φx .

Согласно Утверждению 2.9 статьи [6], отображение $\varphi : K \rightarrow G$ аппроксимируется вложениями, если и только если существует вложение $f : K \rightarrow N$, S -близкое к φ .

Кусочно линейное отображение $\varphi : K \rightarrow N$ называется *вырожденным*, если φc является точкой для некоторого ребра $c \subset K$. Докажем следующее несложное Утверждение о стягивании ребра 2.7, которое в некотором смысле позволяет считать, что в Леммах 2.1 и 2.2 отображение φ является невырожденным.

Утверждение 2.7 (О стягивании ребра). Пусть $\varphi : K \rightarrow G$ — симплициальное отображение, такое что φc является точкой для некоторого ребра $c \subset K$. Пусть K/c — граф, полученный из графа K стягиванием ребра c , и пусть $\varphi/c : K/c \rightarrow G$ — соответствующее отображение. Тогда

- D) $K'_{\varphi/c} = K'_\varphi$, $G'_\varphi = G'_{\varphi/c}$ и $(\varphi/c)' = \varphi'$.
- A) для $K \cong S^1$ или $K \cong I$ отображение φ/c аппроксимируется вложениями, если и только если φ аппроксимируется вложениями.
- K) для произвольного графа K , если φ аппроксимируется вложениями, то φ/c аппроксимируется вложениями.
- V) Если φ аппроксимируется mod 2-вложениями, то φ/c аппроксимируется mod 2-вложениями.

Доказательство Утверждения 2.7. D) очевидно.

A) Докажем прямую импликацию. Пусть $f : K/c \rightarrow N$ — вложение, S -близкое к φ/c . Пусть $a \subset K$ — ребро, смежное с c (если c — связная компонента графа K , то требуемое утверждение очевидно). Добавим новую вершину к ребру a графа K/c (иллюстрация 3.a). Так как $K \cong S^1$ или $K \cong I$, то полученный граф изоморфен K и вложение $f : K \rightarrow N$ — искомое. Обратная импликация — частный случай утверждения K).

K) Пусть $f : K \rightarrow N$ — вложение, S -близкое к φ . Сделаем перестройку, показанную на иллюстрации 3.b. Получим вложение $\bar{f} : K/c \rightarrow N$, S -близкое к φ/c .

V) Пусть f — mod 2-вложение, S -близкое к φ . Сделаем перестройку, показанную на иллюстрации 3.b. Получим S -близкое к φ/c отображение $\bar{f} : K/c \rightarrow N$. Достаточно доказать, что $|fa \cap fb| = 0 \pmod{2}$ для каждой пары непересекающихся ребер $a, b \subset (K/c)$. Действительно, a и b являются ребрами также и в графе K , причем по крайней мере одно из них не смежно с c (потому что a и b являются непересекающимися в K/c). Если ни a , ни b не смежно с c , то $|\bar{f}a \cap \bar{f}b| = |fa \cap fb| = 0 \pmod{2}$. Если, например, $b \subset K$ смежно с c и a не смежно с c , то $|\bar{f}a \cap \bar{f}b| = |fa \cap fb| + |fa \cap fc| = 0 \pmod{2}$, что доказывает утверждение. \square

Вырожденные отображения появляются в нашем доказательстве Лемм 2.1 и 2.2, даже если исходное отображение $\varphi : K \rightarrow G$ является невырожденным. Мы собираемся построить граф \bar{K}'_φ и пару (вырожденных) симплициальных отображений $G \xleftarrow{\bar{\varphi}} \bar{K}'_\varphi \xrightarrow{\bar{\varphi}'} G'$, которые могут быть получены из отображений φ и φ' ,

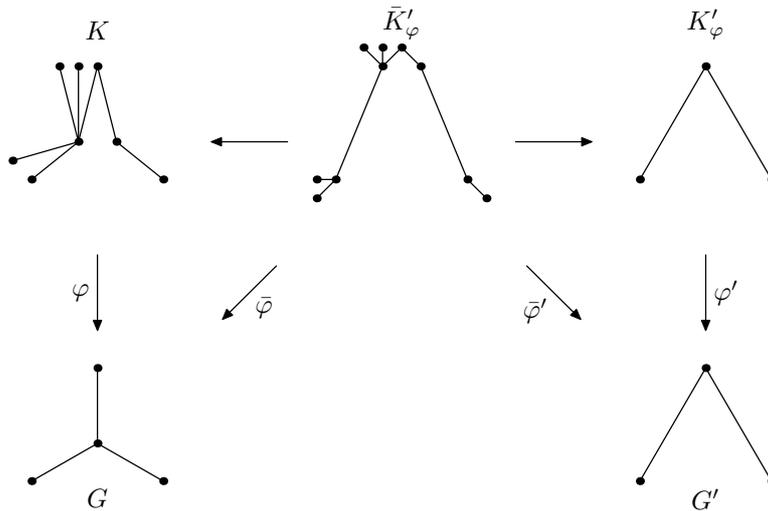


Рис. 4. Полупроизводные симплициального отображения

соответственно, операцией из Утверждения о стягивании ребра 2.7 (при некоторых дополнительных предположениях относительно φ , детали представлены ниже). Вместе с построением вложения $N' \rightarrow N$ (см. определение утолщения N' выше), это немедленно влечет утверждение Леммы 2.1 (см. иллюстрации 4, 5, 6).

Определение 2.8 (Полупроизводная симплициального отображения). (см. иллюстрацию 4) Предположим, что отображение φ является невырожденным, и K не имеет вершин степени 0. Возьмем несвязное объединение всех φ -компонент графа K (см. Определение производной φ' выше). Соединим ребром любые две вершины, принадлежащие различным φ -компонентам и отвечающие одной и той же вершине графа K . Обозначим полученную *полупроизводную* графа K через \bar{K}'_φ . Таким образом, φ -компонента $\alpha \subset K$ является также подграфом графа \bar{K}'_φ , обозначаемым через $\bar{\alpha}'$. В дальнейшем мы отождествляем точки графов α и $\bar{\alpha}'$. Определим симплициальные отображения $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}'$ (*полупроизводные* отображения φ) как очевидные проекции $\bar{K}'_\varphi \rightarrow G$ и $\bar{K}'_\varphi \rightarrow G'$, соответственно, заданные на вершинах формулами $\bar{\varphi}x = \varphi x$ и $\bar{\varphi}'x = (\varphi\alpha)'$, где вершина $x \in \bar{K}'_\varphi$ принадлежит φ -компоненте $\bar{\alpha}'$.

Доказательство Леммы 2.1. Согласно Утверждению о стягивании ребра 2.7.D, отображение φ может считать невырожденным. Мы также можем считать, что граф K не имеет вершин степени 0. Легко видеть, что φ и φ' могут быть получены из $\bar{\varphi}$ и некоторого сужения $\bar{\varphi}'$, соответственно, операцией из Утверждения о стягивании ребра 2.7. Если любые две φ -компоненты имеют не более одной общей точки, то φ' может быть получен таким образом непосредственно из $\bar{\varphi}$. Но для $K \cong S^1$ последнее условие выполнено всегда, кроме случая, когда граф K состоит из ровно двух φ -компонент. Очевидно, отображение φ аппроксимируется вложениями в указанном случае. Таким образом, достаточно доказать следующее утверждение:

(*) если $\bar{\varphi}'$ аппроксимируется вложениями, то $\bar{\varphi}$ аппроксимируется вложениями.

Докажем утверждение (*) для произвольного графа K . Если $\bar{\varphi}'$ аппроксимируется вложениями, то найдется вложение $\bar{K}'_\varphi \rightarrow N'$, S' -близкое к $\bar{\varphi}'$. Определим вложение $f : \bar{K}'_\varphi \rightarrow N$ как композицию этого вложения и вложения $N' \rightarrow N$, построенного в определении утолщения N' (см. иллюстрацию 5, где это построение применяется к отображению φ с иллюстрацией 4). Ясно, что существует новое разложение на ручки $N = \bigcup \bar{N}_a \cup \bigcup \bar{N}_{(ab)}$ утолщения N , обозначаемое \bar{S} , такое что f будет \bar{S} -аппроксимацией отображения $\bar{\varphi}$ (см. иллюстрацию 6, сравни с [6], Утверждение 4.9) Тогда $f : \bar{K}'_\varphi \rightarrow \bar{N}$ (где \bar{N} обозначает утолщение N с новым разложением ручки \bar{S}) — вложение, \bar{S} -близкое к отображению $\bar{\varphi}$. Лемма доказана. \square

Та же самая идея используется в доказательстве Лемм 2.2.A,V. Рассматривается отображение $f : \bar{K}'_\varphi \rightarrow N$ общего положения, S -близкое к $\bar{\varphi}$ и строится *полупроизводная* $\bar{f}' : \bar{K}'_\varphi \rightarrow N'$, S -близкая к $\bar{\varphi}'$ (см. иллюстрацию 7). Потом проверяется, что если f — вложение, то \bar{f}' — также вложение (см. иллюстрацию 8).

Определение 2.9 (Полупроизводная S -аппроксимации). (см. иллюстрацию 7, где приведенное ниже построение применяется к отображению φ , изображенному на иллюстрации 4) Пусть K — граф без вершин степени 0. Пусть $\varphi : K \rightarrow G \subset N$ — невырожденное симплициальное отображение без трансверсальных самопересечений. Пусть $f : K \rightarrow N$ — S -аппроксимация отображения φ . Тогда *полупроизводная* отображения f есть S' -аппроксимация $\bar{f}' : \bar{K}'_\varphi \rightarrow N'$ отображения φ' , и строится следующим образом. Для каждого ребра $a \subset G$ выберем гомеоморфизм $h_a : N_a \rightarrow N'_a$ таким образом, что для каждого любого ребра b , смежного с a , мы имеем $h_a(N_a \cap N_{(b)}) \subset N'_{(a'b')}$. Определим \bar{f}' на каждой φ -компоненте $\bar{\alpha}' \subset \bar{K}'_\varphi$ формулой $\bar{f}'|_{\bar{\alpha}'} = h_{\varphi\alpha} f|_\alpha$ Теперь

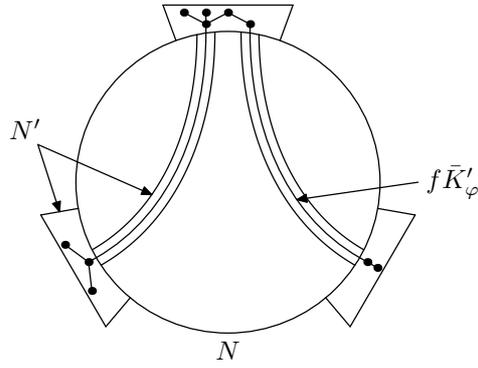


Рис. 5. Построение S -аппроксимации

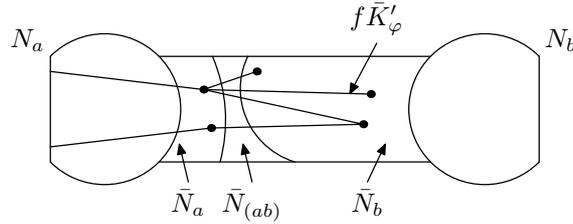


Рис. 6. Построение разбиения на ручки

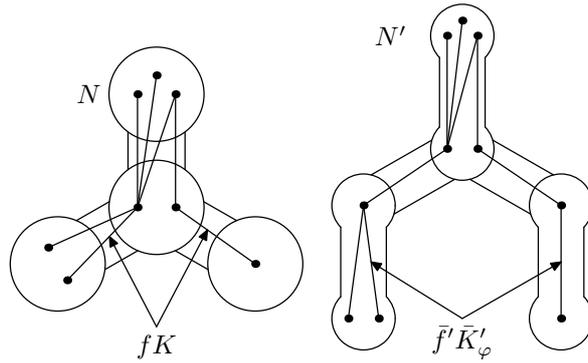


Рис. 7. Полупроизводная S -аппроксимации

определим \bar{f}' на каждом ребре $xy \subset \bar{K}'_\varphi$, соединяющем две различные φ -компоненты \bar{X}' и \bar{Y}' . Возьмем ребро $a \subset \bar{X}'$, содержащее вершину x . отождествим \bar{X}' с X (см. Определение полупроизводной симплициального отображения $\bar{\varphi}'$). Тогда a будет отождествлено с некоторым ребром графа K , а x — с некоторой вершиной графа K . Обозначим через \bar{x} дугу $a \cap f^{-1}N_{\varphi x}$. Определим дугу \bar{y} аналогично. Разрежем ребро xy в три отрезка xx_1 , x_1y_1 и y_1y . Пусть f' гомеоморфно отображает отрезок xx_1 на $h_{\varphi X}f\bar{y}$, отрезок y_1y — на $h_{\varphi Y}f\bar{x}$, а отрезок x_1y_1 — на прямолинейный отрезок в диске $N'_{(\varphi X \varphi Y)}$, соединяющий точки $f'x_1$ и $f'y_1$. Таким образом, отображение $\bar{f}' : \bar{K}'_\varphi \rightarrow N'$ построено.

Заметим, что если f — вложение, то есть более простое альтернативное построение отображения \bar{f}' , в некотором смысле обратное к построению из доказательства Леммы 2.1. Но это альтернативное построение неприменимо к доказательству Леммы 2.2.V, поэтому мы не пользуемся им в данной статье. Мы собираемся доказать Лемму 2.2.A,V только в случае, когда производная N' определена корректно, то есть K не содержит пар дуг i, j , для которых пересечение $\varphi i \cap \varphi j$ трансверсально. Этого достаточно для доказательства Теоремы 1.3. В общем случае доказательство аналогично, но необходимо всюду вместо N' пользоваться производной $D(N)$, определенной в статье [6].

Доказательство Леммы 2.2.A. Согласно Утверждению 2.7.K можно считать, что φ невырождено. Возьмем некоторое вложение $f : K \rightarrow N$, S -близкое к φ . Тогда достаточно показать, что отображение \bar{f}' (см. Определение полупроизводной S -аппроксимации \bar{f}') является вложением.

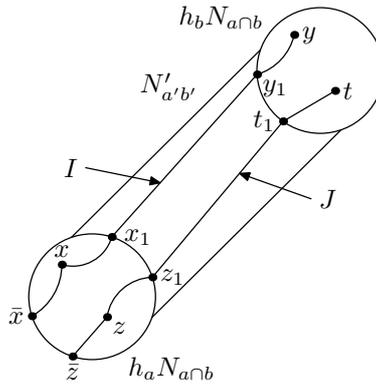


Рис. 8. Подсчет количества точек пересечения

Рассмотрим пару различных ребер xy, zt графа K'_φ . Обозначим множество $\bar{f}'(xy) \cap \bar{f}'(zt)$ через i . Достаточно показать, что $i = \bar{f}'(xy \cap zt)$. Обозначим $a' = \bar{\varphi}'x$, $b' = \bar{\varphi}'y$, $c' = \bar{\varphi}'z$ и $d' = \bar{\varphi}'t$. Без ограничения общности возможны следующие 3 случая.

1) a', b', c' и d' попарно различны. Так как \bar{f}' является S' -аппроксимацией, то $\bar{f}'xy \subset N'_{a'b'}$ и $\bar{f}'zt \subset N'_{c'd'}$, следовательно $i = \emptyset$.

2) $(a' = c' \text{ и } b' \neq d')$ или $(a' = b' = c' = d')$. Тогда $i \subset N'_{a'}$, следовательно, $i = h_a(f\bar{x} \cap f\bar{z})$ (см. определение h_a и \bar{x} в Определении полупроизводной S -аппроксимации \bar{f}' , дуга \bar{z} определяется аналогично \bar{x}). Если $y \neq t$, то \bar{x} и \bar{z} не пересекаются, так что $f\bar{x} \cap f\bar{z} = \emptyset$ и $i = \emptyset$. Если же $y = t$, то $i = h_a(fy) = \bar{f}'(xy \cap zt)$.

3) $a' = c', b' = d'$ и $a' \neq b'$. В этом случае как xy , так и zt , соединяют вершины из различных φ -компонент. Докажем, что xy и zt не пересекаются. Например, пусть $y = t$. Тогда все вершины x, y, z и t графа \bar{K}'_φ отвечают одной и той же вершине графа K . Обозначим ее через w . Обозначим через X и Z те φ -компоненты множества $\varphi^{-1}a = \varphi^{-1}c$, для которых $x \in \bar{X}'$ и $z \in \bar{Z}'$. Таким образом, у φ -компонент X и Z есть общая точка w , следовательно $X = Z$. Значит, $x, z \in \bar{X}' = \bar{Z}'$ отвечают одной и той же вершине w , следовательно, $x = z$. Мы получаем, что $y = t$ и $x = z$, тогда по построению графа \bar{K}'_φ мы получаем $xy = zt$, что противоречит выбору этих ребер. Значит, xy и zt не пересекаются.

Покажем, что в случае (3) $|i| \equiv 0 \pmod{2}$. В дальнейшем будем опускать \bar{f}' в обозначениях всех образов при отображении \bar{f}' . Заметим, что гомеоморфизм $h_a \circ h_b^{-1}$ отображает y_1y и t_1t на \bar{x} и \bar{z} , соответственно (иллюстрация 8). Из этого следует, что $|i| = |I \cap J|$, где $I = \bar{x} \cup xy_1$ и $J = \bar{z} \cup zt_1$. Из этого также следует, что две пары точек ∂I и ∂J не зацеплены на окружности $\partial(h_a N_{a \cap b} \cup N'_{(a'b')})$. Так как $I, J \subset h_a N_{a \cap b} \cup N'_{(a'b')}$, то $|i| = |I \cap J| \equiv 0 \pmod{2}$. Таким образом, остается доказать, что $|I \cap J| \leq 1$, тогда $I \cap J = \emptyset$. Последнее утверждение следует из равенства

$$\bar{x} \cap \bar{z} = h_a(f\bar{x} \cap f\bar{z}) = \emptyset \quad xx_1 \cap zz_1 = h_a(fy \cap ft) = \emptyset \quad \text{и} \quad |x_1y_1 \cap z_1t_1| \leq 1,$$

потому что x_1y_1 и z_1t_1 — прямолинейные отрезки в диске $N_{(a'b')}$. Лемма доказана. \square

Доказательство Леммы 2.2.V. Согласно Утверждению о стягивании ребра 2.7.V нам достаточно доказать, что если $f : \bar{K}'_\varphi \rightarrow N$ является $\text{mod } 2$ -вложением, S -близким к φ , то его полупроизводная \bar{f}' также является $\text{mod } 2$ -вложением.

Возьмем пару непересекающихся ребер xy, zt графа \bar{K}'_φ и рассмотрим те же три случая, что и в доказательстве Леммы 2.2.A. Случай 1) тривиален. В случае 2) мы имеем $f(xy) \cap f(zt) \subset N_a$, следовательно, $|i| = |h_a(f\bar{x} \cap f\bar{z})| = |h_a(f(xy) \cap f(zt))| = |f(xy) \cap f(zt)| \equiv 0 \pmod{2}$. В доказательстве Леммы 2.2.A мы уже показали, что в случае 3) выполнено равенство $|i| \equiv 0 \pmod{2}$. Таким образом, Лемма 2.2.V доказана. \square

3. ПРЕПЯТСТВИЕ ВАН КАМПЕНА

Препятствие Ван Кампена было придумано Ван Кампеном при исследовании вложимости полиэдров в \mathbb{R}^{2n} [2, 3, 4, 7, 8]. Дадим определение препятствия ван Кампена к аппроксимируемости вложениями симплициальных путей. Наше построение более наглядно, чем построение препятствия Ван Кампена к вложимости. Пусть $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ — симплициальный путь (на иллюстрации 9 приведенная ниже конструкция применяется к пути, показанному на иллюстрации 1). Обозначим через x_1, \dots, x_k вершины графа I в порядке их расположения на дуге I , и обозначим ребро $x_i x_{i+1}$ через i . Пусть $I^* = \bigcup_{i < j-1} i \times j$ — *взрезанный квадрат* графа I . Раскрасим в красный цвет ребра $x_i \times j, j \times x_i$, и клетки $i \times j$ взрезанного квадрата I^* , такие что $\varphi x_i \cap \varphi j = \emptyset, \varphi i \cap \varphi j = \emptyset$. Обозначим через $I^{*\varphi}$ красное множество. Возьмем отображение общего положения $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, достаточно близкое к φ . В каждую клетку $i \times j$ "таблицы" I^* поставим число $v_f(i \times j) = |fi \cap fj| \pmod{2}$. Разрежем I^* вдоль красных ребер. Пусть C_1, C_2, \dots, C_n — все компоненты связности полученной фигуры, для которых

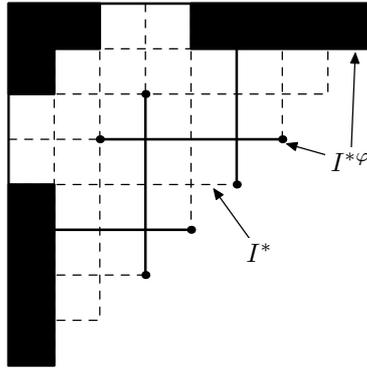


Рис. 9. Препятствие Ван Кампена

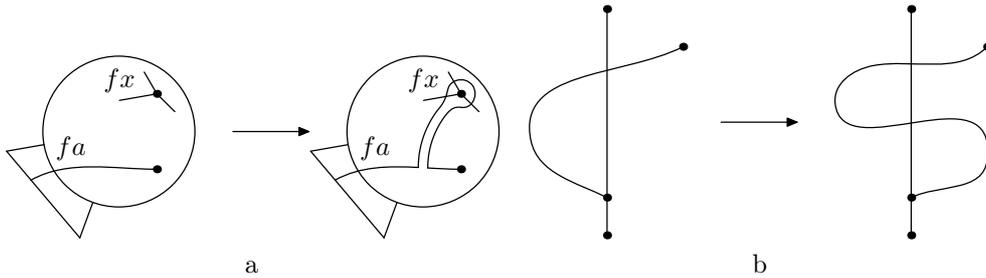


Рис. 10. "Движение Райдемайстера"

$\partial C_k \cap \partial I^* \subset I^{*\varphi}$. Обозначим $v_f(C_k) = \sum_{i \times j \in C_k} v_f(i \times j)$. Препятствие Ван Кампена (с \mathbb{Z}_2 -коэффициентами) для аппроксимируемости вложениями — это вектор $v(\varphi) = (v_f(C_1), v_f(C_2), \dots, v_f(C_n))$.

Несложно проверить, что $v(\varphi)$ не зависит от выбора отображения f [8], таким образом, $v(\varphi) = 0$ является необходимым условием для аппроксимируемости вложениями. Легко проверить, что $v(\varphi) \neq 0$ для кусочно линейного пути $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, содержащего трансверсальное самопересечение. Таким образом, Следствие 1.4.V следует из 1.3, 2.2.V и 3.1.

Утверждение 3.1. Препятствие $v(\varphi) = 0$, если и только если существует S -близкое к отображению $\varphi \bmod 2$ -вложение общего положения.

Доказательство Утверждения 3.1. Обратная импликация очевидна. Доказательство прямой импликации следует идеям статьи [4]. Мы собираемся использовать когомологическую формулировку препятствия Ван Кампена (детали можно найти в абзаце перед Утверждением 3.2 ниже). Пусть $f : K \rightarrow N$ — любая S -аппроксимация отображения φ общего положения. 'Движение Райдемайстера', показанное на иллюстрации 10.а, добавляет к коциклу v_f кограницу $\delta[x \times y]$ элементарной коцепи из группы $B^2(\tilde{K})$. Так как $v(\varphi) = 0$, то с помощью нескольких таких 'шагов' мы можем получить отображение $f : K \rightarrow N$, для которого $v_f = 0$. Тогда отображение f необходимо является $\bmod 2$ -вложением, потому что $v_f = 0$ означает, что $|fa \cap fb| = 0 \pmod{2}$ для любой пары непересекающихся ребер a, b графа K . \square

Теперь мы собираемся доказать, что условия 1.4.V и 1.4.D эквивалентны (Утверждение 3.2). Утверждение 3.2 означает только, что $1.4.D \implies 1.4.V$, но это достаточно для доказательства Следствия 1.4. Мы доказываем Утверждение 3.2 в более общей формулировке, поэтому нам потребуется еще несколько определений.

Пусть K — произвольный граф. Пусть $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ — симплициальное отображение. Обозначим через σ и τ любые ребра графа K . Взрезанным квадратом графа K мы называем множество $\tilde{K} = \bigcup \{ \sigma \times \tau : \sigma \cap \tau = \emptyset \}$. Пусть $K^* = \tilde{K} / \mathbb{Z}_2$ — фактор построенного полиэдра относительно антиподального \mathbb{Z}_2 -действия. Пусть $\tilde{K}^\varphi \subset \tilde{K}$ — подмножество, определяемое формулой $\tilde{K}^\varphi = \{ \sigma \times \tau : \varphi\sigma \cap \varphi\tau = \emptyset \}$. Пусть $K^{*\varphi} = \tilde{K}^\varphi / \mathbb{Z}_2$. Для отображения общего положения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$, близкого к отображению φ , определим коцепь $v_f \in C^1(K^*, K^{*\varphi}; \mathbb{Z}_2)$ формулой $v_f(\sigma \times \tau) = f\sigma \cap f\tau \pmod{2}$. Класс $v(\varphi) = [v_f] \in H^1(K^*, K^{*\varphi}; \mathbb{Z}_2)$ этой коцепи не зависит от отображения f и называется препятствием Ван Кампена к аппроксимируемости вложениями отображения φ . Мы говорим, что отображение $\varphi : K \rightarrow G \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет свойству взрезанного квадрата, если отображение $\tilde{\varphi} : \tilde{K}^\varphi \rightarrow S^1$, заданное формулой $\tilde{\varphi}(x, y) = \frac{\varphi x - \varphi y}{\|\varphi x - \varphi y\|}$, продолжается до эквивариантного отображения $\tilde{K} \rightarrow S^1$. Очевидно, данное определение свойства взрезанного квадрата эквивалентно 1.4.D в случае $K \cong I$.

Утверждение 3.2. Если кусочно линейное отображение $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}^2$ удовлетворяет свойству взрезанного квадрата, то препятствие Ван Кампена $v(\varphi) = 0$.

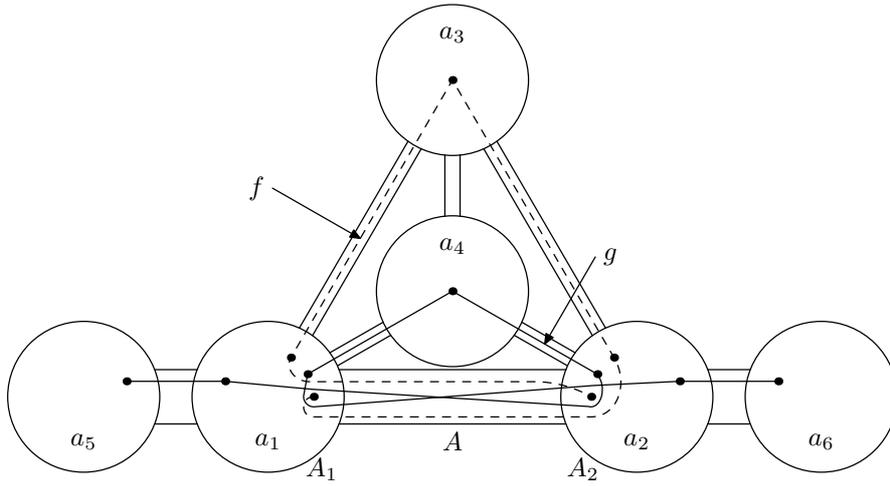


Рис. 11. Пара отображений, не аппроксимируемая сингулярными зацеплениями

Доказательство Утверждения 3.2. Возьмем отображение общего положения $f : K \rightarrow \mathbb{R}^2$, близкое к φ , и определим эквивариантное отображение $\tilde{f} : \tilde{K}^\varphi \cup \text{sk}^1 \tilde{K} \rightarrow S^1$ формулой $\tilde{f}(x, y) = \frac{f_x - f_y}{\|f_x - f_y\|}$. По общему положению получаем, что \tilde{f} определено корректно. Так как отображение f близко к отображению φ , то $\tilde{f}|_{\tilde{K}^\varphi}$ гомотопно $\tilde{\varphi}$. Очевидно, если $\tilde{\varphi}$ продолжается до эквивариантного отображения $\tilde{K} \rightarrow S^1$, то $\tilde{f}|_{\tilde{K}^\varphi}$ продолжается до эквивариантного отображения $\tilde{K} \rightarrow S^1$.

Рассмотрим клетку $\sigma \times \tau \subset \tilde{K} - \tilde{K}^\varphi$, где $\sigma, \tau \subset K$ являются 1-мерными клетками. Если отображение \tilde{f} продолжается на клетку $\sigma \times \tau$, то $\deg \tilde{f}|_{\partial(\sigma \times \tau)} = 0$. Можно показать, что

$$\deg \tilde{f}|_{\partial(\sigma \times \tau)} = f\sigma \cap f\tau = v_f(\sigma \times \tau) \pmod{2}.$$

Поэтому если отображение \tilde{f} продолжается до эквивариантного отображения $\tilde{K} \rightarrow S^1$, то $v_f = 0$.

Теперь пусть $g : \tilde{K}^\varphi \cup \text{sk}^1 \tilde{K} \rightarrow S^1$ — эквивариантное отображение, такое что $gx = \tilde{f}x$ для каждого $x \in \tilde{K}^\varphi \cup \text{sk}^0 \tilde{K}$. Определим коцепь $v_g \in C^2(K^*, K^{*\varphi}; \mathbb{Z}_2)$ формулой $v_g(\sigma) = \deg g|_{\partial\sigma}$ для каждой 2-мерной клетки σ . Пусть $\sigma \subset \tilde{K} - \tilde{K}^\varphi$ — клетка размерности 1. Возьмем несвязное объединение $\sigma \sqcup \sigma'$ двух копий σ и приклеим σ к σ' по границе $\partial\sigma = \partial\sigma'$. Пусть d_σ — отображение полученной 1-мерной сферы в S^1 , заданное формулой $d_\sigma x = fx$ для всех $x \in \sigma$ и $d_\sigma x = gx$ для всех $x \in \sigma'$. Определим коцепь $v_{fg} \in C^1(K^*, K^{*\varphi}; \mathbb{Z}_2)$ формулой $v_{fg}(\sigma) = \deg d_\sigma$. Тогда, очевидно, $v_g - v_f = \delta v_{fg}$.

Полученная формула означает, что когомологический класс $[v_g]$ не зависит от выбора эквивариантного отображения $g : \tilde{K}^\varphi \cup \text{sk}^1 \tilde{K} \rightarrow S^1$ и совпадает с препятствием Ван Кампена $v(\varphi)$. Это доказывает наше утверждение. \square

Пример 3.3. (сравни с [16, 1]) Существует пара кусочно линейных путей $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ (см. иллюстрацию 11, где изображена пара путей f, g , близких к данным), не аппроксимируемых сингулярными зацеплениями (то есть, отображениями с непересекающимися образами), удовлетворяющих следующим условиям:

V) Препятствие Ван Кампена $v(\varphi, \psi) = 0$.

D) Отображение $\Phi : \{(x, y) \in I \times I \mid \varphi x \neq \psi y\} \rightarrow S^1$, заданное формулой $\Phi(x, y) = \frac{\varphi x - \psi y}{\|\varphi x - \psi y\|}$, гомотопически продолжается до отображения $I \times I \rightarrow S^1$.

I) Пара φ', ψ' аппроксимируется сингулярными зацеплениями.

Доказательство Примера 3.3. Пусть $K, L \cong I$ — графы с вершинами k_1, \dots, k_5 и l_1, \dots, l_7 , и пусть G — граф с вершинами a_1, \dots, a_6 и ребрами $a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_1a_5, a_2a_3, a_2a_4$ и a_2a_6 . Требуемые симплициальные отображения φ, ψ задаются формулами $\varphi k_1 = a_1, \varphi k_2 = a_2, \varphi k_3 = a_3, \varphi k_4 = a_1, \varphi k_5 = a_2$ и $\psi l_1 = a_5, \psi l_2 = a_1, \psi l_3 = a_2, \psi l_4 = a_4, \psi l_5 = a_1, \psi l_6 = a_2, \psi l_7 = a_6$.

Рассмотрим пару S -аппроксимаций f и g отображений φ и ψ , соответствующую, показанную на иллюстрации 11. Легко видеть, что $|fi \cap gj| = 0 \pmod{2}$ для любой пары ребер $i \subset K, j \subset L$. Это влечет выполнение обоих свойств 3.3.V и 3.3.D (что доказывается аналогично доказательству следствия 1.4, см. также Утверждение 3.1). Доказательство свойства 3.3.I — прямое вычисление.

Докажем, что пара φ, ψ не аппроксимируется сингулярными зацеплениями. Предположим противоположное утверждение. Пусть $K_{13}, K_{35} \subset K$ и $L_{14}, L_{47} \subset L$ — дуги между точками k_1 и k_3, k_3 и k_5, l_1 и l_4, l_4 и l_7 , соответственно. Возьмем малую окрестность графа $\varphi K \cup \psi L$ на плоскости и выберем ее разложение ручки S . Обозначим через A_1, A_2 и A диски разложения на ручки S , соответствующие вершинам a_1, a_2 и ребру a_1a_2 ,

соответственно. По аналогу Предложения Минца (см. абзац после Определения S -аппроксимации в §2) найдутся S -аппроксимации f, g отображений φ и ψ , соответственно, с непересекающимися образами. Так как $fK_{13} \cap gL = \emptyset$, то пары точек $gL_{14} \cap \partial(A_1 \cup A)$ и $gL_{47} \cap \partial(A_1 \cup A)$ не зацеплены на окружности $\partial(A_1 \cup A)$. Аналогично, $gL_{14} \cap \partial A_2$ и $gL_{47} \cap \partial A_2$ не зацеплены на окружности ∂A_2 . Значит, $gL_{14} \cap \partial(A_1 \cup A_2 \cup A)$ и $gL_{47} \cap \partial(A_1 \cup A_2 \cup A)$ не зацеплены на окружности $\partial(A_1 \cup A_2 \cup A)$. Тогда g не может быть S -аппроксимацией отображения ψ . Полученное противоречие показывает, что φ и ψ не аппроксимируются сингулярными зацеплениями. \square

Благодарности. Автор благодарен А. Скопенкову за постоянное внимание к данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Akhmetiev, D. Repovš and A. Skopenkov, *Obstructions to approximating maps of n -surfaces to \mathbb{R}^{2n} by embeddings*, Topol. Appl. **123:1** (2002), p. 3–14.
- [2] A. Cavicchioli, D. Repovš and A. B. Skopenkov, *Open problems on graphs, arising from geometric topology*, Topol. Appl. **84** (1998), p. 207–226.
- [3] M. H. Freedman, V. S. Krushkal and P. Teichner, *Van Kampen's embedding obstruction is incomplete for 2-complexes in \mathbb{R}^4* , Math. Res. Letters **1** (1994), p. 167–176.
- [4] E. R. van Kampen, *Komplexe in Euklidische Räumen*, Abh. Math. Sem. Hamburg **9** (1932), p.72–78; berichtigung dazu, 152–153.
- [5] P. Minc, *On simplicial maps and chainable continua*, Topol. Appl. **57** (1994), p. 1–21.
- [6] P. Minc, *Embedding simplicial arcs into the plane*, Topol. Proc. **22** (1997), p. 305–340.
- [7] D. Repovš and A. B. Skopenkov, *Embeddability and isotopy of polyhedra in Euclidean spaces*, Proc. Steklov Math. Inst. **212** (1996), p. 163–178.
- [8] D. Repovš and A. B. Skopenkov, *A deleted product criterion for approximability of maps by embeddings*, Topol. Appl. **87** (1998), p. 1–19.
- [9] D. Repovš and A. B. Skopenkov, *The obstruction theory for beginners*, Mat. Prosv. **4** (2000), p. 154–180 (in Russian).
- [10] K. S. Sarkaria, *A one-dimensional Whitney trick and Kuratowski's graph planarity criterion*, Israel J. Math. **73** (1991), p. 79–89.
- [11] J. Segal and S. Spieš, *On transversely trivial maps*, Questions and Answers in General Topology **8** (1990), p. 91–100.
- [12] K. Sieklucki, *Realization of mappings*, Fund. Math. **65** (1969), p. 325–343.
- [13] A. Skopenkov, *A geometric proof of the Neuwirth theorem on thickenings of 2-polyhedra*, Mat. Zametki **56:2** (1994), p. 94–98 (in Russian). English transl.: Math. Notes **58:5** (1995), p. 1244–1247.
- [14] M. Skopenkov, *On approximability by embeddings of cycles in the plane*, Topology and Its Applications **134:1** (2003), p. 1–22.
- [15] E. V. Ščepin and M. A. Štanko, *A spectral criterion for embeddability of compacta in Euclidean space*, Proc. Leningrad Int. Topol. Conf., Nauka, Leningrad (1983), p. 135–142 (in Russian).
- [16] S. Spieš and H. Toruńczyk, *Moving compacta in \mathbb{R}^m apart*, Topol. Appl. **41** (1991), p. 193–204.

DEPARTMENT OF DIFFERENTIAL GEOMETRY, FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS, MOSCOW STATE UNIVERSITY, 119992, MOSCOW, RUSSIA, AND INDEPENDENT UNIVERSITY OF MOSCOW, B. VLASYEVSKY, 11, 119002, MOSCOW, RUSSIA.
E-mail address: skopenkov@rambler.ru

Удачная охота

или

Устойчивость пересечений
путей на плоскости

Lucky Hunting

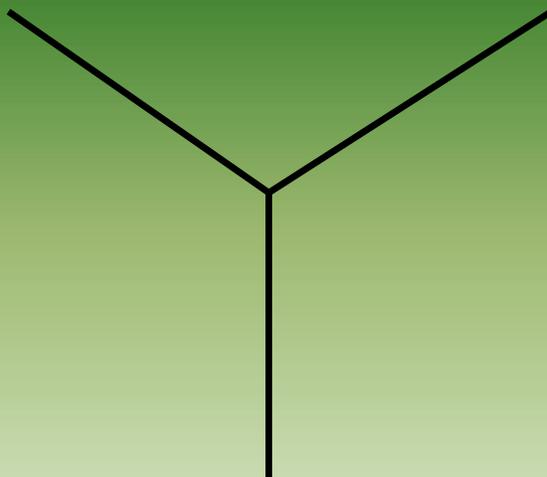
or

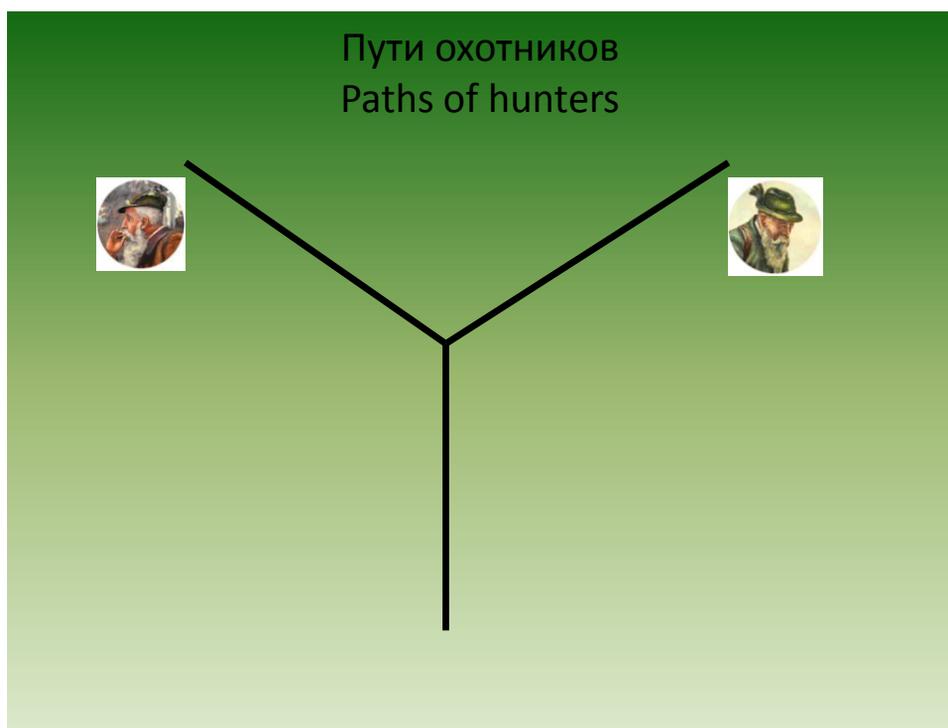
Stability of intersections
of paths in the plane

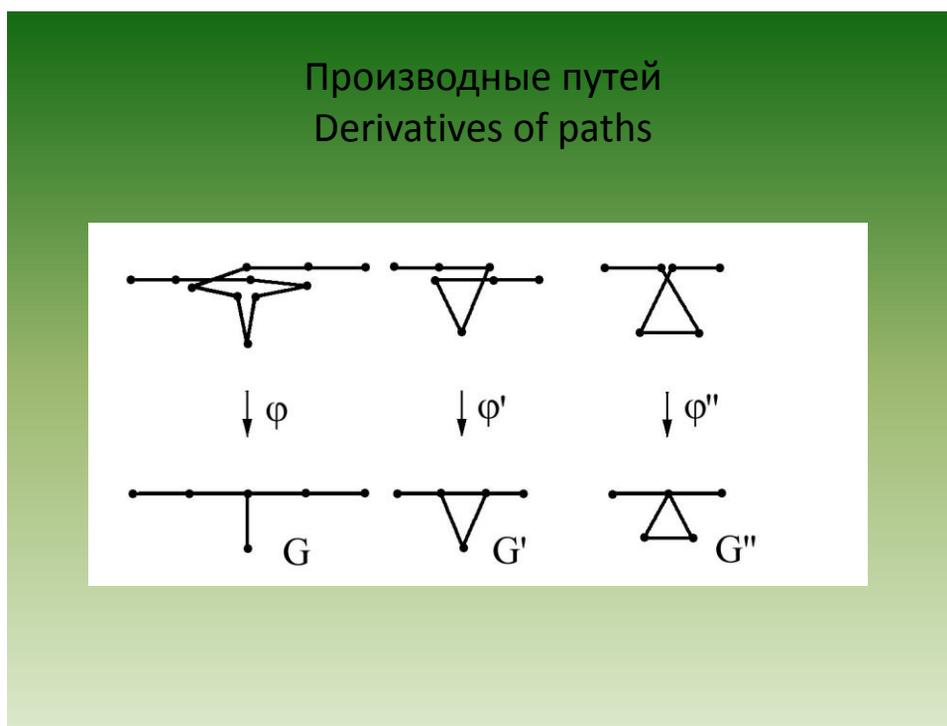
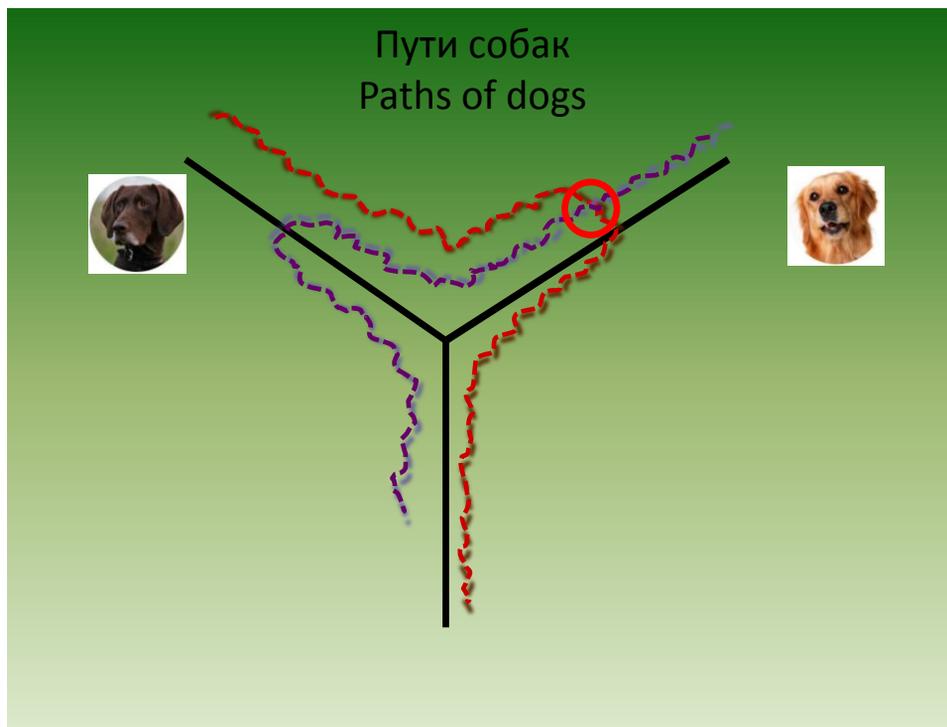
Два охотника...
Two hunters...



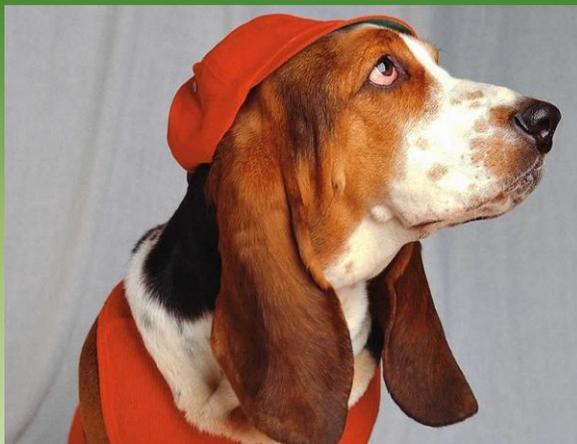
... отправились на охоту
... went for hunting







Спасибо за внимание!



CIS-ГРАФЫ

Напомним основные определения. Пусть дан граф G .

Подграфом графа G на вершинах v_1, v_2, \dots, v_n (где v_1, v_2, \dots, v_n – часть вершин графа G) называется граф, вершинами которого являются вершины v_1, v_2, \dots, v_n , и между ними проведены **все** рёбра, которые были проведены в графе G .

Дополнением графа G называется граф, вершинами которого являются вершины графа G , но две вершины соединяются ребром в том и только в том случае, если они не были соединены ребром в графе G .

Кликой в графе G называется любое множество попарно соединённых вершин. Соответственно *независимым множеством* называется любое множество попарно не соединённых вершин. Клика (независимое множество) называется *максимальной (максимальным)*, если она не содержится ни в какой большей клике (независимом множестве).

Главным определением этой серии задач является определение *CIS-графа*.

CIS-графом называется граф, в котором любая максимальная клика C пересекается с любым максимальным независимым множеством S . Например, цикл длины четыре является *CIS-графом*, а Π -граф, изображённый на рисунке 9, не является *CIS-графом*.



Рис. 1

А много ли *CIS-графов*? Задачи на определение.

1. Покажите, что несвязное объединение двух *CIS-графов* G_1 и G_2 является *CIS-графом*.

Примечание. Чтобы получить несвязное объединение графов G_1 и G_2 , нужно объединить их (считая все вершины различными!) и не проводить больше никаких ребер.

2. Найдите все *CIS-графы*, в которых нет трёх попарно соединённых вершин. Проверьте, что вершины каждого из них можно покрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние вершины были разных цветов.

3. Пусть из *CIS-графа* удалили вершину, из которой выходило одно ребро. Покажите, что получился снова *CIS-граф*.

4. а) Назовём вершину *хорошей*, если любые два её соседа соединены (то есть она вместе с соседями образует клику). Докажите, что если в графе любая максимальная клика содержит хорошую вершину, то это *CIS-граф*.

б) Покажите, что обратное неверно.

5. Рассмотрим граф, множество вершин которого является объединением пересекающихся клики и независимого множества. Покажите, что он является *CIS-графом*.

Подстановкой графа G_1 в граф G_2 будем называть следующую операцию: некоторая фиксированная вершина A графа G_2 заменяется на граф G_1 , между вершинами графа G_1 и графа G_2 проводятся в точности те же ребра, которые были между A и остальными вершинами G_2 .

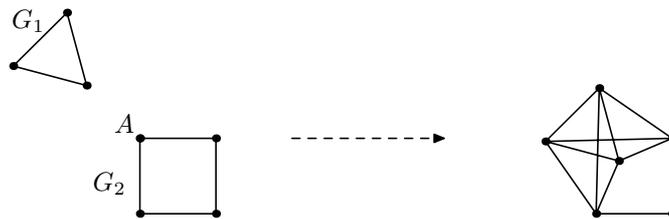


Рис. 2

6. Пусть в результате подстановки графа G_1 в граф G_2 получился *CIS-граф*. Покажите, что и G_1 , и G_2 были *CIS-графами*.

7. Докажите, что любой граф является подграфом некоторого *CIS-графа*.

8. Рассмотрим два множества графов G_1, G_2, G_3, \dots и H_1, H_2, H_3, \dots , причём графов в множествах поровну, но их число может быть как конечное, так и бесконечное. Теперь рассмотрим множество всех графов, для которых выполнено условие: если среди подграфов данного графа есть граф G_i , то этот G_i дополняется до подграфа H_i , то есть этот G_i содержится в некотором подграфе H_i данного графа.

а) Подберите графы G_i и H_i так, чтобы получилось множество всех *CIS-графов*.

б) Можно ли выбрать конечное число графов G_i и H_i так, чтобы получилось множество всех *CIS-графов*?

9*. Пусть в графе существует ровно одна пара из непересекающихся максимальной клики C и максимального независимого множества S .

а) Докажите, что в G , кроме вершин из $C \cup S$, не может быть ровно одной вершины.

б) То же для двух вершин.

с) Попробуйте доказать, что тогда множество вершин этого графа совпадает с $C \cup S$.

Расчёски и гребешки.

Класс графов называется замкнутым относительно подстановки, если из графов G_1 и G_2 этого класса с помощью подстановки получается снова граф этого класса. Класс графов называется точно замкнутым относительно подстановки, если дополнительно потребовать, чтобы графы этого класса могли получаться подстановкой только из графов этого класса.

Класс графов называется замкнутым относительно дополнения, если дополнение графа из этого класса также принадлежит этому классу.

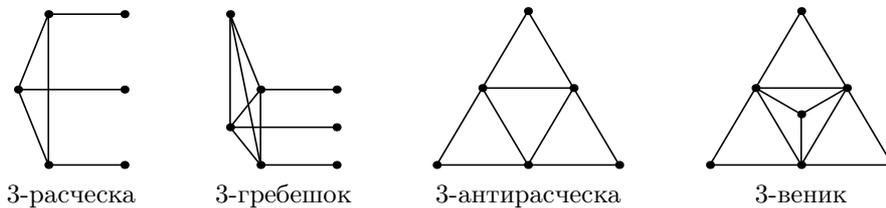
Класс графов называется наследственным, если из того, что некоторый граф принадлежит этому классу, следует, что и любой его подграф принадлежит этому классу.

Очевидно, что класс CIS-графов замкнут относительно дополнения. В задаче 6 мы также показали, что он замкнут относительно подстановки. Будем исследовать CIS-графы дальше.

10. а) Докажите, что если в графе существует пара непересекающихся максимальной клики и максимального независимого множества, то этот граф содержит в качестве подграфа П-граф.

б) Покажите, что обратное неверно.

Определение. k -расчёской ($k \geq 2$) называется граф на $2k$ вершинах, в котором первые k вершин попарно соединены, другие k вершин попарно не соединены, и ещё проведено k рёбер, соединяющие i -ю вершину первой группы из k вершин с i -ой вершиной второй группы для каждого $i = 1, 2, \dots, k$. Далее, k -гребешком называется граф, полученный прибавлением одной вершины к k -расчёске, причем новая вершина соединена только со всеми k вершинами из первой группы (с вершинами, образующими клику). Соответственно, k -антирасческой и k -веником называются дополнения к k -расчёске и k -гребешку.



11. а) В CIS-графе любой П-подграф содержится в А-подграфе (см. рисунок 3).

б) В CIS-графе для любой k -расчёски (являющейся подграфом) существует содержащий её k -гребешок (являющийся подграфом исходного графа).

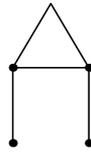


Рис. 3 . А-граф

12. Приведите пример графа, в котором любая k -расчёска содержится в k -гребешке, любая k -антирасчёска содержится в k -венике (для всех k), а также в этом графе есть пара непересекающихся максимальной клики и независимого множества.

Путеводная звезда. Попробуйте доказать следующую важную теорему.

Теорема. Пусть среди подграфов данного графа нет 3-расчёски и её дополнения, и все 2-расчёски дополнены до 2-гребешков. Тогда этот граф является CIS-графом.

Определение. d -графом называется полный граф, каждое ребро которого покрашено в один из d цветов. Обозначим за E_i рёбра i -го цвета. Граф на вершинах d -графа с рёбрами E_i будем называть *хроматической* (или цветной) *компонентой* i -го цвета.

Определение CIS- d -графа. Пусть для каждого цвета выбрано максимальное множество вершин, среди которых любые две соединены ребром не этого цвета (максимальное означает, что при добавлении любой другой вершины появляется ребро данного цвета). Пусть для любой такой выборки все эти независимые множества имеют общую вершину. Тогда этот d -граф называется CIS- d -графом.

Рассмотрим игру на d человек с полной информацией. Можно представлять ее себе как конечное дерево, вершинами которого являются позиции в игре. Есть корневая вершина (начало игры). Из неё выходят рёбра одного цвета (цвет игрока, который начинает игру). Тем самым игрок выбирает следующую позицию в игре. Из любой новой вершины выходят рёбра также одного цвета (но другого), причем для разных вершин этот цвет может быть разным. Тем самым первый игрок также выбирает, кто будет ходить следующим. Далее аналогично. Так как дерево конечное, то игра когда-нибудь закончится, то есть наступит один из исходов игры. Из вершины графа, соответствующей этой позиции, больше ребер не выходит. Можно построить d -граф на вершинах-исходах, покрасив ребро между двумя исходами в цвет исходящих ребер для вершины на пути, их соединяющем, ближайшей к корню. Оказывается, что получится CIS- d -граф (можете на досуге обдумать).

У CIS- d -графа любая цветная компонента является CIS-графом (задача), но истинность обратного утверждения неизвестна. Если дополнительно предположить, что в CIS- d -графе нет разноцветных треугольников,

то это обратное утверждение оказывается верным (задача). Описание таких *CIS-d*-графов сводится к описанию *CIS*-графов (приемлемого описания нет ни у тех, ни у других).

Пока неизвестно, существует ли *CIS-d*-граф, в котором есть разноцветный треугольник, но если вершин не больше 12, то нет разноцветного треугольника (проверено на компьютере).

Свойство графов Галлаи.

Назовём Δ -графом граф на трёх вершинах, в котором три ребра покрашены в разные цвета (разноцветный треугольник).

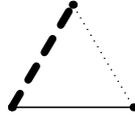


Рис. 4 . Δ -граф

Определение. *d*-граф, среди подграфов которого нет Δ -графа, называется *d*-графом Галлаи.

Переопределим Π -граф как *d*-граф на четырёх вершинах, в котором рёбра первого цвета образуют букву Π , то есть хроматическая компонента первого цвета является Π -графом; остальные рёбра покрашены во второй цвет, и рёбер остальных цветов нет. Будем его писать просто Π -граф.



Рис. 5 . Цветной Π -граф

Цель этой части — последняя задача, которая использует замечательное свойство *d*-графов Галлаи — декомпозицию Галлаи. Декомпозиция Галлаи описана в задаче 16.

13. Пусть дан *d*-граф G , обладающий следующим свойством: если в нём вычеркнуть рёбра любого выбранного цвета, то он останется связным. Пусть G — это не Π -граф и не Δ -граф. Докажите, что из него можно выбросить одну вершину так, что он сохранит это свойство.

14. Пусть в *d*-графе ($d \geq 3$) хроматическая компонента каждого цвета связна. Покажите, что Δ -граф является подграфом этого графа.

15. Проверьте, является ли класс *d*-графов Галлаи замкнутым относительно подстановки, точно замкнутым относительно подстановки и является ли он наследственным.

16. Докажите, что *d*-граф Галлаи является результатом подстановки n *d*-графов в некоторый 2-граф вместо n его вершин.

17. Пусть F — класс графов, точно замкнутый относительно подстановки и замкнутый относительно дополнения. Рассмотрим такой *d*-граф Галлаи, что все, кроме одной, его хроматические компоненты принадлежат классу F (пусть кроме компоненты цвета d). Предположим еще, что есть хотя бы одно ребро цвета d . Тогда последняя хроматическая компонента также принадлежит классу F .

После промежуточного финиша.

CIS-d-графы Галлаи.

18. Проверьте, является ли класс *CIS-d*-графов замкнутым относительно подстановки, точно замкнутым относительно подстановки и является ли он наследственным.

19. Если среди подграфов данного *d*-графа нет Δ -графов и Π -графов, то он является *CIS-d*-графом.

20. Покажите, что *d*-граф, сопоставленный игре с полной информацией (см. введение), не содержит Δ -графа и Π -графа, и что любой такой граф сопоставляется некоторой игре.

21. Приведите пример *d*-графа Галлаи, у которого есть рёбра хотя бы трёх цветов, но не являющегося *CIS-d*-графом.

22. Приведите пример *CIS-d*-графа, у которого есть рёбра хотя бы трёх цветов.

23. *d*-граф Галлаи является *CIS-d*-графом, если и только если все его хроматические компоненты являются *CIS*-графами.

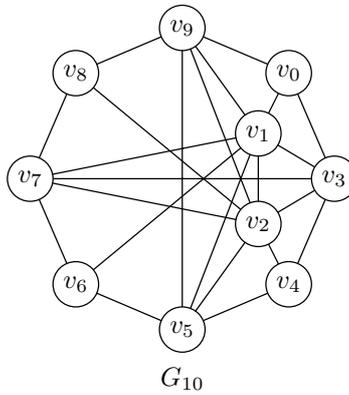
24. Если все, кроме (может быть) одной, хроматические компоненты *d*-графа Галлаи являются *CIS*-графами, то этот *d*-граф является *CIS-d*-графом.

25. Предположим, что все *CIS-3*-графы являются 3-графами Галлаи. Тогда все *CIS-d*-графы являются *d*-графами Галлаи.

26. Гипотеза. Любой *CIS-d*-граф является *d*-графом Галлаи.

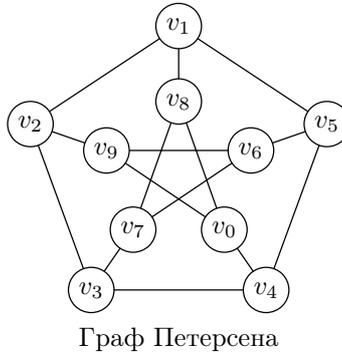
Доказательство путевой звезды.

Определение. Обозначим через G_{10} граф, изображенный на рисунке:



Обозначим через $2G_{10}$ граф на двадцати вершинах $v_0, v_1, \dots, v_9, v'_0, v'_1, \dots, v'_9$, составленный из двух копий G_{10} (первый граф G_{10} на вершинах v_0, v_1, \dots, v_9 , другой — на остальных), в котором для любых различных i и j вершины v_i и v'_j соединены, если и только если вершины v_i и v_j не соединены. Любое ребро между вершинами v_i и v'_i может быть как проведено, так и нет. Под $2G_{10}$ будем подразумевать любой из этих 1024-х графов.

Граф, изображённый на следующем рисунке, называется графом Петерсена. Обозначим его P . Возьмём две его копии с вершинами u_1, u_2, \dots, u_{10} и v_1, v_2, \dots, v_{10} соответственно. Соединим вершины u_i и v_j ребром, если вершины u_i и u_j не соединены ребром для $i \neq j$. При этом вершины u_i и v_i можем соединить ребром, а можем — нет. В результате получим $2^{10} = 1024$ графов. Запись “граф $2P$ ” подразумевает любой из них.



Граф Петерсена

Теорема. Пусть среди подграфов данного графа нет 3-расчёски и её дополнения, и все 2-расчёски дополнены до 2-гребешков. Тогда этот граф является CIS-графом.

В оставшихся задачах доказываем эту теорему.

27. В поисках G_{10} . Пусть в графе G есть хотя бы одна пара непересекающихся максимальной клики C и независимого множества S , среди подграфов данного графа нет 3-расчёски и её дополнения, и все 2-расчёски дополнены до 2-гребешков.

- Докажите, что есть вершины, не лежащие ни в C , ни в S .
- Покажите, что граф G содержит G_{10} .

28. Найди второй!

Пусть в графе G все 2-расчёски содержатся в 2-гребешках, он содержит G_{10} на вершинах v_0, v_2, \dots, v_9 и не содержит 3-расчёску и её дополнение.

- Найдите в графе G десять вершин v'_0, v'_1, \dots, v'_9 такие, что для любых различных i и j вершины v_i и v'_j соединены ребром, если и только если вершины v_i и v_j не соединены.
- Найдите в графе G подграф $2G_{10}$.

А где расчёски? Заметим, что в любом графе $2G_{10}$ нет 3-расчёски и её дополнения, но зато есть 2-расчёски, не вложенные в 2-гребешки, если предположить, что, например, вершины v_2 и v'_2 соединены.

Далее предполагаем, что в графе G все 2-расчёски содержатся в 2-гребешках, он содержит $2G_{10}$ и не содержит 3-расчёску и её дополнение.

29. а) Покажите, что вершины подграфа $2G_{10}$ v_2 и v'_2 не соединены.

- Покажите, что вершины $2G_{10}$ можно перенумеровать так, что получится $2P$.
- Докажите теорему.

РЕШЕНИЯ

Для краткости будем иногда называть независимое множество антикликой, множество вершин графа X будем обозначать через $V(X)$.

Решение задачи 1. Возьмем в несвязном объединении графов G_1 и G_2 максимальное независимое множество S и максимальную клику C . Очевидно, что S пересекается с каждым из графов G_1 и G_2 , а C содержится в одном из них, скажем, в G_1 . Тогда $S \cap G_1$ и $C \cap G_1$ пересекаются как максимальное независимое множество и максимальная клика в G_1 , а значит, пересекаются S и C .

Решение задачи 2. Если в CIS -графе нет треугольников, то в нем нет Π -подграфов: иначе две средние вершины этого подграфа образуют максимальную клику (обозначим ее C), а две крайние вершины образуют независимое множество, которое не пересекается с C и содержится в каком-то максимальном независимом множестве, также не пересекающемся с C .

Рассмотрим любую компоненту связности нашего графа. Если в ней есть две вершины на расстоянии не меньше 3, то есть и две вершины на расстоянии ровно 3. Кратчайший путь, их соединяющий, состоит из четырех вершин, и подграф на этих вершинах является Π -графом, что невозможно. Значит в каждой компоненте связности любые две вершины соединены путем, в котором не более двух ребер.

Предположим, что в графе есть цикл нечетной длины, возьмем тогда наименьший из них. В нем будет хотя бы 5 вершин, и пары его несоседних вершин не будут соединены ребрами (иначе цикл делится на два меньших, один из которых нечетный). Но тогда любые четыре подряд идущие вершины цикла образуют Π -граф, что невозможно. Значит, нечетных циклов нет. Несложно доказать, что такой граф является двудольным: его вершины можно разделить на две части так, что у любого ребра концы будут лежать в разных частях.

Итак, каждая компонента связности является двудольным графом. Он должен быть полным (любые две вершины из разных долей соединены): ведь длина кратчайшего пути между двумя несоединенными вершинами из разных долей не меньше 3. Таким образом, наш изначальный граф был несвязным объединением нескольких полных двудольных графов. Покрасить вершины такого графа в два цвета требуемым образом очень легко: в каждой компоненте связности красим одну долю в первый цвет, а другую — во второй.

Для завершения решения осталось проверить, что любой такой граф удовлетворяет условию задачи. Заметим, что раз полный граф является CIS -графом, то и полный двудольный граф (как дополнение к несвязному объединению двух полных графов) тоже. Но тогда и любое несвязное объединение полных двудольных графов является CIS -графом.

В этом месте уместно сделать следующее очевидное замечание: граф является CIS -графом тогда и только тогда, когда любые клику и антиклику в нем можно дополнить до пересекающихся клики и антиклики.

Решение задачи 3. Граф, получающийся из графа G удалением вершины v (и выходящих из нее ребер), обозначим через $G - v$. Пусть G был CIS -графом, а $G - v$ нет, причем вершина v была соединена в графе G с единственной вершиной u . Тогда в $G - v$ есть непересекающиеся максимальные клика C и антиклика S . Дополним их соответственно до максимальной клики C' и максимальной антиклики S' в графе G . Ясно, что C' и S' будут пересекаться только по вершине v . Но тогда в C не может быть никаких вершин кроме u (так как из v выходит ребро лишь в вершину u). С другой стороны, если максимальная клика состоит из одной вершины, то эта вершина изолирована (то есть не соединена с другими вершинами) и значит содержится в любой максимальной антиклике. Поэтому C и S пересекаются по вершине u . Противоречие.

Решение задачи 4. а) Предположим противное, тогда в графе G есть непересекающиеся максимальные клика C и независимое множество S , а в C есть хорошая вершина v . Если существует вершина $u \in V(S)$, соединенная с v , то все вершины C смежны с u (т.к. v хорошая), что противоречит максимальнойности C . Значит v не соединена ни с одной вершиной S , но это противоречит максимальнойности S .

б) Примером служит цикл длины 4.

Решение задачи 5. Пусть граф является объединением пересекающихся клики C и независимого множества S . Ясно, что C и S пересекаются ровно по одной вершине (назовем ее u). Рассмотрим любую максимальную клику C' . Если она содержит вершину из S , то ровно одну, и эта вершина является хорошей (поскольку все ее соседи лежат в клике C). Если же все вершины C' лежат в C , но не в S , то в силу максимальнойности C' получаем $C' = C$, и значит в C' все-таки есть вершина из S , а именно u — противоречие. Итак, в любой клике нашего графа есть хорошая вершина — значит он является CIS -графом по задаче 4.

Решение задачи 6. Пусть G — граф, полученный подстановкой G_1 в G_2 . Разберем два случая.

Пусть G_1 не был CIS -графом, тогда в нем найдутся непересекающиеся максимальные клика C и антиклика S . Рассмотрим в G любую максимальную клику, содержащую C , и любую максимальную антиклику, содержащую S . Они пересекаются (так как G является CIS -графом), но их общая вершина должна быть соединена с вершинами из C и не соединена с вершинами из S , что противоречит определению подстановки.

Пусть G_2 не был CIS -графом, тогда в нем найдутся непересекающиеся максимальная клика C и независимое множество S . Заметим, что вершина, которую мы заменяем на граф G_1 , не может лежать сразу и в C , и в S . Поэтому после подстановки один из графов C и S (например C), не изменится (и останется максимальной кликой), а другой (S) либо тоже не изменится (и останется максимальной антикликой), либо в нем одна вершина заменится на G_1 (тогда остальные вершины S вместе с любой максимальной антикликой G_1 дадут максимальную антиклику S'). В любом случае находим непересекающиеся клику и антиклику в G — противоречие.

Значит и G_1 , и G_2 были CIS -графами, что и требовалось доказать.

Решение задачи 7. Рассмотрим произвольный граф G и для каждой его максимальной клики дорисуем к графу вершину и соединим её со всеми вершинами этой клики и только с ними (процедуру следует проделать один раз). В полученном графе (по построению) каждая максимальная клика содержит ровно одну добавленную вершину, которая, очевидно, хорошая. Таким образом (по задаче 4) полученный граф является CIS -графом, а исходный является его подграфом

Решение задачи 8.

а) Рассмотрим все возможные графы, являющиеся объединением непересекающихся максимальных клики и независимого множества. Все такие графы получаются следующим способом: рисуем клику C , рисуем независимое множество S , после чего каждую вершину C соединяем хотя бы с одной вершиной S (но не со всеми сразу). Занумеруем эти графы натуральными числами (например, так: сначала нумеруем (в произвольном порядке)

такие графы из трех вершин, потом — из четырех, и так далее; на каждом шаге число нумеруемых графов будет конечным). Граф с номером i обозначим через G_i . Тогда H_i строим так: добавляем к G_i одну вершину и соединяем ее со всеми вершинами максимальной клики G_i (и только с ними). При этом никакой C_i не будет CIS-графом, зато каждый H_i будет CIS-графом.

Ясно, что любой CIS-граф G , содержащий G_i , содержит и H_i — достаточно дополнить клику и антиклику в G_i до максимальных в G , и мы получим вершину, соединенную с кликой из G_i и не соединенную с антикликой из G_i (то есть получим H_i).

И наоборот, если есть граф G , не являющийся CIS-графом, то в нем есть максимальные клика и антиклика, которые не пересекаются. Подграф на их вершинах будет одним из G_i и очевидно не будет дополняться до H_i .

б) Предположим, что существует такой конечный набор, будем считать, что максимальное количество вершин в графах G_i, H_i равно n . Рассмотрим тогда n -расческу и n -гребешок. Несложно проверить, что если в гребешке любой G_i дополняется до H_i , то и в расческе тоже. Однако гребешок является CIS-графом, а расческа — нет. Противоречие.

Решение задачи 9. а) Пусть клика C и независимое множество S в объединении дают весь граф G , кроме вершины v . Пусть C' — это множество смежных с v вершин S , а S' — это множество несмежных с v вершин S . Тогда клика $C' \cup v$ должна дополняться до максимальной клики, пересекающейся с S , следовательно, существует вершина $s \in S'$, смежная со всеми вершинами C' и с вершиной v . Аналогично, существует вершина $c \in C'$, не смежная со всеми вершинами S' и не смежная с вершиной v . Не умаляя общности, ребро (s, c) проведено, тогда найдем в C вершину c' , не смежную с s (она по построению не будет соединена с v). Теперь осталось посмотреть на максимальную клику, состоящую из всех смежных с s вершинами и на любое максимальное независимое множество, содержащее c' и v , убедиться в том, что они не могут пересекаться ни по вершине v (потому, что она не соединена с лежащей в клике c'), ни внутри C (потому, что c' не смежна с s), ни внутри S (потому, что s смежна с v).

б),с) См. статью cis1.pdf.

Решение задачи 10. а) (Решение предложено командой Василия Мокина, Виктора Омеляненко и Виктора Садкова.) Назовем эту пару множеств C и S и рассмотрим полный ориентированный двудольный граф с множеством вершин $V(C) \cup V(S)$ и ребрами, проведенными по правилу: если в исходном графе вершины $c \in C$ и $s \in S$ были смежны, то в новом графе ребро будет идти от c к s , в противном случае от s к c . Так, как S была максимальной антикликой, любая вершина остального графа была смежна хотя бы с одной вершиной S , в частности это означает, что в новом графе из любой вершины C выходит (в ориентированном смысле!) хотя бы одно ребро. Аналогично, из любой вершины S так же выходит хотя бы одно ребро.

Таким образом, в нашем ориентированном графе исходящая степень каждой вершины не меньше 1, следовательно, в нем есть цикл (под циклом в ориентированном графе понимаем ориентированный цикл). Тогда рассмотрим цикл наименьшей длины $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ (длина четная так, как граф был двудольный), если $2n > 4$, то в зависимости от ориентации ребра $A_1 A_4$ в графе можно найти либо цикл $A_1 A_2 A_3 A_4$, либо $A_1 A_4 A_5 \dots A_{2n}$, меньший минимального. Значит, $2n = 4$. Тогда несложно проверить, что в исходном графе на вершины A_1, A_2, A_3, A_4 индуцировался П-граф.

б) Например, А-граф, он же 2-гребешок.

Решение задачи 11. а) Является частным случаем нижеследующего пункта

б) рассмотрим любую максимальную клику, содержащую первую группу вершин расчески (они образуют клику) и любую максимальную антиклику, содержащую вторую группу вершин расчески (они образуют антиклику). В их пересечении будет хотя бы одна вершина, которая при добавлении к расческе даст веник.

Решение задачи 12.

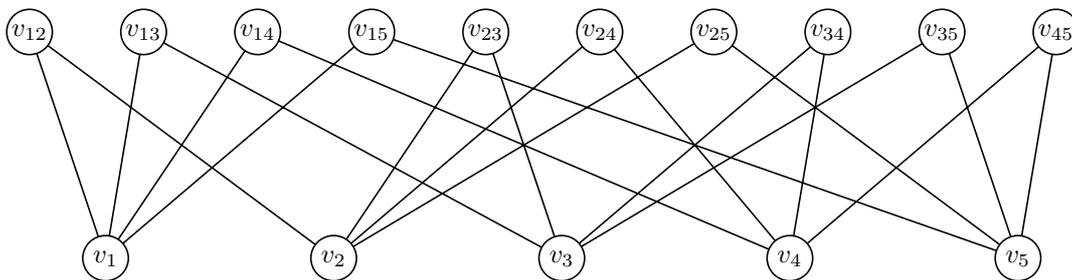


Рис. 6

Основное свойство графов Галлаи.

Решение задачи 13. Пусть в условии дан d -граф G , а v — некоторая его вершина. Заметим, что найдётся не более одного цвета такого, что удаление из G вершины v влечёт несвязность на рёбрах не этого цвета: если при удалении первого цвета G станет несвязным, то все ребра между компонентами связности должны быть обязательно первого цвета, а полный двудольный граф связан, и тогда при удалении любого другого цвета оставшийся граф будет связным. Предположим, что для любой вершины найдётся цвет такой, что граф без этой вершины на рёбрах не этого цвета несвязен. Таких цветов не может быть больше одного, поэтому покрасим вершину в этот цвет.

Заметим, что в любом связном графе есть хотя бы две вершины, удаление которых не изменяет связности. Для этого рассмотрим остов графа (остовное дерево), а в нём можно удалить висячие вершины. В нашем случае исходный граф без ребер какого-то фиксированного цвета связан, поэтому для этого цвета обязательно найдутся хотя бы две вершины, удаление которых не нарушает связности графа, то есть покрашенные не в этот цвет.

Пусть есть вершина u первого цвета. Пусть v_1, v_2, \dots, v_n и w_1, w_2, \dots, w_m — какое-то разбиение остальных вершин графа на два множества, между которыми потеряется связь при выкидывании первого цвета (если вершину u уже выкинули). Все рёбра между этими двумя группами первого цвета. Эти два множества будем называть кусками; кусок, в котором хотя бы две вершины, будем называть большим. Если оба куска маленькие, то либо данный d -граф — это разноцветный треугольник, либо он не удовлетворяет свойству в условии. Пусть есть хотя бы один большой кусок. Вершин не первого цвета как минимум две, а маленький кусок может содержать максимум одну вершину не первого цвета, поэтому хотя бы один большой кусок содержит вершину не первого цвета. Не умаляя общности, предположим, что это второй кусок, то есть $m \geq 2$ и вершина w_1 второго цвета. Теперь сделаем ту же процедуру для второго цвета. Вершины графа разбиваются на два куска, между которыми все рёбра второго цвета. Так как рёбра $(w_2, v_1), (w_2, v_2), \dots, (w_2, v_n), (v_1, w_3), (v_1, w_4), \dots, (v_1, w_m)$ первого цвета, то вершины $w_2, v_1, v_2, \dots, v_n, w_3, \dots, w_m$ в одном куске относительно w_1 . Значит, вершина u в другом куске, и из вершины u во все вершины, кроме w_1 , выходят рёбра второго цвета.

Рассмотрим вторую вершину w'_1 цвета $k \neq 1$. Сделаем для нее то же самое, что и для w_1 , то есть разобьем остальные вершины на два куска. Посмотрим еще, в какой кусок относительно u она попала. Если в большой, то аналогично вершина u соединена со всеми вершинами, кроме w'_1 , рёбрами цвета k , но в графе есть еще вершины, кроме u, w_1, w'_1 (т.к. в графе хотя бы 4 вершины). Так как в них из u ведут рёбра одновременно цвета 2 и k , то $k = 2$. Получается, что из вершины u выходят рёбра только второго цвета. Значит, данный d -граф несвязен на рёбрах не второго цвета. Получаем, что $w'_1 = v_1, n = 1$ и вершины w_2, w_3, \dots, w_m первого цвета.

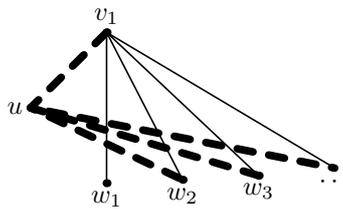


Рис. 7

Удалим w_2 . Вершины графа разбились на две группы вершин, между которыми рёбра первого цвета. Так как рёбра $(u, v_1), (u, w_2), (u, w_3), \dots, (u, w_m)$ второго цвета, то вершины u, v_1, w_3, \dots, w_m в одной группе. Значит, w_1 в другой. Получаем, что вершина w_1 соединена с вершинами $u, v_1, w_3, w_4, \dots, w_m$ рёбрами первого цвета. Если $m > 2$, то аналогично получаем, что ребро (w_1, w_2) первого цвета, то есть из вершины w_1 выходят рёбра только первого цвета — противоречие. Тогда $m = 2$. Если ребро (w_1, w_2) второго цвета, то данный d -граф является Π -графом. Если ребро (w_1, w_2) первого цвета, то данный d -граф на рёбрах не первого цвета несвязен — противоречие.

Решение задачи 14. Индукция по количеству вершин. База, скажем, для $n = 3$: очевидно, один из цветов несвязен. Переход. Пусть $n > 3$ и все цвета связны. Выбросим одну из вершин (назовем ее a); если связность не нарушилась, то по предположению индукции треугольник нашелся. Значит, какой-то (скажем, 1) цвет потерял связность. Пусть C_1, \dots, C_k — компоненты связности первого цвета в полученном графе; заметим, что a была соединена с любой из них ребром первого цвета.

Рассмотрим C_i и C_j и ребро, соединяющее две их вершины c_i и c_j ; оно, б.о.о., имеет цвет 2. Тогда, если вершина c'_i (из C_i) связана с c_j ребром 3 цвета, то образовался разноцветный треугольник; значит, ребро $c'_i - c_j$ также второго цвета. Продолжая так далее, получаем, что для любых двух компонент C_i и C_j все рёбра между ними одноцветны.

Вернемся к исходному графу. Из связности следует, что a соединена ребрами цветов 2 хоть с кем-то. Пусть она соединена ребром 2 с вершиной $c_r \in C_r$. Если из C_r хоть в какую-то C_s ведут рёбра 3 цвета, то найдем вершину $c_s \in C_s$ такую, что $a - c_s$ цвета 1 (такая, напомним, найдется из связности); тогда a, c_r, c_s образуют искомый треугольник.

Итак, из C_r во все другие компоненты ведут рёбра только 2 цвета. Аналогично, рассмотрев компоненту C_t , в которую из a ведет ребро 3 цвета, мы получим, что из C_t в другие компоненты ведут только рёбра 3 цвета. Это невозможно ни в случае $r = t$ (так как есть еще какие-то компоненты, и непонятно, рёбра какого цвета туда идут из C_r), ни в случае $r \neq t$ (тогда непонятно, какого цвета рёбра между C_r и C_t).

Решение задачи 15. Аналогично решению задачи 6 получаем, что данный класс замкнут относительно подстановки. Заметим, что для любой вершины d -графа можно рассмотреть набор из d максимальных множеств, каждое из которых свободно от ребер какого-то своего цвета. Из этого выводится, что данный класс точно замкнут. При $d = 2$, очевидно, этот класс не наследственный.

Решение задачи 16. Утверждение. Пусть в d -графе Галлаи есть хотя бы одно ребро d -го цвета и хроматическая компонента d -го цвета несвязна. Тогда все рёбра между двумя любыми фиксированными компонентами связности этой хроматической компоненты покрашены в один и тот же цвет.

См. решение задачи 14.

Решение задачи. Будем доказывать спуском по k ($k < d$) следующее утверждение. Пусть дан d -граф Галлаи. Тогда он является результатом подстановки d -графов G_1, G_2, \dots, G_n вместо n вершин k -графа G , причем у G как минимум две вершины.

Очевидно, для $k = d$ утверждение верно. Пусть для какого-то k утверждение верно, докажем его для $k - 1$. Возьмем d -граф Галлаи и построим для него по предположению спуска разложение для k . По прошлой задаче, этот k -граф и все графы G_1, G_2, \dots, G_n являются d -графами Галлаи. По задаче 2 хроматическая компонента

некоторого цвета k -графа G несвязна. Пусть это k -ый цвет и C_1, C_2, \dots, C_m — компоненты связности этой хроматической компоненты. Обозначим F_i подграф графа G на вершинах C_i . Тогда по лемме граф G является результатом подстановки графов F_1, F_2, \dots, F_m вместо m вершин некоторого $(k-1)$ -графа H . Осталось подставить графы G_1, G_2, \dots, G_n вместо вершин графов F_1, F_2, \dots, F_m (если C_i состоит из i_1 -ой, i_2 -ой, \dots , i_p -ой вершин, то в F_i нужно подставлять графы $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_p}$ согласно номерам вершин). Пусть мы получили графы H_1, H_2, \dots, H_m . Тогда исходный d -граф Галлаи является результатом подстановки d -графов H_1, H_2, \dots, H_m вместо вершин $(k-1)$ -графа H . При $k=2$ получаем требуемое утверждение.

Решение задачи 17.

Лемма. *Предположим, что у данного в условии графа Галлаи есть рёбра цвета d и $d \geq 3$. Тогда граф на n вершинах без рёбер принадлежит классу F .*

Доказательство. Если в классе F есть хотя бы один несвязный граф, то граф из двух вершин без ребра также принадлежит классу F , потому что такой граф является результатом подстановки двух графов в граф из двух вершин без ребра, среди которых первый граф — это первая компонента связности, а второй — всё остальное. После этого граф из двух вершин без ребра можно подставить в себя несколько раз и получить искомый.

Докажем индукцией по числу вершин данного в условии d -графа Галлаи G , что классу F принадлежит некоторый несвязный граф. По прошлой задаче G можно получить, подставив некоторые d -графы G_1, G_2, \dots, G_n вместо n вершин некоторого 2-графа H с ≥ 2 вершинами. Это индуцирует подстановки на всех хроматических компонентах исходного графа. Либо в одном из G_i , либо в H есть рёбра цвета d . Класс F точно замкнут, поэтому условия утверждения верны для найденного G_i (либо для H). Применим к нему предположение индукции, получим требуемое. Осталось проверить базу. Возьмём граф на n вершинах с ребром цвета d . Компонента первого цвета несвязна. \square

Будем решать исходную задачу индукцией по числу вершин.

База: граф с одной вершиной всегда принадлежит классу графов, точно замкнутому относительно подстановки.

Шаг. Пусть встречаются рёбра не более двух цветов. По условию все цветные компоненты, кроме d -й, принадлежат классу F . Мы знаем, что в G есть хотя бы одно ребро цвета d . В силу того, что класс графов F замкнут относительно дополнения, последняя (=вторая нетривиальная) цветная компонента также принадлежит классу F . Пусть встречаются рёбра как минимум трёх цветов. Тогда по прошлой задаче данный d -граф Галлаи G можно получить, подставив некоторые d -графы G_1, G_2, \dots, G_n вместо n вершин некоторого 2-графа H с ≥ 2 вершинами. Хроматическая компонента i -го цвета графа G — это результат подстановки хроматических компонент i -го цвета d -графов G_1, \dots, G_n вместо вершин i -ой хроматической компоненты d -графа H (2-граф можно рассматривать как d -граф, у которого есть рёбра только двух цветов). По условию все, кроме одной, хроматические компоненты d -графа G принадлежат классу F . Так как класс F точно замкнут относительно подстановки, все хроматические компоненты, кроме компоненты цвета d , d -графов H, G_1, G_2, \dots, G_n принадлежат классу F . У каждого из этих графов меньше вершин. Поэтому по предположению индукции и по лемме 17 хроматическая компонента цвета d каждого из этих графов также принадлежит классу F . Так как класс F замкнут относительно подстановки, то d -я цветная компонента d -графа G также принадлежит классу F .

CIS- d -графы Галлаи.

Решение задачи 18. Аналогично решению задачи 6.

Решение задачи 19. Следует из задач 10 и 23.

Решение задачи 20. Если x, y — висячие вершины, будем обозначать $P(x, y)$ ближайшую к корню вершину на соединяющем их пути (она еще называется их наименьшим общим предком). Несложно проверить, что для любых исходов (то есть висячих вершин) x, y, z среди вершин $P(x, y), P(y, z), P(z, x)$ хотя бы две совпадают. Таким образом, хотя бы два из ребер $(x, y), (y, z), (z, x)$ имеют один цвет. Аналогично (проверяется небольшим перебором) можно проверить, что нельзя выделить в дереве четыре вершины и покрасить их наименьших общих предков так, чтобы на выделенных четырех вершинах образовался Π -граф. **В обратную сторону** доказательство индукцией по количеству вершин. База очевидна. Переход: как мы знаем из задачи 13, существует цвет (пусть первый), при удалении ребер которого граф перестает быть связным (но все компоненты, разумеется, остаются свободными от Δ, Π). Тогда для каждой компоненты связности можно построить по дереву (по предположению индукции), несвязно их объединить и добавить вершину, соединенную со всеми корнями этих деревьев исходящими ребрами первого цвета. Несложно заметить, что получится именно то, что нужно.

Решение задачи 21.

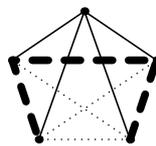


Рис. 8

Решение задачи 22.

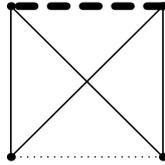


Рис. 9

Решение задачи 23. Доказательство повторяет доказательство задачи 17 прошлой части. Приведём набросок. Для 2-графов утверждение очевидно. А если есть рёбра ≥ 3 -ёх цветов, то наш d -граф можно получить подстановкой d -графов в некоторый 2-граф, у которых меньше вершин. Для них утверждение выполнено по предположению индукции. А для исходного тогда выполнено в силу того, что класс CIS-графов очевидно замкнут относительно дополнения и точно замкнут относительно подстановки, а класс CIS- d -графов точно замкнут относительно подстановки.

Решение задачи 24. Это следствие задач 23, 17, 6.

Решение задачи 25.

Лемма. Если в CIS- d -графе объединить два цвета, то он останется CIS- d -графом.

Доказательство. Рассмотрим максимальное множество A вершин данного d -графа без рёбер первого и второго цвета. Пусть B и C — максимальные множества вершин соответственно без рёбер первого цвета и без второго цвета, содержащие множество вершин A . Заметим, что пересечение множеств B и C — это множество A , иначе множество A можно было бы расширить. Пусть A_3, A_4, \dots, A_d — максимальные множества вершин соответственно без рёбер 3-го, 4-го, ..., d -го цветов. Так как данный граф является CIS- d -графом, то множества $B, C, A_3, A_4, \dots, A_d$ пересекаются по одной вершине, а, значит, и множества A, A_3, A_4, \dots, A_d пересекаются по одной вершине. Поэтому при склейке первого и второго цветов граф остаётся CIS- d -графом. \square

Докажем, что в нашем CIS- d -графе нет разноцветных треугольников со сторонами первого, второго и третьего цвета. Все рёбра 4-го, 5-го, ..., d -го цветов перекрасим в третий цвет. По лемме получим CIS-3-граф. По условию в полученном CIS-3-графе нет разноцветных треугольников. Поэтому и в первоначальном не было со сторонами первого, второго и третьего цветов.

Решение задачи 27. а) Рассмотрим произвольную пару непересекающихся максимальной клики C и независимого множества S . Для произвольной вершины v обозначим за $N(v)$ множество соседей вершины v в S . Рассмотрим три вершины клики u, v, w . Среди множеств $N(u) \cap N(v)$, $N(v) \cap N(w)$ и $N(w) \cap N(u)$ одно содержится в объединении двух других, иначе, выбрав в каждом по вершине, не принадлежащую остальным двум множествам вершин, получаем дополнение к 3-расчёске на выбранных трёх вершинах и вершинах u, v и w . Если, например, $N(u) \cap N(v)$ содержится в объединении двух других, то $N(u) \cap N(v) = N(u) \cap N(v) \cap N(w)$.

Теперь выберем такие u и v в клике, что $N(u) \cap N(v)$ минимально, то есть не может строго содержать пересечение каких-либо двух других множеств соседей в S вершин клики. Докажем, что $N(u)$ и $N(v)$ не пересекаются. Действительно, для любой другой вершины w из сказанного выше по определению u и v следует, что пересечение множеств $N(u)$ и $N(v)$ совпадает с пересечением множеств $N(u), N(v)$ и $N(w)$, то есть все вершины клики соединены с вершинами из пересечения $N(u)$ и $N(v)$. В силу максимальной клики получаем, что $N(u)$ и $N(v)$ не пересекаются.

Зафиксируем S . В графе G выберем такие соединённые вершины u и v , что они не имеют общих соседей в S , и объединение множеств $N(u)$ и $N(v)$ минимально, то есть не содержится в любом другом объединении непересекающихся $N(u')$ и $N(v')$, где вершины u' и v' соединены.

Лемма. Для любых вершин x и y из S , таких что x — сосед u , y — сосед v , и для любой вершины a такой, что вершины x, u, v, y, a образуют A -граф, вершины a и u имеют общего соседа в S и вершины a и v имеют общего соседа в S .

Доказательство. Обозначим за C любую максимальную клику, которая содержит вершины u и v . Она не пересекает S , потому что u и v не имеют общих соседей в S . Пусть вершина x из $N(u)$, вершина y из $N(v)$, и x, u, v, y, a — A -граф. Множество вершин $N(a)$ содержится в объединении $N(u)$ и $N(v)$, потому что иначе u, v, a, x, y, b — 3-расчёска, где вершина b из $N(a)$, но не из $N(u)$ и не из $N(v)$. Другими словами, множество вершин $N(a)$ содержится в объединении множеств $N(u)$ и $N(v)$.

Пусть a не имеет общих соседей с v . Тогда объединение множеств $N(a)$ и $N(v)$ строго содержится в объединении множеств $N(u)$ и $N(v)$, так как вершина x не из $N(a)$. Противоречие с минимальностью объединения $N(u)$ и $N(v)$. Значит, вершина a имеет общих соседей и с вершиной u , и с вершиной v . \square

Далее будем писать $U(a)$ и $V(a)$ — множество общих соседей вершины a с найденными вершинами u и v соответственно. Множества C и S также предполагаются фиксированными.

Назовём вершину a минимальной, если

- 1) вершина a соединена с вершинами u и v
- 2) для любой другой вершины b , соединённой с вершинами u и v , $N(a)$ не может строго содержать $N(b)$
- 3) $N(a)$ не содержит ни $N(u)$, ни $N(v)$.

Замечание. Для минимальной вершины объединение множеств $U(a)$ и $V(a)$ равно $N(a)$ (для этого не нужно второе условие).

Лемма 2. Существуют две такие минимальные вершины a и a' , что вершины x, u, v, y, a и x', u, v, y', a' образуют A -графы и в S есть две вершины w и w' , такие что w соединена с a , но не соединена с a' , а w' наоборот.

Доказательство. Возьмём вершину x из $N(u)$, а вершину y из $N(v)$. Вершины x, u, v, y образуют П-граф, поэтому по условию есть вершина a такая, что x, u, v, y, a — А-граф. Вершину a можно считать минимальной, потому что если a' соединена с вершинами u и v и $N(a')$ содержится в $N(a)$, то вершины x, u, v, y, a' тоже образуют А-граф. Возьмём вершину x' из $U(a)$ и вершину y' из $V(a)$. По условию есть (минимальная) вершина a' такая, что вершины x', u, v, y', a' образуют А-граф. В $N(a)$ есть вершина (x') , которой нет в $N(a')$. Но $N(a')$ не может строго содержаться в $N(a)$ в силу минимальности вершины a . Поэтому в $N(a')$ также есть вершина, которой нет в $N(a)$.

Утверждение 1. Пусть даны две минимальные вершины a и b , соединённые ребром. Тогда выполнено одно из условий:

- 1) $U(a)$ содержит $U(b)$ и $V(b)$ содержит $V(a)$, или $U(b)$ содержит $U(a)$ и $V(a)$ содержит $V(b)$
- 2) Множества $U(a)$ и $U(b)$ не пересекаются и в объединении дают $N(u)$, и множества $V(a)$ и $V(b)$ не пересекаются и в объединении дают $N(v)$

Доказательство. Пусть множества $U(a)$ и $U(b)$ пересекаются и вершина x принадлежит пересечению. Предположим, что существуют вершины y и y' из $V(a)$ и $V(b)$ соответственно такие, что y не из $V(b)$, и y' не из $V(a)$ (это в точности отрицание того, что одно из множеств $V(a)$ и $V(b)$ содержит другое). Тогда есть дополнение к 3-расчёске на вершинах a, b, v, x', x, y . Противоречие. Значит, одно из множеств $V(a)$ и $V(b)$ содержит другое, и как следствие их пересечение не пусто согласно лемме 1. А значит одно из множеств $U(a)$ и $U(b)$ содержит другое. В силу минимальности вершин a и b , получаем первый случай.

Пусть множества $U(a)$ и $U(b)$ не пересекаются. Тогда в силу выше сказанного множества $V(a)$ и $V(b)$ не пересекаются. А, значит, множества $N(a)$ и $N(b)$ не пересекаются. В силу выбора вершин u и v , объединение множеств $N(a)$ и $N(b)$ совпадает с объединением множеств $N(u)$ и $N(v)$, что даёт второй случай.

Утверждение 2. Пусть даны две минимальные вершины a и b , не соединённые ребром. Тогда выполнено хотя бы одно из условий:

- 1) $U(a)$ содержит $U(b)$ и $V(b)$ содержит $V(a)$
- 2) $U(b)$ содержит $U(a)$ и $V(a)$ содержит $V(b)$
- 3) $U(a) = U(b)$ или $V(a) = V(b)$

Доказательство. Пусть можно выбрать вершины x и y в $U(b)$ и $V(b)$ соответственно так, что x и y не лежат в $N(a)$. Тогда имеем дополнение к 3-расчёске на вершинах u, v, b, y, x, a . Невозможность такого выбора означает выполнение хотя бы одного из трёх условий.

1) Будем искать вершины минимальные a и b , для которых выполнено третье условие утверждения 2, но $N(a) \neq N(b)$.

Сначала возьмём вершины a и b из леммы 2. Отметим, что для них выполнено $N(a) \neq N(b)$. Если они не искомые, рассмотрим случай 2 в утверждении 1. Возьмём x из $U(a)$ и y из $V(b)$. И по условию найдём (минимальную) вершину c , такую что x, u, v, y, c — А-граф. Отметим, что $N(c) \neq N(a)$ и $N(c) \neq N(b)$. И если $N(a)$ и $N(c)$ не пересекаются, то $N(c) = N(b)$ — противоречие.

Значит, можно считать, что выполнено первое условие утверждения 2 и $N(a) \neq N(b)$. Либо вершины искомые, либо можно выбрать вершины x и y такие, что x из $U(a)$, но не из $U(b)$, а вершина y из $V(b)$, но не из $V(a)$. По условию есть (минимальная) вершина c , такая что x, u, v, y, c — А-граф. Если $U(a) = U(c)$ или $V(a) = V(c)$ или $U(b) = U(c)$ или $V(b) = V(c)$, то мы нашли требуемые вершины, так как $N(a) \neq N(c)$ и $N(b) \neq N(c)$. Пусть нет. Если $V(c)$ не пересекается с $V(b)$, то множества вершин $V(a)$ и $V(c)$ также не пересекаются и их объединение не равно $N(v)$, так как $V(b)$ строго содержит $V(a)$. Имеем противоречие. Значит, для пары вершин c и b возможен только случай 1 утверждения 1. Так как вершина y принадлежит $V(b)$, но не принадлежит $V(c)$, то возможен только случай 1 утверждения 2. Аналогично для пары вершин a и c . Заменяем пару вершин a и b на пару вершин a и c . Заметим, что мы вернулись к прежнему случаю 1 утверждения 2, но $U(b)$ уменьшилось. Значит, после нескольких таких замен получим искомую пару.

2) Заметим, что у полученной пары выполняется лишь случай 3 утверждения 2, то есть они не соединены. Пусть $U(a) = U(b)$. Возьмём вершины y и y' , такие что вершина y из $V(a)$, но не из $V(b)$, а вершина y' из $V(b)$, но не из $V(a)$. Возьмём вершину x из $U(a) = U(b)$. По условию есть (минимальная, по замечанию) вершина c , такая что вершины x, u, v, y, c образуют А-граф. Вершины c и a соединены, иначе имеем дополнение к 3-расчёске на вершинах u, v, a, y, x, c .

Для пары вершин a и c не выполняется случай 1 утверждения 1, потому что вершина x из $U(a)$, но не из $U(c)$, вершина y из $V(a)$, но не из $V(c)$. Значит, выполняется случай 2 утверждения 1. И объединение непересекающихся $U(a)$ и $U(c)$ даёт $N(u)$. Аналогично с $V(a)$ и $V(c)$. Но $U(a) = U(b)$ и $U(b)$ и $U(c)$ не пересекаются, поэтому возможны только случай 2 утверждения 1 и случай 3 утверждения 2. Но в случае 2 утверждения 1 получаем $V(a) = V(b)$ — противоречие. В другом случае получаем, что $V(b) = V(c)$ и $V(b)$ и $V(a)$ не пересекаются. Автоматически получаем, что b и c не соединены.

Аналогично получаем вершину d , которая соединена с b , не соединена с a , $U(d) = U(c)$ и $V(d) = V(a)$. Для вершин c и d может выполняться только случай 3 утверждения 2, поэтому вершины c и d не соединены. Возьмём произвольную вершину x' из $U(d) = U(c)$. Вершины $x, u, v, a, y, d, x', c, y', b$ образуют G_{10} .

Решение задачи 28. Пусть фиксирована вершина v . Запись $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3 : a+ b- c+$, где a, b и c — целые числа означает, что если вершина v соединена с вершинами v_a и v_c и не соединена с вершиной v_b , то тогда вершины $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3$ образуют 3-расчёску (или 3-антирасчёску). Причём вершины u_1, u_2, u_3 образуют клику, вершины w_1, w_2, w_3 образуют независимое множество вершин. В случае 3-расчёски вершины u_i и w_j соединены, если и только если $i = j$. В случае 3-антирасчёски вершины u_i и w_j не соединены, если и только

если $i = j$. Если u_1 — это v_x , то вместо u_1 будем писать x . В других случаях $a+$ будет означать, что вершины v и v_a соединены, и $a-$ — наоборот.

а) Заметим, что в G_{10} есть П-подграфы, не дополненные до А-подграфов. Для каждого такого П-графа мы будем добавлять вершину, которая его дополняет до А-графа. Затем из того, что нет 3-расчёсок и 3-антирасчёсок, можно будет выяснить какие рёбра между новой вершиной и вершинами G_{10} , кроме одной, проведены, а какие нет.

v_7') П-подграф 3 4 5 6 не содержится в А-подграфе графа G_{10} , значит, по условию есть вершина v , для которой 3- 4+ 5+ 6-.

4 5 v 3 6 8: 8+ Поэтому вершины v и v_8 не соединены, то есть 8-.

Пусть вершины v и v_1 соединены, то есть 1+.

5 1 v 0 4 6: 1+ 0+ Значит, 0-.

9 1 v 8 6 4: 1+ 9+ Значит, 9-.

2 3 4 8 0 v: 2- 0- Значит, 2+

1 2 9 8 0 v: 1+ 2+ 9- 0- Противоречие. Итак, 1-.

1 5 9 3 v 8: 9-

1 5 9 v 0 6: 9+ 0-

2 9 v 0 4 8: 2+ 9+ 0+

Откуда следует, что 9+ 0+ 2-. То есть вершина v ведёт себя противоположно вершине v_7 . Все рёбра, кроме одного, определены.

v_6') П-подграф 7 8 9 5 не содержится в А-подграфе графа G_{10} , значит по условию есть вершина v , для которой 7- 8+ 9+ 5-.

2 8 9 v 5 7: 2-. То есть 2+.

Пусть 1+.

1 2 v 8 0 5: 1+ 0+ Тогда 0-

8 9 v 7 0 4: 0- 4+ Тогда 4-

1 9 v 8 3 5: 1+ 3+ Тогда 3-

1 2 3 4 0 v: 1+ 3- 4- 0- Противоречие. Значит, 1-.

1 5 9 7 4 v: 4-

8 9 v 7 0 4: 4+ 0-

1 9 0 v 3 5: 0+ 3-

Последовательно получаем 4+ 0+ 3+. Значит, вершина v ведёт себя противоположно вершине v_6 .

Ребро (v_6', v_7') Пусть нет, тогда 3 4 6' 1 7' 8

v_1' Сделав перенумерацию

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \rightarrow (0, 1, 2, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3),$$

можно считать, что мы нашли $5'$ и $6'$, соединённые ребром. П-подграф 7 5' 6' 9 не содержится в А-подграфе графа $G_{10} \cup v_6' \cup v_7'$, значит по условию есть вершина v , для которой 7- 5'+ 6'+ 9-.

5 6 8 7 9 v: 8-. Откуда 8+.

Пусть 2+.

2 8 v 5' 4 9: 2+ 4+ Тогда 4-

3 5 6 v 7 4: 4- 3- Тогда 3+

2 3 v 0 7 4: 2+ 4- 3+ 0+ Тогда 0-

6' 8 v 0 7 5: 0- 5+ Тогда 5-

2 5 9 0 6' v: 2+ 5- 0- Противоречие. Значит, 2-.

2 3 6' v 9 7: 3+ Значит, 3-

3 5 6 v 7 4: 3- 4- Значит, 4+

5' 0 v 7 9 4: 4+ 0+ Значит, 0-

5' 8 v 3 9 v: 3- 6+ Значит, 6-

Вершина v ведёт себя противоположно вершине v_1 .

Граф G_{10} допускает несколько перенумераций:

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \rightarrow (4, 2, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 3) \rightarrow (4, 2, 1, 3, 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4).$$

Так можно вершины 0, 4, 6, 8 можно перевести друг в друга, вершины 3, 5, 7, 9 можно перевести друг в друга и вершины 1 и 2 также. Вершину из каждой группы мы нашли, а значит, перенумеровав, получаем все остальные вершины.

б) В следующих пунктах могут быть опущены слова: "Пусть нет, тогда".

Ребро (v_7', v_9') 4 7' 9' 2 0 6

Ребро (v_6', v_0') 0' 6' 8 9 7 4

Ребро (v_6', v_8') 1 3 8' 6' 5 7

Ребро (v_6', v_9') 4 6' 9' 4 0 7

Ребро (v_5', v_9') 3 4 6' 7' 5' 9' по пунктам d), g) и j)

Тем самым, мы нашли все рёбра между вершинами $3', 4', \dots, 9', 0'$.

Ребро ($2', 4'$) 1 0 4' 5 2' 8

Ребро ($2', 6'$) 3 4 6' 7 5 2'

Ребро ($2', 3'$) 3' 5 6 8 4 2'

Используя найденные три ребра и перенумерацию получаем ребро ($1', 2'$): 6 7 0' 2' 3 1'

Итак, все рёбра найдены.

а) Пусть вершины v_2 и v'_2 соединены ребром. Рассмотрим П-граф $4\ 2\ 2'\ 0$. Он не является подграфом A -подграфа $2G_{10}$, потому что нет вершины одновременно соединённой с вершинами v_2 и v'_2 . Тогда по условию в графе G существует вершина v , для которой $4- 2+ 2'+ 0-$.

1) Сначала докажем, что 1-. Предположим противное и докажем, что вершина v ведёт себя так же, как вершина 7.

Итак, $1+ 2+ 4- 0-$.

$1\ 2\ 3\ 4\ 0\ v$: 3-. Поэтому 3+.

$2\ 3\ v\ 8\ 0\ 6$: 6+ 8-

$1\ 3\ v\ 6\ 4\ 8$: 6- 8+

Откуда либо 6- 8-, либо 6+ 8+.

Пусть 6-. Тогда 8-.

$1\ 2\ 5\ 4\ 6\ v$: 5- 6- Тогда 5+

$1\ 2\ 9\ 8\ 0\ v$: 8- 9- Тогда 9+

$5\ 9\ v\ 6\ 8\ 3$: 6- 8- 5+ 9+ Противоречие. Значит, 6+ и 8+.

$2\ 5\ v\ 6\ 8\ 4$: 5+ Откуда 5-.

$1\ 9\ v\ 8\ 3\ 5$: 9+ Откуда 9-.

Итак, вершина v ведёт себя в G_{10} так же, как вершина 7. Рассмотрим новый G_{10} , который получен из старого заменой вершины v_7 на v .

Вершина $5'$ соединена с 3 и 0 и не соединена с 4 и 9, следовательно согласно нахождению вершины v'_7 в пункте а) прошлой задачи, вершина $5'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 7). Вершина $4'$ соединена с 9 и 0 и не соединена с 3 и 5, следовательно согласно нахождению вершины v'_6 в пункте а) прошлой задачи, вершина $4'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 7). И наконец, вершина $2'$ соединена с вершинами $4'$ и $5'$ (которые ведут себя противоположно вершинам 4 и 5 в новом G_{10}) и не соединена с 3 и 9, следовательно согласно нахождению вершины v'_1 в пункте а) прошлой задачи, вершина $2'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 7). Что противоречит предположению.

2) Значит, 1-.

Пусть 6+.

$1\ 5\ 6\ 0\ 4\ v$: 6+ 5- Тогда 5+

$2\ 9\ v\ 4\ 0\ 6$: 6+ 9+ Тогда 9-

$2\ 5\ v\ 6\ 8\ 4$: 5+ 6+ 8+ Тогда 8-

$2\ 5\ 9\ 3\ 6\ v$: 3+ 5+ 6+ 9- Тогда 3-

$1\ 5\ 9\ 3\ v\ 8$: 3- 8- 9- 5+ Противоречие. Значит, 6-.

$2\ 5\ 9\ v\ 6\ 0$: 5- 9-

$1\ 5\ 9\ v\ 0\ 6$: 5+ 9+

Значит, либо 5+ 9-, либо 5- 9+.

$1\ 3\ 7\ v\ 6\ 0$: 3+ 7+

$2\ 3\ 7\ v\ 0\ 6$: 3- 7-

Значит, либо 3+ 7-, либо 3- 7+.

$1\ 3\ 7\ 9\ 4\ v$: 3- 7+ 9-

$1\ 5\ 9\ 7\ 4\ v$: 5- 7- 9+

Значит, либо 3+ 5+ 7- 9-, либо 3- 5- 7+ 9+.

3) Пусть 3- 5- 7+ 9+. Тогда вершина v ведёт себя в графе G_{10} также, как вершина 8. Рассмотрим новый G_{10} , который получен из старого заменой вершины v_8 на v .

Вершина $5'$ соединена с 3 и 0 и не соединена с 4 и 9, следовательно согласно нахождению вершины v'_7 в пункте а) прошлой задачи, вершина $5'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 8). Вершина $4'$ соединена с 9 и 0 и не соединена с 3 и 5, следовательно согласно нахождению вершины v'_6 в пункте а) прошлой задачи, вершина $4'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 8). И наконец, вершина $2'$ соединена с вершинами $4'$ и $5'$ (которые ведут себя противоположно вершинам 4 и 5 в новом G_{10}) и не соединена с 3 и 9, следовательно согласно нахождению вершины v'_1 в пункте а) прошлой задачи, вершина $2'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 8). Что противоречит предположению.

4) Пусть 3+ 5+ 7- 9- 8-. Тогда вершина v ведёт себя в графе G_{10} также, как вершина 4. Рассмотрим новый G_{10} , который получен из старого заменой вершины v_4 на v .

Вершина $9'$ соединена с 7 и 6 и не соединена с 8 и 5, следовательно согласно нахождению вершины v'_7 в пункте а) прошлой задачи, вершина $9'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 4). Вершина $8'$ соединена с 5 и 6 и не соединена с 7 и 9, следовательно согласно нахождению вершины v'_6 в пункте а) прошлой задачи, вершина $4'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 4). И наконец, вершина $2'$ соединена с вершинами $9'$ и $8'$ (которые ведут себя противоположно вершинам 9 и 8 в новом G_{10}) и не соединена с 7 и 5, следовательно согласно нахождению вершины v'_1 в пункте а) прошлой задачи, вершина $2'$ не соединена с вершиной v (выполняющей роль вершины 4). Что противоречит предположению.

5) Пусть 3+ 5+ 7- 9- 8+

$1\ 5\ 9\ 7\ v\ 6'$: 6'-

$v\ 6'\ 8\ 5\ 0\ 7$: 6'+

Что завершает доказательство.

б) Если вершины 1 и 2 поменять местами с вершинами $1'$ и $2'$, то оба G_{10} превратятся в P . Осталось заметить, что вершины x и x' ведут себя противоположно в каждом из двух P .

с) Так как в $2P$ вершины попарно не различимы, то есть для любых двух существует перенумерация, переводящая одну во вторую, то в пункте а) мы фактически доказали, что если граф G с указанными свойствами содержит $2P = 2G_{10}$ (пункт б)), то все неопределённые рёбра не проведены.

Заметим, что дополнение к $2P$ — это снова $2P$, но, может быть, другой. В каждом P поменяем местами внешний пятиугольник и внутреннюю звезду, затем поменяем местами внешние звёзды двух P . Заметим, что все рёбра, кроме неопределённых, заменены на противоположные.

Рассмотрим дополнение к графу G . В нём снова все Π -подграфы содержатся в A -подграфах, потому что Π -граф и A -граф самодополнительные. Он снова не содержит 3-расчёску и её дополнение. И теперь он содержит $2P$, но все неопределённые рёбра у него проведены. Противоречие с пунктом а).

CIS-GRAPHS

Recall some basic definitions. Let G be a graph.

Consider some subset $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ of vertices of G . A *subgraph* of G on the set V is a graph G' having V as the set of vertices, and two vertices of G' are connected if and only if they are connected in G .

A *complement* of G is a graph with the same vertices as G has and with those and only those edges which do not appear in G .

Consider some subset of vertices. If every two vertices from this subset are connected, then such subset is called a *clique*; if there are no edges between these vertices, then this subset is called *stable*. A clique (a stable set) is *maximal* if it is not contained in a larger clique (stable set).

The main definition in this series of problems is a definition of a *CIS*-graph.

We call G a *CIS-graph* if $C \cap S \neq \emptyset$ for every maximal clique C and every stable set S . E.g., a cycle of length 4 is a *CIS*-graph, while a Π -graph (see Fig. 9) is not a *CIS*-graph.



Fig. 1

Is the set of *CIS*-graphs numerous? Problems needing only the definition.

1. Show that a disjoint union of two *CIS*-graphs G_1 and G_2 is again a *CIS*-graph.

Remark. A disjoint union of graphs G_1 and G_2 is a union with no coinciding vertices and no edges between G_1 and G_2 .

2. Find all *CIS*-graphs which do not contain a clique on 3 vertices. Prove that one can colour the vertices of such graph in two colours so that each two connected vertices share different colours.

3. Suppose that one deletes from a *CIS*-graph a vertex incident to exactly one edge. Prove that the resulting graph is also a *CIS*-graph.

4. a) Call a vertex *good* if any two its neighbours are connected (i.e., this vertex, together with all its neighbors, forms a clique). Prove that if each maximal clique contains a good vertex, then the graph is a *CIS*-graph.

b) Show that the converse does not hold.

5. Consider a graph whose set of vertices is a union of clique and a stable set, and these clique and stable set have a common vertex. Show that this graph is a *CIS*-graph.

We mean by a *substitution* of a graph G_1 into a graph G_2 the following operation: a fixed vertex A of graph G_2 is replaced by a graph G_1 , and vertices $B \in G_1$, $C \in G_2 \setminus \{A\}$ are connected if and only if A was connected with C .

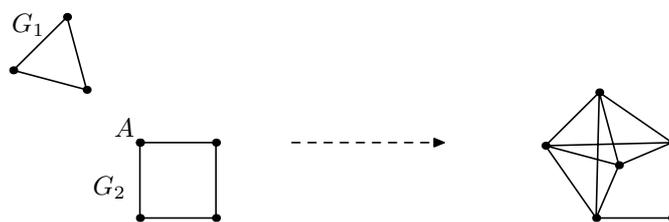


Fig. 2

6. Suppose that the result of substitution of G_1 into G_2 is a *CIS*-graph. Show that both G_1 and G_2 are *CIS*-graphs.

7. Show that each graph is contained as a subgraph in a *CIS*-graph.

8. Consider two sequences of graphs G_1, G_2, G_3, \dots and H_1, H_2, H_3, \dots such that either both sequences are infinite, or both consist of equal number of elements. Consider the set of graphs G for which the following condition holds: For each subgraph $G' \subset G$ isomorphic to G_i , there exists a subgraph $H' \supset G'$ isomorphic to H_i .

a) Construct sequences (G_i) and (H_i) in such a way that the resulting set of graphs is exactly the set of all *CIS*-graphs.

b) For the same purpose, can these sequences of graphs be finite?

Hereinafter, we will say simply “a graph G contains H ” instead of “a graph G contains a subgraph isomorphic to H ”.

9*. Suppose that a graph G contains exactly one pair of non-intersecting maximal clique C and maximal stable set S .

- Prove that G cannot contain exactly one vertex not belonging to $C \cup S$.
- The same for two vertices.
- Try to prove that the set of vertices of G coincides with $C \cup S$.

Combs and settled combs.

A family of graphs is called *closed under substitution* if for any two graphs G_1 and G_2 from this family, the result of arbitrary substituting of G_1 into G_2 also belongs to this family. A family of graphs is called *exactly closed under substitution* if a graph from this family can be obtained by substitution only from graphs of this family.

A family of graphs is called *closed under complementation* if for any graph from this family, its complement also belongs to this family.

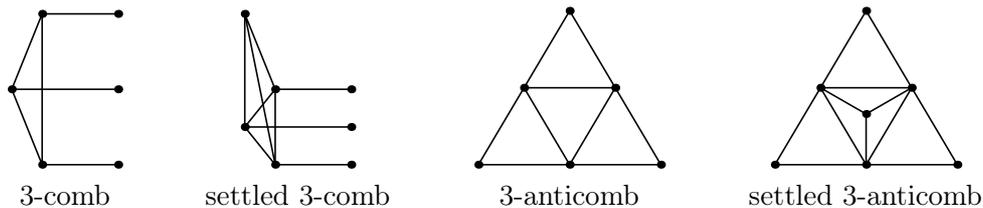
A family of graphs is called *hereditary* if for any graph from this family, all its subgraphs also belong to this family.

It is obvious that the family of *CIS*-graphs is closed under complementation. The result of problem 6 says that it is closed under substitution. Let us find some other properties of *CIS*-graphs.

10. a) Suppose that a graph contains a pair of non-intersecting maximal clique and maximal stable set. Prove that this graph contains a Π -graph as a subgraph.

- Prove that converse does not hold.

Definition. We mean by a k -comb ($k \geq 2$) the following graph on $2k$ vertices. The first k vertices form a clique, the last k vertices form a stable set, and for each $i = 1, 2, \dots, k$ the i th vertex from the second set is connected only with the i th vertex from the first set. We mean by a *settled k -comb* the graph obtained from the k -comb by adding a vertex; the new vertex is connected with all the vertices of the clique, and only with them. By a k -anticomb and a *settled k -anticomb*, respectively, we mean complements to the k -comb and the settled k -comb.



11. a) In a *CIS*-graph, any Π -subgraph is contained in an A -subgraph (see Fig. 3).

b) In a *CIS*-graph, any subgraph isomorphic to a k -comb is contained in a subgraph isomorphic to a settled k -comb.

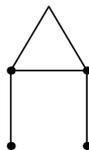


Fig. 3 . A -graph

12. Construct a graph in which for all k , each k -comb is contained in a settled k -comb, each k -anticomb is contained in a settled k -anticomb, and there exists a pair of non-intersecting maximal clique and maximal stable set.

Guiding light. Try to prove the following important theorem.

Theorem. Suppose that a graph does not contain 3-comb and 3-anticomb as subgraphs; moreover, suppose that each 2-comb is contained in a settled 2-comb. Then this graph is a *CIS*-graph.

Definition. A complete graph with all its edges coloured in d colours will be referred to as a d -graph. In a d -graph G , denote by E_i the set of all edges sharing i th colour. A graph having the same set of vertices, while its set of edges is E_i , will be referred to as a *chromatic* (or *colour*) *component* of i th colour.

Definition of a CIS - d -graph. Consider a d -graph. For each colour, choose an arbitrary maximal stable set in i th chromatic component. If for every such choice all these stable sets will share a common vertex, then G is called a *CIS- d -graph*.

Consider a game with complete information for d men. One can represent it as a finite tree with vertices being the positions in this game. There is a root vertex (an initial position of the game); all edges outcoming from this vertex are coloured in the 1st colour — this is the colour of the player making the first move; doing this, the player chooses the next position in the game. For each obtained vertex, there are some edges of

the next player's colour (for different new vertices, these colour may differ; thus, the first player by his move chooses the player making the next move). After that the game proceeds in the same way. Since the tree is finite, the game will necessarily end after some moves. The terminal vertex (the result of the game) has no outgoing edges. One can put into correspondence to this tree a d -graph in the following way: The vertices are the terminal vertices of the tree. Consider two vertices and the (unique) path connecting them in a tree; consider the vertex of this path which is closest to the root; suppose that its outgoing edges share i th colour. Then connect our two vertices with an edge of i th colour.

One can show that the resulting d -graph is a *CIS*- d -graph (you can try to think this over).

Consider a *CIS*- d -graph. Each its chromatic component is itself a *CIS*-graph (problem), but it is not known whether the converse holds. While adding the assumption that a *CIS*- d -graph does not contain a 3-coloured triangle, this converse statement appears to be true (problem). A description of such *CIS*- d -graphs can be reduced to a description of *CIS*-graphs (though there is no admissible description to either).

Up to this moment, it is unknown whether there exists a *CIS*- d -graph with a distinct-colored triangle; it can be checked (involving computer) that there is no such graph with ≤ 12 vertices.

The properties of Gallai graphs.

By a Δ -graph we mean a graph on 3 vertices, with edges sharing 3 distinct colours (a 3-coloured triangle).

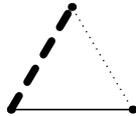


Fig. 4 . Δ -graph

Definition. A d -graph not containing Δ -graph as a subgraph is called a Gallai d -graph.

Let us redefine a Π -graph as a graph on 4 vertices, in which edges of one colour form a Π , while all other edges share the second colour.



Fig. 5 . Coloured Π -graph

The aim of this section is formulated in the last problem; this problem involves a magnificent property of d -graphs — a Gallai decomposition, which is described in problem 16.

13. Suppose a d -graph G satisfies the following property: if one deletes all the edges of one arbitrary colour, then the graph remains connected. Assume in addition that G is neither a Π -graph nor a Δ -graph. Prove that one can delete a vertex from this graph so that the resulting graph also satisfies this property.

14. Suppose that each chromatic component of a d -graph ($d \geq 3$) is connected. Prove that this graph contains a Δ -graph.

15. Check whether a class of Gallai d -graphs is closed under substitution, exactly closed under substitution, and whether it is hereditary.

16. Prove that every Gallai d -graph can be obtained as a result of a substitution of n d -graphs into some 2-graph (instead of n its vertices).

17. Let F be a class of graphs, which is exactly closed under substitution, and closed under complementation. Consider a Gallai d -graph such that all its chromatic components except at most one (suppose of d th colour) belong to the class F . Suppose that the given graph has at least one edge of d th colour. Then the d th chromatic component also belongs to F .

After semi-final.

Gallai *CIS*- d -graphs.

18. Check whether the class of *CIS*- d -graphs is closed under substitution, exactly closed under substitution and hereditary.

19. If a given d -graph does not contain Δ -graphs and Π -graphs as subgraphs, then it is a *CIS*- d -graph.

20. Show that a d -graph corresponding to a game with complete information (see the first section) does not contain a Δ -graph and a Π -graph as subgraphs, and, conversely, every such graph corresponds to a game.

21. Give an example of Gallai d -graph, but not a *CIS*- d -graph, such that it has edges of at least 3 different colours.

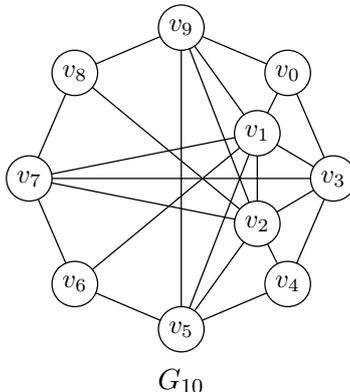
22. Give an example of *CIS*- d -graph, which has edges of at least 3 different colours.

23. A Gallai d -graph is a *CIS*- d -graph if and only if all its chromatic components are *CIS*-graphs.

- 24. If all but one chromatic components of a Gallai d -graph are CIS -graphs then this d -graph is a CIS - d -graph.
- 25. Assume that all CIS -3-graphs are Gallai 3-graphs. Prove that all CIS - d -graphs are Gallai d -graphs.
- 26. **Hypothesis.** Each CIS - d -graph is a Gallai d -graph.

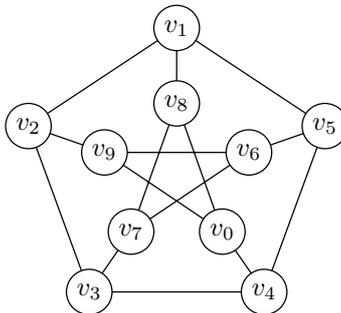
Per aspera ad astrum.

Definition. Let G_{10} be a graph drawn in the picture below:



Let $2G_{10}$ be a graph with twenty vertices $v_0, v_1, \dots, v_9, v'_0, v'_1, \dots, v'_9$, which is obtained from two copies of G_{10} (the first graph G_{10} on vertices v_0, v_1, \dots, v_9 , the second on the remaining vertices). For $i \neq j$ we draw an edge from v_i to v'_j if and only if v_i and v_j are not connected with an edge. Edges between v_i and v'_i may exist or may not exist (independently for each i). So, $2G_{10}$ means an arbitrary one of these 1024 graphs.

The graph in the figure below is the Petersen graph. We denote it by P . Take two its copies on the sets of vertices u_1, u_2, \dots, u_{10} and v_1, v_2, \dots, v_{10} , respectively. For $i \neq j$, we link u_i and v_j with an edge if u_i and u_j are not linked with an edge. For any pair of vertices u_i and v_i , we may either link them or not. If we choose one of these $2^{10} = 1024$ graphs, then the obtained graph is named “ $2P$ ”.



The Petersen graph

Theorem. Suppose that a graph does not contain 3-comb and 3-anticomb as subgraphs; moreover, suppose that each 2-comb is contained in a settled 2-comb. Then this graph is a CIS -graph.

The remaining problems are devoted to the proof of this theorem.

27. Looking for G_{10} . Suppose that G has at least one pair of non-intersecting maximal clique C and maximal stable set S , G does not contain 3-comb and 3-anticomb as subgraphs, and each 2-comb is contained in a settled 2-comb.

- a) Show that there exist vertices in G belonging neither to C nor to S .
- b) Show that G contains G_{10} as a subgraph.

28. Find the second!

Suppose that in G all 2-combs are contained in settled 2-combs, G contains G_{10} on vertices v_0, v_1, \dots, v_9 and does not contain 3-combs and 3-anticombs as subgraphs.

- a) Show that G contains ten vertices v'_0, v'_1, \dots, v'_9 such that for every distinct i and j vertices v_i and v'_j are linked if and only if vertices v_i and v_j are not linked.
- b) Find a subgraph $2G_{10}$ in G .

Where are the combs? Notice that a graph $2G_{10}$ does not contain a 3-comb and a 3-anticomb, but it contains 2-combs, not included in settled 2-combs, if we suppose, for example, that v_2 and v'_2 are linked with an edge.

In a problem below, all 2-combs in G are contained in settled 2-combs, it contains $2G_{10}$ and does not contain a 3-comb and a 3-anticomb.

- 29. a) Show that the vertices v_2 и v'_2 of the subgraph $2G_{10}$ are not linked.
- b) Show that the vertices of $2G_{10}$ might be renumbered in such a way that we obtain $2P$.

c) Prove the Theorem.

CIS-graphs. Solutions of the problems

We sometimes use a term "anticlique" instead of the words "stable set" in these solutions. A set of all vertices in a graph G is denoted by $V(G)$.

Solution of Problem 1. Let $G = G_1 \sqcup G_2$ be a disjoint union of G_1 and G_2 , and let C and S be a maximal clique and a maximal stable set (respectively). It is obvious that S intersects with each of the two graphs G_1 and G_2 and C is contained in one of them. Without loss of generality, let us assume that C is contained in G_1 . Then $S \cap G_1$ and $C \cap G_2$ intersect as every pair of a maximal stable set and a maximal clique in G_1 .

Solution of Problem 2. If there are no triangles in a CIS-graph, then there are also no Π -subgraphs. Otherwise the two vertices "in the middle" of this subgraph (i.e. whose degrees are 2) form a maximal clique (let us designate it by C). And the two vertices in this subgraph whose degrees are 1 form a stable set which does not intersect with C and is contained in a certain maximal stable set that also does not intersect with C .

Consider every connected component in our graph. If there exist two vertices the distance between which is more than two, then there are two vertices the distance between which equals three. The shortest path connecting them consists of 4 vertices, and a subgraph on these vertices is the Π -subgraph, and this is impossible. So every two vertices in every component of connectedness are connected by a path of length not more than two.

Suppose there exist a cycle of odd length (we call such cycles "odd cycles"), then let us consider the minimal among them. It contains at least 5 vertices, and the pairs of non-adjacent vertices are not connected by edges (otherwise the cycle is divided into two smaller ones, one of them is odd). Thus every four consequent vertices of this cycle form a Π -graph, and this is impossible. So there are no odd cycles. It is not difficult to prove that such graph is bipartite: its vertices may be divided into two parts so that the ends of every edge lie in different parts.

Therefore, every connected component is a bipartite graph. It must be complete (every two vertices from different parts are connected): the length of the minimal path between the two vertices from different parts that are not connected by an edge is not less than 3. So our initial graph is a disjoint union of several complete bipartite graphs. It is very easy to draw the vertices of such graph in two colors to satisfy required condition: in every connected component we draw one part in the first color and the other part in the second color.

To finish the solution it is only necessary to check that every such graph satisfies the conditions of the task. Note that since a complete graph is a CIS-graph then a complete bipartite graph (as a complement to a disjoint union of two complete graphs) is also a CIS-graph. So every disjoint union of complete bipartite graphs is a CIS-graph.

We shall note the following trivial fact: a graph is a CIS-graph if and only if any clique and anticlique can be extended to intersecting maximal clique and anticlique.

Solution of Problem 3. Let us denote a graph which is obtained from a graph G by removing the vertex v from G (and all the edges containing v) by $G - v$. Suppose that G is a CIS-graph, $G - v$ is not and the vertex v is connected to a unique vertex u in the graph G . Then there exist a maximal clique C and a maximal stable set S in $G - v$ that do not intersect. Let us extend them to a maximal clique C' and a maximal anticlique S' in the graph G respectively.

It is clear that C' and S' intersect only by vertex v . But then C' cannot contain any vertices except u (because there is only one edge containing v - the one between v and u). Also if a maximal clique consists of a unique vertex then this vertex is isolated (i.e. is not connected to other vertices) and therefore is contained in every maximal anticlique. So C and S intersect by the vertex u . Contradiction.

Solution of Problem 4. a) Suppose that it is not true, then in a graph G there are a maximal clique C and a maximal stable set S which do not intersect, and in C there is a good vertex v . If there is a vertex $u \in V(S)$ connected to v then all the vertices in C are adjacent to v (since v is good), which contradicts the maximality of C . So v is not connected to any of the vertices in S which contradicts the maximality of S .

b) The cycle of length 4 serves as an example.

Solution of Problem 5. Let the maximal clique be C and the maximal stable set be S ; they intersect at a vertex u . Then suppose that a certain maximal clique C' and a certain maximal stable set S' do not intersect. If $C' = C$ and S' does not intersect with C' then $S' \subset S$ and therefore $S' = S$. Thus $C' \neq C$ and (due to analogous reasons) $S' \neq S$. Assume that $s \in C' \setminus C$, $c \in S' \setminus S$; we may suppose (without loss of generality) that the edge between c and s does not exist. But since S' is maximal, there must exist a vertex c' adjacent to s in S' . Note that c' cannot lie in S (there already lies c and S is an anticlique). Therefore c' lies in C . So the clique C and the anticlique S' have vertices s and c' in their intersection, which is impossible (if it were true, the edge (s', c) would exist and not exist simultaneously).

Solution of Problem 6. Denote the obtained graph by the letter G .

Suppose that G_1 is not a CIS-graph, then there exist a maximal clique C and a maximal stable set S in G_1 that do not intersect. Then consider any maximal clique containing C and any maximal anticlique containing S . Their common vertex is connected to the vertices from C and not connected to any of the vertex from S , which contradicts the definition of substitution.

To prove that G_2 must be a CIS-graph it is sufficient to note that during an operation which is inverse to the operation of substitution cliques and anticliques transform into cliques and anticliques, and, what is more, all cliques and anticliques in G_2 can be obtained in such way.

Solution of Problem 7. Consider an arbitrary graph G and for every its maximal clique add a vertex to the graph and connect it to all of the vertices in this clique and only to them (this procedure has to be done once). In the constructed graph (according to the construction) every maximal clique contains only one added vertex, and obviously it is good. Thus (according to the task 4) the constructed graph is a CIS-graph, and the initial graph is its subgraph.

Solution of Problem 8. a) Consider a clique C and an anticlique S of a graph G . Suppose that $V(G) = C \sqcup S$ and every vertex from C is adjacent to at least one vertex from S , and every vertex from S is not adjacent to at least one vertex from C (i.e. C and S are maximal in G). Every graph G can be extended to a graph $H(G)$ by adding a vertex adjacent to all of the vertices from a clique C and only to them. By enumerating all possible arrays $(G, C, S, H(G))$, we get four sequences $\{G_i\}$, $\{C_i\}$, $\{S_i\}$, $\{H_i\}$.

Note that a graph is not a CIS-graph if and only if (according to the note after the solution of problem 2) there are such clique and anticlique in this graph that it cannot be extended in respect to this clique and anticlique in the way described in the previous passage. In other words, a graph is not a CIS-graph if and only if for a certain i it contains a subgraph isomorphic to G_i which cannot be extended to a subgraph isomorphic to H_i . Therefore, the sequences G_i , H_i satisfy the conditions of the problem.

b) Assume that there exist such two finite sequences $\{G_i\}$, $\{H_i\}$ that satisfy the conditions of our problem. Suppose that the maximal number of vertices in every graph G_i , H_i is equal to n . Consider the n -comb and the settled n -comb. It is not difficult to check that if in the settled n -comb every subgraph isomorphic to G_i can be extended to a subgraph isomorphic to H_i then the same holds true for the n -comb. But the settled n -comb is a CIS-graph while the n -comb is not a CIS-graph. We have obtained the contradiction.

Solution of Problem 9. a) Let $C \sqcup S \cup v$ be the set of vertices of G where C is maximal clique and S is maximal anticlique. Denote by C' a subset of vertices of C which are adjacent to v and denote by S' a subset of vertices of S which are not adjacent to v . Then clique $C' \cup v$ must be extended to maximal clique which intersects with S . Then there is a vertex $s \in S'$ which is adjacent to all vertices from C' and to vertex v . Similarly there is a vertex $c \in C'$, which is not adjacent to all vertices from S' and to vertex v . Without loss of generality vertices s and c are linked. So there is a vertex $c' \in C$, which is not adjacent to s (so it follows that c' is not adjacent to v). Consider clique C'' on vertex s and on all its neighbors in C and any maximal anticlique S'' that contains vertices v and c' . Vertex v can not be added to clique C'' because $c \in C''$. So this clique is maximal. Any vertex of C'' is adjacent to v or to c' . Then S'' does not intersect C'' .

b),c) Consult the article cis1.pdf.

Solution of Problem 10. a) (*The solution was proposed by the following team: Vasiliy Mokin, Viktor Omelyanenko and Viktor Sadkov.*) We denote this pair of sets by C and S and consider a complete oriented bipartite graph with a set of vertices $C \cup S$ and edges drawn according to the rule: if the vertices $c \in C$ and $s \in S$ are adjacent then the edge in the new graph is directed from c to s , otherwise it is directed from s to c . Since S is a maximal anticlique then every vertex in the initial graph is adjacent to at least one vertex from S . In particular, this means that in the new graph for every vertex in C there exists an edge that is directed from this vertex. Analogously, for every vertex in S there exists an edge that is directed from this vertex.

Thus in our oriented graph for every vertex the number of edges directed from it is not less than 1, therefore, there is a cycle in our graph (by a cycle in an oriented graph we mean the oriented cycle). Then consider a cycle of minimal length $A_1 A_2 \dots A_{2n}$ (the length is even since the graph is bipartite). If $2n > 4$ then depending on orientation of the edge $A_1 A_4$ it is possible to find a cycle smaller than minimal in our graph: either $A_1 A_2 A_3 A_4$ or $A_1 A_4 A_5 \dots A_{2n}$. So $2n = 4$. Then it is not difficult to check that the Π -graph was induced on the vertices A_1, A_2, A_3, A_4 in the initial graph.

b) For instance, the A -graph, in other words, the settled 2-comb.

Solution of Problem 11. a) It is a partial case of the next subproblem.

b) Consider an arbitrary maximal clique containing the first group of vertices in the comb (they form a clique) and any maximal anticlique containing the second group of vertices in the comb (they form an anticlique). Their intersection contains at least one vertex, which forms a settled comb by being added to the comb.

Solution of Problem 12.

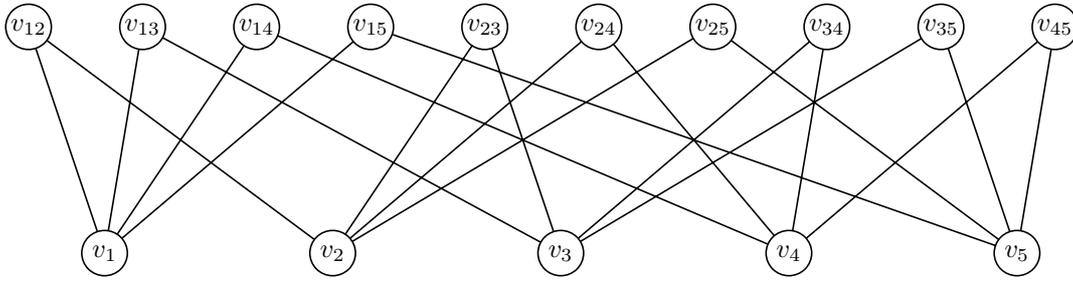


Fig. 6

The main property of Gallai graphs.

Solution of Problem 13. Denote the given d -graph by G , and let v be one of its vertices. Notice that there exists at most one colour such that if we exclude v from G then the subgraph of not this colour is not connected: If G becomes non-connected when we omit the edges of the 1st colour, then all the edges between its connected components are of the 1st colour. But the full bipartite graph is connected, hence if we omit some other colour then the remaining graph will be connected. Suppose that for any vertex v there exists a colour such that $G - v$ is not connected without this colour. We showed that for each vertex there exists at most one such colour (if for a vertex there are no such colours, then we are done). Colour this vertex in this colour.

Notice that in any connected graph there exist at least two vertices such that deleting of them does not break connectedness. To show this, take the spanning tree of this graph. Its terminal vertices can be deleted. In our case, the initial graph without any fixed colour is connected, this means that for this colour there exist at least two vertices such that deleting of them does not break the connectedness of the graph, i.e. coloured not in this colour.

Suppose u is a vertex of the 1st colour. Let v_1, v_2, \dots, v_n and w_1, w_2, \dots, w_m be a splitting of all the other vertices of the graph such that these components are not connected without the 1st colour (in $G - u$). All the edges between these two groups are of the 1st colour. We will name these groups by *parts*; a part containing at least two vertices will be named *big*. If both parts are small, then either the given d -graph is a 3-coloured triangle or it does not satisfy the conditions of the problem. Suppose that there exists at least one big part. We have at least two vertices not of the 1st colour, while a small part can contain at most one of these vertices. This means that at least one big part contains a vertex not of the 1st colour. Without loss of generality, suppose it is the second part, i.e. $m \geq 2$, and w_1 is of the 2nd colour. Perform the same procedure for the 2nd colour. The vertices of G split into two parts, such that all the edges between these parts are of the 2nd colour. But the edges $(w_2, v_1), (w_2, v_2), \dots, (w_2, v_n), (v_1, w_3), (v_1, w_4), \dots, (v_1, w_m)$ are of the 1st colour, this means that $w_2, v_1, v_2, \dots, v_n, w_3, \dots, w_m$ are in one part with respect to w_1 . Hence, u is in the other part, and all the edges from u to all the other vertices, excluding w_1 , are of the 2nd colour.

Consider the 2nd vertex w'_1 of colour $k \neq 1$. Perform the same procedure as with w_1 : Split all the other vertices into two parts and look in which part with respect to u it belongs. If it belongs to a big part, then, similarly, u is connected with all vertices but w'_1 with the edges of colour k . Notice that this graph contains some other vertices besides u, w_1 , and w'_1 (since G contains at least 4 vertices). They are connected with u with the edges of colours 2 and k simultaneously, hence, $k = 2$. It follows that all the edges incident to u are of the 2nd colour. Hence, the initial d -graph is not connected if we exclude the edges of the 2nd colour. Contradiction. We obtain that $w'_1 = v_1, n = 1$, and the vertices w_2, w_3, \dots, w_m are all of the 1st colour.

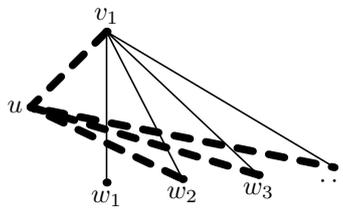


Fig. 7

Delete w_2 . The vertices of the graph split into two parts in such a way that all the edges between them are of the 1st colour. Since all the edges $(u, v_1), (u, w_2), (u, w_3), \dots, (u, w_m)$ are of the 2nd colour, all the vertices u, v_1, w_3, \dots, w_m are in one part. Hence, w_1 is in the other part. We obtain that w_1 is connected with the vertices $u, v_1, w_3, w_4, \dots, w_m$ with the edges of the 1st colour. If $m > 2$, we obtain in the same way that the edge (w_1, w_2) is of the 1st colour, which means that all the edges incident to w_1 are of the 1st colour. Contradiction. Then $m = 2$. If the edge (w_1, w_2) is of the 2nd colour, then the given d -graph is a Π -graph. If the edge (w_1, w_2) is of the 1st colour, then the initial d -graph without the edges of the 1st colour is not connected. This is also a contradiction.

Solution of Problem 14. Induction on the number of vertices in the graph. The base for $n = 3$ is obvious: at least one chromatic component is not connected. Perform the step. Suppose that $n > 3$ and all chromatic

components are connected. Exclude one vertex (let a); if all the chromatic components remain connected, then we use the statement of induction and find the 3-coloured triangle. Otherwise one of the chromatic components (suppose the 1st) became disconnect. Let C_1, \dots, C_k be the connected components of the 1st colour in the obtained graph; notice that for each of these components there exists an edge from a to this component of the 1st colour.

Consider two components C_i and C_j and an edge connecting two their vertices c_i and c_j ; without loss of generality, let it be of 2nd colour. Take another vertex c'_i from C_i . If it is connected with c_j with an edge of the 3rd colour, then we get a 3-coloured triangle. It means that the edge $c'_i - c_j$ is also of 2nd colour, and so on. One gets that for any two components C_i and C_j all the edges between them are of the same colour.

Now return to the initial graph. All its chromatic components are connected, this means that a has an edge of colour 2. Let this edge join a with a vertex $c_r \in C_r$. If there exists a component C_s such that the edges between C_s and C_r are of another colour (denote this colour 3), then find a vertex $c_s \in C_s$ such that the edge $a - c_s$ is of colour 1 (this is possible because the 1st connected component of the initial graph is connected); then a, c_r, c_s form a 3-coloured triangle.

We showed that all the edges joining C_r with all the other components are of colour 2. Similarly, if we take an edge of colour 3 incident to a and consider the component C_t incident to the second end of this edge, then we obtain that all the edges connecting C_t with other components are of colour 3. But this is impossible: if $r = t$, notice that we have more than one component, and it is not clear edges of which colour link this component with C_r . If, otherwise, $r \neq t$, then it is not clear edges of which colour join C_r and C_t .

Solution of Problem 15. As in the solution of problem 6, we show that this family is closed under substitution. To show the exact closeness, notice that for any vertex from the d -graph we can find d sets each of which will be independent of the edges of its colour and will be maximal with this property. When $d = 2$, as we noticed above, this family is not hereditary.

Solution of Problem 16. An obvious Lemma. Suppose that a Gallai d -graph has an edge of d th colour and its d th chromatic component is not connected. Then all the edges between any two fixed connected components of this chromatic component are of the same colour.

Its proof is a part of proof of 14.

The solution of the problem. We prove, using descent on k ($k < d$) the following statement:

Suppose we have a Gallai d -graph. Then it is the result of substitution of d -graphs G_1, G_2, \dots, G_n instead of n vertices of a k -graph G , and G has at least two vertices.

This statement is obviously true for $k = d$. Suppose it is true for a given k , prove it for $k - 1$. Take a Gallai d -graph and construct for this graph and for k the decomposition described above. From the previous problem it follows that the obtained k -graph G and all the substituted subgraphs G_1, G_2, \dots, G_n are Gallai d -graphs. From problem 14 it follows that one of the chromatic components of the k -graph G is not connected. Let it be the k th component and C_1, C_2, \dots, C_m be the connected components of this chromatic component. We denote by F_i the subgraph of G with the set of vertices equal to C_i . Using the Lemma, we obtain that G is the result of substitution of some graphs F_1, F_2, \dots, F_m instead of m vertices of a $(k - 1)$ -graph H . If we finally substitute the graphs G_1, G_2, \dots, G_n instead of some vertices of graphs F_1, F_2, \dots, F_m (if C_i consists of vertices numbered i_1, i_2, \dots, i_p , then we should substitute $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_p}$ in F_i according to the numbers of vertices). Suppose that we obtained graphs H_1, H_2, \dots, H_m . Then the initial Gallai d -graph is the result of substitution of d -graphs H_1, H_2, \dots, H_m instead of vertices of a $(k - 1)$ -graph H . We prove the necessary statement when $k = 2$.

Solution of Problem 17.

Лемма. Suppose that a given Gallai graph has edges of colour d and $d \geq 3$. Then a graph on n vertices without edges belongs to F .

Доказательство. If F contains at least one non-connected graph, then the graph having two vertices and no edges also belongs to F since this graph is the result of substitution of two graphs in a graph having two vertices and no edges, where we take the first component as the first graph and all the other components as the second graph. After this, we can obtain the graph with n vertices and no edges by substituting the graph above into itself.

It remains to show that the family F contains at least one non-connected graph. We denote by G the graph given in the formulation of the problem. Use induction on the number of vertices of G . As we proved in problem 16, G can be obtained as the result of a substitution of some d -graphs G_1, G_2, \dots, G_n instead of n vertices of a 2-graph H with at least 2 vertices. This generates substitutions on the chromatic components of G . Either one of G_i s or H has edges of d th colour. Since the family F is exactly closed, all the conditions above remain true for the G_i (or H) found above. If we apply the step of induction, we obtain the required. Now prove the base of the induction. If we take a graph with 2 vertices which has an edge of colour d , then its 1st chromatic component is not connected. \square

Now solve the problem using induction on the number of vertices of G .

The base. A graph with one vertex always belongs to a family of graphs exactly closed under substitution.

The step. The first case is if G contains edges of at most two colours. By the conditions, all its chromatic components but at most one belong to F . We have at least one edge of d th colour, this means that the d th chromatic components is a complement to one of the previous chromatic components, hence, it also belongs to F . Now consider the second case, when G has edges of at least 3 different colours. As we showed in the previous problem, we can obtain G as the result of substitution of some d -graphs G_1, G_2, \dots, G_n instead of n vertices of a 2-graph H which has at least 2 vertices. Notice that the chromatic component of G of the i th colour is the result of substitution the chromatic components of the i th colour of d -graphs G_1, \dots, G_n instead of vertices of the i th chromatic component of the d -graph H (any 2-graph is a d -graph which has edges of only two colours). By the condition, all but one chromatic components of G belong to the family F . Since F is exactly closed under substitution, all the chromatic components, excluding, maybe, of colour d , of d -graphs H, G_1, G_2, \dots, G_n belong to F . Each of these graphs has less vertices than G . Using the induction statement and lemma 17, we obtain that the d th chromatic component of each of these graphs belongs to F . Since F is closed under substitution, the d th coloured component of the d -graph G also belongs to the family F .

Solution of Problem 18. Similarly to the solution of Problem 6.

Solution of Problem 19. Follows from Problems 10 and 23.

Solution of Problem 20. If x and y are terminal vertices, denote by $P(x, y)$ the nearest vertex to the root on the path connecting these vertices (it is also denoted their least common parent). It is easy to check that for any two results of the game (which correspond to the terminal vertices of the tree) x, y, z the set of vertices $P(x, y), P(y, z), P(z, x)$ has at most two vertices. Hence, at least two of the edges $(x, y), (y, z), (z, x)$ are of the same colour. In the same way (it can be checked by considering several cases) it can be checked that we cannot find four vertices and colour their parents in such a way that this subgraph on 4 vertices is a Π -graph. **The converse statement.** We use induction on the number of vertices. The base is obvious. The step: we showed in Problem 13 that there exists a colour (suppose the 1st), such that deleting of all the edges of the 1st colour makes the graph non-connected (it is clear that all its components remain free from Δ and Π). Using the statement of the induction, we may construct a tree for each of the connected components. Then we can take the disjoint union of these graphs and add one vertex connected with all the roots of these trees with the edges of the 1st colour. It is clear that we obtained the required tree.

Solution of Problem 21.

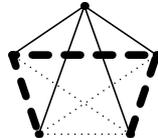


Fig. 8

Solution of Problem 22.

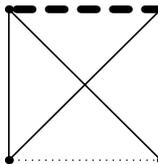


Fig. 9

Solution of Problem 23. Suppose we have a CIS - d -graph. Due to lemma in solution of problem 25 we have all chromatic components are CIS -graphs.

Let all chromatic components be CIS -graphs. Let us prove that our d -graph is a CIS - d -graph. Proof is similar to proof of problem 17. We will make a sketch. The statement is obvious for 2-graphs. If we have edges of at least three colours then we can use problem's 16 statement. So let our d -graph is a result of substitution of G_1, G_2, \dots, G_n to H , where the numbers of vertices of these graphs are less then the number of vertices of our d -graph. Due to sixth problem all chromatic components of these new graphs are CIS -graphs. So we use induction and obtain that they are CIS - d -graphs. Finally due to problem 18 we obtain that our d -graph is a CIS - d -graph.

Solution of Problem 24. Follows from Problems 23, 17, 6.

Solution of Problem 25.

Лемма. *If we merge two colours of a CIS - d -graph, then it remains a CIS - d -graph.*

Доказательство. Consider a maximal set A of the vertices of this d -graph free from edges of colours 1 and 2. Let B and C be the maximal sets of vertices, such that $B \supseteq A, C \supseteq A$, and B and C are free from edges of colours 1 and 2, respectively. Notice that $B \cap C = A$, because in the other case A could be extended. Let A_3, A_4, \dots, A_d be the maximal sets of vertices free from edges of colours 3, 4, \dots, d respectively. Since the given graph is a CIS - d -graph, intersection of all the sets $B, C, A_3, A_4, \dots, A_d$ is one vertex, this means that

the intersection of the sets A, A_3, A_4, \dots, A_d is also one vertex. Hence, when we merge the 1st and the 2nd colour, the graph remains a *CIS-d*-graph. \square

Show that our graph does not contain 3-coloured triangles with the edges of colours 1, 2, and 3. Merge all the edges of the 4th, 5th, \dots , and d th colour with the 3rd colour. According to the Lemma, we obtain a *CIS-3*-graph. By the condition, the *CIS-3*-graph does not contain 3-coloured triangles. Hence the initial graph also does not contain 3-coloured triangles.

Solution of Problem 27. The solution is rather hard, it's better to consult the article [17_2006.pdf](#).

Solution of Problem 28. Consider a vertex v . Denote by $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3 : a+ b- c+$, where a, b and c are integers, the following statement: if vertex v is linked with vertices u_a and u_c and it is not linked with vertex u_b then vertices $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3$ form 3-comb or 3-anticomb. More precisely, vertices u_1, u_2, u_3 form a clique, vertices w_1, w_2, w_3 form an anticlique, if vertices $u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3$ form 3-comb then vertices v_i and w_j are linked if and only if $i = j$, if they form 3-anticomb then vertices v_i and w_j are linked if and only if $i \neq j$. If $u_1 = v_x$ then denote u_1 by x . If other cases $a+$ means that vertices v and v_a are linked, and $a-$ — vice versa.

a) Note that G_{10} contains Π -subgraphs which are not contained in A -subgraphs. For every such Π -subgraph we add a vertex which settles Π -graph to A -graph. All but one edges (or non-edges) between added vertex and vertices of G_{10} we will draw because of our graph must not contain 3-comb neither 3-anticomb.

v'_7) Π -subgraph 3 4 5 6 can not be settled to A -subgraph of G_{10} , therefore there exists a vertex v with edges 3- 4+ 5+ 6-.

4 5 v 3 6 8: 8+ Then vertices v and v_8 are not linked, in other words 8-.

Let v and v_1 be linked, in other words 1+.

5 1 v 0 4 6: 1+ 0+ Then 0-.

9 1 v 8 6 4: 1+ 9+ Then 9-.

2 3 4 8 0 v: 2- 0- Then 2+

1 2 9 8 0 v: 1+ 2+ 9- 0- Contradiction. Therefore 1-.

1 5 9 3 v 8: 9-

1 5 9 v 0 6: 9+ 0-

2 9 v 0 4 8: 2+ 9+ 0+

This means that 9+ 0+ 2-. In other words, vertices v and v_i are linked if and only if vertices v_7 and v_i are not linked for $i \neq 7$.

v'_6) Π -subgraph 7 8 9 5 can not be settled to A -subgraph of G_{10} , therefore there exists a vertex v with edges 7- 8+ 9+ 5-.

2 8 9 v 5 7: 2-. In other words 2+.

Let 1+.

1 2 v 8 0 5: 1+ 0+ Then 0-

8 9 v 7 0 4: 0- 4+ Then 4-

1 9 v 8 3 5: 1+ 3+ Then 3-

1 2 3 4 0 v: 1+ 3- 4- 0- Contradiction. Therefore 1-.

1 5 9 7 4 v: 4-

8 9 v 7 0 4: 4+ 0-

1 9 0 v 3 5: 0+ 3-

Consequently we obtain 4+ 0+ 3+. Hence vertices v and v_i are linked if and only if vertices v_6 and v_i are not linked for $i \neq 6$.

Edge (v'_6, v'_7) If not then 3 4 6' 1 7' 8

v'_1 If we renumber vertices of G_{10}

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \rightarrow (0, 1, 2, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3),$$

we obtain vertices $5'$ and $6'$, which are linked. Π -subgraph 7 5' 6' 9 is not contained on A -subgraph of $G_{10} \cup v'_6 \cup v'_7$, therefore we obtain a vertex v with 7- 5'+ 6'+ 9-.

5 6 8 7 9 v: 8-. Then 8+.

Let 2+.

2 8 v 5' 4 9: 2+ 4+ Then 4-

3 5 6 v 7 4: 4- 3- Then 3+

2 3 v 0 7 4: 2+ 4- 3+ 0+ Then 0-

6' 8 v 0 7 5: 0- 5+ Then 5-

2 5 9 0 6' v: 2+ 5- 0- Contradiction. Therefore 2-.

2 3 6' v 9 7: 3+ Then 3-

3 5 6 v 7 4: 3- 4- Then 4+

5' 0 v 7 9 4: 4+ 0+ Then 0-

5' 8 v 3 9 v: 3- 6+ Then 6-

Vertex v is linked with vertex v_i if and only if vertex v_1 is not linked with v_i .

Other vertices. We can renumber vertices of graph G_{10} in such way

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \rightarrow (4, 2, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 3) \rightarrow (4, 2, 1, 3, 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4).$$

So if we obtain vertex $6'$, we automatically obtain vertices $0'$, $8'$, $4'$. Also we already have obtained vertices $7'$ and $1'$, so we obtain all vertices $0', 1', \dots, 9'$.

b) In following items the phrase "If not then" is missed.

Edge (v'_7, v'_9) 4 7' 9' 2 0 6

Edge (v'_6, v'_0) 0' 6' 8 9 7 4

Edge (v'_6, v'_8) 1 3 8' 6' 5 7

Edge (v'_6, v'_9) 4 6' 9' 4 0 7

Edge (v'_5, v'_9) 3 4 6' 7' 5' 9' because we already have edges (v'_6, v'_7) , (v'_7, v'_9) , (v'_6, v'_8)

So we find all edges between vertices $3', 4', \dots, 9', 0'$.

Edge $(2', 4')$ 1 0 4' 5 2' 8

Edge $(2', 6')$ 3 4 6' 7 5 2'

Edge $(2', 3')$ 3' 5 6 8 4 2'

Using obtained results and renumbering we obtain an edge $(1', 2')$: 6 7 0' 2' 3 1'

This is all.

Solution of Problem 29. a) Let v_2 and v'_2 be linked. Consider Π -graph 4 2 2' 0. It can not be settled by a vertex of $2G_{10}$. Then there exists a vertex v such that 4- 2+ 2'+ 0-.

1) We will prove first that 1-. Assume contrary and we will prove that vertices v and v_i are linked if and only if vertices v_7 and v_i are linked.

So. 1+ 2+ 4- 0-.

1 2 3 4 0 v: 3-. Then 3+.

2 3 v 8 0 6: 6+ 8-

1 3 v 6 4 8: 6- 8+

Then either 6- 8- or 6+ 8+.

Let 6-. Then 8-.

1 2 5 4 6 v: 5- 6- Then 5+

1 2 9 8 0 v: 8- 9- Then 9+

5 9 v 6 8 3: 6- 8- 5+ 9+ Contradiction. Therefore 6+ \checkmark 8+.

2 5 v 6 8 4: 5+ Then 5-.

1 9 v 8 3 5: 9+ Then 9-.

So vertices v and v_i are linked if and only if vertices v_7 and v_i are linked. Consider a new G_{10} which is obtained from the old G_{10} by replacing the vertex v_7 to v .

Vertex $5'$ is linked with vertices 3 and 0 and it is not linked with vertices 4 and 9. Therefore similarly to finding v'_7 in item a) in last problem we obtain that vertex $5'$ is not linked to vertex v (vertex v takes place of vertex v_7). Vertex $4'$ is linked with vertices 9 and 0 and it is not linked with vertices 3 and 5. Therefore similarly to finding v'_6 in item a) in last problem we obtain that vertex $4'$ is not linked to vertex v (vertex v takes place of vertex v_7). Vertex $2'$ is linked with vertices $4'$ and $5'$ (vertices $4'$ and $5'$ are opposite to vertices 4 and 5 in new G_{10}) and it is not linked with vertices 3 and 9. Therefore similarly to finding v'_1 in item a) in last problem we obtain that vertex $2'$ is not linked to vertex v (vertex v takes place of vertex v_7). Contradiction.

2) Therefore 1-.

Let 6+.

1 5 6 0 4 v: 6+ 5- Then 5+

2 9 v 4 0 6: 6+ 9+ Then 9-

2 5 v 6 8 4: 5+ 6+ 8+ Then 8-

2 5 9 3 6 v: 3+ 5+ 6+ 9- Then 3-

1 5 9 3 v 8: 3- 8- 9- 5+ Contradiction. Then 6-.

2 5 9 v 6 0: 5- 9-

1 5 9 v 0 6: 5+ 9+

Therefore either 5+ 9- or 5- 9+.

1 3 7 v 6 0: 3+ 7+

2 3 7 v 0 6: 3- 7-

Therefore either 3+ 7- or 3- 7+.

1 3 7 9 4 v: 3- 7+ 9-

1 5 9 7 4 v: 5- 7- 9+

Therefore either 3+ 5+ 7- 9- or 3- 5- 7+ 9+.

3) Let 3- 5- 7+ 9+. So vertices v and v_i are linked if and only if vertices v_8 and v_i are linked. Consider a new G_{10} which is obtained from the old G_{10} by replacing the vertex v_8 to v .

Vertex 5' is linked with vertices 3 and 0 and it is not linked with vertices 4 and 9. Therefore similarly to finding v'_7 in item a) in last problem we obtain that vertex 5' is not linked to vertex v (vertex v takes place of vertex v_8). Vertex 4' is linked with vertices 9 and 0 and it is not linked with vertices 3 and 5. Therefore similarly to finding v'_6 in item a) in last problem we obtain that vertex 4' is not linked to vertex v (vertex v takes place of vertex v_8). Vertex 2' is linked with vertices 4' and 5' (vertices 4' and 5' are opposite to vertices 4 and 5 in new G_{10}) and it is not linked with vertices 3 and 9. Therefore similarly to finding v'_1 in item a) in last problem we obtain that vertex 2' is not linked to vertex v (vertex v takes place of vertex v_8). Contradiction.

4) Let 3+ 5+ 7- 9- 8-. So vertices v and v_i are linked if and only if vertices v_4 and v_i are linked. Consider a new G_{10} which is obtained from the old G_{10} by replacing the vertex v_4 to v .

Vertex 9' is linked with vertices 7 and 6 and it is not linked with vertices 8 and 5. Therefore similarly to finding v'_7 in item a) in last problem we obtain that vertex 9' is not linked to vertex v (vertex v takes place of vertex v_4). Vertex 8' is linked with vertices 5 and 6 and it is not linked with vertices 7 and 9. Therefore similarly to finding v'_6 in item a) in last problem we obtain that vertex 4' is not linked to vertex v (vertex v takes place of vertex v_4). Vertex 2' is linked with vertices 9' and 8' (vertices 9' and 8' are opposite to vertices 9 and 8 in new G_{10}) and it is not linked with vertices 7 and 5. Therefore similarly to finding v'_1 in item a) in last problem we obtain that vertex 2' is not linked to vertex v (vertex v takes place of vertex v_4). Contradiction.

5) Let 3+ 5+ 7- 9- 8+

1 5 9 7 v 6': 6'-

v 6' 8 5 0 7: 6'+

The end.

b) Switch pair of vertices 1 and 2 and pair of vertices 1' and 2' in $2G_{10}$. Then both G_{10} become P .

c) In item a) we proved that one of uncertain edge is non-edge. Due to big amount of good renumbering of $2P$ we obtain that all of uncertain edges are non-edges. It is easy to see that complement to $2P$ is $2P$ again. Consider the complement to G . It is easy to see that it satisfies condition but all uncertain edges of $2P$ are edges in the complement to G . Contradiction.

ON GRAPHS WHOSE MAXIMAL CLIQUES
AND STABLE SETS INTERSECT

Diogo V. Andrade^a Endre Boros^b
Vladimir Gurvich^c

RRR 17-2006, JULY 2006

RUTCOR
Rutgers Center for
Operations Research
Rutgers University
640 Bartholomew Road
Piscataway, New Jersey
08854-8003
Telephone: 732-445-3804
Telefax: 732-445-5472
Email: rrr@rutcor.rutgers.edu
<http://rutcor.rutgers.edu/~rrr>

^aRUTCOR, Rutgers University, 640 Bartholomew Road, Piscataway NJ
08854-8003; email: dandrade@rutcor.rutgers.edu

^bRUTCOR, Rutgers University, 640 Bartholomew Road, Piscataway NJ
08854-8003; email: boros@rutcor.rutgers.edu

^cRUTCOR, Rutgers University, 640 Bartholomew Road, Piscataway NJ
08854-8003; email: gurvich@rutcor.rutgers.edu

The author is grateful to DIMACS, the NSF Center for Discrete Mathematics
and Theoretical Computer Science, for partial support

RUTCOR RESEARCH REPORT

RRR 17-2006, JULY 2006

ON GRAPHS WHOSE MAXIMAL CLIQUES AND
STABLE SETS INTERSECT

Diogo V. Andrade

Endre Boros

Vladimir Gurvich

Abstract. We say that a graph G has the CIS-property and call it a CIS-graph if every maximal clique and every maximal stable set of G intersect.

By definition, G is a CIS-graph if and only if the complementary graph \overline{G} is a CIS-graph. Let us substitute a vertex v of a graph G' by a graph G'' and denote the obtained graph by G . It is also easy to see that G is a CIS-graph if and only if both G' and G'' are CIS-graphs. In other words, CIS-graphs respect complementation and substitution. Yet, this class is not hereditary, that is, an induced subgraph of a CIS-graph may have no CIS-property. Perhaps, for this reason, the problems of efficient characterization and recognition of CIS-graphs are difficult and remain open. In this paper we only give some necessary and some sufficient conditions for the CIS-property to hold.

There are obvious sufficient conditions. It is known that P_4 -free graphs have the CIS-property and it is easy to see that G is a CIS-graph whenever each maximal clique of G has a simplicial vertex. However, these conditions are not necessary. There are also obvious necessary conditions. Given an integer $k \geq 2$, a *comb* (or *k-comb*) S_k is a graph with $2k$ vertices k of which, v_1, \dots, v_k , form a clique C , while others, v'_1, \dots, v'_k , form a stable set S , and (v_i, v'_i) is an edge for all $i = 1, \dots, k$, and there are no other edges. The complementary graph $\overline{S_k}$ is called an *anti-comb* (or *k-anti-comb*). Clearly, S and C switch in the complementary graphs. Obviously, the combs and anti-combs are not CIS-graphs, since $C \cap S = \emptyset$. Hence, if a CIS-graph G contains an induced comb or anti-comb then it must be settled, that is, G must contain a vertex v connected to all vertices of C and to no vertex of S . However, these conditions are only necessary.

The following sufficient conditions are more difficult to prove: G is a CIS-graph whenever G contains no induced 3-combs and 3-anti-combs, and every induced 2-comb is settled in G . It is an open question whether G is a CIS-graph if G contains no induced 4-combs and 4-anti-combs, and all induced 3-combs, 3-anti-combs, and 2-combs are settled in G .

We generalize the concept of CIS-graphs as follows. For an integer $d \geq 2$ we define a *d-graph* $\mathcal{G} = (V; E_1, \dots, E_d)$ as a complete graph whose edges are colored by d colors (that is, partitioned into d sets). We say that \mathcal{G} is a CIS- d -graph (has the CIS- d -property) if $\bigcap_{i=1}^d C_i \neq \emptyset$ whenever for each $i = 1, \dots, d$ the set C_i is a maximal color i -free subset of V , that is, $(v, v') \notin E_i$ for any $v, v' \in C_i$. Clearly, in case $d = 2$ we return to the concept of CIS-graphs. (More accurately, CIS-2-graph is a pair of two complementary CIS-graphs.) We conjecture that each CIS- d -graph is a Gallai graph, that is, it contains no triangle colored by 3 distinct colors. We obtain results supporting this conjecture and also show that if it holds then characterization and recognition of CIS- d -graphs are easily reduced to characterization and recognition of CIS-graphs.

We also prove the following statement. Let $\mathcal{G} = (V; E_1, \dots, E_d)$ be a Gallai d -graph such that at least $d - 1$ of its d chromatic components are CIS-graphs, then \mathcal{G} has the CIS- d -property. In particular, the remaining chromatic component of \mathcal{G} is a CIS-graph too. Moreover, all 2^d unions of d chromatic components of \mathcal{G} are CIS-graphs.

Key words: CIS-graphs, CIS-property, clique, clique-kernel intersection property, graph, independent set, simplicial vertex, stable graph, stable set, substitution.

1 Introduction.

1.1 CIS-graphs and simplicial vertices

Given a graph G , we say that it has the *CIS-property*, or equivalently that G is a *CIS-graph*, if every maximal clique C and every maximal stable set S in G intersect. Obviously, they may have at most one common vertex and hence $|C \cap S| = 1$. It is convenient to represent a CIS-graph G as a *2-dimensional box partition*, that is, a matrix whose rows and columns are labeled respectively by the maximal cliques and stable sets of G and whose entries are the (unique) vertices of the corresponding intersections. For example, Figure 1 shows four CIS-graphs and their intersection matrices. More examples are given in Figures 6, 7 and 10.

The CIS-property appears in the survey [6] (under the name *clique-kernel intersection property*) but no related results are mentioned. Indeed, natural problems of efficient characterization and recognition of the CIS-graphs look difficult and remain open. Perhaps, one of the reasons is that the CIS-property is not hereditary. Indeed, if $C \cap S = \{v\}$ then $C \setminus \{v\}$ and $S \setminus \{v\}$ may become disjoint maximal clique and stable set after v is deleted.

On the positive side, by definition, the CIS-property is self-complementary, that is, G is a CIS-graph if and only if the complementary graph \overline{G} is a CIS-graph.

We start with a simple sufficient condition. Given a graph $G = (V, E)$, a vertex $v \in V$ is called *simplicial* if its neighborhood $N[v]$ is a clique.

Clearly, if a maximal clique C of G contains a simplicial vertex v then it is a *private* vertex of C , that is, v cannot belong to any other maximal clique, except C . Vice versa, every private vertex v of a maximal clique C is simplicial, since in this case $N[v] = C$.

Moreover, in this case $C \cap S \neq \emptyset$ for every maximal stable set S in G . Indeed, if $S \cap (C \setminus \{v\}) = \emptyset$ then $v \in S$, since S is maximal. Thus, we obtain the following statement.

Proposition 1. *Graph G is a CIS-graph whenever*

- (s) *every maximal clique of G has a simplicial vertex.* □

Let us remark that condition (s): is only sufficient but not necessary. For example, (s) holds for the first graph in Figure 1 but not for the other three graphs. Let us also remark that (s) does not hold for both graphs in Figure 2. Furthermore, (s) holds for the graphs of Figures 6, 7, and 10 and (s) does not hold for the graphs of Figures 4, 5, and 9, because they are not CIS-graphs.

By Proposition 1, given an arbitrary graph G , we can get a CIS-graph G^s just adding a simplicial (private) vertex v_C to each maximal clique C of G that does not have one.

Let us remark that we have to add such a vertex to C even when $C \cap S \neq \emptyset$ for each maximal stable set S in G , since otherwise C may become disjoint from a new maximal stable set of G^s ; consider, for example, $G = \overline{C_6}$.

Obviously, the size of G^s may be exponential in the size of G .

Corollary 1. *Any graph G is an induced subgraph of a CIS-graph.*

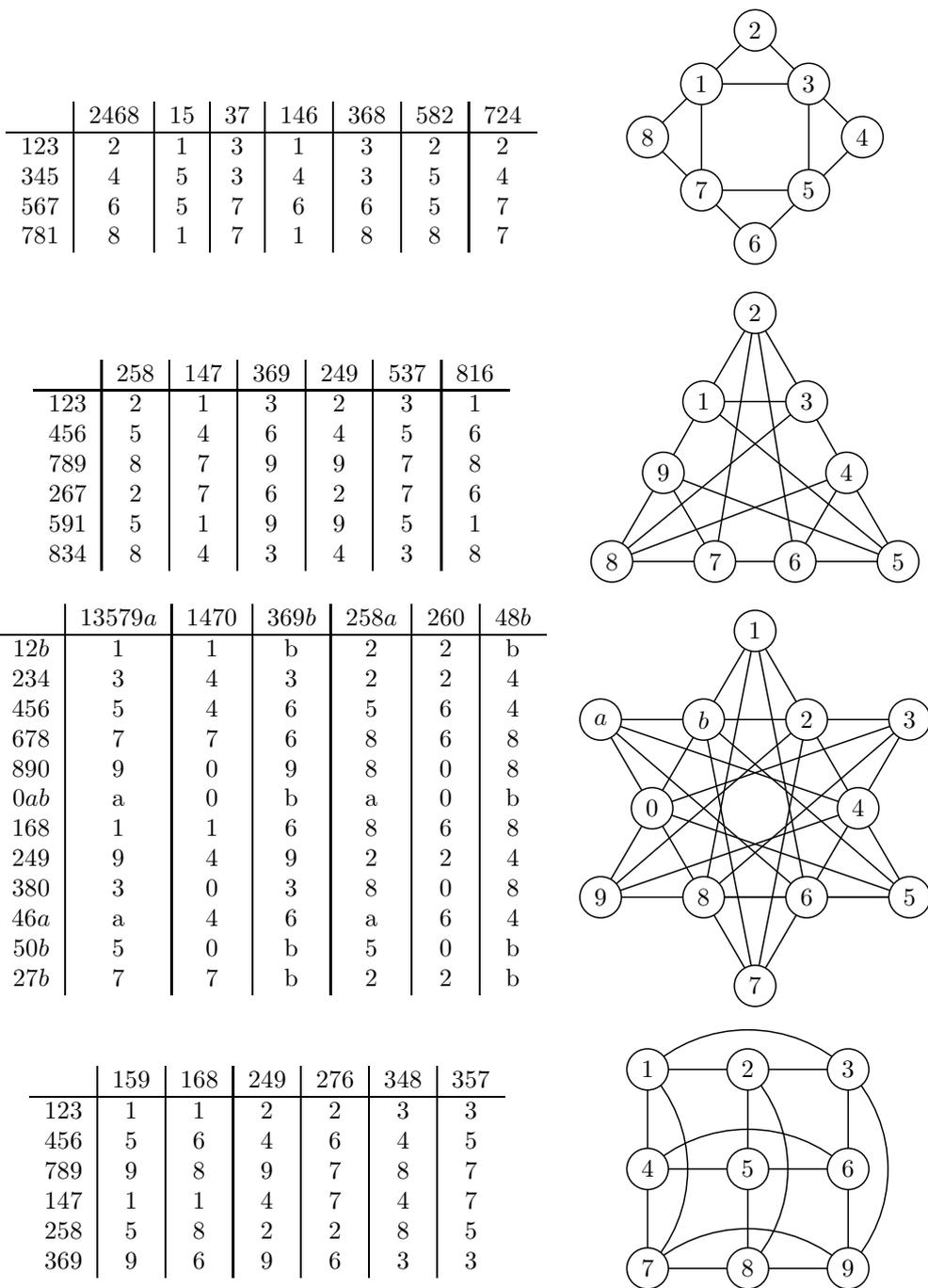


Figure 1: Four CIS-graphs and their intersection matrices.

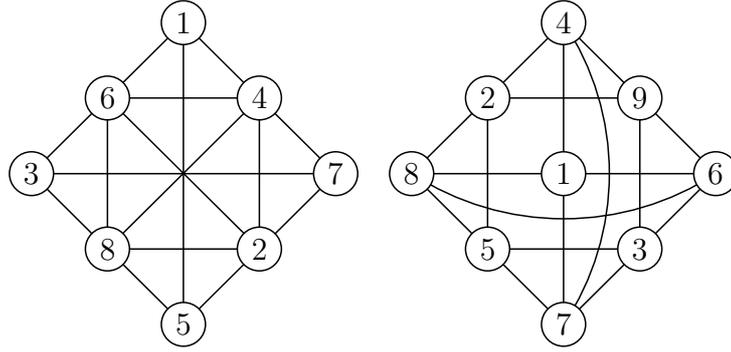


Figure 2: Complements to the first two graphs in the previous Figure. (Obviously, for every graph G the intersection matrix of \overline{G} is the transposed of the intersection matrix of G .)

Proof. Indeed, for any graph G the CIS-graph G^s contains G as an induced subgraph. \square

Thus, CIS-graphs cannot be characterized in terms of forbidden induced subgraphs. This is not surprising, since the CIS-property is not hereditary.

Remark 1. *Interestingly, this mapping $f : G \rightarrow G^s$ can be viewed as a “bridge” between perfect graphs and cooperative games [2]. Given a graph $G = (V, E)$, let $\mathcal{C} = \mathcal{C}_G$ and $\mathcal{S} = \mathcal{S}_G$ be, respectively, the families of all maximal cliques and stable sets of G . Let us assign a player (voter) i_C to each maximal clique $C \in \mathcal{C}_G$ and an outcome (candidate) a_S to each maximal stable set $S \in \mathcal{S}_G$. Furthermore, to every vertex $v \in V$ let us assign a coalition of players $K_v = \{i_C \mid v \in C\} \subseteq \mathcal{C}_G$ and block of outcomes $B_v = \{a_S \mid v \in S\} \subseteq \mathcal{S}_G$. Then let us introduce a family of coalitions $\mathcal{K}_G = \{K_v \mid v \in V\}$ and define an effectivity function $\mathcal{E}_G : 2^{\mathcal{C}} \times 2^{\mathcal{S}} \rightarrow \{0, 1\}$ by formula $\mathcal{E}_G(K, B) = 1$ iff $K_v \subseteq K$ and $B_v \subseteq B$ for some $v \in V$. It is proved in [2, 3, 4] that the following claims are equivalent:*

- (i) Graph G is perfect;
- (ii) Effectivity function \mathcal{E}_G is stable;
- (iii) Family of coalitions \mathcal{K}_G is stable.
- (iv) Family of coalitions \mathcal{K}_{G^s} is partitionable.

A family of sets is called partitionable if every its minimal balanced subfamily is a partition. A family of coalitions or an effectivity function is called stable if the corresponding core is not empty for any utility function. We refer to [2, 3, 4] for accurate definitions.

1.2 Almost CIS-graphs and split graphs

We will call a graph $G = (V, E)$ an *almost CIS-graph* if every (maximal) clique C and stable set S in G intersect, except for a unique pair (C_0, S_0) .

By definition, almost CIS-graphs are closed under complementation. However, unlike CIS-graphs, they are not closed under substitution.

Notice that, by definition, the families of CIS- and almost CIS-graphs are disjoint.

Let us recall that $G = (V, E)$ is a *split* graph if $V = C_0 \cup S_0$, where C_0 and S_0 are (maximal) clique and stable set, respectively. Foldes and Hammer [15] showed that split graphs are exactly $(C_4, \overline{C_4}, C_5)$ -free graphs.

It is not difficult to see that every split graph is either a CIS-graph or an almost CIS-graph. More precisely, the following claim holds.

Proposition 2. *Let $G = (V, E)$ be a split graph in which C_0 and S_0 are maximal and $V = C_0 \cup S_0$. If $C_0 \cap S_0 \neq \emptyset$ then G is a CIS-graph, otherwise, if $C_0 \cap S_0 = \emptyset$, then G is an almost CIS-graph in which (C_0, S_0) is the only disjoint pair.*

Proof. Obviously, for each maximal clique C and stable set S in G we have: $C_0 \cap S \neq \emptyset$ unless $S = S_0$ and $C \cap S_0 \neq \emptyset$ unless $C = C_0$. Let us assume that both intersections are non-empty (then, clearly, each of them consists of a single vertex) and denote $C_0 \cap S$ by v_S and $C \cap S_0$ by v_C . If $v_C = v_S$ then $C \cap S = \{v_S\} = \{v_C\}$. Otherwise, if $(v_C, v_S) \in E$ then $C \cap S = \{v_S\}$; if $(v_C, v_S) \notin E$ then $C \cap S = \{v_C\}$. In any case $C \cap S \neq \emptyset$.

Thus, if $C \cap S = \emptyset$ then $C = C_0, S = S_0$, and $C_0 \cap S_0 = \emptyset$. □

Conjecture 1. *Every almost CIS-graph is a split graph.*

By [15], it would be sufficient to show that almost CIS graphs are $(C_4, \overline{C_4}, C_5)$ -free.

It would be also sufficient to prove that if (C_0, S_0) is the unique disjoint pair of an almost CIS-graph $G = (V, E)$ then $V = C_0 \cup S_0$, that is, $V' = V \setminus (C_0 \cup S_0) = \emptyset$. However, we can only show that the corresponding induced subgraph $G[V']$ cannot be a split graph. In other words, G is not almost CIS-graph whenever $V = C_0 \cup S_0 \cup C \cup S$, where C and C_0 are cliques, S and S_0 are stable sets, C_0 and S_0 are maximal, and $C_0 \cap S_0 = \emptyset$. However, we cannot prove that $V' = \emptyset$.

Obviously, given a split graph G with a unique disjoint pair $C_0 \cap S_0 = \emptyset$, we can get a split CIS-graph G_0 by adding to G the new vertex v_0 which is connected to each vertex of C_0 and to no vertex of S_0 . In other words, v_0 is a simplicial vertex of $C \cup \{v_0\}$ in G_0 and of $\overline{S} \cup \{v_0\}$ in $\overline{G_0}$.

1.3 P_4 -free CIS-graphs

We proceed with the following simple observation: every P_4 -free graph is a CIS-graph; see e.g. [12, 13, 16, 18, 19, 21, 25, 37]. In fact, a stronger claim holds. We say that a set $T \subseteq V$ is a transversal of the hypergraphs $\mathcal{H} \subseteq 2^V$ if $T \cap H \neq \emptyset$ for all hyperedges $H \in \mathcal{H}$. The family of minimal transversals of \mathcal{H} is denoted by \mathcal{H}^d and is called the *dual* of \mathcal{H} . Given a graph $G = (V, E)$ we assign to it two hypergraphs, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_G$ the collection of all maximal cliques of G , and $\mathcal{S} = \mathcal{S}_G$ the collections of all its maximal stable sets.

Proposition 3 ([18, 21, 25]). *A graph G has no induced P_4 if and only if the hypergraphs \mathcal{C} and \mathcal{S} of all maximal cliques and stable sets of G are dual hypergraphs.* □

Furthermore, P_4 -free graphs are closely related to *read-once* Boolean functions and 2-person positional games, see for definitions, e.g., [17, 20, 21, 25].

Remark 2. Read-once Boolean functions can be efficiently characterized, since their co-occurrence graphs are P_4 -free, [12, 13, 18, 19, 21, 25]. Moreover, the normal forms of positional 2-person games with perfect information can be characterized by Proposition 3 [19, 20, 21]. Such a normal form is exactly the intersection matrix of the maximal cliques and stable sets of the corresponding graph, where the final positions (outcomes) of the game are in one-to-one correspondence with the vertices of this graph. See an example in Figure 3, where the monotone Boolean functions $F_S = 13 \vee 24$ and $F_C = (1 \vee 3)(2 \vee 4)$ corresponding to the hypergraphs $\mathcal{S} = \{(1, 3), (2, 4)\}$ and $\mathcal{C} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ are read-once.

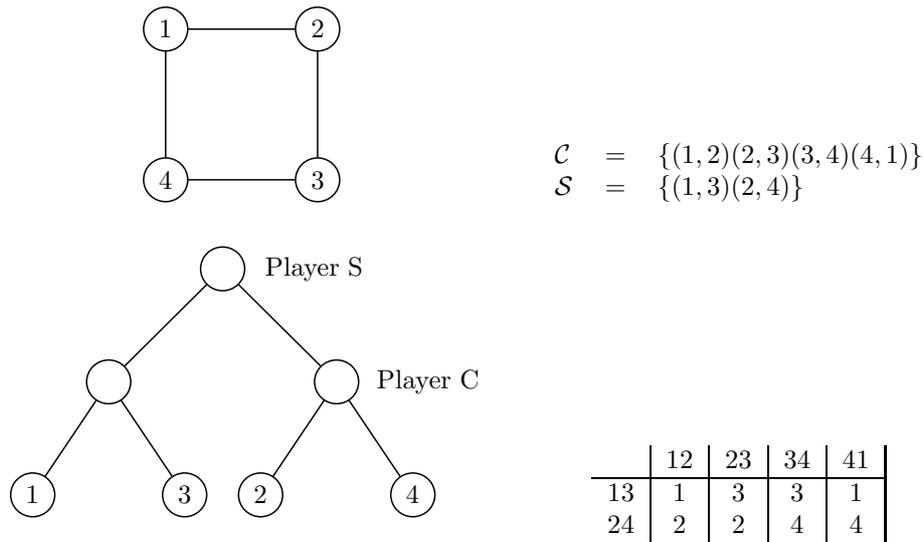


Figure 3: A P_4 -free graph and the corresponding positional and normal game forms

However, the absence of induced P_4 s is only sufficient but not necessary for the CIS-property to hold. Let a graph G contain an induced P_4 defined by $(v_1, v'_1), (v_2, v'_2), (v_1, v_2)$. The clique $\{v_1, v_2\}$ and stable set $\{v'_1, v'_2\}$ are disjoint. Hence, they cannot be maximal in G if it is a CIS-graph. In other words, G must contain a fifth vertex v_0 such that $(v_0, v_1), (v_0, v_2)$ are edges, while $(v_0, v'_1), (v_0, v'_2)$ are not. In this case we will say that P_4 is settled by v_0 , cf. [32]. Let us note that the graph induced by $\{v_0, v_1, v_2, v'_1, v'_2\}$ is a CIS-graph, see Figure 6.

Thus, every induced P_4 in a CIS-graph must be settled. This condition is necessary, as we argued above, yet, it is not sufficient, according to the following examples.

1.4 Combs and anti-combs

Given an integer $k \geq 2$, a *comb* (or k -comb) S_k is defined as a graph with $2k$ vertices k of which form a clique $C = \{v_1, \dots, v_k\}$, while the remaining k form a stable set $S = \{v'_1, \dots, v'_k\}$. In addition, S_k contains the perfect matching (v_i, v'_i) for $i = 1, \dots, k$, and there are no more edges in S_k . Let us note that graphs S_2 and P_4 are isomorphic. Furthermore,

S_3 contains 3 induced S_2 and all 3 are settled. More generally, S_k contains k induced S_{k-1} and they all are settled. Figure 4 shows S_k , for $k = 2, 3$, and 4.

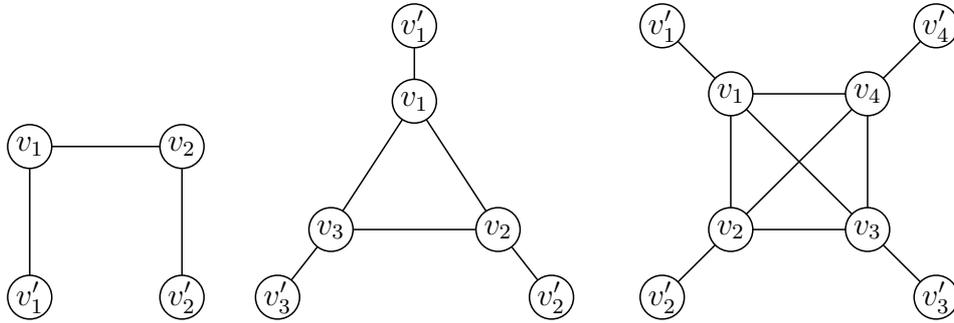


Figure 4: Combs S_k , for $k = 2, 3$ and 4

The complementary graph $\overline{S_k}$ is called an *anti-comb* (or k -anti-comb). Figure 5 shows $\overline{S_k}$ for $k = 2, 3$, and 4.

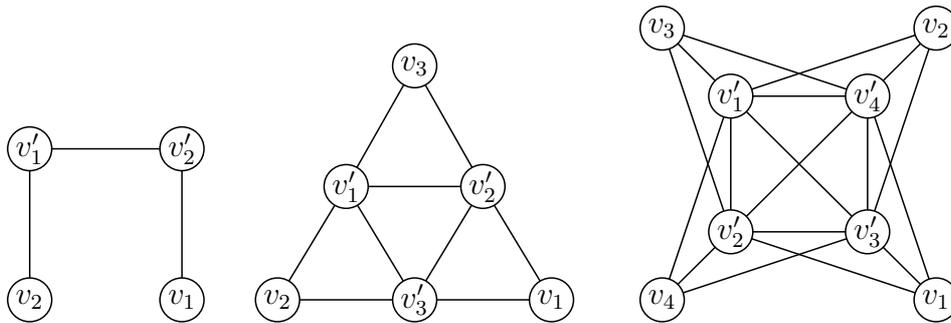


Figure 5: Anti-combs $\overline{S_k}$, for $k = 2, 3$ and 4.

Clearly, the sets S and C are switched in S_k and $\overline{S_k}$. It is also clear that combs and anti-combs are not CIS-graphs, since they contain a maximal clique C and stable set S that are disjoint. Hence, if a CIS-graph G contains an induced comb S_k (respectively, anti-comb $\overline{S_k}$) then it must be *settled*, that is, G must contain a vertex v_0 adjacent to each vertex of C and to no vertex of S . Thus, the following condition is necessary for the CIS-property to hold.

(COMB) Every induced comb and anti-comb must be settled in G .

Figures 6 and 7 show settled combs and anti-combs. It is easy to verify that they are complementary CIS-graphs. Hence, the corresponding intersection matrices are mutually transposed.

The following obvious properties of combs and anti-combs are worth summarizing:

- The 2-comb S_2 and 2-anti-comb $\overline{S_2}$ are isomorphic, while the k -comb S_k and k -anti-comb $\overline{S_k}$ are not isomorphic for $k > 2$.

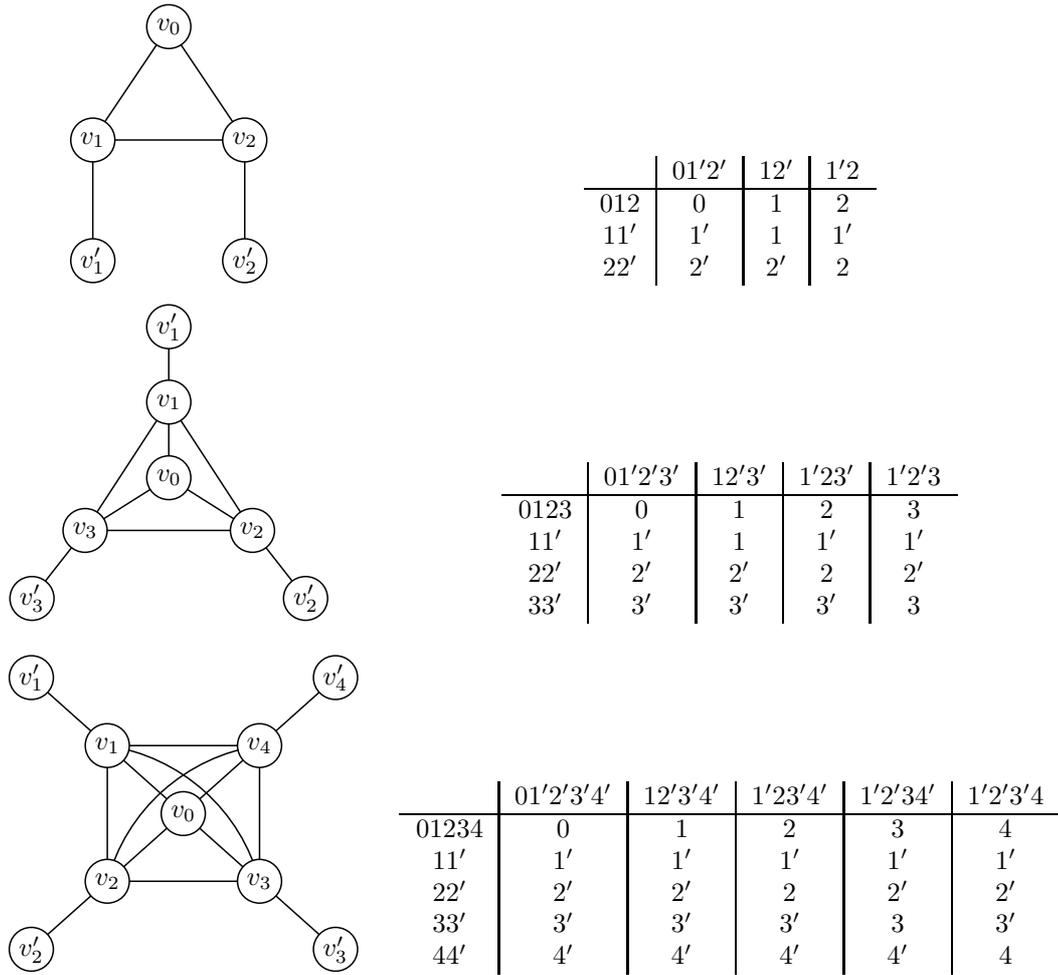


Figure 6: Settled combs S_k , for $k = 2, 3$ and 4 .

- The k -comb S_k contains $\binom{k}{m}$ induced m -combs S_m that are all settled in S_k , yet, it contains no induced m -anti-combs $\overline{S_m}$ for $m > 2$; respectively, the k -anti-comb $\overline{S_k}$ contains $\binom{k}{m}$ induced m -anti-combs $\overline{S_m}$ that are all settled in $\overline{S_k}$, yet, it contains no induced m -combs S_m for $m > 2$.
- The settled k -comb and anti-comb are complementary CIS-graphs.

Obviously, **COMB** is a necessary condition for the CIS-property to hold. Yet, it is not sufficient, as we will see in Section 1.5. Let us introduce the following stronger condition.

COMB(3, 3) There is no induced 3-comb or 3-anti-comb, and every induced 2-comb is settled in G .

Our main result claims that this stronger condition already implies the CIS-property.

Theorem 1. *A graph G is a CIS-graph whenever it satisfies **COMB(3, 3)**.*

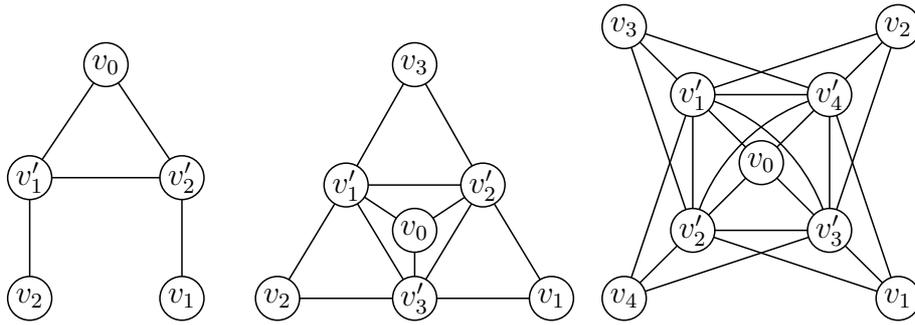


Figure 7: Settled anti-combs \overline{S}_k , for $k = 2, 3$ and 4 .

We give the proof in Section 2. It contains a complicated case analysis in which one of the cases is especially interesting and results in a remarkable graph that is “almost” a counterexample to Theorem 1. This graph $2\mathcal{P}$ (see Figure 8) consists of two identical copies of the Petersen graph induced by the vertices v_0, \dots, v_9 and v'_0, \dots, v'_9 respectively. Furthermore, (v'_i, v_j) is an edge if and only if (v_i, v_j) is not, for all $i \neq j$. Ten remaining pairs, (v_i, v'_i) , $i = 0, \dots, 9$, are uncertain, that is, configuration $2\mathcal{P}$ represents in fact 2^{10} possible graphs rather than one graph. The following properties of $2\mathcal{P}$ are easy to see.

- (a) $2\mathcal{P}$ is isomorphic to its complement.
- (b) $2\mathcal{P}$ is regular of “degree 9.5”, that is, each vertex is incident to 9 edges and belongs to one uncertain pair.
- (c) For every two vertices u, v there is an automorphism α of $2\mathcal{P}$ such that $\alpha(u) = v$.
- (d) None of the 2^{10} graphs of $2\mathcal{P}$ contains an induced 3-comb or 3-anti-comb.
- (e) Every induced 2-comb in all 2^{10} graphs of $2\mathcal{P}$ involves a pair v_i, v'_i for some $i = 0, \dots, 9$.

In fact, 36 induced 2-combs appear, whenever we substitute a pair v_i, v'_i by an edge (or by a non-edge). It is easy to see that none of these 2-combs can be settled by a vertex of $2\mathcal{P}$, and if it is settled by a new vertex then an unsettled 3-comb or 3-anti-comb always appears. Thus, the case under consideration does not lead to a counterexample, and a complete case analysis yields the proof of Theorem 1, see Section 2.

Four examples of CIS-graphs satisfying condition **COMB**(3, 3) are given in Figure 1.

It would be interesting to analyze the following relaxations of condition **COMB**(3, 3) that are still stronger than **COMB**. Given integers $i, j \geq 2$, we say that a graph G satisfies condition **COMB**(i, j) if all induced combs and anti-combs in G are settled and, moreover, G contains no induced S_i and \overline{S}_j . By a natural convention we have **COMB** = **COMB**(∞, ∞).

Clearly, condition **COMB**(2, 2) implies the CIS-property, since it means that the graph is P_4 -free. In fact, we have **COMB**(2, 2) \equiv **COMB**(2, i) \equiv **COMB**($i, 2$) for every $i \geq 2$,

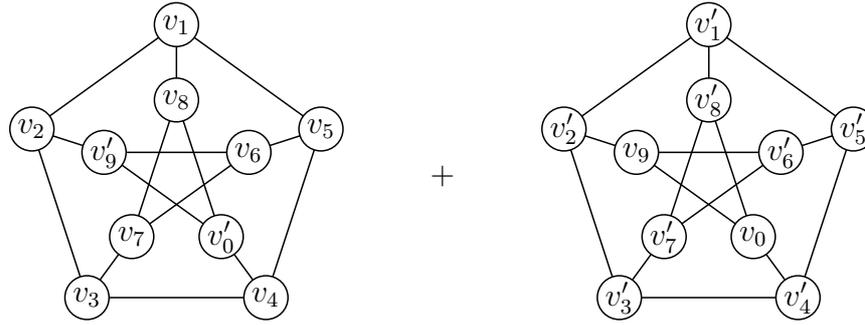


Figure 8: Graph $2\mathcal{P}$.

since the 2-comb $S_2 \equiv P_4$ is self-complementary and every comb and anti-comb contains an induced 2-comb. Furthermore, condition $\mathbf{COMB}(i, j)$ is monotone in the sense that it implies $\mathbf{COMB}(i', j')$ for all $i \leq i'$ and $j \leq j'$, and symmetric, in the sense that $\mathbf{COMB}(i, j)$ implies the CIS-property if and only if $\mathbf{COMB}(j, i)$ does (due to the fact that G is a CIS-graph if and only if its complement \overline{G} is a CIS-graph).

According to Theorem 1, condition $\mathbf{COMB}(3, 3)$ implies the CIS-property. However, it is not known whether $\mathbf{COMB}(4, 4)$ or $\mathbf{COMB}(3, j)$ for some $j \geq 4$ imply the CIS-property or not. Certainly, condition $\mathbf{COMB}(5, 4)$ does not, as the next section shows.

1.5 (n, k, ℓ) -graphs and their complements

The following graph $G = (V, E)$ was suggested by Ron Holzman in 1994. It has $\binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 5 + 10 = 15$ vertices, where subsets $S = \{v_1, \dots, v_5\}$ and $C = \{v_{12}, \dots, v_{45}\}$ induce a stable set and clique, respectively; $V = C \cup S$ (hence, G is a split graph); furthermore, every pair (v_i, v_{ij}) , where $i, j = 1, \dots, 5$ and $i \neq j$, is an edge, and there are no more edges. Let us denote this graph by $G(5, 1, 2)$, see Figure 9.

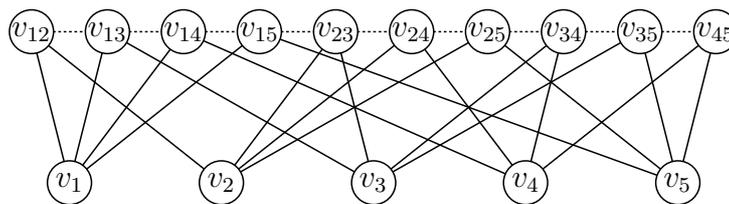


Figure 9: Graph $G(5, 1, 2)$ was constructed by Ron Holzman in 1994.

It is easy to verify that $G(5, 1, 2)$ contains no induced 5-combs and 4-anti-combs. In section 3 we will show that all induced combs and anti-combs in $G(5, 1, 2)$ are settled. For example, the 4-comb induced by vertices $(v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_2, v_3, v_4, v_5)$ is settled by v_1 and the 3-anti-comb induced by $(v_{12}, v_{13}, v_{23}, v_1, v_2, v_3)$ is settled by v_{45} , etc. Thus, the graph

$G(5, 1, 2)$ satisfies condition **COMB**(5, 4), however, it is not a CIS-graph, since $C \cap S = \emptyset$. Let us notice that the settled extension of $G(5, 1, 2)$ is a CIS-graph, see Figure 10.

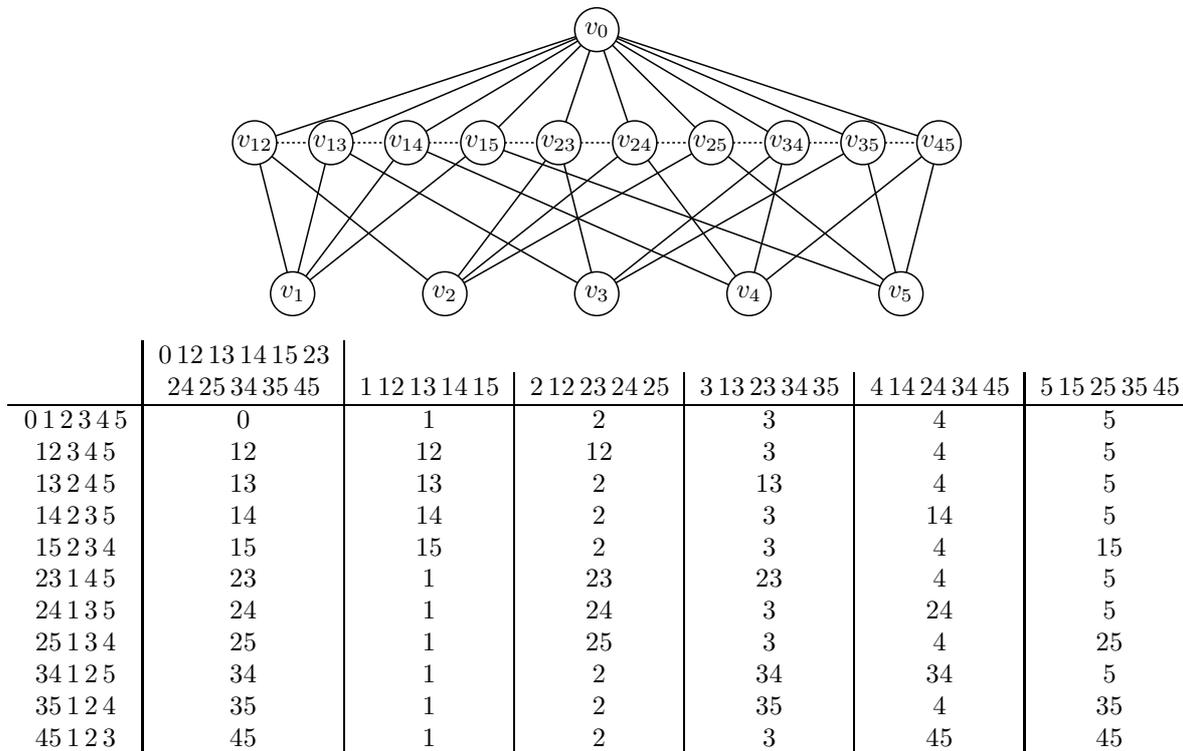


Figure 10: Settled $G(5, 1, 2)$.

We generalize the above example as follows. Given integers n, k, ℓ such that $n > k \geq 1$ and $n > \ell \geq 1$, consider a set S (respectively, C) consisting of $\binom{n}{k}$ (respectively, $\binom{n}{\ell}$) vertices labeled by k -subsets (respectively, by ℓ -subsets) of a ground n -set. Let us introduce the graph $G(n, k, \ell)$ on the vertex-set $C \cup S$ such that S is a stable set, C is a clique, and a vertex of S is adjacent to a vertex of C if and only if the corresponding k -set is either a subset or a superset of the corresponding ℓ -set. Obviously, $G(n, k, \ell)$ is not a CIS-graph, since $C \cap S = \emptyset$. However, some of these graphs satisfy the condition **COMB**, for example, $G(5, 1, 2)$. Moreover, $G(5, 1, 2)$ satisfies the stronger condition **COMB**(5, 4).

By definition, $G(n, 1, 1) = S_n$ is an n -comb and $G(n, n - 1, 1) = \overline{S_n}$ is an n -anti-comb. Furthermore, it is easy to see that

- (i) the graphs $G(n, k, \ell)$ and $G(n, n - k, n - \ell)$ are isomorphic.

Hence, without loss of generality we can assume that $k \leq \ell$ and even that $k < \ell$, since $G(n, k, k)$ is just a comb $S_{\binom{n}{k}}$. Then, from the simple fact that a set contains an element if and only if the complementary set does not contain it, we derive

- (ii) the graphs $G(n, k, 1)$ and $G(n, 1, n - k)$ are complementary.

Thus, the graphs $G(n, k, n-1)$ and $G(n, n-k, 1)$ are isomorphic by (i) and complementary to $G(n, 1, k)$ by (ii). Hence, without loss of generality we can assume that $\ell \leq n-2$. Summarizing, we will assume in the sequel that

$$1 \leq k < \ell \leq n-2. \quad (1.1)$$

In section 3 we will prove the following two claims analyzing the existence of unsettled anti-combs and combs in $G(n, k, \ell)$.

Theorem 2.

(i) *Each induced anti-comb in $G(n, k, \ell)$ is settled whenever*

$$n > \frac{k+1}{k}\ell.$$

(ii) *An unsettled induced anti-comb exists in $G(n, k, \ell)$ whenever*

$$k + \ell \leq n \leq \frac{k+1}{k}\ell.$$

Theorem 3.

(a) *Each induced comb is settled in $G(n, 1, \ell)$, and it is settled in $G(n, 2, \ell)$ whenever*

$$n < 2\ell - 3.$$

(b) *An unsettled induced comb exists in $G(n, k, \ell)$ for $k \geq 2$ whenever*

$$n \geq \frac{k}{k-1}\ell - \frac{r}{k-1} \quad \text{or} \quad n = \frac{k}{k-1}\ell - \frac{r}{k-1} - 1 \quad \text{and} \quad \ell > r + k^2 - k,$$

where $r \equiv \ell \pmod{k-1}$ and $r \in \{2, 3, \dots, k\}$.

Let us denote by \mathbf{G} the subfamily of graphs $G(n, k, \ell)$ whose induced combs and anti-combs are all settled and n, k, ℓ satisfy (1.1).

Corollary 2. *For $k=1$ and $k=2$ the membership in \mathbf{G} is characterized as follows:*

$$\begin{aligned} G(n, 1, \ell) \in \mathbf{G} & \quad \text{iff} \quad n > 2\ell \\ G(n, 2, \ell) \in \mathbf{G} & \quad \text{iff} \quad 2\ell - 3 > n > (3/2)\ell. \end{aligned}$$

Proof. By (1.1) we have $n \geq \ell + 2 \geq \ell + k$, whenever $k \leq 2$, and thus, by Theorem 2, all induced anti-combs are settled in $G(n, k, \ell)$ for $k \leq 2$ if and only if $n > \frac{k+1}{k}\ell$. This and (a) of Theorem 3 then implies the claim for $k = 1$.

If $k = 2$ then $G(n, 2, \ell)$ has an unsettled comb, by (b) of Theorem 3, if $n \geq 2\ell - 2$ or if $n = 2\ell - 3$ and $\ell > 4$, since $r = 2$ in this case. However, if $n = 2\ell - 3$ then $\ell \geq 5$ by (1.1). Hence, the second condition holds automatically, and therefore by (a) and (b) of Theorem 3, we can conclude that $G(n, 2, \ell)$ has an unsettled comb if and only if $n \geq 2\ell - 3$. \square

Thus, for $k = 1$ we get $\{G(5, 1, 2), G(6, 1, 2), G(7, 1, 2), G(7, 1, 3), \dots\} \subseteq \mathbf{G}$ and for $k = 2$ we get $\{G(14, 2, 9), G(16, 2, 10), G(17, 2, 11), G(18, 2, 11), G(19, 2, 12), G(20, 2, 13), \dots\} \subseteq \mathbf{G}$.

Remark 3. Notice that conditions (i) and (ii) of Theorem 2 provide an almost complete characterization of the existence of unsettled anti-combs in $G(n, k, \ell)$. However, it is not clear if condition $n \geq k + \ell$ in part (ii) is necessary. Note that if $k \leq 2$, then this condition holds automatically by (1.1). For instance, we do not know if $G(8, 3, 6)$ has an unsettled anti-comb. Computer experiments show that there are no unsettled m -anti-combs for $m \leq 10$. In any case, $G(8, 3, 6)$ has an unsettled 6-comb, by Theorem 3.

Let us also note that we know much less about combs. For instance, we could only treat the case of $k \leq 2$ in (a) of Theorem 3, though we conjecture that a similar claims can hold for all k . For example, $G(10, 3, 8)$ is the smallest graph for which we do not know if it contains an unsettled comb or anti-comb.

Based on the proofs of the above theorems and on several numerical examples we conjecture that membership in \mathbf{G} can be characterized by inequalities of the approximate form

$$\frac{k}{k-1}\ell + O(k) \geq n \geq \frac{k+1}{k}\ell - O(k).$$

This is certainly the case for $k \leq 2$, by Corollary 2.

By definition, in a graph $G = G(n, k, \ell) \in \mathbf{G}$, as well as in its complement \overline{G} , all induced combs and anti-combs are settled, that is, both G and \overline{G} satisfy the condition **COMB**. Let us notice however that \overline{G} is not an (n, k, ℓ) -graph unless $k = 1$. (Recall that $G(n, 1, \ell)$ and $G(n, n - \ell, 1)$ are complementary.)

It seems that every non-CIS-graph satisfying **COMB** contains either an induced $G(n, k, \ell) \in \mathbf{G}$ or its complement. At least, we have no counterexample for this claim.

Let us add that, unlike the case of combs and anti-combs, one graph from \mathbf{G} may contain another as an unsettled induced subgraph. For example, $G(6, 1, 2)$ contains an unsettled induced $G(5, 1, 2)$, while in $G(7, 1, 2)$ all induced $G(5, 1, 2)$ are settled. Yet, in $G(7, 1, 2)$ there is an unsettled induced $G(6, 1, 2)$. Vice versa, in $G(7, 1, 3)$ each induced $G(6, 1, 2)$ is settled but there are unsettled induced $G(5, 1, 2)$. Further, in $G(8, 1, 3)$, all induced $G(5, 1, 2)$ and $G(7, 1, 2)$ are settled but there are unsettled induced $G(6, 1, 2)$ and $G(7, 1, 3)$. Due to this “non-transitivity”, in order to enforce the CIS-property for a graph G , it seems easier to assume that all induced subgraphs from \mathbf{G} as well as their complements are settled in G . Of course, it is even simpler to assume that G does not contain such subgraphs at all.

Conjecture 2. *If G contains no induced $G(5, 1, 2)$ nor its complement $G(5, 3, 1)$ and all induced combs and anti-combs are settled in G then G is a CIS-graph.*

We remark here that $G(n, k, l)$ contains an induced $G(n', k', l')$ whenever $n' \leq n$, $k' \leq k$, and $l' \leq l$.

Remark 4. *Let us note that CIS-graphs and perfect graphs look somewhat similar. Both classes are closed with respect to complementation and substitution. Odd holes and anti-holes are similar to combs and anti-combs. The following two tests look similar too: whether G contains an induced odd hole or anti-hole and whether G contains an induced unsettled comb or anti-comb. It seems that CIS-graphs, like perfect graphs, may allow a simple characterization and a polynomial recognition algorithm (that may be very difficult to obtain, though).*

However, there are dissimilarities, too. The property of perfectness is hereditary, unlike the CIS-property. Also, there are non-CIS-graphs in which all induced combs and anti-combs are settled. (By Conjecture 2, every such graph contains an induced $G(5, 1, 2)$ or its complement $G(5, 3, 1)$.)

Remark 5. *CIS-graphs were recently mentioned (under the name of stable graphs) in [38], where it is shown that recognition of stable graphs is a special case of a difficult problem (strongly bipartite bihypergraph recognition problem) introduced in this paper. Based on this observation, the authors conjecture that recognition of stable graphs is co-NP-complete. However, we conjecture that this problem is polynomial.*

The following relaxation of the CIS-property was considered in [26] and [36].

Triangle condition: *for every maximal stable set S and every edge (u, v) such that $u, v \notin S$ there exists a vertex $w \in S$ such that vertices u, v, w induce a clique.*

Obviously, each CIS-graph has this property.

1.6 Gallai's and CIS- d -graphs.

Let us generalize the concept of a CIS-graph as follows. For a given integer $d \geq 2$, a complete graph whose edges are colored by d colors $\mathcal{G} = (V; E_1, \dots, E_d)$ is called a d -graph. To a given d -graph \mathcal{G} let us assign a family of d hypergraphs $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{G}) = \{\mathcal{C}_i \mid i = 1, \dots, d\}$ on the common vertex-set V , where the hyperedges of \mathcal{C}_i are all inclusion maximal subsets of V containing no edges of color i . We say that \mathcal{G} is a *CIS- d -graph* (has the *CIS- d -property*) if $\bigcap_{i=1}^d C_i \neq \emptyset$ for all selections $C_i \in \mathcal{C}_i$ for $i = 1, \dots, d$. Obviously, such an intersection can contain at most one vertex. If $d = 2$ then we obtain the original concept of *CIS-graphs*. (More accurately, CIS-2-graph is a pair of two complementary CIS-graphs.) Similarly to CIS-graphs, CIS- d -graphs also satisfy a natural requirement that can be considered as a generalization of settling. Assume that X_i is a clique in the subgraph $G_i = (V, \cup_{j \neq i} E_j)$ for $i = 1, \dots, d$, and that $\bigcap_{i=1}^d X_i = \emptyset$. Then, these cliques cannot all be maximal and, hence, there must be a vertex $x \in V$ such that for every $i = 1, \dots, d$ and $y \in X_i$ we have $(x, y) \notin E_i$. We will say in this case that $\{X_1, \dots, X_d\}$ are *settled* by x .

Given a CIS- d -graph \mathcal{G} , let us assign to it a d -dimensional table $g = g(\mathcal{G})$, that is, a mapping $g : \mathcal{C}_1 \times \dots \times \mathcal{C}_d \rightarrow V$ defined by the rule: $g(C_1, \dots, C_d) = v$ whenever $\{v\} = \bigcap_{i=1}^d C_i$. Let us observe that this d -dimensional array is partitioned by the elements of V into $n = |V|$ sub-arrays called *boxes*, since the following implication holds:

if $g(C'_1, \dots, C'_d) = g(C''_1, \dots, C''_d) = v$, then v belongs to all these $2d$ sets, and hence, $g(C_1, \dots, C_d) = v$ for all 2^d choices $C_i \in \{C'_i, C''_i\}$, $i = 1, \dots, d$.

Let us further introduce two special edge colored graphs. Let Π denote the 2-colored graph whose both chromatic components form a P_4 , that is, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; $E_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$, and $E_2 = \{(v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_1, v_3)\}$. Furthermore, let Δ denote the 3-colored triangle, for which $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E_1 = \{(v_1, v_2)\}$, $E_2 = \{(v_2, v_3)\}$, and $E_3 = \{(v_3, v_1)\}$. Figure 12 illustrates these graphs.

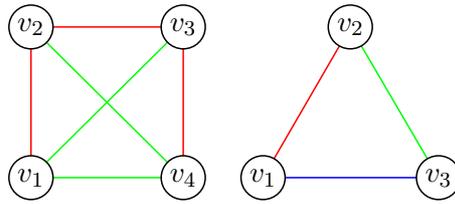


Figure 11: Colored Π and Δ .

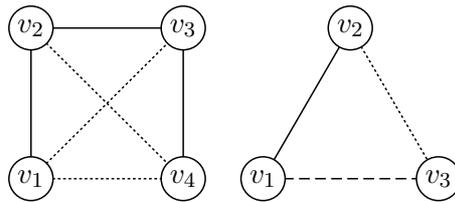


Figure 12: Colored Π and Δ (in black and white for printing).

Proposition 4 ([19, 21]). *Every Π - and Δ -free d -graph is a CIS- d -graph.* □

In fact, a stronger claim holds.

Proposition 5 ([19, 20, 21]). *A d -graph \mathcal{G} is Π - and Δ -free if and only if the corresponding mapping $g(\mathcal{G})$ defines the normal form of a positional d -person game with perfect information whose final positions (outcomes of the game) are in one-to-one correspondence with the vertices of \mathcal{G} .* □

For example, let us consider the Π - and Δ -free 3-graph \mathcal{G} given in Figure 13. For this graph we have $\mathcal{C}_1 = \{(1, 3), (2, 4)\}$, $\mathcal{C}_2 = \{(1, 2, 4), (2, 3, 4)\}$, and $\mathcal{C}_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 4)\}$. The mapping $g(\mathcal{G})$ and the corresponding positional game are shown in Figure 13.

Another example of a Π - and Δ -free 3-graph is given in Figure 14. In this case $\mathcal{C}_1 = \{(1), (2, 3, 4)\}$, $\mathcal{C}_2 = \{(1, 3), (1, 2, 4)\}$, and $\mathcal{C}_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 4)\}$. The mapping $g(\mathcal{G})$ and the corresponding positional game are shown in Figure 14.

Of course, the condition that a d -graph \mathcal{G} must be Π - and Δ -free is only sufficient but not necessary for the CIS- d property to hold. On the other hand, the following condition is clearly

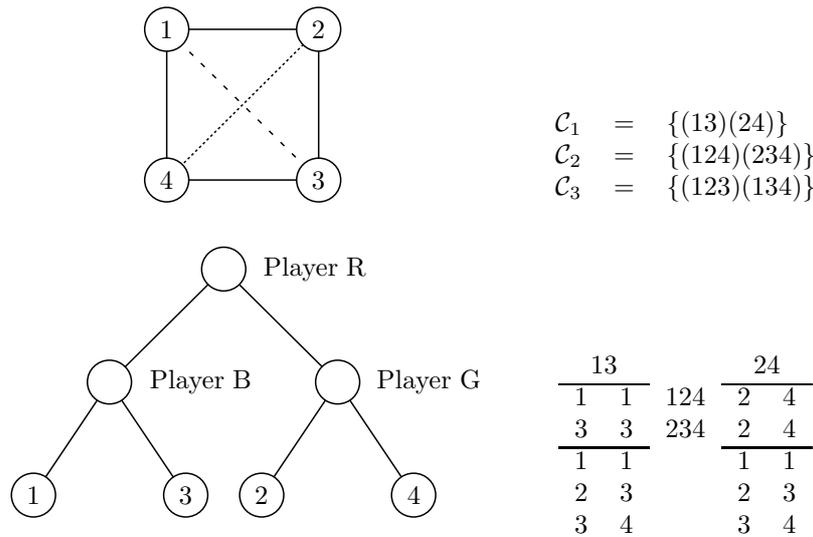


Figure 13: A Π - and Δ -free 3-graph and the corresponding positional and normal game forms.

necessary. Given a d -graph $\mathcal{G} = (V; E_1, \dots, E_d)$ and a partition $P_1 \cup \dots \cup P_\delta = \{1, \dots, d\}$ of its colors, let us define a δ -graph $\mathcal{G}' = (V; E'_1, \dots, E'_\delta)$ by setting $E'_i = \cup_{j \in P_i} E_j$, $i = 1, \dots, \delta$ and call \mathcal{G}' the δ -projection of \mathcal{G} .

Proposition 6. *Let \mathcal{G} be a CIS- d -graph whose set of colors $\{1, \dots, d\}$ is partitioned into δ non-empty subsets ($2 \leq \delta \leq d$) then the corresponding δ -graph \mathcal{G}' is a CIS- δ -graph.*

In particular, in case $\delta = 2$ we must get two complementary CIS-graphs.

The following conjecture is open since 1978.

Conjecture 3. ([19]) *Every CIS- d -graph is Δ -free.*

By Proposition 6, it would suffice to prove this conjecture for $d = 3$. In this case, it was verified up to $n = 12$ vertices by a computer code written by Steven Jaslar in 2003. We will consider this conjecture in Section 4 and show that, similarly to combs and anti-combs, all Δ s in a CIS- d -graph must be settled, and it takes two vertices to settle a Δ (see Section 4.2). Although there are d -graphs in which all Δ s are settled, yet, it seems impossible to have settled simultaneously all combs and anti-combs in all 2-projections of these d -graphs, a condition that is necessary by Proposition 6.

In the literature Δ -free d -graphs are called *Gallai's graphs*, since they were introduced by Gallai in [16]. We will call them Gallai's d -graphs which is more accurate. They are well studied [1, 8, 9, 10, 14, 24, 27, 28]. Conjecture 3 means that CIS- d -graphs form a subfamily of Gallai's d -graphs. Next, we will characterize Gallai's CIS- d -graphs in terms of CIS-graphs. Hence, to characterize CIS- d -graphs it would suffice to do it for $d = 2$ and prove Conjecture 3.

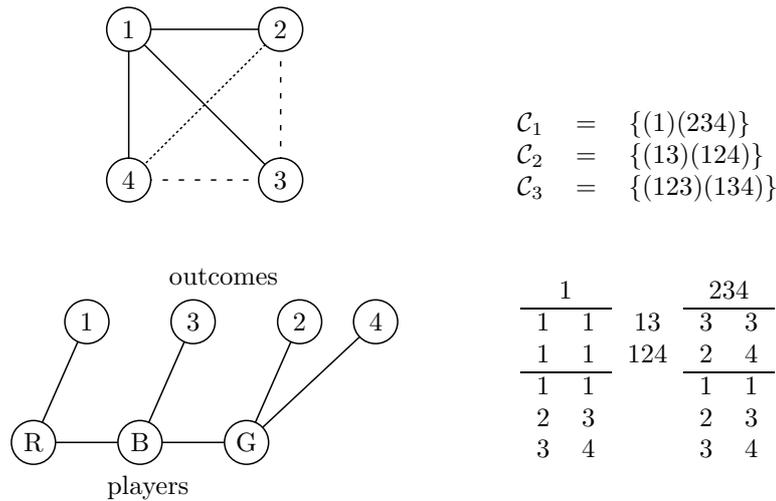


Figure 14: A Π - and Δ -free 3-graph and the corresponding positional and normal game forms.

First, let us note that both Gallai’s and CIS- d -graphs are closed under substitution. (For Gallai’s d -graphs this is well known [8, 24].) Moreover, the inverse claims hold too.

Proposition 7. *Let us substitute a d -graph \mathcal{G}'' for a vertex v of a d -graph \mathcal{G}' and denote the obtained d -graph by $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{G}', v, \mathcal{G}'')$. Then \mathcal{G} is a Gallai (respectively, CIS-) d -graph if and only if both \mathcal{G}' and \mathcal{G}'' are Gallai’s (respectively, CIS-) d -graphs.*

In case $d = 2$ this proposition implies the similar property for CIS-graphs.

Proposition 8. *Let us substitute a graph G'' for a vertex v of a graph G' and denote the obtained graph by $G = G(G', v, G'')$. Then G is a CIS-graph if and only if both G' and G'' are CIS-graphs. \square*

Let us recall, however, that CIS- d -property is not hereditary, that is, an induced subgraph of a CIS- d -graph may have no CIS- d -property. In particular, for $d = 2$, this means that an induced subgraph of a CIS-graph may have no CIS-property.

Here and in the sequel we assume that the set of colors $[d] = \{1, \dots, d\}$ is the same for all considered d -graphs, while some chromatic components may be trivial (edge-empty). For example, by a 2-graph we mean a d -graph with at most 2 non-trivial chromatic components.

It is known that each Gallai d -graph can be obtained from 2-graphs by substitutions. More precisely, the following claim holds.

Proposition 9 (Cameron and Edmonds, [8]; Gyárfás and Simonyi, [24]). *For each Gallai d -graph \mathcal{G} there exist a 2-graph \mathcal{G}_0 with n vertices and n Gallai d -graphs $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ such that \mathcal{G} is obtained by substituting $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ for n vertices of \mathcal{G}_0 .*

In [24], this claim is derived from the following Lemma.

Lemma 1 ([16], [8], and [24]). *Every Gallai d -graph $\mathcal{G} = (V; E_1, \dots, E_d)$ with $d \geq 3$ has a color $i \in [d]$ that does not span V , or in other words, the graph $G_i = (V, E_i)$ is not connected.*

Remark 6. *It is interesting to compare Lemma 1 with the following Lemma from [19, 21]. If a d -graph \mathcal{G} is Π - and Δ -free then there exists a unique color $i \in [d]$ such that the complement of the i -th chromatic component, $\overline{G_i}$, is disconnected.*

Gyárfás and Simonyi remark that Lemma 1 “is essentially a content of Lemma (3.2.3) in [16]” and they derive Proposition 9 from it as follows. If $d \leq 2$ we are done. Otherwise, we have a color $i \in [d]$ such that graph $G_i = (V, E_i)$ is disconnected. It is not difficult to show that for each two of its connected components all edges between them are of the same color j (clearly, $j \neq i$), since otherwise a Δ appears.

Collapsing these components into vertices we get a smaller $(d - 1)$ -graph which is still Δ -free, by Proposition 7. By induction, $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ and \mathcal{G}_0 can be constructed as required. \square

Moreover, applying the above decomposition recursively, we can represent an arbitrary Gallai d -graph $\mathcal{G} = (V; E_1, \dots, E_d)$ by a substitution-tree $T(\mathcal{G})$ whose leaves are associated to 2-graphs. If $d \leq 2$ then \mathcal{G} itself is a 2-graph and $T(\mathcal{G})$ is reduced to one vertex. If $d \geq 3$ then, by Lemma 1, there is a color $i \in [d]$ such that the i -th component $G_i = (V, E_i)$ does not span V , or in other words, it is disconnected. Let $W \subset V$ be a connected component of G_i . Furthermore, let $G'' = G[W]$ be the subgraph of \mathcal{G} induced by W , while G' be obtained from \mathcal{G} by contracting W to a single new vertex v . Then, as it was shown above, substituting \mathcal{G}'' for v in \mathcal{G}' we get $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{G}', v, \mathcal{G}'')$; see Figure 15. If \mathcal{G}' (or \mathcal{G}'') is a 2-graph then it becomes a leaf of $T(\mathcal{G})$. Otherwise, if \mathcal{G}' (or \mathcal{G}'') has more than 2 non-trivial chromatic components, we decompose it further in the same way until only 2-graphs remain. They are the leaves of the obtained decomposition tree $T(\mathcal{G})$, as required.

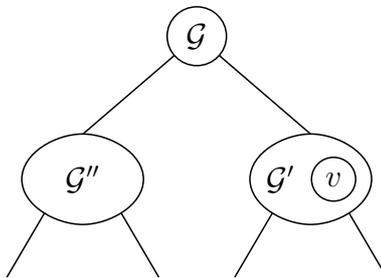


Figure 15: Decomposing \mathcal{G} by the tree $T(\mathcal{G})$; substituting \mathcal{G}'' for v in \mathcal{G}' to get \mathcal{G} .

It is well-known that decomposing a given graph into connected components can be executed in linear time. Hence, given \mathcal{G} , its decomposition tree $T(\mathcal{G})$ can be constructed in linear time, too.

Remark 7. *As defined above, tree $T(\mathcal{G})$ is not unique, since several chromatic components of \mathcal{G} may be disconnected and any connected component of any chromatic component can be chosen as W for the decomposition. Let us note, however, that the corresponding vertex sets are nested. More precisely, if E_i^a, E_j^b are connected components of colors $i, j \in [d]$ then the*

corresponding vertex-sets $V_i^a, V_j^b \subseteq V$ are either disjoint, or one of them is a subset of the other. Yet, the latter case cannot take place when $i = j$.

Let us also note that in general $T(\mathcal{G})$ can be extended further, since some 2-graphs also can be decomposed by substitution. Obviously, the decomposition of a 2-graph $\mathcal{G} = (V; E_1, E_2)$ is reduced to a decomposition of a graph, namely, of a chromatic component, $G_1 = G(V, E_1)$ or $G_2 = G(V, E_2)$.

In general, decomposing graphs (as well as d -graphs, digraphs, Boolean functions, etc.) by substitution is known as their modular decomposition. A module is a set $X \subseteq V$ such that no member of $V \setminus X$ distinguishes members of X . A set family \mathcal{F} is called decomposable if $X \cap Y, X \cup Y, X \setminus Y, Y \setminus X$, and $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ are in \mathcal{F} whenever $X, Y \in \mathcal{F}$ and $X \cap Y \neq \emptyset$. Möring [34] proved that the family of modules is decomposable and hence, there is a unique canonical modular decomposition tree.

In general, modular decomposition is more complicated than decomposition of Gallai's d -graphs. There have been a number of $O(n^4), O(n^3), O(mn), O(n^2), O(n + m \log n)$ algorithms. Finally, $O(m + n)$ algorithms were given by Cournier and Habib [11] and McConnell and Spinrad [33]. Some linear time algorithms work for graphs, d -graphs, digraphs, and Boolean functions. See [6, 7, 33, 34, 35] for a survey on modular decomposition.

We make use of the decomposition tree $T(\mathcal{G})$ to recognize whether \mathcal{G} is a CIS- d -graph. Obviously, by Propositions 7, we can extend Proposition 9 as follows.

Proposition 10. *A Gallai d -graph \mathcal{G} has the CIS- d -property if and only if all $n + 1$ d -graphs $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_n$ and \mathcal{G}_0 from Proposition 9 have this property. \square*

Thus, every Gallai's CIS- d -graph can be obtained from CIS-2-graphs by recursive substitutions, and hence, a characterization or polynomial recognition algorithm of CIS-graphs would provide one for the Gallai CIS- d -graphs too.

From Propositions 6, 9, and 10 we will derive the following two claims.

Proposition 11. *A Gallai d -graph \mathcal{G} is a CIS- d -graph if and only if all d of its chromatic components are CIS-graphs.*

The “only if” part follows from Proposition 6 and “if” part can be strengthened as follows.

Proposition 12. *Given a Gallai d -graph \mathcal{G} such that at least $d - 1$ of its d chromatic components are CIS-graphs, then \mathcal{G} is a CIS- d -graph.*

In particular, the remaining chromatic component of \mathcal{G} must be a CIS-graph.

In the next subsection we generalize the last claim by showing that it holds not only for CIS-graphs but also for perfect graphs and, in fact, for every family of graphs satisfying some simple requirements.

Yet, of course, it is essential that \mathcal{G} is a Gallai d -graph. For example, let us consider a 3-graph \mathcal{G} in Figure 16. Graphs G_1 and G_2 are isomorphic, each of them is a settled 2-comb with one isolated vertex. Hence, they are CIS-graphs. Yet, G_3 is not, since the stable set $S = \{2, 3, 5, 6\}$ and clique $C = \{1, 4\}$ are disjoint. However, \mathcal{G} is not Gallai's 3-graph, for example, $\{5, 6, 1\}$ as well as $\{1, 2, 3\}$ is a Δ .

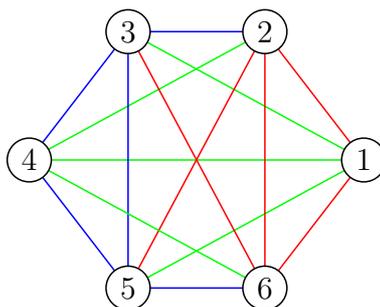


Figure 16: A non-Gallai 3-graph in which G_1 and G_2 are CIS-graphs, while G_3 is not.

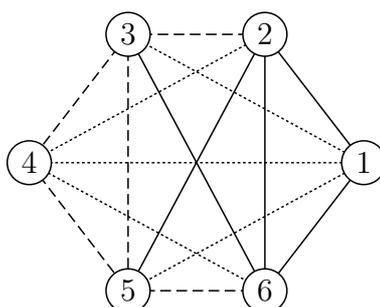


Figure 17: A non-Gallai 3-graph in which G_1 and G_2 are CIS-graphs, while G_3 is not (in black and white for printing).

1.7 Extending Cameron-Edmonds-Lovász' Theorem

Cameron, Edmonds, and Lovász [9] proved the statement similar to Proposition 12 for perfect graphs: given a Gallai d -graph, if at least $d-1$ of its chromatic components are perfect graphs, then the remaining component is a perfect graph, too. Later, Cameron and Edmonds [8] showed that, in fact, the statement holds for any family of graphs that is closed under: (i) substitution, (ii) complementation, and (iii) taking induced subgraphs. For example, it holds for P_4 -free graphs, or in other words, for the components of Π - and Δ -free d -graphs [19].

However, CIS-graphs satisfy only (i) and (ii) but not (iii). Nevertheless, the statement holds for them too; see Proposition 12.

In general, one can substitute the following property for (iii).

Let us say that a family of graphs (or d -graphs) \mathcal{F} is *exactly closed under substitution* $G = G(G', v, G'')$ whenever $G \in \mathcal{F}$ if and only if both G' and G'' belong to \mathcal{F} .

For example, CIS-graphs are exactly closed under substitution, by Propositions 8, and both, Gallai's and CIS- d -graphs, by Propositions 7.

Proposition 13. *If \mathcal{F} is closed under substitution and taking induced subgraphs then \mathcal{F} is exactly closed under substitution.*

Proof. Indeed, if $G = G(G', v, G'')$ then both G' and G'' are induced subgraphs of \mathcal{G} . □

We say that the family of graphs \mathcal{F} has the *CES-property* and call it a *CES-family* if \mathcal{F} is closed under complementation and exactly closed under substitution.

For example, the families of perfect graphs and CIS-graphs have the CES-property.

We strengthen Cameron-Edmonds' theorem as follows.

Theorem 4. *Let \mathcal{F} be a CES-family of graphs and $\mathcal{G} = (V; E_1, \dots, E_d)$ be a Gallai d -graph such that at least $d - 1$ of its chromatic components, say, $G_i = (V, E_i)$ for $i = 1, \dots, d - 1$, belong to \mathcal{F} . Then*

(a) *the last component $G_d = (V, E_d)$ is in \mathcal{F} too, and moreover,*

(b) *all 2^d projections of \mathcal{G} belong to \mathcal{F} , that is, for each subset $I \subseteq [d] = \{1, \dots, d\}$ the graph $G_I = (V, \cup_{i \in I} E_i)$ is in \mathcal{F} .*

We will prove this Theorem in Section 4.1. By Proposition 13, part (a) implies Cameron-Edmonds' theorem. Since CIS-graphs form a CES-family, we obtain the following claim.

Corollary 3. *Let $\mathcal{G} = (V; E_1, \dots, E_d)$ be a Gallai d -graph such that at least $d - 1$ of its chromatic components are CIS-graphs. Then the remaining chromatic component of \mathcal{G} is a CIS-graph too; hence, \mathcal{G} is a CIS- d -graph and all its 2^d projections are CIS-graphs. \square*

1.8 On families of graphs closed with respect to substitution

To get more examples of CES-families let us, first, consider hereditary classes. Each such class is a family of graphs \mathcal{F} defined by a family, finite or infinite, of forbidden subgraphs \mathcal{F}' . By definition, $G \in \mathcal{F}$ if and only if G contains no induced subgraph isomorphic to a $G' \in \mathcal{F}'$.

Let us call a graph (or d -graph) G *substitution-prime* (or just, prime, for brevity) if it is not decomposable by substitution, or more precisely, if $G = G(G', v, G'')$ for no G', G'' and v , except for two trivial cases: ($G = G'$ and $V(G'') = \{v\}$) or ($G = G''$ and $V(G') = \{v\}$).

Suppose that G is decomposable, $G = G(G', v, G'')$. Then, as we already mentioned, both G' and G'' are induced subgraphs of G . Hence, if G' or G'' contains an induced subgraph G_0 then G also contains it. However, G may contain G_0 even if G' and G'' do not. Yet, clearly, in this case G_0 is not substitution-prime. Thus, for both, graphs and d -graphs, we obtain the following statement.

Proposition 14. *Family \mathcal{F} is exactly closed under substitution if all (d -)graphs in \mathcal{F}' are substitution-prime. \square*

The inverse holds too if we assume (by the way, without any loss of generality) that no (d -)graph of \mathcal{F}' contains another one as an induced subgraph. Thus, \mathcal{F} is a CES-family (and, hence, it satisfies all conditions of Theorem 4) whenever \mathcal{F}' is closed under complementation ($G \in \mathcal{F}'$ if and only if $\overline{G} \in \mathcal{F}'$) and \mathcal{F}' contains only substitution-prime graphs.

For example, these two properties hold for the odd holes and anti-holes. In this case, \mathcal{F} is the family of Berge graphs. Thus, Theorem 4 and the Strong Perfect Graph Theorem imply the Cameron-Edmonds-Lovász Theorem [9]. Of course, it can be proved simpler: first,

show that perfect graphs are exactly closed under substitution, [30], and then apply Lovász' perfect graph theorem, [29, 30], instead of the strong one.

Another example is provided by the family \mathcal{F} of P_4 -free graphs. In this case $\mathcal{F}' = \{P_4\}$ and all conditions of Theorem 4 hold, since P_4 is self-complementary and prime.

Remark 8. *Moreover, in this case, it is easy to verify directly claims (a) and (b) of Theorem 4, see [19]. The following implication is instrumental: if a d -graph $\mathcal{G} = (V; E_1, \dots, E_d)$ is Π - and Δ -free then every its 2-projection $\mathcal{G}' = (V; E'_1, E'_2)$ is Π -free too.*

A similar example is given by the family \mathcal{F} of A -free graphs. In this case $\mathcal{F}' = \{A\}$, where A is the settled P_4 (or in other words, settled 2-comb, or bull-graph). Like P_4 , it is also self-complementary and substitution-prime.

However, if \mathcal{F}' contains a decomposable graph, e.g., C_4 , then \mathcal{F} may be not closed under substitution. For example, let $\mathcal{F}' = \{C_4, \overline{C_4}\}$ and consider the Gallai 3-graph in Figure 13. Two of its chromatic components belong to \mathcal{F} , while the third one, C_4 , does not.

As another example, let us consider $\mathcal{F}' = \{C_4, \overline{C_4}, C_5\}$. By [15], \mathcal{F} is the family of split graphs. This family is self-complementary, yet, it is not closed under substitution. Indeed, substituting, for example, a non-edge for the middle vertex of P_3 we get C_4 .

There are also non-hereditary families of graphs (respectively, d -graphs) closed under substitution; for example, CIS-graphs (respectively, CIS- d -graphs). It is not difficult to give more examples of such families and even to characterize them. Given a family \mathcal{F}' , finite or infinite, of (d -)graphs, let us denote by $cl(\mathcal{F}')$ its closure with respect to substitution.

Proposition 15. *A family \mathcal{F} of (d -)graphs is exactly closed under substitution if and only if $\mathcal{F} = cl(\mathcal{F}')$, where \mathcal{F}' is a family, finite or infinite, of substitution-prime (d -)graphs. Furthermore, \mathcal{F} is closed under complementation whenever \mathcal{F}' is.*

Proof. The second claim makes sense only for graphs and it is obvious. The first one follows from uniqueness of the canonical modular decomposition [34]. \square

The obtained family $\mathcal{F} = cl(\mathcal{F}')$ is not hereditary if and only if there are substitution-prime (d -)graphs $G \in \mathcal{F}'$ and $G' \notin \mathcal{F}'$ such that G' is an induced subgraph of G . For example, let $\mathcal{F}' = \{A\}$ contains only the bull-graph A then $\mathcal{F} = cl(\mathcal{F}')$ contains no 2-comb.

However, the characterization of the CES-families by Proposition 15 is not constructive. For example, the substitution-prime perfect or CIS-graphs form infinite families that are difficult to describe explicitly.

1.9 Almost CIS- d -graphs

A d -graph $\mathcal{G} = (V; E_1, \dots, E_d)$ will be called an *almost CIS- d -graph* if $\bigcap_{i=1}^d C_i = \emptyset$ for exactly one d -tuple C_1, \dots, C_d , where $C_i \subseteq V$ is an inclusion maximal vertex-set containing no edges of color i , that is, for each $i \in [d] = \{1, \dots, d\}$, we have $(v, v') \in E_i$ for no $v, v' \in C_i$,

Notice that, by definition, the families of CIS- and almost CIS- d -graphs are disjoint.

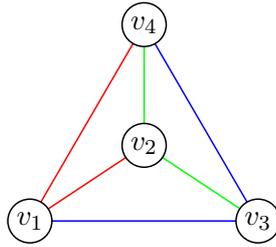


Figure 18: Almost CIS-3-graph Δ' .

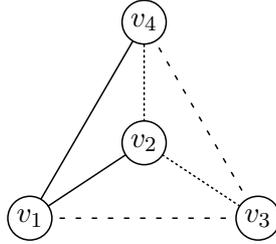


Figure 19: Almost CIS-3-graph Δ' (in black and white for printing).

For $d = 2$ we return to the definition of almost CIS-graphs. More precisely, an almost CIS-2-graph is a pair of two complementary almost CIS-graphs.

By Proposition 2, any split graph is either a CIS- or almost CIS-graph. Moreover, we conjecture that, except split graphs, there are no other almost CIS-graphs. The latter are in a natural one-to-one correspondence with the split almost CIS-2-graphs. Let us recall that we may have $d \geq 2$ for a 2-graph. In particular, for an arbitrary $d \geq 2$ and almost CIS graph $G = (V, E)$ let us define a d -graph $\mathcal{G} = (V; E_1, \dots, E_d)$ by setting $E_1 = E$, $E_2 = \overline{E}$, and $E_i = \emptyset$ for each $i > 2$. It is easy to see that \mathcal{G} is an almost CIS- d -graph.

Let us note that already the 3-graph Δ is not almost CIS, since it has two distinct triplets $C_1 = \{v_2, v_3\}$, $C_2 = \{v_3, v_1\}$, $C_3 = \{v_1, v_2\}$ and $C'_1 = \{v_3, v_1\}$, $C'_2 = \{v_1, v_2\}$, $C'_3 = \{v_2, v_3\}$ such that $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \emptyset$ and $C'_1 \cap C'_2 \cap C'_3 = \emptyset$; see Section 4.2 for more details.

However, it is not difficult to extend Δ to an almost CIS-3-graph. Indeed, let us add to Δ a new vertex v_4 such that $(v_1, v_4) \in E_1$, $(v_2, v_4) \in E_2$, $(v_3, v_4) \in E_3$, and denote the obtained 3-graph by Δ' . In other words, $\Delta' = (V; E_1, E_2, E_3)$, where

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}; E_1 = \{(v_1, v_2), (v_1, v_4)\}, E_2 = \{(v_2, v_3), (v_2, v_4)\}, E_3 = \{(v_3, v_1), (v_3, v_4)\}. \tag{1.2}$$

It is easy to see that in Δ' vertices v_1, v_2, v_3 induce Δ and that

$$\mathcal{C}_1 = \{(v_3, v_1), (v_2, v_3, v_4)\}, \mathcal{C}_2 = \{(v_1, v_2), (v_3, v_1, v_4)\}, \mathcal{C}_3 = \{(v_2, v_3), (v_1, v_2, v_4)\}.$$

Thus, Δ' is an almost CIS-3-graph, since only one of its eight triplets has the empty intersection: $\{v_3, v_1\} \cap \{v_1, v_2\} \cap \{v_2, v_3\} = \emptyset$.

Remark 9. We can say that vertex v_4 settles one of the above two triplets of Δ , namely, (C_1, C_2, C_3) . However, if we introduce one more vertex v_5 to settle (C'_1, C'_2, C'_3) , too, then we have to choose a color for (v_4, v_5) . It is easy to verify that for each coloring of it a new Δ appears that should be, in its turn, settled, etc.; see Section 4.2 for more details.

Furthermore, it is not difficult to verify that Δ' is a unique almost CIS-3-graph with four vertices. Let us recall that there are also two CIS-3-graphs given in Figures 13 and 14.

Standardly, for any $d \geq 3$ we obtain an almost CIS-3-graph $\mathcal{G} = (V; E_1, \dots, E_d)$ setting E_1, E_2, E_3 , and V by (1.2) and $E_i = \emptyset$ for each $i > 3$.

Let us also remark that, unlike CIS- d -graphs, almost CIS- d -graphs (and, in particular, almost CIS-graphs) are not closed under substitution. Nevertheless, we get an almost CIS-3-graph substituting Δ' for a vertex of a 1-graph \mathcal{G} . More precisely, \mathcal{G} is a monochromatic clique whose all edges are colored by one of the three colors of Δ' .

However, if all edges of \mathcal{G} are colored by a new, fourth, color then the obtained 4-graph is not almost CIS. Similarly, we won't get an almost CIS-3- or 4-graph by substituting Δ' for more than one vertex of \mathcal{G} , nor, vice-versa, by substituting \mathcal{G} for a vertex of Δ' .

Finally, let us mention that we are not aware of any other almost CIS- d -graphs.

2 Proof of Theorem 1

In this section we prove Theorem 1 which claims that graphs satisfying condition COMB(3, 3) are CIS-graphs. First we describe the structure of our proof and a few main lemmas, then we give the complete proofs which are technical, long, and partially computer assisted.

2.1 Plan of the proof of Theorem 1

Let us assume by contradiction that there is a graph G such that

- (i) it contains no induced 3-combs and 3-anti-combs,
- (ii) each induced 2-comb is settled in G , and
- (iii) there exist a maximal clique C and a maximal stable set S in G such that $S \cap C = \emptyset$.

First, we will prove that G must contain an induced subgraph G_{10} , shown in Figure 20.

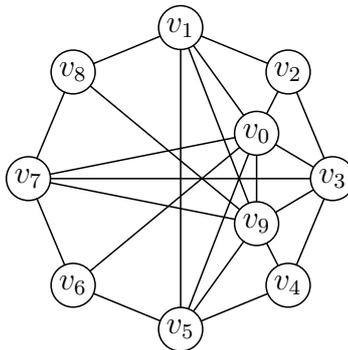


Figure 20: Graph G_{10} .

Lemma 2. *If G satisfies conditions (i), (ii), and (iii), then G must contain an induced G_{10} .*

Graph G_{10} contains no induced 3-combs and 3-anti-combs, yet it contains several unsettled induced 2-combs. To settle them we have to introduce 10 new vertices that, somewhat surprisingly, induce a graph isomorphic to G_{10} itself (since otherwise an induced 3-comb or 3-anti-comb would appear). Moreover, the obtained 20-vertex graph is the sum of two Petersen graphs, that is, the graph $2\mathcal{P}$ described in section 1.4, Figure 8.

Lemma 3. *If G contains an induced G_{10} and satisfies conditions (i) and (ii), then G must contain an induced $2\mathcal{P}$.*

Let us recall that $2\mathcal{P}$ contains 10 uncertain pairs of vertices each of which can be either an edge or non-edge. Hence in fact, $2\mathcal{P}$ represent $2^{10} = 1024$ graphs. We will show that all these 1024 graphs contain no induced 3-combs and 3-anti-combs and, moreover, each induced 2-comb in $2\mathcal{P}$ (that contains no uncertain pair) is settled. However, 36 induced 2-combs appear in $2\mathcal{P}$ whenever we fix any uncertain pair either as an edge or as a non-edge. It is easy to see that none of these 2-combs are settled in $2\mathcal{P}$. We will show that they cannot be settled in G either, because if a vertex of G were settling one of them then an induced 3-comb or 3-anti-comb would exist in G . We can reformulate this result as follows.

Lemma 4. *If G satisfies conditions (i) and (ii), then it cannot contain an induced $2\mathcal{P}$.*

Obviously, the above 3 lemmas prove Theorem 1 by contradiction. We will prove Lemmas 2, 3, and 4 below in Sections 2.2, 2.3, and 2.4, respectively.

The last two proofs are computer assisted. We use two procedures, one for generating all induced 2-combs, 3-combs, and 3-anti-combs of a given graph G , and a second one for testing if all induced 2-combs are settled in G , and outputting all non-settled ones.

2.2 Proof of Lemma 2

Let us consider a pair of disjoint maximal clique C and maximal stable set S of G , as in condition (iii). Let $N_S(v)$ be the set of neighbors of v in S . Notice that

$$\bigcap_{v \in C} N_S(v) = \emptyset, \quad (2.3)$$

because C is maximal. Moreover,

$$N_S(v) \neq \emptyset \quad \text{for all } v \in C, \quad (2.4)$$

because S is maximal.

We assume that G satisfies conditions (i), (ii), and (iii). The following series of claims will imply the lemma.

Claim 4.1. *Given a maximal clique C and a (not necessarily maximal) stable set S in G such that $C \cap S = \emptyset$, there exists vertices $u, v \in C$ such that $N_S(u) \cap N_S(v) = \emptyset$.*

Proof. Assume by contradiction that for all pairs of vertices $u, v \in C$, we have $N_S(u) \cap N_S(v) \neq \emptyset$. By this assumption, $|C| \geq 3$, otherwise C would not be maximal.

So let $I = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ be a minimal subset of C such that $\bigcap_{v \in I} N_S(v) = \emptyset$. Such a minimal subset of C exists according to (2.3). Furthermore, by our assumption $|I| \geq 3$.

Now, define $u_i \in \bigcap_{j \neq i} N_S(v_j)$ for $i = 1, \dots, k$. Note that $u_i \neq u_j$, due to the minimality of I . Thus, any 3 vertices $v_1, v_2, v_3 \in I$ with the corresponding u_1, u_2, u_3 form an \overline{S}_3 (see Figure 21), contradicting condition (i). \square

Note that for this claim we only need that G is S_3 -free.

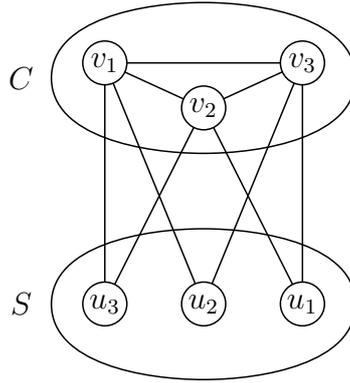


Figure 21: Illustration of the proof of Claim 4.1.

From Claim 4.1, it follows that there are some pairs of vertices $u, v \in C$ such that $N_S(u) \cap N_S(v) = \emptyset$. Hence, there exist $x \in N_S(u)$ and $y \in (N_S(v))$ such that x, u, v, y form an S_2 not settled by any vertex of S . The following claim states a useful property of any vertex $w \in V(G)$ settling such an S_2 .

Claim 4.2. *We have $N_S(w) \subseteq N_S(u) \cup N_S(v)$.*

Proof. First notice that $x, y \notin N_S(w)$ because w is a settling vertex. Then, assume by contradiction that there is a vertex $z \in N_S(w) \setminus (N_S(u) \cup N_S(v))$. Then, vertices u, v, w, x, y, z form an S_3 (see Figure 22), contradicting condition (i). \square

For the remainder of the proof we fix a maximal clique C , a maximal stable set S , and vertices $u, v \in C$ such that

- (iv) $C \cap S = \emptyset$, $N_S(u) \cap N_S(v) = \emptyset$, and $N_S(u) \cup N_S(v)$ is minimal,

among all possible choices of such sets C, S and vertices $u, v \in C$ satisfying the conditions of (iv). Let us note that by (2.3) and (2.4), we have such a selection of C, S, u , and v for which $N_S(u) \neq \emptyset$, $N_S(v) \neq \emptyset$, and hence $u \neq v$.

Claim 4.3. *Let $x \in N_S(u)$, $y \in N_S(v)$, and w be a vertex of $V(G)$ that settles $S_2 = \{x, u, v, y\}$. Then, $N_S(w) \cap N_S(u) \neq \emptyset$ and $N_S(w) \cap N_S(v) \neq \emptyset$.*

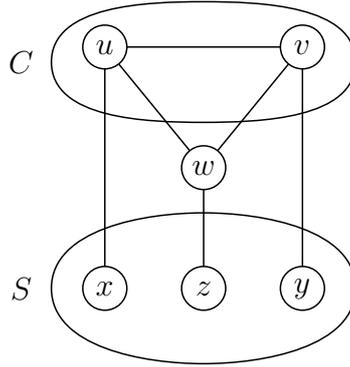


Figure 22: Illustration of the proof of Claim 4.2.

Proof. From Claim 4.2, we know that $N_S(w) \subseteq N_S(u) \cup N_S(v)$. Assume by contradiction that e.g., $N_S(w) \cap N_S(u) = \emptyset$. This implies that $N_S(w) \subseteq N_S(v) \setminus \{y\}$ (since w is settling S_2).

Then, consider a maximal clique $C' \supseteq \{u, w\}$. Notice that $C' \cap S = \emptyset$ because $N_S(w) \cap N_S(u) = \emptyset$. But $N_S(u) \cup N_S(w) \subsetneq N_S(u) \cup N_S(v)$, since $y \notin N_S(u) \cup N_S(w)$, contradicting property (iv), that is, the minimality of $N_S(u) \cup N_S(v)$. \square

We define next a minimal collection of settling vertices \mathcal{W} . Given a maximal clique C , a maximal stable set S , and vertices $u, v \in C$ satisfying property (iv), let us consider all possible 2-combs induced by $\{x, u, v, y\}$ in G , where $x \in N_S(u)$ and $y \in N_S(v)$. Let us call a *settling vertex* a vertex w of G that settles such a 2-comb. If w is a settling vertex, then we have by Claims 4.2 and 4.3 that $X(w) = N_S(w) \cap N_S(u)$ and $Y(w) = N_S(w) \cap N_S(v)$ are subsets, uniquely defined by w , satisfying the following properties:

$$X(w) \neq \emptyset \quad Y(w) \neq \emptyset \quad \text{and} \quad N_S(w) = X(w) \cup Y(w). \quad (2.5)$$

Note that we may have $X(w) = X(w')$ and $Y(w) = Y(w')$ for two distinct settling vertices. Note further that if $X(w) \subseteq X(w')$ and $Y(w) \subseteq Y(w')$ hold for two vertices w and w' , then the set of S_2 subgraphs settled by w' are also settled by w .

Let us consider now all pairs of subsets (X, Y) such that $X = X(w)$ and $Y = Y(w)$ for some settling vertex w . Let us call such a pair (X, Y) *minimal*, if for there is no settling vertex w' such that $X(w') \subseteq X$, $Y(w') \subseteq Y$ and $X(w') \cup Y(w') \subsetneq X \cup Y$, and let \mathcal{XY} denote the collection of all such minimal pairs. For each pair $(X, Y) \in \mathcal{XY}$ let us choose one settling vertex $w = w_{XY}$ for which $X = X(w)$ and $Y = Y(w)$, and denote by $\mathcal{W} = \{w_{XY} \mid (X, Y) \in \mathcal{XY}\}$ the collection of these vertices.

Claim 4.4. *There are at least two distinct vertices in \mathcal{W} .*

Proof. The statement follows from the definition of \mathcal{W} and (2.5). Indeed, if $w_{XY} \in \mathcal{W}$, then by (2.5) there are vertices $x \in X$ and $y \in Y$, and hence the 2-comb S_2 induced by

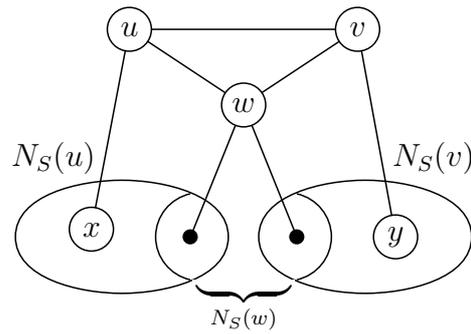


Figure 23

$\{x, u, v, y\}$ is not settled by w_{XY} . Let w be a vertex settling this 2-comb. By the minimality of (X, Y) the pair $(X(w), Y(w))$ is not comparable to (X, Y) , and hence we must have a pair $(X', Y') \in \mathcal{XY}$ such that $X' \subseteq X$ and $Y' \subseteq Y$. Consequently, $w_{X'Y'} \in \mathcal{W}$ and $w_{XY} \neq w_{X'Y'}$. \square

In the sequel we consider pairs of vertices from \mathcal{W} and derive some containment relations for the corresponding sets. First we consider pairs which are edges of G .

Claim 4.5. *If $(w_{XY}, w_{X'Y'}) \in E(G)$ and $X \cap X' \neq \emptyset$, then $Y \subseteq Y'$ or $Y' \subseteq Y$.*

Proof. Assume by contradiction that there is a vertex $x \in X \cap X'$, but $Y \not\subseteq Y'$ and $Y' \not\subseteq Y$, that is, there are vertices $y_1 \in Y \setminus Y'$ and $y_2 \in Y' \setminus Y$. Then, an \overline{S}_3 is formed by $w_{XY}, w_{X'Y'}, v, x, y_1, y_2$ (see Figure 24), in contradiction to (i). \square

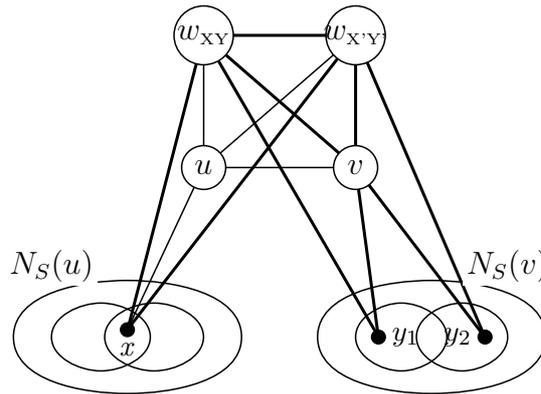


Figure 24: Illustration of the proof of Claim 4.5.

We next show a stronger version of the above claim, by proving proper containments.

Claim 4.6. *If $(w_{XY}, w_{X'Y'}) \in E(G)$ and $X \cap X' \neq \emptyset$, then either $Y \subsetneq Y'$ or $Y' \subsetneq Y$.*

Proof. Assume by contradiction that $X \cap X' \neq \emptyset$ and $Y = Y'$. By this assumption $Y \cap Y' \neq \emptyset$. Hence, we can apply Claim 4.5 (with the roles of X and Y exchanged), and conclude that $X \subseteq X'$ or $X' \subseteq X$.

Say e.g., that $X \subseteq X'$. Then, $X \cup Y \subseteq X' \cup Y'$, and consequently we would not have both $w_{X,Y}$ and $w_{X',Y'}$ in \mathcal{W} , by its definitions. □

Claim 4.7. *If $(w_{XY}, w_{X'Y'}) \in E(G)$, then exactly one of the following holds:*

- (a) $X \cap X' = Y \cap Y' = \emptyset$,
- (b) $(X \subsetneq X' \text{ and } Y' \subsetneq Y)$,
- (c) $(X' \subsetneq X \text{ and } Y \subsetneq Y')$.

Proof. This follows from Claim 4.6 by applying it twice: once directly and once exchanging the roles of X and Y . Since X, Y, X' and Y' are nonempty sets by (2.5), cases (a), (b) and (c) are pairwise exclusive. □

Next we consider pairs of settling vertices that are not edges of G .

Claim 4.8. *If $(w_{XY}, w_{X'Y'}) \notin E(G)$, then either $X \subseteq X'$ or $Y \subseteq Y'$.*

Proof. If not, then there are vertices $x \in X \setminus X'$ and $y \in Y \setminus Y'$ such that $\{w_{XY}, u, v, x, y, w_{X'Y'}\}$ form a 3-anti-comb \overline{S}_3 (see Figure 25), in contradiction to condition (i).

Note that we cannot have both containments in the claim, because of the minimality of pairs in \mathcal{XY} . □

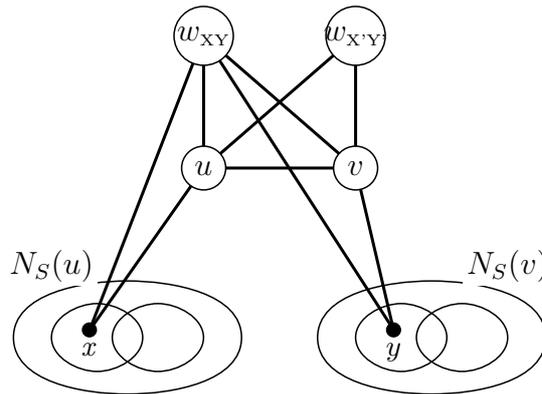


Figure 25: Illustration of the 3-anti-comb \overline{S}_3 induced by $\{w_{XY}, u, v, x, y, w_{X'Y'}\}$.

Claim 4.9. *If $(w_{XY}, w_{X'Y'}) \notin E(G)$, then exactly one of the following must hold:*

- (a) $X \subsetneq X'$ and $Y' \subsetneq Y$,
- (b) $X' \subsetneq X$ and $Y \subsetneq Y'$,
- (c) $X = X'$,
- (d) $Y = Y'$.

Proof. Since the roles of (X, Y) and (X', Y') are symmetric, it follows directly by Claim 4.8 that one of (a), (b), (c), or (d) holds. To see that exactly one of them holds, it is enough to note that (c) and (d) together would contradict the minimality of the pairs $(X, Y) \in \mathcal{XY}$. \square

We are going to show next that if (c) or (d) holds in the previous claim for some vertices $w_{XY}, w_{X'Y'} \in \mathcal{W}$, then G contains an induced G_{10} , as claimed in Lemma 2. For this end, let us first observe that if e.g., (d) holds, then we cannot have $X \subseteq X'$ or $X' \subseteq X$, by the minimality and uniqueness of pairs in \mathcal{XY} . Consequently, we can choose vertices $x \in X \setminus X'$, and $x' \in X' \setminus X$. Let us also choose an arbitrary vertex $y \in Y = Y'$ (which exists by (2.5)), and consider first the 2-comb S_2 induced by $\{x, u, v, y\}$. This 2-comb is settled by neither w_{XY} nor $w_{X'Y'}$, and therefore there must be a vertex $w_{AB} \in \mathcal{W}$ settling it, since all 2-combs, containing (u, v) as their middle edge, are settled by some vertices in \mathcal{W} .

Claim 4.10. *If $Y = Y'$, then $(w_{AB}, w_{XY}) \in E(G)$.*

Proof. Since $x \notin A$ and $y \notin B$ we have

$$X \not\subseteq A \quad \text{and} \quad Y \not\subseteq B \tag{2.6}$$

implied. Assume indirectly that $(w_{AB}, w_{XY}) \notin E(G)$, then the previous observation implies that in Claim 4.9 applied to w_{XY} and w_{AB} none of (a), (b), (c) or (d) could hold. This contradiction proves the claim. \square

Claim 4.11. *If $Y = Y'$, then $A \cap X = B \cap Y = \emptyset$, $A \cup X = N_S(u)$ and $B \cup Y = N_S(v)$.*

Proof. Due to (2.6) only (a) of Claim 4.7 is possible, that is $A \cap X = B \cap Y = \emptyset$ is implied. Therefore the neighborhoods of w_{AB} and w_{XY} within S are disjoint, and since they are subsets of the neighborhoods of u and v , they cannot be proper subsets by property (iv), implying the statement. \square

Claim 4.12. *If $Y = Y'$, then $(w_{AB}, w_{X'Y'}) \notin E(G)$.*

Proof. Since $y \in Y' \setminus B$ and $x \in X \setminus A$ (since w_{AB} is settling $\{x, u, v, y\}$), cases (b) and (c) of Claim 4.7 cannot hold for the pair w_{AB} and $w_{X'Y'}$. Thus, if $(w_{AB}, w_{X'Y'}) \in E(G)$ then $A \cap X' = B \cap Y' = \emptyset$ would follow by Claim 4.7. Therefore, the neighborhoods of w_{AB} and $w_{X'Y'}$ in S are disjoint, and their union is a proper subset of $N_S(u) \cup N_S(v)$, in contradiction with property (iv). This contradiction proves the claim. \square

Claim 4.13. *If $Y = Y'$, then $A = X' = N_S(u) \setminus X$ and $Y = Y' = N_S(v) \setminus B$.*

Proof. Claim 4.11 and Claim 4.9 applied to w_{AB} and $w_{X'Y'}$ implies that only (c) of Claim 4.9 can hold. Thus, the statement implied by Claim 4.11 and (c) of Claim 4.9. \square

Let us still assume $Y = Y'$ and consider next the 2-comb induced by $\{x', u, v, y\}$ (where $x' \in X' \setminus X$). None of the vertices w_{XY} , $w_{X'Y'}$ and w_{AB} settle this 2-comb, hence, there is a vertex $w_{A'B'} \in \mathcal{W}$ that settles it. By exchanging the roles of w_{XY} and $w_{X'Y'}$ in Claims 4.10 - 4.13, we can conclude that

$$(w_{A'B'}, w_{XY}) \notin E(G), \quad (w_{A'B'}, w_{X'Y'}) \in E(G), \quad A' = X' \quad \text{and} \quad B = B'. \quad (2.7)$$

Claim 4.14. *If $Y = Y'$ or $X = X'$, then G contains an induced G_{10} .*

Proof. Note that the roles of conditions (c) and (d) in Claim 4.9 are perfectly symmetric, thus we could arrive to the same conclusions from both assumptions. Starting with $Y = Y'$ we arrived to the equalities of Claim 4.13 and (2.7). Choosing one vertex from each of the sets X , Y , A , and B , these four vertices together with u , v , w_{XY} , $w_{X'Y'}$, w_{AB} , and $w_{A'B'}$ form an induced G_{10} by the above claims and definitions (see Figure 26). \square

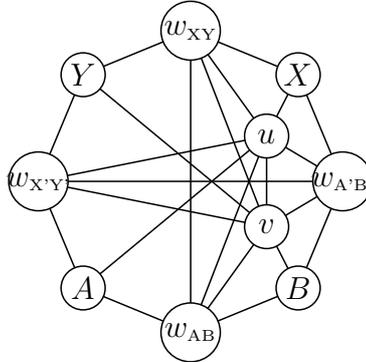


Figure 26: Illustration of the induced G_{10} that appears by adding the settling vertices $w_{XY}, w_{X'Y'}, w_{AB}, w_{A'B'}$.

For the rest of the proof, we assume that (a) or (b) of Claim 4.9 holds for every non-edge $(w_{XY}, w_{X'Y'}) \notin E(G)$. We are going to derive a contradiction from this assumption, completing the proof of Lemma 2.

First, we show that under the above assumption, case (a) of Claim 4.7 never holds.

Claim 4.15. *If $(w_{XY}, w_{X'Y'}) \in E(G)$, then either $X \cap X' \neq \emptyset$ or $Y \cap Y' \neq \emptyset$.*

Proof. Assume by contradiction that (a) of Claim 4.9 holds, that is that $X \cap X' = Y \cap Y' = \emptyset$. Then, by the minimality of $N_S(u) \cup N_S(v)$ as stated in property (iv), and by Claim 4.2, we know that $N_S(u) = X \cup X'$ and $N_S(v) = Y \cup Y'$.

Let us consider vertices $x \in X$ and $y \in Y'$ such that the set $\{x, u, v, y\}$ forms a 2-comb. This 2-comb is settled neither by w_{XY} nor by $w_{X'Y'}$. Since every 2-comb with (u, v) as a middle edge is settled by a vertex of \mathcal{W} , this 2-comb is also settled by one, say by a vertex $w_{AB} \in \mathcal{W}$. Let us now check the connections of this vertex to w_{XY} and $w_{X'Y'}$. We consider two cases:

Case 1. If $(w_{AB}, w_{XY}) \notin E(G)$, then by Claim 4.9 we must have $A \subset X$ and $Y \subset B$, because $x \notin A$, and because we assumed that only cases (a) or (b) are possible in Claim 4.9.

If $(w_{AB}, w_{X'Y'}) \notin E(G)$, then by similar reasoning based on by Claim 4.9 and the fact that $y \notin B$ we can conclude that $X' \subset A$ and $B \subset Y'$. This however leads to a contradiction, since $A \subseteq X$ and $X \cap X' = \emptyset$.

Hence, we must have $(w_{AB}, w_{X'Y'}) \in E(G)$ in this case. Then by Claim 4.7 either $X' \cap A = Y' \cap B = \emptyset$ or A, X' and B, Y' are inversely nested. However, the latter is not possible, since $A \subset X$ and $X \cap X' = \emptyset$. In this case the neighborhoods of w_{AB} and $w_{X'Y'}$ are disjoint in S , and their union is a proper subset of $N_S(u) \cup N_S(v)$ (since $x \notin A$), in contradiction with property (iv).

Case 2. If $(w_{AB}, w_{XY}) \in E(G)$, then (b) of Claim 4.7 is not possible, since $x \in X \setminus A$. If (a) holds, that is if $X \cap A = Y \cap B = \emptyset$, then the neighborhoods of w_{AB} and w_{XY} are disjoint in S , and their union is a proper subset of $N_S(u) \cup N_S(v)$ (since $y \in Y' \setminus B$), contradicting to property (iv). Consequently, case (c) holds, that is $A \subset X$ and $Y \subset B$, and consequently we can proceed as in Case 1.

In both cases we arrived to a contradiction, completing the proof of the claim. □

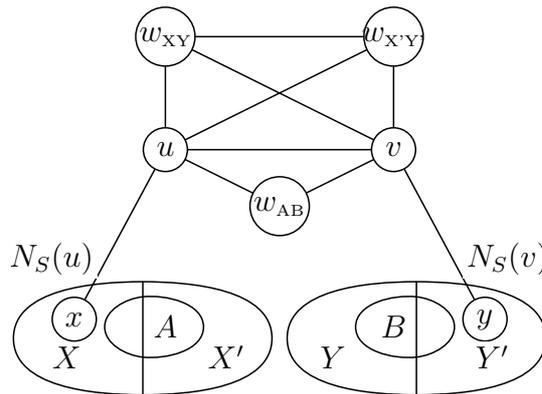


Figure 27

The above claim implies that if $(w_{XY}, w_{X'Y'}) \in E(G)$, then the sets X, X' and Y, Y' are inversely nested (cases (b) or (c) in Claim 4.7). Since we also assumed that only cases (a) or (b) are possible in Claim 4.9, we can conclude that for all pairs of settling vertices $w_{XY}, w_{X'Y'} \in \mathcal{W}$ we have

$$\text{either } X \subset X' \text{ and } Y' \subset X \quad \text{or} \quad X' \subset X \text{ and } Y \subset Y'. \tag{2.8}$$

Now we are ready to complete the proof of the lemma.

Let us consider an arbitrary vertex $w_{XY} \in \mathcal{W}$. Since w_{XY} is settling a 2-comb with (u, v) as its middle edge, we must have $Y \neq N_S(v)$, and consequently we can choose a vertex

$y \in N_S(v) \setminus Y$. Furthermore, we have $X \neq \emptyset$ by (2.5), thus we can also choose a vertex $x \in X$.

Then, the 2-comb S_2 induced by $\{x, u, v, y\}$ is not settled by w_{XY} , and therefore there is a vertex $w_{X'Y'} \in \mathcal{W}$ settling this 2-comb. Then, by (2.8) we must have $X' \subseteq X \setminus \{x\}$ and $Y \subset Y'$, since $x \notin X'$.

Then, $X' \neq \emptyset$ by (2.5), so we can choose a vertex $x' \in X' \subsetneq X$. The 2-comb induced by $\{x', u, v, y\}$ is not settled by either w_{XY} or $w_{X'Y'}$, and therefore there is a vertex $w_{X''Y''} \in \mathcal{W}$ settling this 2-comb.

Clearly, we can repeat the same arguments, and choose a vertex $x'' \in X'' \subsetneq X' \subsetneq X$, etc., resulting in an infinite chain $X \supsetneq X' \supsetneq X'' \supsetneq \dots$ of strictly nested nonempty subsets, contradicting the finiteness of G . This concludes the proof of the lemma. \square

2.3 Proof of Lemma 3

In this section we present the proof of Lemma 3, claiming that if G contains G_{10} as an induced subgraph and satisfies conditions (i) and (ii) of Section 2.1, then it must have an induced $2\mathcal{P}$ configuration (see Figures 20 and 8).

The proof is a case analysis that was assisted by a computer program. We assume by contradiction that there is a graph that has an induced G_{10} , has all 2-combs settled and does not contain 3-combs and 3-anti-combs. The graph G_{10} itself contains neither 3-combs nor 3-anti-combs, but it has several 2-combs that are not settled in it. For instance, such 2-combs are induced by $\{v_2, v_1, v_5, v_4\}$, $\{v_6, v_7, v_3, v_4\}$, $\{v_1, v_2, v_3, v_7\}$, etc. Therefore, some other vertices of G must settle these 2-combs.

We show that in order to settle all 2-combs of G_{10} , the graph G must contain a disjoint copy of G_{10} such that the 20 vertices of these two G_{10} subgraphs form an induced $2\mathcal{P}$ configuration. Since we do not know G , we try to extend G_{10} , and we show that this can be done essentially in a unique way.

We use a computer program to find all unsettled 2-combs of G_{10} . For each, one by one, we introduce a new vertex to settle it. After adding a settling vertex $v' \notin V(G_{10})$, we consider the pairs (v', v_j) for all $v_j \in V(G_{10})$. Some of these pairs are forced to be edges or non-edges, since G contains no induced 3-combs and 3-anti-combs. Some other pairs, however, may remain *uncertain*, that is those pairs may be either edges or non-edges of G . Surprisingly, all but one of the pairs are forced. We can discover the forced edge assignments by excluding all other possible assignments. This can be accomplished by exhibiting an induced 3-comb or 3-anti-comb. This task is also assisted by a computer program.

Another property which simplifies our case analysis is the symmetry of G_{10} . In particular, we reduce significantly the number of cases in our proof by means of the following three automorphisms:

$$A_1: (3)(7)(1, 5)(2, 4)(6, 8)(0, 9)$$

$$A_2: (1)(5)(2, 8)(3, 7)(4, 6)(0, 9)$$

$A_3: (7, 5, 3, 1)(8, 6, 4, 2)(0, 9)$

They are given in the *cycle* notation, that is (i_1, i_2, \dots, i_n) means the cyclic mapping $i_1 \mapsto i_2, i_2 \mapsto i_3, \dots, i_n \mapsto i_1$. Figure 28 shows the graphs after the application of these automorphisms.

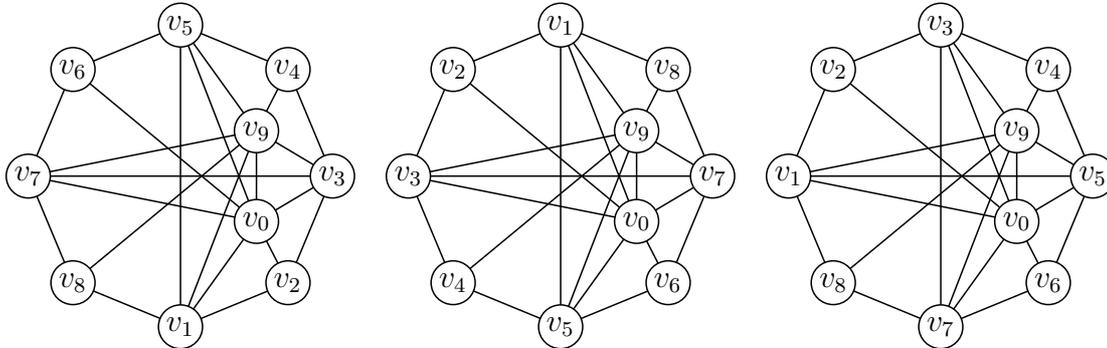


Figure 28: Graphs $A_1(G_{10}), A_2(G_{10}),$ and $A_3(G_{10})$.

From now on we will choose some of the unsettled 2-combs to be settled, and try to fix as many edges and non-edges as possible. Even though the order that we pick the 2-combs may seem arbitrary, we follow an order that reduces the number of cases to be considered.

Let us choose first the 2-comb induced by $\{v_2, v_3, v_7, v_8\}$, and denote by v'_1 the vertex that settles it. The pairs (v'_1, v_3) and (v'_1, v_7) are forced to be edges, while (v'_1, v_2) and (v'_1, v_8) are forced to be non-edges, by the definition of settling. There are six more pairs, connecting v'_1 with v_0, v_1, v_4, v_5, v_6 and v_9 , that remain uncertain.

Let us note first that (v'_1, v_5) has to be a non-edge, since otherwise the vertices $\{v_3, v_7, v'_1, v_2, v_8, v_5\}$ form a 3-comb. Unlike (v'_1, v_5) , the pairs $(v'_1, v_0), (v'_1, v_4), (v'_1, v_6), (v'_1, v_9)$ cannot be fixed if treated individually. But analyzing them together, we conclude that (v'_1, v_4) and (v'_1, v_6) are edges, while (v'_1, v_0) and (v'_1, v_9) are non-edges. Table 1 shows that in any other case there is an induced 3-comb or 3-anti-comb.

Only one pair (v'_1, v_1) remains uncertain, since no induced S_3 nor $\overline{S_3}$ appears whether this pair is an edge or not.

Table 2 shows the connections between v'_1 and the vertices of G_{10} .

Next, we use automorphisms to simplify case analysis for the three 2-combs induced by $\{v_4, v_3, v_7, v_6\}$, $\{v_6, v_5, v_1, v_8\}$, and $\{v_2, v_1, v_5, v_4\}$ respectively, and not settled by v'_1 .

Let us denote by v'_5 the vertex that settles $\{v_4, v_3, v_7, v_6\}$. By applying the automorphism A_1 to G_{10} , the 2-comb $\{v_2, v_3, v_7, v_8\}$ settled by v'_1 becomes $\{v_4, v_3, v_7, v_6\}$. Consequently, v'_5 should have the same connections as v'_1 has after applying A_1 . Table 3 shows the connections between v'_5 and G_{10} .

Analogously, let us denote by v'_3 the vertex that settles $\{v_2, v_1, v_5, v_4\}$. By applying A_3 to G_{10} , $\{v_2, v_3, v_7, v_8\}$ becomes $\{v_2, v_1, v_5, v_4\}$. Therefore, v'_3 should have the same connections as v'_1 after transformation A_3 . Table 4 shows the connections between v'_3 and G_{10} .

Next, let us denote by v'_7 the vertex that settles $\{v_8, v_1, v_5, v_6\}$. By applying A_3 then A_2 to G_{10} , $\{v_2, v_3, v_7, v_8\}$ becomes $\{v_8, v_1, v_5, v_6\}$. Thus, v'_7 should have the same connections as

(v'_1, v_4)	(v'_1, v_6)	(v'_1, v_0)	(v'_1, v_9)	S_3 or $\overline{S_3}$
0	0	0	0	$S_3 : \{v_3, v_0, v_9, v'_1, v_6, v_8\}$
0	0	0	1	$\overline{S_3} : \{v_2, v_5, v'_1, v_3, v_0, v_9\}$
0	0	1	0	$\overline{S_3} : \{v_4, v_8, v'_1, v_3, v_7, v_9\}$
0	0	1	1	$\overline{S_3} : \{v_4, v_6, v'_1, v_5, v_0, v_9\}$
0	1	0	0	$S_3 : \{v_5, v_6, v_0, v_2, v_4, v'_1\}$
0	1	0	1	$S_3 : \{v_3, v_9, v'_1, v_2, v_6, v_8\}$
0	1	1	0	$\overline{S_3} : \{v_4, v_8, v'_1, v_3, v_7, v_9\}$
0	1	1	1	$S_3 : \{v_3, v_9, v'_1, v_2, v_6, v_8\}$
1	0	0	0	$S_3 : \{v_3, v_0, v_9, v_6, v_8, v'_1\}$
1	0	0	1	$\overline{S_3} : \{v_2, v_5, v'_1, v_3, v_0, v_9\}$
1	0	1	0	$S_3 : \{v_4, v_5, v_9, v_6, v_8, v'_1\}$
1	0	1	1	$S_3 : \{v_7, v_0, v'_1, v_2, v_4, v_8\}$
1	1	0	0	none
1	1	0	1	$S_3 : \{v_3, v_9, v'_1, v_2, v_6, v_8\}$
1	1	1	0	$S_3 : \{v_7, v_0, v'_1, v_2, v_4, v_8\}$
1	1	1	1	$S_3 : \{v_3, v_9, v'_1, v_2, v_6, v_8\}$

Table 1: Case analysis for the pairs (v'_1, v_0) , (v'_1, v_4) , (v'_1, v_6) , (v'_1, v_9) .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_0
v'_1	*	0	1	1	0	1	1	0	0	0

Table 2: Connections between v'_1 and G_{10} . An entry 1 for v_i means that there is an edge between v'_1 and v_i , while 0 means that there is no edge between them. Finally, * means an uncertain pair.

v'_1 after transformations A_3 then A_2 (or the same connections as v'_3 after A_2). Table 5 shows the connections between v'_7 and G_{10} .

Let us next consider four 2-combs induced by $\{v_5, v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_5, v_4, v_3\}$, $\{v_7, v_3, v_4, v_5\}$, and $\{v_1, v_2, v_3, v_7\}$. They are not settled by any of the vertices of G_{10} , nor by v'_1, v'_3, v'_5, v'_7 .

Let v'_2 denote the vertex settling $\{v_3, v_4, v_5, v_1\}$. By definition of settling, the pairs (v'_2, v_4) and (v'_2, v_5) are edges, while (v'_2, v_1) and (v'_2, v_3) are non-edges. The pair (v'_2, v_9) must be an edge, since otherwise $\{v_1, v_3, v'_2, v_4, v_5, v_9\}$ forms a 3-anti-comb. Table 6 shows the case analysis for the pairs (v'_2, v_6) , (v'_2, v_7) , (v'_2, v_8) , and (v'_2, v_0) . The only possible configuration is that (v'_2, v_6) , (v'_2, v_7) , (v'_2, v_8) are edges, and (v'_2, v_0) is not. The pair (v'_2, v_2) remains uncertain. Table 7 shows the connections between v'_2 and the vertices of G_{10} .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_0
v'_5	0	1	1	0	*	0	1	1	0	0

Table 3: Connections between v'_5 and G_{10} .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_0
v'_3	1	0	*	0	1	1	0	1	0	0

Table 4: Connections between v'_3 and G_{10} .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_0
v'_7	1	1	0	1	1	0	*	0	0	0

Table 5: Connections between v'_7 and G_{10} .

Let v'_4 denote the vertex settling $\{v_5, v_1, v_2, v_3\}$. By applying A_1 to G_{10} , the subgraph $\{v_1, v_5, v_4, v_3\}$ becomes $\{v_5, v_1, v_2, v_3\}$. Therefore, vertex v'_4 must have the same connections as v'_2 after transformation A_1 . Table 8 shows the connections between v'_4 and G_{10} .

Next, let v'_6 denote the vertex settling $\{v_7, v_3, v_4, v_5\}$. By applying transformations, first A_1 and then A_3 , to G_{10} , the subgraph $\{v_1, v_5, v_4, v_3\}$ becomes $\{v_7, v_3, v_4, v_5\}$. Thus, v'_6 must have the same connections as v'_2 after the transformation $A_3 \circ A_1$. Table 9 shows the connections between v'_6 and G_{10} .

Let us next denote by v'_8 the vertex that settles $\{v_1, v_2, v_3, v_7\}$. By applying A_3^{-1} , to G_{10} , the subgraph $\{v_1, v_5, v_4, v_3\}$ becomes $\{v_1, v_2, v_3, v_7\}$. Therefore, v'_8 should have the same connections as v'_2 after A_3^{-1} . Table 10 shows the connections between v'_8 and G_{10} .

At this point, all S_2 subgraphs of G_{10} are settled by some of the vertices v'_1, v'_2, \dots, v'_8 . Yet, nothing was said about the connections between those vertices. Nevertheless, all 3-combs and 3-anti-combs that appeared to indicate contradictions were independent from those connections; in other words, each of those subgraphs contains only one vertex v'_i and the remaining five vertices are in G_{10} .

Interestingly, the connections between these eight vertices are uniquely implied. Table 11 shows the only possible assignments of edges and non-edges between the vertices v'_i and v'_j , for $i, j = 1, \dots, 8, i \neq j$. Each entry of the table contains the assignment, and the corresponding 3-comb or 3-anti-comb that would appear if the entry was reversed.

Let us notice that the pairs (v_i, v'_i) still remain uncertain. This means that all 2^8 possible graphs have no induced 3-combs and 3-anti-combs. Yet, they contain some unsettled induced 2-combs.

Next, we introduce the automorphism A_4 of the current configuration, induced by the 18 vertices $V(G_{10}) \cup \{v'_1, \dots, v'_8\}$.

$$A_4: (1, 3, 5, 7)(2, 4, 6, 8)(0, 9)(1', 3', 5', 7')(2', 4', 6', 8').$$

Let us further consider the unsettled 2-comb induced by $\{v_2, v'_1, v'_5, v_6\}$, and denote by v'_0 the vertex that settles it. By definition, (v'_0, v'_1) and (v'_0, v'_5) are edges, while (v'_0, v_2) and (v'_0, v_6) are non-edges. The pair (v'_0, v_9) cannot be an edge, since otherwise $\{v'_1, v'_5, v'_0, v_2, v_6, v_9\}$ forms a 3-comb. Table 16 shows that (v'_0, v_4) and (v'_0, v_8) must be edges, while (v'_0, v_1) ,

(v'_2, v_6)	(v'_2, v_7)	(v'_2, v_8)	(v'_2, v_0)	S_3 or $\overline{S_3}$
0	0	0	0	$S_3 : \{v_1, v_5, v_0, v_3, v_8, v'_2\}$
0	0	0	1	$\overline{S_3} : \{v_6, v_8, v'_2, v_7, v_0, v_9\}$
0	0	1	0	$S_3 : \{v_4, v_5, v'_2, v_3, v_6, v_8\}$
0	0	1	1	$S_3 : \{v_4, v_5, v'_2, v_3, v_6, v_8\}$
0	1	0	0	$S_3 : \{v_1, v_5, v_0, v_3, v_8, v'_2\}$
0	1	0	1	$\overline{S_3} : \{v_1, v_4, v_7, v_5, v_0, v'_2\}$
0	1	1	0	$S_3 : \{v_4, v_5, v'_2, v_3, v_6, v_8\}$
0	1	1	1	$S_3 : \{v_4, v_5, v'_2, v_3, v_6, v_8\}$
1	0	0	0	$S_3 : \{v_1, v_5, v_0, v_3, v_8, v'_2\}$
1	0	0	1	$\overline{S_3} : \{v_1, v_4, v_6, v_0, v_9, v'_2\}$
1	0	1	0	$\overline{S_3} : \{v_1, v_7, v'_2, v_5, v_6, v_0\}$
1	0	1	1	$\overline{S_3} : \{v_1, v_4, v_6, v_0, v_9, v'_2\}$
1	1	0	0	$S_3 : \{v_1, v_5, v_0, v_3, v_8, v'_2\}$
1	1	0	1	$\overline{S_3} : \{v_1, v_4, v_6, v_0, v_9, v'_2\}$
1	1	1	0	none
1	1	1	1	$\overline{S_3} : \{v_1, v_4, v_6, v_0, v_9, v'_2\}$

Table 6: Case analysis for the pairs (v'_2, v_6) , (v'_2, v_7) , (v'_2, v_8) , (v'_2, v_0) .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_0
v'_2	0	*	0	1	1	1	1	1	1	0

Table 7: Connections between v'_2 and G_{10} .

(v'_0, v_3) , (v'_0, v_5) and (v'_0, v_7) , must be non-edges. Furthermore, the pairs (v'_0, v'_2) , (v'_0, v'_3) , (v'_0, v'_6) and (v'_0, v'_7) must be edges, since otherwise one of the following 3-combs would appear: $\{v_4, v_5, v'_2, v_1, v_7, v'_0\}$, $\{v_1, v_8, v'_3, v_2, v_6, v'_0\}$, $\{v_1, v_8, v'_6, v_3, v_5, v'_0\}$, or $\{v_1, v_8, v_9, v_3, v'_7, v'_0\}$. The pairs (v'_0, v'_4) and (v'_0, v'_8) cannot be edges, since otherwise the 3-combs induced by $\{v_1, v_2, v'_4, v_3, v_5, v'_0\}$ and $\{v_2, v_3, v'_8, v_1, v_7, v'_0\}$ would appear. Finally, the pair (v'_0, v_0) remains uncertain. Table 12 shows the connections between v'_0 and G_{10} .

Next, let us consider the 2-comb induced by $\{v'_3, v'_7, v_4, v_8\}$ and denote by v'_9 the vertex settling it. Notice that this 2-comb can be obtained from $\{v'_1, v'_5, v_2, v_6\}$ by applying transformation A_4 . Therefore v'_9 must have the same connections as v'_0 after applying A_4 . Table 13 shows the connections between v'_9 and G_{10} .

We summarize the connections between vertices v'_1, \dots, v'_9, v'_0 in Table 14, and between

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_0
v'_4	1	1	0	*	0	1	1	1	0	1

Table 8: Connections between v'_4 and G_{10} .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_0
v'_6	1	1	1	1	0	*	0	1	1	0

Table 9: Connections between v'_6 and G_{10} .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_0
v'_8	0	1	1	1	1	1	0	*	0	1

Table 10: Connections between v'_8 and G_{10} .

Edge	S_3 or $\overline{S_3}$	Edge	S_3 or $\overline{S_3}$
$(v'_1, v'_2) = 1$	$S_3 : \{v_4, v_5, v'_2, v_8, v_0, v'_1\}$	$(v'_1, v'_3) = 0$	$\overline{S_3} : \{v_6, v'_1, v'_3, v_4, v_8, v_0\}$
$(v'_1, v'_4) = 0$	$S_3 : \{v_6, v'_1, v'_4, v_3, v_5, v_8\}$	$(v'_1, v'_5) = 1$	$\overline{S_3} : \{v_2, v_8, v'_1, v_3, v_7, v'_5\}$
$(v'_1, v'_6) = 0$	$S_3 : \{v_4, v'_1, v'_6, v_2, v_5, v_7\}$	$(v'_1, v'_7) = 0$	$S_3 : \{v_4, v'_1, v'_7, v_2, v_6, v_9\}$
$(v'_1, v'_8) = 1$	$\overline{S_3} : \{v_5, v_6, v'_8, v_2, v_9, v'_1\}$	$(v'_2, v'_3) = 1$	$S_3 : \{v_7, v_8, v'_2, v_4, v_0, v'_3\}$
$(v'_2, v'_4) = 0$	$\overline{S_3} : \{v_1, v_3, v'_2, v_7, v_0, v'_4\}$	$(v'_2, v'_5) = 0$	$S_3 : \{v_8, v'_5, v'_2, v_1, v_3, v_6\}$
$(v'_2, v'_6) = 0$	$\overline{S_3} : \{v_1, v_4, v_7, v_8, v'_2, v'_6\}$	$(v'_2, v'_7) = 0$	$S_3 : \{v_4, v'_7, v'_2, v_1, v_3, v_6\}$
$(v'_2, v'_8) = 0$	$\overline{S_3} : \{v_1, v_3, v'_2, v_5, v_0, v'_8\}$	$(v'_3, v'_4) = 1$	$S_3 : \{v_6, v_7, v'_4, v_2, v_9, v'_3\}$
$(v'_3, v'_5) = 0$	$S_3 : \{v_8, v'_5, v'_3, v_2, v_6, v_9\}$	$(v'_3, v'_6) = 0$	$S_3 : \{v_8, v'_3, v'_6, v_2, v_5, v_7\}$
$(v'_3, v'_7) = 1$	$\overline{S_3} : \{v_2, v_4, v'_3, v_1, v_5, v'_7\}$	$(v'_3, v'_8) = 0$	$\overline{S_3} : \{v_6, v'_3, v'_8, v_1, v_4, v_7\}$
$(v'_4, v'_5) = 1$	$S_3 : \{v_1, v_2, v'_4, v_6, v_9, v'_5\}$	$(v'_4, v'_6) = 0$	$\overline{S_3} : \{v_3, v_5, v'_4, v_1, v_9, v'_6\}$
$(v'_4, v'_7) = 0$	$S_3 : \{v_2, v'_7, v'_4, v_3, v_5, v_8\}$	$(v'_4, v'_8) = 0$	$\overline{S_3} : \{v_1, v_3, v_6, v_2, v'_4, v'_8\}$
$(v'_5, v'_6) = 1$	$S_3 : \{v_1, v_8, v'_6, v_4, v_0, v'_5\}$	$(v'_5, v'_7) = 0$	$S_3 : \{v_2, v'_5, v'_7, v_4, v_8, v_0\}$
$(v'_5, v'_8) = 0$	$\overline{S_3} : \{v_2, v'_5, v'_8, v_1, v_4, v_7\}$	$(v'_6, v'_7) = 1$	$S_3 : \{v_3, v_4, v'_6, v_8, v_0, v'_7\}$
$(v'_6, v'_8) = 0$	$\overline{S_3} : \{v_1, v_7, v'_8, v_3, v_9, v'_6\}$	$(v'_7, v'_8) = 1$	$S_3 : \{v_2, v_3, v'_8, v_6, v_9, v'_7\}$

Table 11: Case analysis for the connections between v'_1, \dots, v'_8 .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_0
v'_0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	*

Table 12: Connections between v'_0 and G_{10} .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_0
v'_9	0	1	0	0	0	1	0	0	0	*

Table 13: Connections between v'_9 and G_{10} .

	v'_1	v'_2	v'_3	v'_4	v'_5	v'_6	v'_7	v'_8	v'_9	v'_0
v'_1	—	1	0	0	1	0	0	1	1	1
v'_2	1	—	1	0	0	0	0	0	0	1
v'_3	0	1	—	1	0	0	1	0	1	1
v'_4	0	0	1	—	1	0	0	0	1	0
v'_5	1	0	0	1	—	1	0	0	1	1
v'_6	0	0	0	0	1	—	1	0	0	1
v'_7	0	0	1	0	0	1	—	1	1	1
v'_8	1	0	0	0	0	0	1	—	1	0
v'_9	1	0	1	1	1	0	1	1	—	1
v'_0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	—

Table 14: Connections between vertices v'_1, \dots, v'_9, v'_0 .

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_0
v'_1	*	0	1	1	0	1	1	0	0	0
v'_2	0	*	0	1	1	1	1	1	1	0
v'_3	1	0	*	0	1	1	0	1	0	0
v'_4	1	1	0	*	0	1	1	1	0	1
v'_5	0	1	1	0	*	0	1	1	0	0
v'_6	1	1	1	1	0	*	0	1	1	0
v'_7	1	1	0	1	1	0	*	0	0	0
v'_8	0	1	1	1	1	1	0	*	0	1
v'_9	0	1	0	0	0	1	0	0	*	0
v'_0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	*

Table 15: Connections between vertices v_1, \dots, v_9, v_0 and v'_1, \dots, v'_9, v'_0 .

v_1, \dots, v_9, v_0 and v'_1, \dots, v'_9, v'_0 in Table 15.

Table 16: Case analysis for the pairs (v'_0, v_1) , (v'_0, v_3) , (v'_0, v_4) , (v'_0, v_5) , (v'_0, v_7) and (v'_0, v_8) .

(v'_0, v_1)	(v'_0, v_3)	(v'_0, v_4)	(v'_0, v_5)	(v'_0, v_7)	(v'_0, v_8)	S_3 or $\overline{S_3}$
0	0	0	0	0	0	$S_3 : \{v_2, v_3, v'_5, v_1, v_4, v'_0\}$
0	0	0	0	0	1	$S_3 : \{v_1, v_8, v_9, v_2, v_4, v'_0\}$
0	0	0	0	1	0	$S_3 : \{v_2, v_3, v'_5, v_1, v_4, v'_0\}$
0	0	0	0	1	1	$S_3 : \{v_1, v_8, v_9, v_2, v_4, v'_0\}$
0	0	0	1	0	0	$S_3 : \{v_1, v_5, v_9, v_2, v_7, v'_0\}$
0	0	0	1	0	1	$S_3 : \{v_1, v_5, v_9, v_2, v_7, v'_0\}$
0	0	0	1	1	0	$S_3 : \{v_2, v_3, v'_5, v_1, v_4, v'_0\}$
0	0	0	1	1	1	$S_3 : \{v_1, v_8, v_9, v_2, v_4, v'_0\}$
0	0	1	0	0	0	$S_3 : \{v_3, v_4, v_9, v_2, v_8, v'_0\}$
0	0	1	0	0	1	none
0	0	1	0	1	0	$S_3 : \{v_3, v_4, v_9, v_2, v_8, v'_0\}$
0	0	1	0	1	1	$S_3 : \{v_3, v_7, v_9, v_2, v_5, v'_0\}$
0	0	1	1	0	0	$S_3 : \{v_1, v_5, v_9, v_2, v_7, v'_0\}$
0	0	1	1	0	1	$S_3 : \{v_1, v_5, v_9, v_2, v_7, v'_0\}$
0	0	1	1	1	0	$S_3 : \{v_3, v_4, v_9, v_2, v_8, v'_0\}$
0	0	1	1	1	1	$S_3 : \{v_4, v_5, v'_0, v_3, v_6, v_8\}$
0	1	0	0	0	0	$S_3 : \{v_3, v_7, v_9, v_1, v_6, v'_0\}$
0	1	0	0	0	1	$S_3 : \{v_1, v_8, v_9, v_2, v_4, v'_0\}$
0	1	0	0	1	0	$\overline{S_3} : \{v_4, v_8, v'_0, v_3, v_7, v_9\}$
0	1	0	0	1	1	$S_3 : \{v_1, v_8, v_9, v_2, v_4, v'_0\}$
0	1	0	1	0	0	$S_3 : \{v_1, v_5, v_9, v_2, v_7, v'_0\}$
0	1	0	1	0	1	$S_3 : \{v_1, v_5, v_9, v_2, v_7, v'_0\}$
0	1	0	1	1	0	$S_3 : \{v_3, v_7, v'_0, v_2, v_5, v_8\}$
0	1	0	1	1	1	$S_3 : \{v_1, v_8, v_9, v_2, v_4, v'_0\}$
0	1	1	0	0	0	$S_3 : \{v_3, v_7, v_9, v_1, v_6, v'_0\}$
0	1	1	0	0	1	$S_3 : \{v_3, v_4, v'_0, v_2, v_5, v_8\}$
0	1	1	0	1	0	$S_3 : \{v_4, v_5, v_9, v_6, v_8, v'_0\}$
0	1	1	0	1	1	$S_3 : \{v_3, v_4, v'_0, v_2, v_5, v_8\}$
0	1	1	1	0	0	$S_3 : \{v_1, v_5, v_9, v_2, v_7, v'_0\}$
0	1	1	1	0	1	$S_3 : \{v_1, v_5, v_9, v_2, v_7, v'_0\}$
0	1	1	1	1	0	$S_3 : \{v_3, v_7, v'_0, v_2, v_5, v_8\}$
0	1	1	1	1	1	$S_3 : \{v_3, v'_1, v'_0, v_2, v_6, v_8\}$
1	0	0	0	0	0	$S_3 : \{v_1, v_5, v_9, v_3, v_6, v'_0\}$
1	0	0	0	0	1	$S_3 : \{v_1, v_5, v_9, v_3, v_6, v'_0\}$
1	0	0	0	1	1	$S_3 : \{v_1, v_5, v_9, v_3, v_6, v'_0\}$
1	0	0	1	0	0	$S_3 : \{v_3, v_7, v'_1, v_2, v_8, v'_0\}$
1	0	0	1	0	1	$S_3 : \{v_3, v_7, v'_5, v_4, v_6, v'_0\}$
1	0	0	1	1	0	$S_3 : \{v_1, v_5, v'_0, v_2, v_4, v_7\}$

(v'_0, v_1)	(v'_0, v_3)	(v'_0, v_4)	(v'_0, v_5)	(v'_0, v_7)	(v'_0, v_8)	S_3 or $\overline{S_3}$
1	0	0	1	1	1	$S_3 : \{v_1, v_5, v'_0, v_2, v_4, v_7\}$
1	0	1	0	0	0	$S_3 : \{v_1, v_5, v_9, v_3, v_6, v'_0\}$
1	0	1	0	0	1	$S_3 : \{v_1, v_5, v_9, v_3, v_6, v'_0\}$
1	0	1	0	1	0	$S_3 : \{v_1, v_5, v_9, v_3, v_6, v'_0\}$
1	0	1	0	1	1	$S_3 : \{v_1, v_5, v_9, v_3, v_6, v'_0\}$
1	0	1	1	0	0	$S_3 : \{v_3, v_4, v_9, v_2, v_8, v'_0\}$
1	0	1	1	0	1	$S_3 : \{v_1, v_8, v'_0, v_2, v_4, v_7\}$
1	0	1	1	1	0	$S_3 : \{v_3, v_4, v_9, v_2, v_8, v'_0\}$
1	0	1	1	1	1	$S_3 : \{v_4, v_5, v'_0, v_3, v_6, v_8\}$
1	1	0	0	0	0	$S_3 : \{v_6, v_7, v'_1, v_5, v_8, v'_0\}$
1	1	0	0	0	1	$S_3 : \{v_3, v'_1, v'_0, v_2, v_6, v_8\}$
1	1	0	0	1	0	$S_3 : \{v_3, v_7, v'_0, v_1, v_4, v_6\}$
1	1	0	0	1	1	$S_3 : \{v_3, v_7, v'_0, v_1, v_4, v_6\}$
1	1	0	1	0	0	$S_3 : \{v_1, v_5, v'_0, v_3, v_6, v_8\}$
1	1	0	1	0	1	$S_3 : \{v_3, v'_1, v'_0, v_2, v_6, v_8\}$
1	1	0	1	1	0	$S_3 : \{v_1, v_5, v'_0, v_2, v_4, v_7\}$
1	1	0	1	1	1	$S_3 : \{v_1, v_5, v'_0, v_2, v_4, v_7\}$
1	1	1	0	0	0	$S_3 : \{v_4, v_5, v_9, v_6, v_8, v'_0\}$
1	1	1	0	0	1	$S_3 : \{v_1, v_8, v'_0, v_2, v_4, v_7\}$
1	1	1	0	1	0	$S_3 : \{v_4, v_5, v_9, v_6, v_8, v'_0\}$
1	1	1	0	1	1	$S_3 : \{v_3, v_4, v'_0, v_2, v_5, v_8\}$
1	1	1	1	0	0	$S_3 : \{v_1, v_5, v'_0, v_3, v_6, v_8\}$
1	1	1	1	0	1	$S_3 : \{v_1, v_8, v'_0, v_2, v_4, v_7\}$
1	1	1	1	1	0	$S_3 : \{v_1, v_5, v'_0, v_3, v_6, v_8\}$
1	1	1	1	1	1	$S_3 : \{v_3, v'_1, v'_0, v_2, v_6, v_8\}$

Interestingly, the graph induced by v'_1, \dots, v'_9, v'_0 is an isomorphic copy of G_{10} . Moreover, (v_i, v'_j) for $i \neq j$ is an edge if and only if (v_i, v_j) is not an edge, while the pairs (v_i, v'_i) , $i = 0, 1, \dots, 9$ are uncertain. Thus, this configuration is the sum of two copies of G_{10} , that is, the graph $2G_{10}$ (see Figure 29). Let us recall that to any graph G we can apply the same operation and obtain the sum $G + G = 2G$.

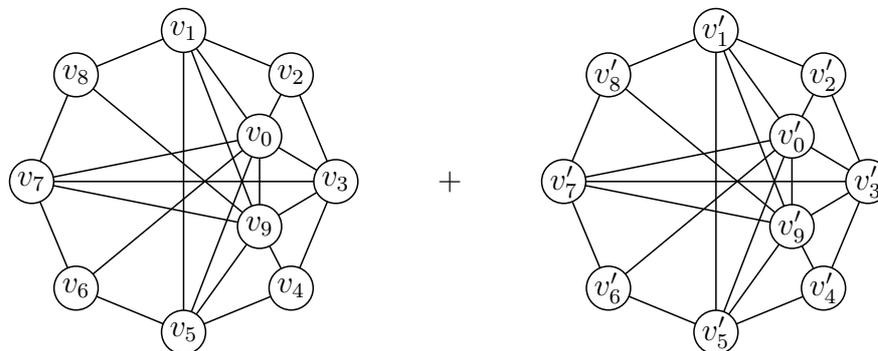


Figure 29: The sum of two graphs G_{10} or $2G_{10}$.

Another remarkable property of the obtained configuration is as follows: if we exchange v_0 with v'_0 and v_9 with v'_9 then the resulting graph becomes the sum of two Petersen graphs, that is, $2\mathcal{P} \equiv 2G_{10}$, as shown in Figure 30.

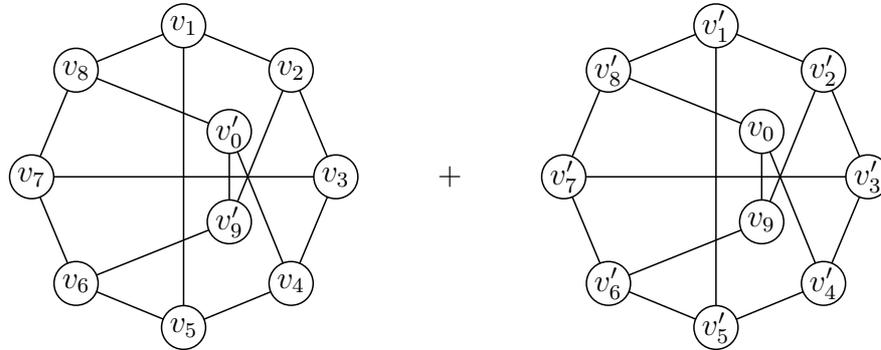


Figure 30: The graph $2\mathcal{P}$, isomorphic to $2G_{10}$ by exchanging v_0, v'_0 and v_9, v'_9 .

This completes the proof of Lemma 3. □

2.4 Proof of Lemma 4

We prove that if a graph G contains an induced $2\mathcal{P}$, then it must have either an unsettled 2-comb, or an induced 3-comb or 3-anti-comb.

Let us recall that $2\mathcal{P}$ still has 10 uncertain edges. Hence, it gives us in fact 1024 possible graphs, one of which is an induced subgraph of G . Since we do not know which one, we will prove the statement by considering each such possible subgraphs.

Remarkably, none of these 1024 graphs contains an induced 3-comb or 3-anti-comb, as verified by computer.

Furthermore, $2\mathcal{P}$ itself contains no induced 2-combs either. (Since $2\mathcal{P}$ contains uncertain pairs, we call a subgraph of $2\mathcal{P}$ an induced one only if it does not involve any uncertain pair.) However, each of the 1024 graphs obtained from $2\mathcal{P}$ contains many 2-combs each of which involves exactly one pair of vertices v_i and v'_i for some index i .

Now we will fix one of the uncertain pairs (once as an edge and once as a non-edge), while keeping all others uncertain. Several (36) unsettled induced 2-combs appear that contain the fixed uncertain pair. Each of these 2-combs must be settled in G by our assumption (i), thus there exists a vertex x settling it. There are 16 pairs (x, y) , where y is a vertex of $2\mathcal{P}$, not belonging to the unsettled 2-comb. We check all 2^{16} possible edge/non-edge assignments to these 16 pairs, and find by computer search that for each of them an induced 3-comb or 3-anti-comb exists.

More precisely, let us fix the uncertain pair (v_0, v'_0) and consider two cases:

1. If (v_0, v'_0) is an edge then the 2-comb induced by the vertices $\{v_1, v_0, v'_0, v_4\}$ is unsettled in $2\mathcal{P}$, because no vertex in $2\mathcal{P}$ is connected to both v_0 and v'_0 by the definition of the sum of two graphs.

Let x be a settling vertex. Then, by definition, (x, v_0) , (x, v'_0) must be edges of G , and the pairs (x, v_1) and (x, v_4) must be non-edges. There are 16 other pairs of the form (x, y) , where y is a vertex of $2\mathcal{P}$. Hence, there are 2^{16} possible assignments of edges/non-edges between x and $2\mathcal{P}$. We check by computer all 2^{16} possible assignments and find that in each 2^{16} graphs there is an induced (without uncertain pairs) 3-comb or 3-anti-comb.

2. If (v_0, v'_0) is not an edge of G then the 2-comb induced by the vertices $\{v_0, v_1, v_8, v'_0\}$ is not settled in $2\mathcal{P}$. Since it must be settled in G by condition (i), there is a vertex x of G that settles it. Similarly to the previous case, we again consider all 2^{16} graphs, and find by computer search that all of them contain an induced 3-comb or 3-anti-comb.

This concludes the proof of Lemma 4. □

3 Proof of Theorems 2 and 3

Proof of Theorem 2: Recall by (1.1) that we can reduce the case analysis by assuming that $1 \leq k < \ell \leq n - 2$.

We start by proving (i). Assume by contradiction that there exists an unsettled $\overline{S_m} = \{B_1, \dots, B_m, A_1, \dots, A_m\}$, $|B_i| = k$, $|A_i| = \ell$. Then, by assumption we must have

$$A_i \supset B_j \text{ for all } j \neq i \quad \text{and} \quad A_i \not\supset B_i. \quad (3.9)$$

Let us recall that $\overline{S_m}$ is settled by a k -set K iff $K \subseteq \bigcap_{j=1}^m A_j$, and it is settled by an ℓ -set L iff $L \not\supset B_i$ for $i = 1, \dots, m$.

Let $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$, and let $X \subseteq [n]$ be the set that contains the elements that are in more than one of the B_i 's, i.e. $X = \{x \in [n] \mid \deg_{\mathcal{B}}(x) > 1\}$. Notice that $X \subseteq \bigcap_{j=1}^m A_j$ because by (3.9) we have that every vertex belonging to two or more of the sets from \mathcal{B} must belong to all sets A_i , $i = 1, \dots, m$. Clearly $|X| < k$, otherwise $\overline{S_m}$ would be settled by a k -set in X .

In the following steps of the proof, we will derive some inequalities, to arrive to a contradiction. First, we need some more definitions.

Let a_p , $p = 0, 1, \dots, q \leq |X| < k$, be the number of sets $B_i \in \mathcal{B}$ for which $|B_i \cap X| = p$, and let $\mathcal{H} = \{B_i \cap X \mid i = 1, \dots, m\}$. Let us observe first that $\tau(\mathcal{B}) \leq \tau(\mathcal{H}) + a_0$, where τ denotes the size of a minimum vertex cover. To see this inequality, let us first cover the intersecting hyperedges of \mathcal{B} optimally by $\tau(\mathcal{H})$ vertices, and then cover the rest by choosing one vertex from each remaining set outside of X (i.e., by at most a_0 additional vertices). Moreover, we have $\tau(\mathcal{B}) > n - \ell$, since otherwise there exists an ℓ -set settling $\overline{S_m}$. Thus, we can conclude that

$$\tau(\mathcal{H}) + a_0 \geq n - \ell + 1 \quad (3.10)$$

Assume w.l.o.g. that $|B_1 \cap X| \leq |B_2 \cap X| \leq \dots \leq |B_m \cap X|$. Since we know by (3.9)

that $\bigcup_{j=1}^{m-1} B_j \subseteq A_m$, we have:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{m-1} B_j \right| = |X| + \sum_{p=0}^q (k-p)a_p - (k-q) \leq \ell \quad (3.11)$$

Let us now take away k times equation (3.10) from (3.11) and obtain

$$|X| + \sum_{p=0}^q (k-p)a_p - (k-q) - k(\tau(\mathcal{H}) + a_0) \leq \ell - k(n - \ell + 1)$$

which can be simplified to

$$|X| + \sum_{p=1}^q (k-p)a_p + q - k\tau(\mathcal{H}) \leq (k+1)\ell - kn \quad (3.12)$$

Notice that the right hand side of (3.12) is negative by our initial assumption of $kn > (k+1)\ell$. Thus, to arrive to a contradiction, it is enough to prove that

$$k\tau(\mathcal{H}) \leq |X| + \sum_{p=1}^q (k-p)a_p + q. \quad (3.13)$$

Let us observe next that $\sum_{p=1}^q (k-p)a_p = k|\mathcal{H}|$, and that $\sum_p (p a_p) = \sum_{H \in \mathcal{H}} |H|$. Thus, we can equivalently rewrite inequality (3.13) as:

$$k(|\mathcal{H}| - \tau(\mathcal{H})) \geq \sum_{H \in \mathcal{H}} |H| - |X| - q \quad (3.14)$$

To show (3.14), let us construct a cover C of \mathcal{H} as follows. First we choose into C a vertex of the highest degree in \mathcal{H} . This vertex covers at least $\frac{\sum_{H \in \mathcal{H}} |H|}{|X|}$ hyperedges of \mathcal{H} . We cover the remaining edges by choosing one vertex from each. This simple procedure shows that

$$\tau(\mathcal{H}) \leq |C| \leq |\mathcal{H}| - \frac{\sum_{H \in \mathcal{H}} |H|}{|X|} + 1. \quad (3.15)$$

From this simple inequality we can derive the following:

$$\begin{aligned} k(|\mathcal{H}| - \tau(\mathcal{H})) &\geq \frac{k}{|X|} \sum_{H \in \mathcal{H}} |H| - k \\ &= \sum_{H \in \mathcal{H}} |H| + \frac{k-|X|}{|X|} \sum_{H \in \mathcal{H}} |H| - k \\ &\geq \sum_{H \in \mathcal{H}} |H| - |X| \end{aligned}$$

where, the second inequality follows from $|X| \leq \sum_{H \in \mathcal{H}} |H|$, which is true, since every vertex of X has degree at least 2 in \mathcal{B} . The above inequalities then prove (3.14), since $q \geq 0$, which then yields the desired contradiction, completing the proof of (i). \square

We prove next (ii). We will show, by a construction that an unsettled $\overline{S_m}$ exists in $G(n, k, \ell)$, whenever $kn \leq (k+1)\ell$ and $n \geq k + \ell$.

For this let us set $r \equiv \ell \pmod{k}$, $0 \leq r < k$, $m = \frac{\ell+k-r}{k}$, and let B_1, \dots, B_m , and R be pairwise disjoint subsets of $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, such that $|R| = r$ and $|B_i| = k$ for $i = 1, \dots, m$. Notice that

$$|R \cup B_1 \cup \dots \cup B_m| = km + r = \ell + k. \quad (3.16)$$

Thus, it is possible to choose such pairwise disjoint subsets, since $k+\ell \leq n$ by our assumption. Let us further define

$$A_i = R \cup \left(\bigcup_{j \neq i} B_j \right) \quad \text{for } i = 1, \dots, m.$$

With these definitions, we have $|A_i| = r + k(m-1) = r + (\ell - r) = \ell$ for all $i = 1, \dots, m$. Furthermore, $A_i \supseteq B_j$ if and only if $i \neq j$. Thus, the sets A_1, \dots, A_m , and B_1, \dots, B_m are vertices of $G(m, k, \ell)$ forming an $\overline{S_m}$.

We show that this $\overline{S_m}$ is unsettled in $G(n, k, \ell)$. For this, observe first that $|\bigcap_{i=1}^m A_i| = |R| = r < k$, and consequently, no k -set can settle $\overline{S_m}$.

Next, let us assume indirectly that there is an ℓ -set L which settles $\overline{S_m}$. Hence, L cannot be connected in $G(n, k, \ell)$ to any of the B_i 's. In other words, $L \not\supseteq B_i$ for $i = 1, \dots, m$. It follows that $|L \cap B_i| \leq k-1$ for all $i = 1, \dots, m$, implying

$$|L| \leq m(k-1) + r + (n - k - \ell). \quad (3.17)$$

That is, we can take at most $k-1$ elements from each of the k -sets, and the remaining $r + n - k - \ell$ elements of $[n]$, as implied by (3.16). It is now enough to show that $|L| < \ell$, because this contradicts the assumption that L is an ℓ -set. To do this, let us rewrite (3.17) as

$$|L| \leq m(k-1) + r + (n - k - \ell) = \frac{\ell + k - r}{k}(k-1) + r - n - k - \ell,$$

which implies

$$\begin{aligned} k|L| + \ell &\leq (\ell + k - r)(k-1) + k(r - n - k - \ell) + \ell \\ &= k\ell - \ell + k^2 - k - kr + r + kr + kn - k^2 - k\ell + \ell \\ &= kn - (k - r) < kn \leq (k+1)\ell \end{aligned}$$

where the last two inequalities follow by $k > r$ and our assumption that $kn \leq (k+1)\ell$. Thus, $|L| < \ell$ follows, completing the proof of (ii). \square

This completes the proof of Theorem 2. \square

Proof of Theorem 3:

We prove first (a). Even though this claim is only for $k \leq 2$, let us first disregard this restriction. Assume by contradiction that there exists an unsettled S_m in $G(m, k, \ell)$ defined by the sets $\{B_1, \dots, B_m, A_1, \dots, A_m\}$, where $|B_i| = k$, $|A_i| = \ell$, for $i = 1, \dots, m$, and $B_j \subseteq A_i$, iff $i = j$. Set $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$ and $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$.

By definitions, an ℓ -set L can settle S_m only if $[n] \setminus L$ is a vertex cover of the hypergraph \mathcal{B} . Furthermore, a k -set K can settle S_m , only if $K \subseteq A_i$ for all $i = 1, \dots, m$. Since S_m is assumed to be unsettled in $G(n, k, \ell)$, we must have the following properties.

- (i) $\tau(\mathcal{B}) \geq n - \ell + 1$, since otherwise the complement of a minimum vertex cover of \mathcal{B} would contain a settling ℓ -set.
- (ii) $|\bigcap_{i=1}^m A_i| < k$, since otherwise the intersection of the sets of \mathcal{A} would contain a settling k -set.

Let us also observe that $B_j \subseteq A_i$ if and only if $i = j$ implies that $\overline{A_i} = [n] \setminus A_i$ is a vertex cover for $\mathcal{B} \setminus B_i$, implying $|\overline{A_i}| = n - \ell \geq \tau(\mathcal{B} \setminus \{B_i\}) \geq \tau(\mathcal{B}) - 1$. This, together with (i), implies that

$$n - \ell = \tau(\mathcal{B}) - 1 = \tau(\mathcal{B} \setminus \{B_i\}) \tag{3.18}$$

for all $i = 1, \dots, m$.

Let us now consider the subset

$$X = [n] \setminus \bigcup_{i=1}^m B_i.$$

Equations (3.18) imply that $X \subseteq A_i$ for all $i = 1, \dots, m$. Thus, by property (ii) we must have

$$|X| \leq k - 1 \tag{3.19}$$

Another consequence of (3.18) is that the hypergraph \mathcal{B} is τ -critical, i.e., the minimum vertex cover size strictly decreases whenever we remove a hyperedge from \mathcal{B} . This also implies that \mathcal{B} is α -critical, where $\alpha(\mathcal{B})$ is the size of the largest *independent set* of \mathcal{B} , i.e., the largest set not containing a hyperedge of \mathcal{B} . This is because $\alpha(\mathcal{B}) + \tau(\mathcal{B}) = n$ for all hypergraphs \mathcal{B} .

Let us now consider the case of $k = 1$. In this case we have $|\mathcal{B}| = \tau(\mathcal{B})$ and by (3.19) $X = \emptyset$, implying that $|\mathcal{B}| = n$, which together with the previous equality and (3.18) imply

$$n = |\mathcal{B}| = \tau(\mathcal{B}) = n - \ell + 1$$

from which $\ell = 1$ follows, contradicting (1.1).

Let us next consider the case of $k = 2$. In this case \mathcal{B} is an α -critical graph G on vertex-set $V = [n] \setminus X$, with $\alpha(G) = \alpha(\mathcal{B}) - |X| = \ell - 1 - |X|$.

We apply a result attributed to Erdős and Gallai (see Exercise 8.20 in [31]; see also the proof of Exercise 8.10 by Hajnal), stating that in an α -critical graph G with no isolated vertices we have $|V| \geq 2\alpha(G)$. This implies for our case that $n - |X| \geq 2(\ell - 1 - |X|)$, from which

$$n \geq 2\ell - 2 - |X|$$

follows. Since by (3.19) we have $|X| \leq k - 1 = 1$, the above inequality implies

$$n \geq 2\ell - 3$$

contradicting (a) of Theorem 3, according to which we have $n < 2\ell - 3$. \square

Remark 10. *We could extend the above line of arguments for $k \geq 3$, if the inequality $n \geq \frac{k}{k-1}\alpha(\mathcal{B})$ were valid for α -critical k -uniform hypergraphs, in general. However, this is not the case, as the following example shows: let $n = 10$, $k = 3$ and $\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{5, 6, 7\}, \{7, 8, 9\}, \{9, 10, 1\}\}$. In this case we have $\alpha(\mathcal{B}) = 7$, and $10 \not\geq (3/2)7 = 21/2$.*

We prove finally (b). We will now provide a construction for an unsettled S_m . Let $L = \{2, 3, \dots, k\}$, and choose $r \in L$, such that $r \equiv \ell \pmod{k-1}$ (for instance, if $k = 2$ then we have $r = 2$).

Let us next partition $[n]$ as

$$[n] = X \cup \bigcup_{j=1}^p Q_j,$$

where $|X| = r - 1$, $p = \frac{\ell - r}{k - 1}$, and where the sets Q_1, \dots, Q_p are almost equal, i.e., $|Q_i| \sim \frac{n - r + 1}{p}$.

Then, we construct an unsettled $S_m = \{B_1, \dots, B_m, A_1, \dots, A_m\}$ as follows. We define $m = \sum_{j=1}^p \binom{|Q_j|}{k}$, and the sets B_i , $i = 1, \dots, m$ are the k -subsets of the Q_j -s, i.e.,

$$\{B_1, \dots, B_m\} = \bigcup_{i=1}^p \binom{Q_i}{k}.$$

Finally, we set for $i = 1, \dots, m$

$$A_i = X \cup B_i \cup \bigcup_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq j^*}} R_{ij},$$

where $B_i \subseteq Q_{j^*}$ and $R_{ij} \subseteq Q_j$, $|R_{ij}| = k - 1$ for all $j \neq j^*$. In other words, each A_i contains X , the corresponding set B_i , and $k - 1$ points from each set Q_j not containing B_i .

It is easy to see that $|A_i| = \ell$. Indeed,

$$\begin{aligned} |A_i| &= k + r - 1 + (p - 1)(k - 1) \\ &= k + r - 1 + \left(\frac{\ell - r}{k - 1} - 1 \right) (k - 1) \\ &= r + \ell - r = \ell \end{aligned}$$

Let us observe first that by the above calculations no ℓ -set can settle S_m . This is because all ℓ -sets must intersect at least one of the Q_j 's in k or more points, therefore any ℓ -set contains at least one of the B_i 's.

Furthermore, we can show that $|Q_j| \geq k$, for $j = 1, \dots, p$. By our assumption we have $n(k-1) \geq \ell k - r - k + 1$ from which we can derive the following chain of inequalities:

$$\begin{aligned} n &\geq \ell \frac{k}{k-1} - \frac{k+r-1}{k-1} \\ n(k-1) &\geq k\ell - k - r + 1 \\ n(k-1) - kr + k + r - 1 &\geq k\ell - kr \\ (n-r+1)(k-1) &\geq k\ell - kr \\ (n-r+1) &\geq k \frac{\ell-r}{k-1} = kp \\ \frac{n-r+1}{p} &\geq k, \end{aligned}$$

which implies that $|Q_j| \geq \lfloor \frac{n-r+1}{p} \rfloor \geq k$.

Finally we have to prove that no k -set can settle S_m . For this, as we remarked earlier, it is enough to show that $|\bigcap_{i=1}^m A_i| < k$, which will follow from

$$\left(\bigcap_{i=1}^m A_i \right) \cap Q_j = \emptyset \quad (3.20)$$

for $j = 1, \dots, p$, since then $(\bigcap_{i=1}^m A_i) \subseteq X$ is implied, and we have $|X| = k - 1$.

To see (3.20) let us consider the following cases:

Case 1. If $|Q_j| > k$ then for all $v \in Q_j$, there is an index i such that $B_i \subset Q_j \setminus \{v\}$, implying by the definitions that $v \notin A_i$. Hence, (3.20) follows.

Case 2. If $|Q_j| = k$ and $m \geq k + 1$, then we have $Q_j = B_{i^*}$ for exactly one index $i^* \in \{1, \dots, m\}$. For all other indices i we have $Q_j \cap A_i = R_{ij}$ of size $k - 1$. Thus, since $m \geq k + 1$, we can choose for each $v \in Q_j$ an index $i \neq i^*$ such that $v \notin A_i$, implying (3.20).

Case 3. If $m \leq k$ then we must have $|Q_1| = |Q_2| = \dots = |Q_p| = k$, $m = p \leq k$, since we already know that $|Q_j| \geq k$ for all $j = 1, \dots, p$, and if $|Q_j| > k$ for at least one index j , then $m \geq k + 1$ would be implied. Thus, we have

$$\begin{aligned} n &= |X| + \sum_{i=1}^p |Q_i| \\ &= r - 1 + pk \\ &= r - 1 + k \frac{\ell - r}{k - 1} \\ &= \ell \frac{k}{k - 1} - \frac{r}{k - 1} - 1, \end{aligned}$$

and hence, by our assumption, we must have $\ell \geq r + k^2 - k + 1$. However, $p \leq k$ implies that $p = \frac{\ell - r}{k - 1} \leq k$ from which $\ell \leq r + k^2 - k$ follows. \square

This completes the proof of Theorem 3. \square

4 More about CIS- d -graphs

4.1 Proofs of Propositions 6,7, 11 and Theorem 4

Proof of Proposition 6. Obviously, every partition of colors can be realized by successive identification of two colors. Hence, the following Lemma implies Proposition 6.

Given a $(d+1)$ -graph $\mathcal{G} = (V; E_1, \dots, E_d, E_{d+1})$, let us identify the last two colors d and $d+1$ and consider the d -graph $\mathcal{G}' = (V; E_1, \dots, E_{d-1}, E_d)$, where $E_d = E_d \cup E_{d+1}$.

Lemma 5. *If \mathcal{G} is a CIS- $(d+1)$ -graph then \mathcal{G}' is a CIS- d -graph.*

Proof. Suppose that \mathcal{G}' does not have the CIS- d -property, that is, there are d vertex-sets $C_1, \dots, C_{d-1}, C_d \subseteq V$ such that they have no vertex in common, where C_i is a maximal subset of V avoiding color i for $i = 1, \dots, d-1$, and C_d is a maximal subset of V avoiding both colors d and $d+1$. Clearly, there exist maximal vertex-sets C_d and C_{d+1} avoiding colors d and $d+1$ respectively and such that $C_d \cap C_{d+1} = C_d$. Then $C_1, \dots, C_{d-1}, C_d, C_{d+1} \subseteq V$ are maximal vertex-sets avoiding colors $1, \dots, d-1, d, d+1$ respectively and with no vertex in common. Hence, the $(d+1)$ -graph \mathcal{G}' does not have the CIS- $(d+1)$ -property, either. \square

A little later we will need the following similar claim.

Lemma 6. *If \mathcal{G} is a Gallai $(d+1)$ -graph then \mathcal{G}' is a Gallai d -graph.*

Proof. It is obvious. If \mathcal{G}' contains a Δ then the same three vertices form a Δ in \mathcal{G} too. \square

Proof of Proposition 7. It follows by a routine case analysis from the definitions.

First, let us consider Gallai's property. Suppose that \mathcal{G} has a Δ . Clearly, it cannot contain exactly one edge in \mathcal{G}'' , since then two remaining edges are of the same color. If this Δ contains 2 edges in \mathcal{G}'' then the third one is there, too, and hence \mathcal{G}'' contains a Δ . If all 3 edges are in \mathcal{G}' then \mathcal{G}' contains a Δ . Conversely, If \mathcal{G}' or \mathcal{G}'' contains a Δ then, clearly, \mathcal{G} contains it too, since both \mathcal{G}' and \mathcal{G}'' are induced subgraphs of \mathcal{G} .

Now let us consider the CIS-property. To simplify the notation we restrict ourselves by the case $d = 2$, though exactly the same arguments work in general. It is easy to see that any maximal cliques (respectively, stable sets) of \mathcal{G}' which do not contain v remain unchanged in \mathcal{G} , while a maximal clique C' (respectively, a maximal stable set S') of \mathcal{G}' which contains v and for every maximal clique C'' (respectively, every maximal stable set S'') of \mathcal{G}'' the set $C = C' \cup C'' \setminus \{v\}$ (respectively, $S = S' \cup S'' \setminus \{v\}$) is a maximal clique (respectively, a maximal stable set) of \mathcal{G} and moreover, there are no other maximal cliques (respectively, maximal stable sets) in \mathcal{G} .

It is not difficult to verify that every maximal clique $C = C' \cup C'' \setminus \{v\}$ and every maximal stable set $S = S' \cup S'' \setminus \{v\}$ in \mathcal{G} intersect if and only if every maximal clique C' intersects every a maximal stable set S' of \mathcal{G}' and every maximal clique C'' intersects every a maximal stable set S'' of \mathcal{G}'' . Indeed, if $C' \cap S' = \{v\} \neq \emptyset$ then $C \cap S = \{v\}$ for any C'' and S'' . If $C' \cap S' = \emptyset$ then $C \cap S = C'' \cap S''$ and hence $C \cap S \neq \emptyset$ if and only if $C'' \cap S'' \neq \emptyset$. If $C \cap S \neq \emptyset$ then both $C' \cap S'$ and $C'' \cap S''$ must be non-empty. \square

Proof of Theorem 4.

Part (a). By Proposition 7, \mathcal{G} is exactly closed under substitution. By Proposition 9, \mathcal{G} can be obtained from 2-graphs by substitutions. Such a decomposition of \mathcal{G} is given by a tree $T(\mathcal{G})$ whose leaves correspond to 2-graphs. It is easy to see that by construction each chromatic component of \mathcal{G} is decomposed by the same tree $T(\mathcal{G})$. Hence, all we have to prove is that both chromatic components of every 2-graph belong to \mathcal{F} . For colors $1, \dots, d-1$ this holds, since \mathcal{F} is exactly closed under substitution, and for the color d it holds, too, since \mathcal{F} is also closed under complementation.

Part (b). It follows easily from part (a). As in Lemma 5, given a $(d+1)$ -graph $\mathcal{G} = (V; E_1, \dots, E_d, E_{d+1})$, let us identify the last two colors d and $d+1$ and consider the d -graph $\mathcal{G}' = (V; E_1, \dots, E_{d-1}, E_d)$, where $E_d = E_d \cup E_{d+1}$. We assume that \mathcal{G} is Δ -free and that $G_i = (V, E_i) \in \mathcal{F}$ for $i = 1, \dots, d-1$. Then, by Lemma 6, \mathcal{G}' is Δ -free, too, and it follows from part (a) that $G_d = (V, E_d)$ is also in \mathcal{F} . Hence, the union of any two colors is in \mathcal{F} . From this by induction we derive that the union of any set of colors is in \mathcal{F} . \square

Proof of Proposition 11. Given \mathcal{G} , let us again consider the decomposition tree $T(\mathcal{G})$, fix an arbitrary its leaf v , and consider the corresponding 2-graph \mathcal{G}_v . Both its chromatic components are CIS-graphs, by Proposition 8. Hence, \mathcal{G}_v is a CIS- d -graph. Thus, \mathcal{G} is a CIS- d -graph, too, by Proposition 7. \square

4.2 Settling Δ

Let $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ and assume that $E_1 = \{(v_1, v_2)\}$, $E_2 = \{(v_2, v_3)\}$, and $E_3 = \{(v_3, v_1)\}$ form a Δ , see Figure 12. Obviously, Δ is not a CIS-3-graph. Indeed, let us consider $C_1 = \{v_2, v_3\}$, $C_2 = \{v_3, v_1\}$, and $C_3 = \{v_1, v_2\}$. There is no edge from E_i in C_i for $i = 1, 2, 3$ and $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \emptyset$. Hence, if a CIS-3-graph $\mathcal{G} = (V; E_1, E_2, E_3)$ contains a Δ then it must contain a vertex v_4 such that the sets $C'_1 = \{v_2, v_3, v_4\}$, $C'_2 = \{v_3, v_1, v_4\}$, and $C'_3 = \{v_1, v_2, v_4\}$ contain no edges from E_1 , E_2 , and E_3 , respectively.

Similarly, let us consider the sets $C_1 = \{v_3, v_1\}$, $C_2 = \{v_1, v_2\}$, and $C_3 = \{v_2, v_3\}$. Again, there is no edge from E_i in C_i for $i = 1, 2, 3$ and $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \emptyset$. Hence, if a CIS-3-graph $\mathcal{G} = (V; E_1, E_2, E_3)$ contains a Δ then it must contain a vertex v_5 such that $C'_1 = \{v_3, v_1, v_5\}$, $C'_2 = \{v_1, v_2, v_5\}$, and $C'_3 = \{v_2, v_3, v_5\}$ contain no edges from E_1 , E_2 , and E_3 , respectively.

It is easy to check that $v_4 \neq v_5$ and that we must have $(v_4, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_5) \in E_1$, $(v_4, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_5) \in E_2$, $(v_4, v_3), (v_3, v_1), (v_1, v_5) \in E_3$, see Figure 12. This leaves only one pair (v_4, v_5) whose color is not implied. Yet, let us note that for any coloring of (v_4, v_5) a new Δ appears. For example, if $(v_4, v_5) \in E_1$ then vertices (v_3, v_4, v_5) form a Δ' .

4.3 A stronger conjecture

We say that two vertices v_4 and v_5 settle Δ . Note however that v_1 and v_2 do not settle Δ' . So we need more vertices to settle it. Nevertheless, there are d -graphs whose all Δ s are settled. First such example was given by Andrey Gol'berg in 1984, see Figure 34.

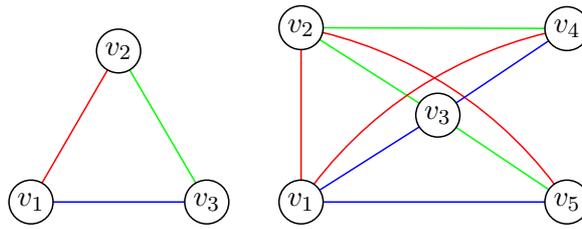


Figure 31: Settling Δ .

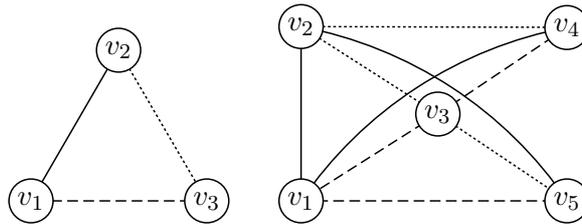


Figure 32: Settling Δ (in black and white for printing).

We call this construction a 4-cycle. It has 4 Δ s and they are all settled. Yet, if we partition its three colors into two sets we will get 44 2-combs none of which is settled. Hence, by Proposition 6, the 4-cycle is not a CIS-3-graph.

Moreover, in the next section we give examples of 3-graphs whose all Δ s and 2-combs are settled, however, their 2-projections have unsettled induced 3-combs or 3-anti-combs.

Conjecture 4. *Let \mathcal{G} be a non-Gallai 3-graph with chromatic components G_1, G_2, G_3 , then there is an unsettled Δ in \mathcal{G} or G_i has an unsettled induced comb or anti-comb for some $i = 1, 2, 3$.*

Obviously, Proposition 6 and Conjecture 4 imply Conjecture 3.

Remark 11. *It is not difficult to show that for every fixed $k, d \in \mathbf{Z}_+$ and $\epsilon > 0$ there is $n = n(k, d, \epsilon)$ such that in a random d -graph \mathcal{G} with a fixed $|V(G)| \geq k$ all Δ s as well as all induced m -combs and m -anti-combs for $m \leq k$ in all projections of \mathcal{G} are settled with probability greater than $1 - \epsilon$.*

Yet, for $m > k$, unsettled induced m -combs and m -anti-combs exist with high probability.

4.4 Even cycles and flowers

In this section we describe some interesting 3-graphs in support of Conjecture 4. They have all Δ s settled, and sometimes even all 2-combs are settled in their 2-projections. However, then unsettled 3-combs, or 3-anti-combs, or 4-combs appear.

Let us consider four Δ s in Figure 33. They form a cycle.

This construction can be extended (uniquely) to a 3-graph, shown in Figure 35, in which all four Δ s are settled “counterclockwise” (i.e., Δ s induced by the triplets $\{0, 1, 2\}$, $\{2, 3, 4\}$,

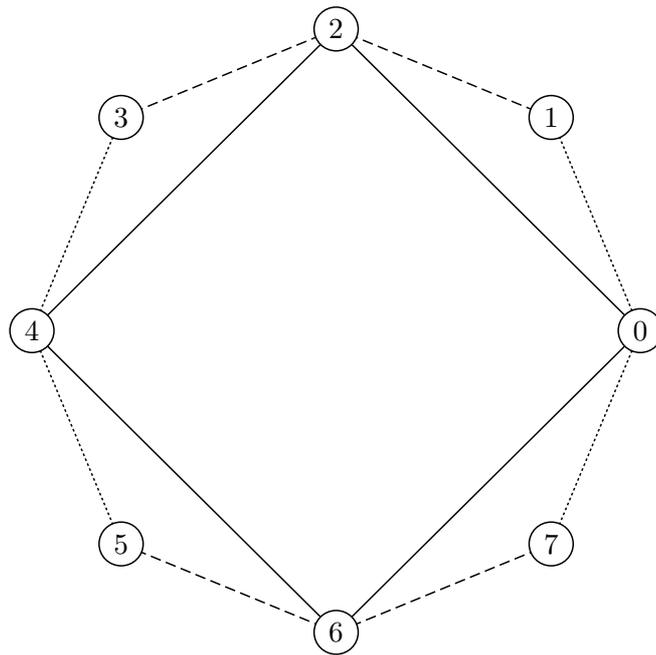


Figure 33: Initial 4-cycle structure.

$\{4, 5, 6\}$, and $\{6, 7, 0\}$ are settled by the pairs $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$, $\{7, 1\}$, and $\{1, 2\}$, respectively), and no new Δ appears. However, 2-projections of this 3-graph contain 44 unsettled 2-combs (induced by the quadruples $\{0, 5, 1, 4\}$, $\{3, 2, 6, 7\}$, $\{4, 1, 2, 3\}$, $\{0, 5, 6, 7\}$, etc.) as shown in Figure 35.

Level 1: GBBGBBG
 Level 2: RGRBRGRB
 Level 3: RBRGRBRG
 Level 4: GBBRGGBR

4 settled Δ s
 44 S_2 : 0 settled

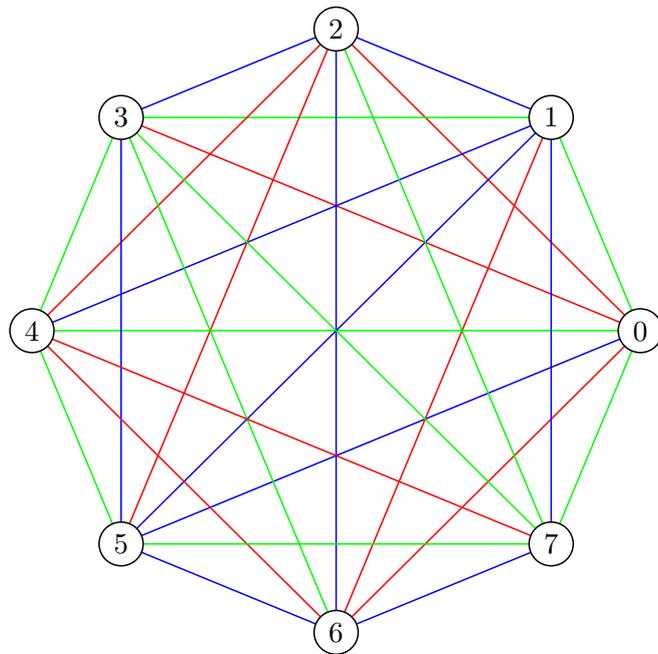


Figure 34: 4-cycle with all Δ s settled.

Level 1: GBBGGBBG
 Level 2: RGRBRGRB
 Level 3: RBRGRBRG
 Level 4: GBBRGGBR

4 settled Δ s
 44 S_2 : 0 settled

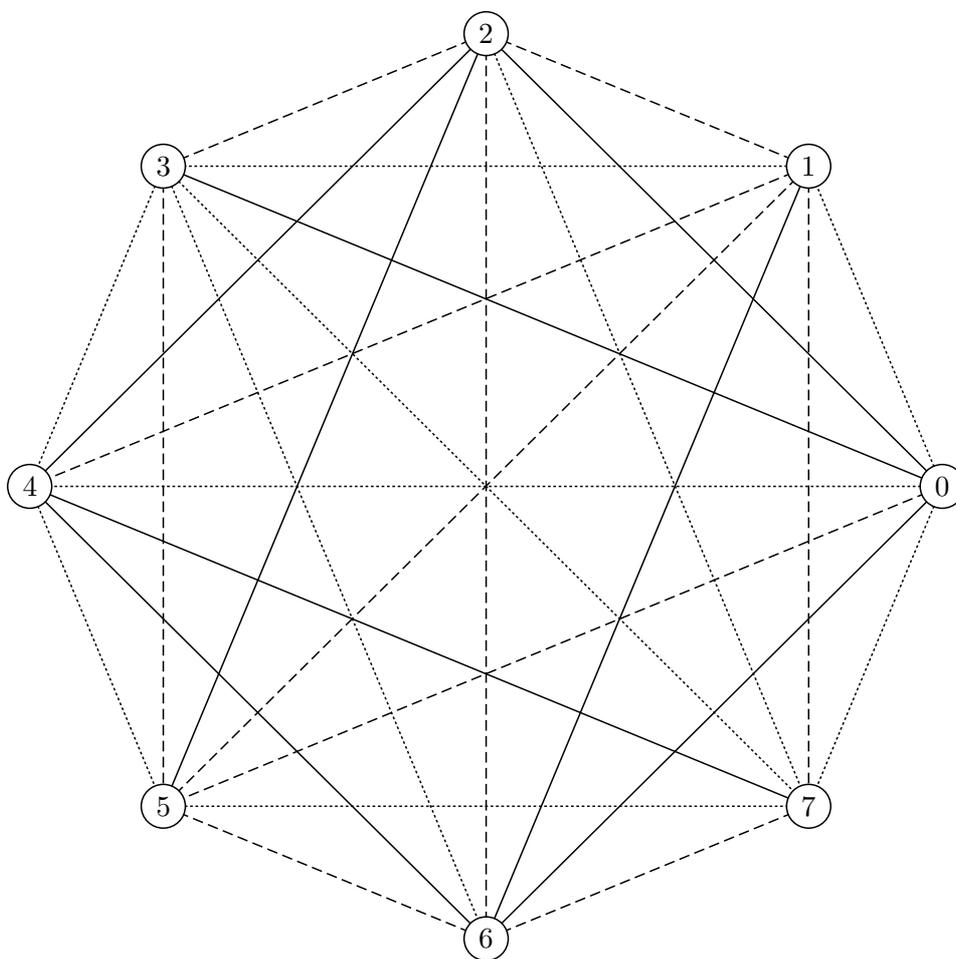


Figure 35: 4-cycle (in black and white for printing). This 3-graph was constructed by Andrey Gol'berg in 1984.

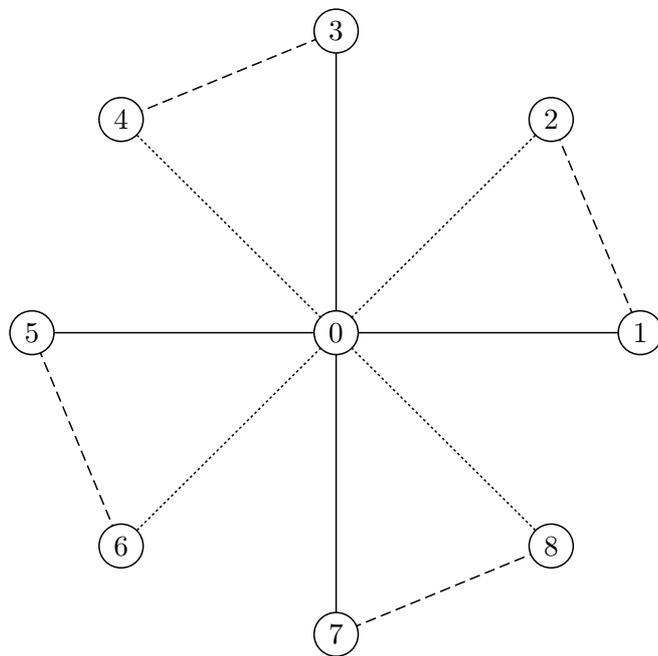


Figure 36: Initial 4-flower structure.

Now, let us consider four Δ s with one common vertex as shown in Figure 36. This construction we call a 4-*flower*. It can be extended to a 3-graph, as shown in Figure 38, in which all four Δ s are settled “counterclockwise” (i.e., Δ s induced by the triplets $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 3, 4\}$, $\{0, 5, 6\}$, and $\{0, 7, 8\}$ are settled by the pairs $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$, $\{7, 8\}$, and $\{1, 2\}$, respectively). Although four more Δ s (induced by the triplets $\{0, 1, 6\}$, $\{0, 2, 5\}$, $\{0, 4, 7\}$, and $\{0, 3, 8\}$) appear in this extension), yet they are settled too. Moreover, 2-projections of this 3-graph contain twenty induced 2-combs that are all settled. However, there exist also eight induced 3-combs that are not settled.

Using a computer, we analyzed also some larger flowers (namely, $2j$ -flowers for $j = 3, 4, 5$, and 6) shown below. In all these examples all Δ s are settled. However, in agreement with Conjecture 4, for each of these 3-graphs always there is a 2-projection that contains an unsettled comb or anti-comb.

We have to explain the notation used in the figures. The three colors are red R , blue B , and green G , and we denote them by solid, dashed, and dotted lines, respectively.

In a $2j$ -flower we denote the central vertex by 0 and other vertices are labeled by $1, 2, \dots, 2j - 1, 2j$. Due to the symmetry, we can describe this 3-graph in terms of a list of colors L present in level i , where level i contain all edges (a, b) such that $a - b = \pm i \pmod{n}$. Clearly, we only need to provide the color lists from level 1 to j , since level i gives the same assignment as level $2j - i$. Finally Level 0 shows the coloring of the radial edges. For example, the 4-flower on Figure 38 is colored as follows:

Level 0:

the edges $(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (0, 7), (0, 8)$ are colored by $RGRGRGRG$.

Level 1:

the edges $(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 1)$ are colored by $BGBGBGBG$;

Level 2:

the edges $(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7), (6, 8), (7, 1), (8, 2)$ are all colored by $BBBBBBBB$;

Level 3:

the edges $(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 1), (7, 2), (8, 3)$ are colored by $RBRBRBRB$;

Level 4:

the edges $(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8), (5, 1), (6, 2), (7, 3), (8, 4)$ are colored by $RGRG(RGRG)$.

Level 0: RGRGRGRG
 Level 1: BGBGBGBG
 Level 2: BBBB BBBB
 Level 3: RBRBRBRB
 Level 4: RGRGRGRG

8 Δ s: 8 settled
 20 S_2 : 20 settled
 8 S_3 : 0 settled

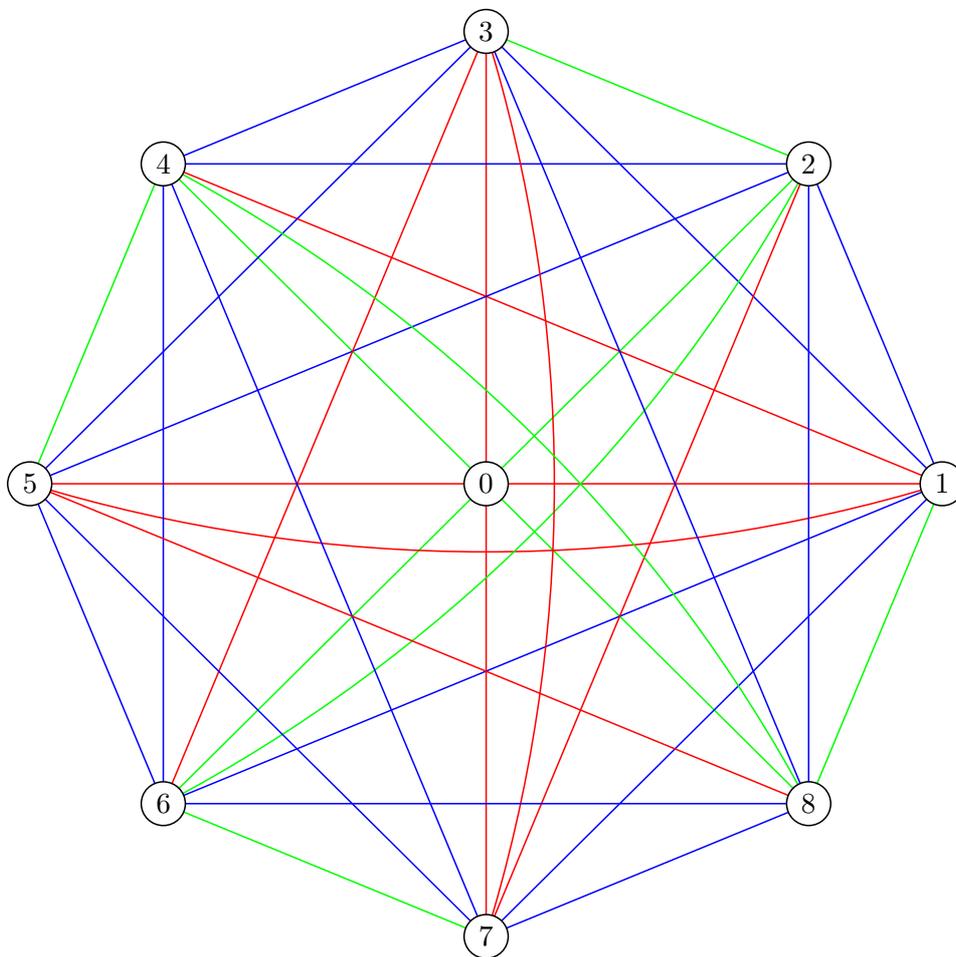


Figure 37: 4-flower example.

Level 0: RGRGRGRG
 Level 1: BGBGBGBG
 Level 2: BBBB BBBB
 Level 3: RBRBRBRB
 Level 4: RGRGRGRG

8 Δ s: 8 settled
 20 S_2 : 20 settled
 8 S_3 : 0 settled

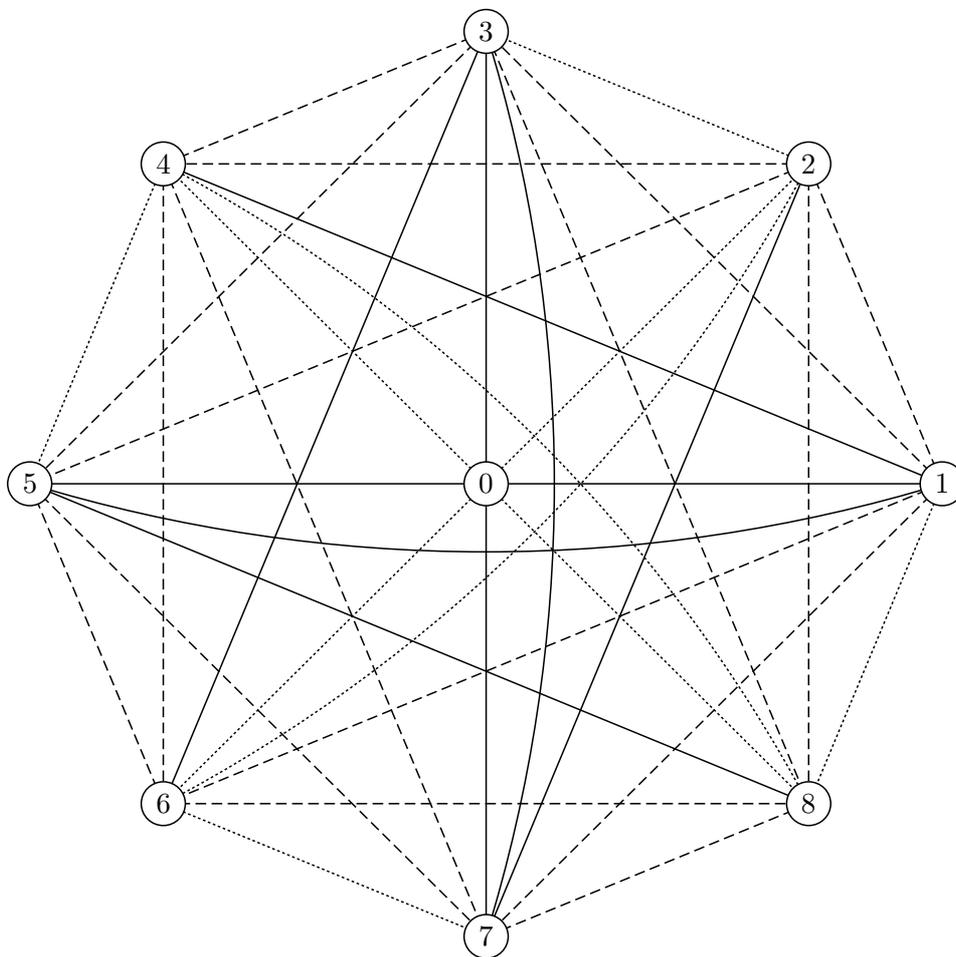


Figure 38: 4-flower example (in black and white for printing).

Level 0: RGRGRGRGRGRG
 Level 1: BGBGBGBGBGBG
 Level 2: BBBBBBBBBBBBBB
 Level 3: RBRBRBRBRBRB
 Level 4: RGRGRGRGRGRG
 Level 5: BRBRBRBRBRBR
 Level 6: BBBBBBBBBBBBBB

18 Δ s: 18 settled
 66 S_2 : 66 settled
 38 S_3 : 20 settled
 6 S_4 : 0 settled

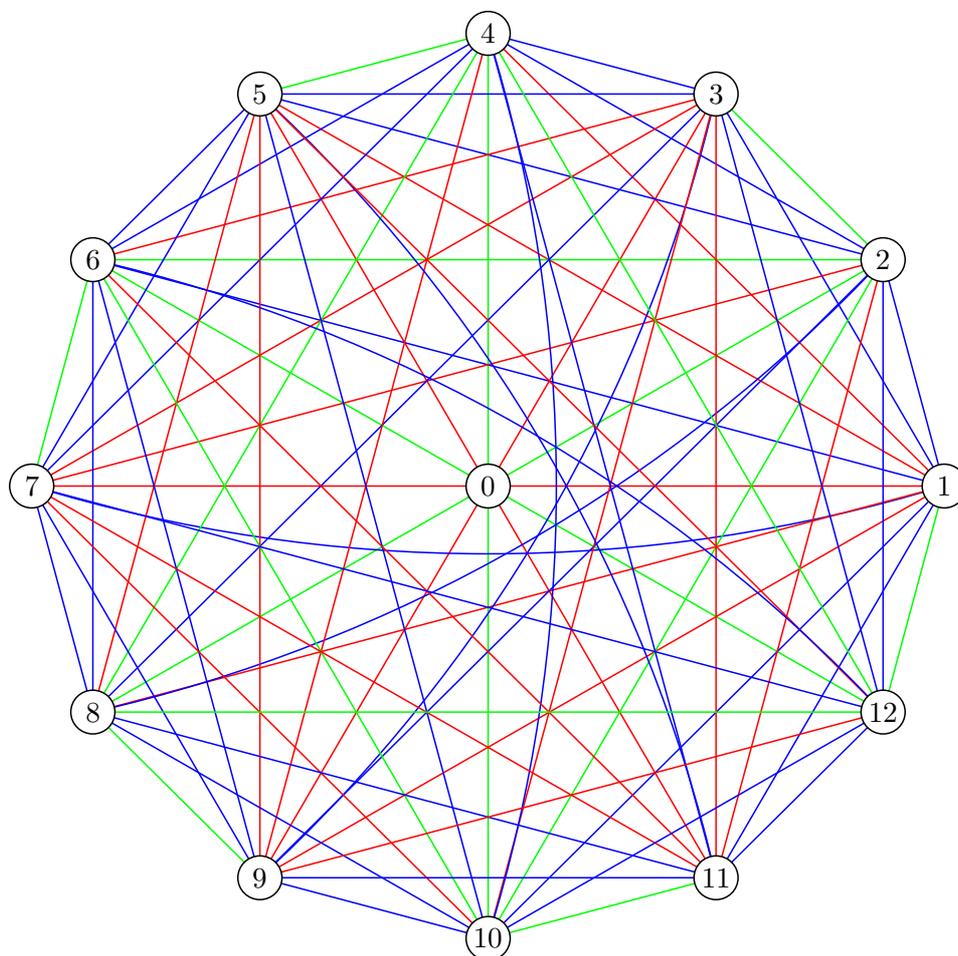


Figure 39: 6-flower example.

Level 0: RGRGRGRGRGRG
 Level 1: BGBGBGBGBGBG
 Level 2: BBBBBBBBBBBB
 Level 3: RBRBRBRBRBRB
 Level 4: RGRGRGRGRGRG
 Level 5: BRBRBRBRBRBR
 Level 6: BBBBBBBBBBBB

18 Δ s: 18 settled
 66 S_2 : 66 settled
 38 S_3 : 20 settled
 6 S_4 : 0 settled

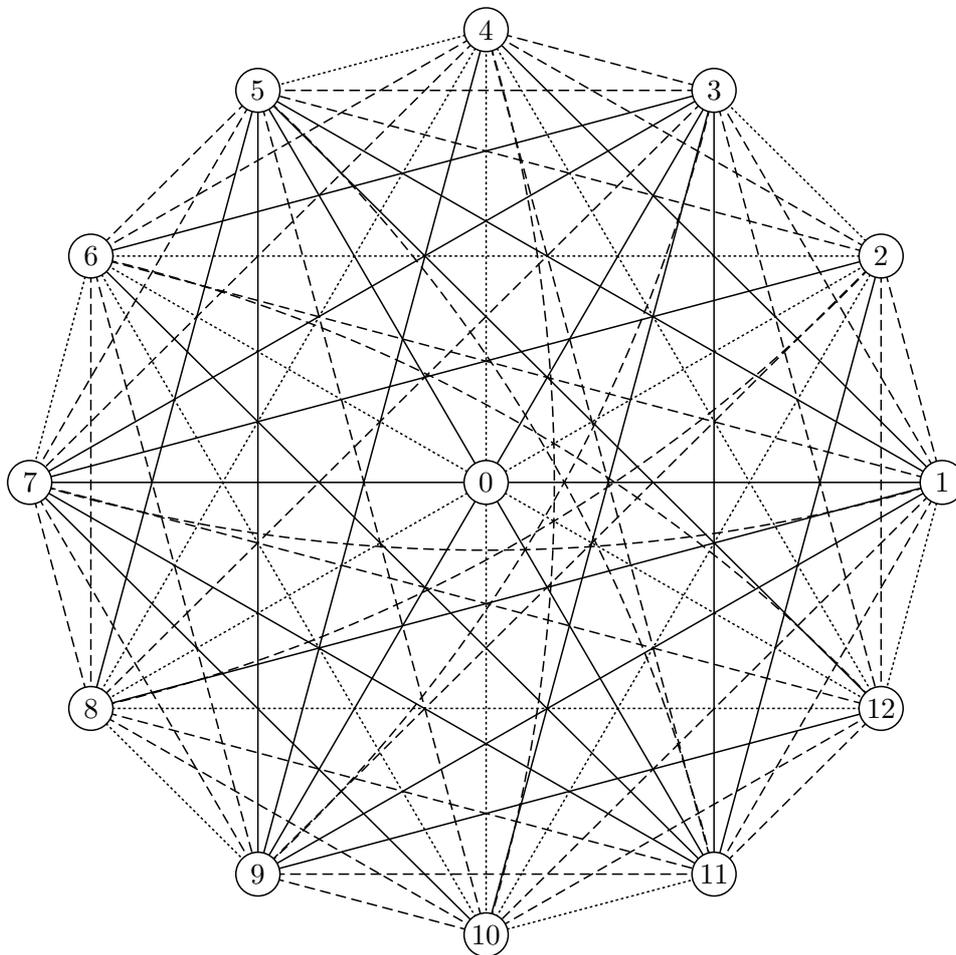


Figure 40: 6-flower example (in black and white for printing). This 3-graph was constructed by Bianca Viray in 2004.

Level 0: RGRGRGRGRGRGRGRG
 Level 1: BGBGBGBGBGBGBGBG
 Level 2: BBBBBBBBBBBBBBBB
 Level 3: RBRBRBRBRBRBRBRB
 Level 4: RGRGRGRGRGRGRGRG
 Level 5: BRBRBRBRBRBRBRBR
 Level 6: BBBBBBBBBBBBBBBB
 Level 7: BGBGBGBGBGBGBGBG
 Level 8: RRRRRRRRRRRRRRRR

32 Δ s: 32 settled
 192 S_2 : 192 settled
 256 S_3 : 0 settled

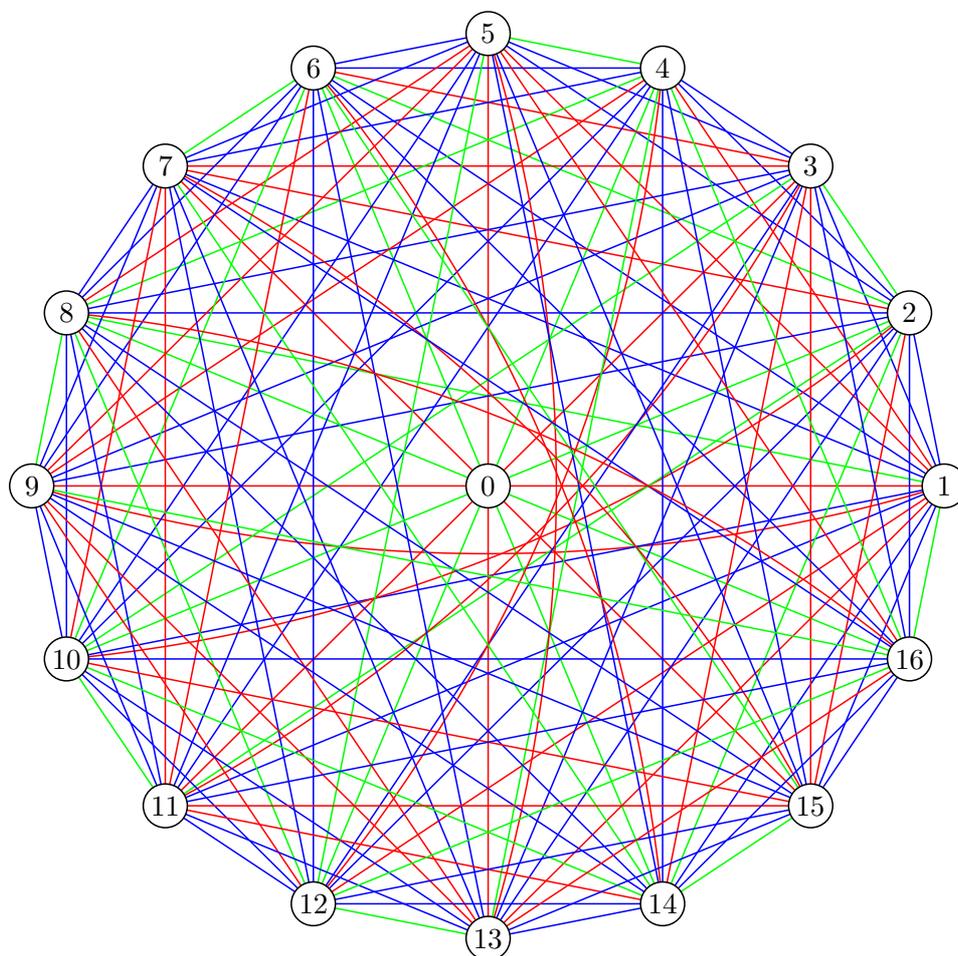


Figure 41: 8-flower example.

Level 0: RGRGRGRGRGRGRG
 Level 1: BGBGBGBGBGBGBG
 Level 2: BBBBBBBBBBBBBBBB
 Level 3: RBRBRBRBRBRBRB
 Level 4: RGRGRGRGRGRGRG
 Level 5: BRBRBRBRBRBRBR
 Level 6: BBBBBBBBBBBBBBBB
 Level 7: GBGBGBGBGBGBGB
 Level 8: RRRRRRRRRRRRRR

32 Δ s: 32 settled
 192 S_2 : 192 settled
 256 S_3 : 0 settled

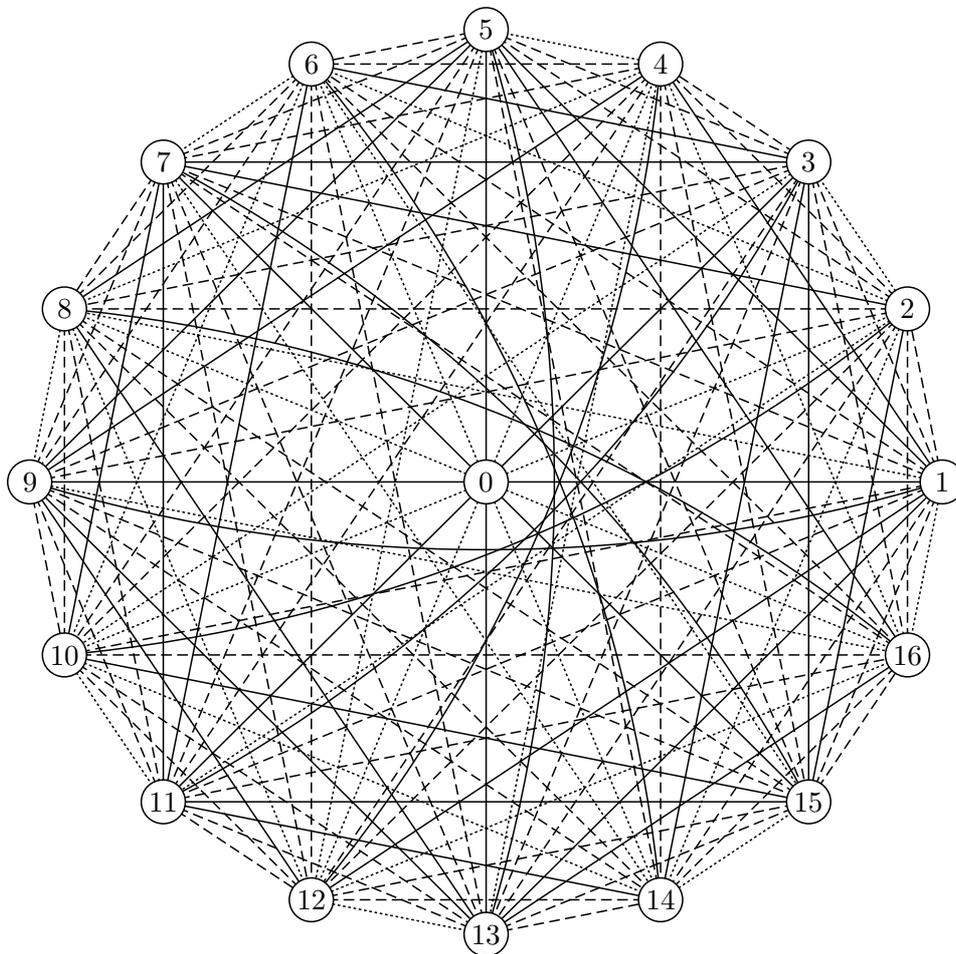


Figure 42: 8-flower example (in black and white for printing).

Level 0: RGRGRGRGRGRGRGRGRGRG
 Level 1: BGBGBGBGBGBGBGBGBGBG
 Level 2: BBBBBBBBBBBBBBBBBBBB
 Level 3: RBRBRBRBRBRBRBRBRBRB
 Level 4: RGRGRGRGRGRGRGRGRGRG
 Level 5: BRBRBRBRBRBRBRBRBRBR
 Level 6: BBBBBBBBBBBBBBBBBBBB
 Level 7: RBRBRBRBRBRBRBRBRBRB
 Level 8: RGRGRGRGRGRGRGRGRGRG
 Level 9: BRBRBRBRBRBRBRBRBRBR
 Level 10: BBBBBBBBBBBBBBBBBBBB

50 Δ s: 50 settled
 290 S_2 : 290 settled
 220 S_3 : 120 settled
 110 S_4 : 0 settled

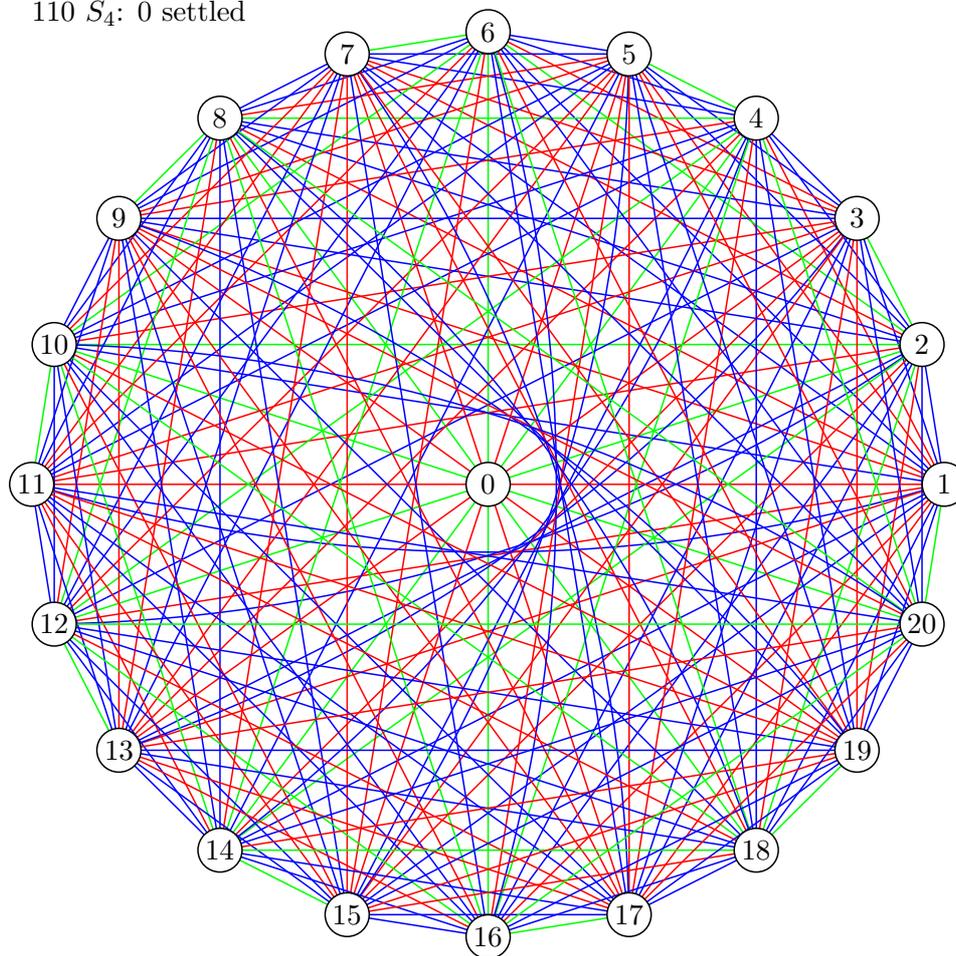


Figure 43: 10-flower example.

Level 0: RGRGRGRGRGRGRGRGRG
 Level 1: BGBGBGBGBGBGBGBGBG
 Level 2: BBBBBBBBBBBBBBBBBBBB
 Level 3: RBRBRBRBRBRBRBRBRB
 Level 4: RGRGRGRGRGRGRGRGRG
 Level 5: BRBRBRBRBRBRBRBRB
 Level 6: BBBBBBBBBBBBBBBBBBBB
 Level 7: RBRBRBRBRBRBRBRBRB
 Level 8: RGRGRGRGRGRGRGRGRG
 Level 9: BRBRBRBRBRBRBRBRB
 Level 10: BBBBBBBBBBBBBBBBBBBB

50 Δ s: 50 settled
 290 S_2 : 290 settled
 220 S_3 : 120 settled
 110 S_4 : 0 settled

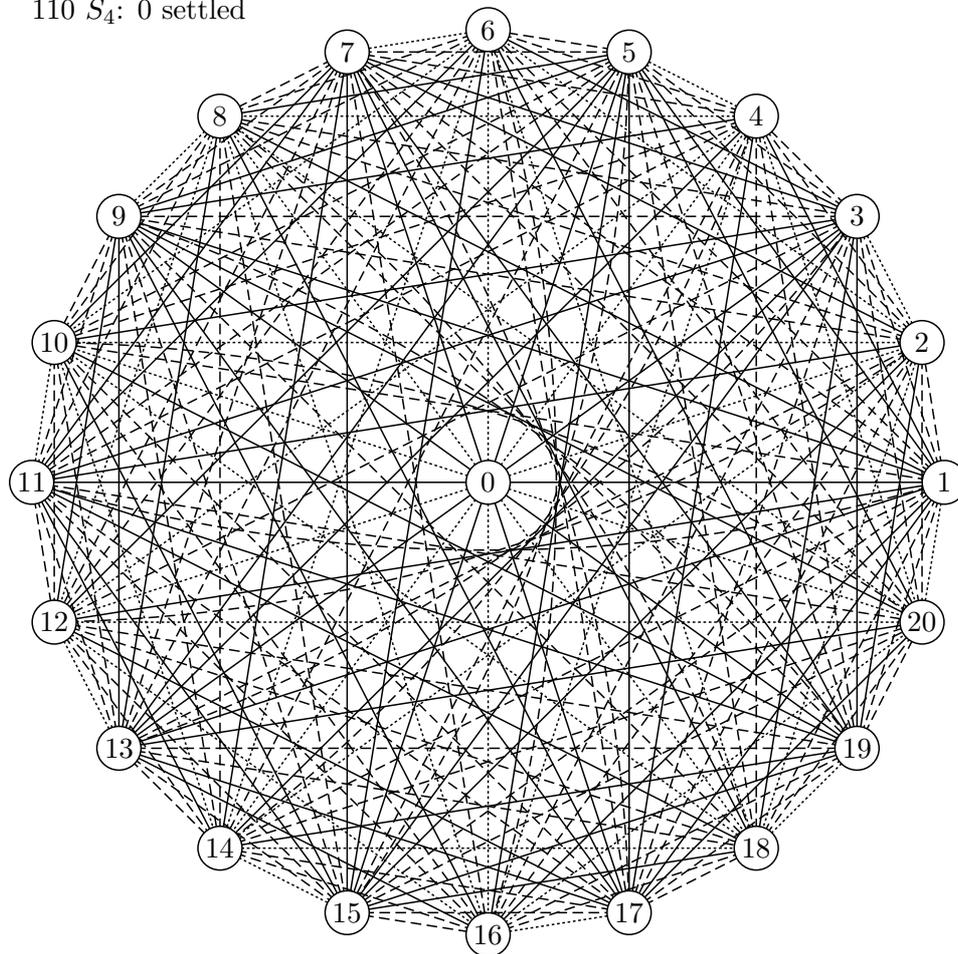


Figure 44: 10-flower example (in black and white for printing).

Level 0: RGRGRGRGRGRGRGRGRGRGRGRG
 Level 1: BGBGBGBGBGBGBGBGBGBGBGBG
 Level 2: BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB
 Level 3: RBRBRBRBRBRBRBRBRBRBRBRB
 Level 4: RRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRR
 Level 5: BRBRBRBRBRBRBRBRBRBRBRB
 Level 6: BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB
 Level 7: RBRBRBRBRBRBRBRBRBRBRBRB
 Level 8: RGRGRGRGRGRGRGRGRGRGRGRG
 Level 9: BGBGBGBGBGBGBGBGBGBGBGBG
 Level 10: BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB
 Level 11: RBRBRBRBRBRBRBRBRBRBRBRB
 Level 12: RRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRR

72 settled Δ s
 600 S_2 : 600 settled
 184 S_3 : 76 settled
 24 S_4 : 0 settled

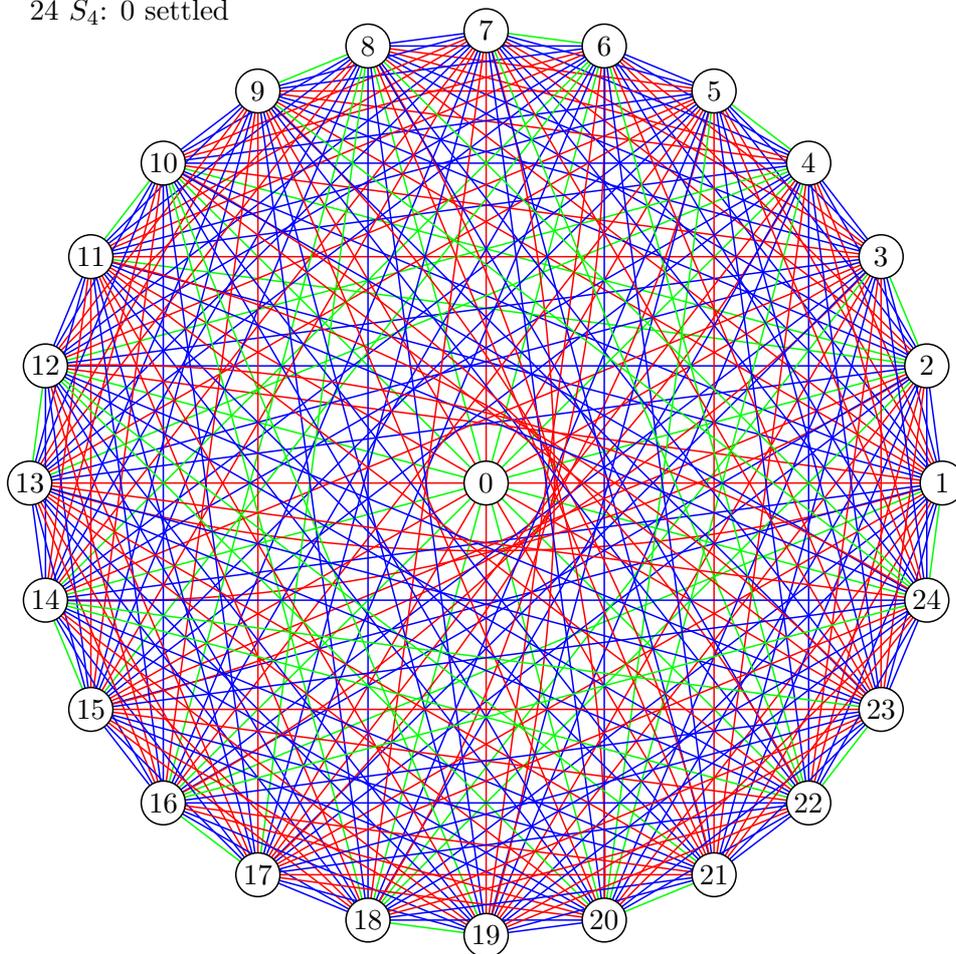


Figure 45: 12-flower example.

Level 0: RGRGRGRGRGRGRGRGRGRGRGRG
Level 1: BGBGBGBGBGBGBGBGBGBGBGBG
Level 2: BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB
Level 3: RBRBRBRBRBRBRBRBRBRBRBRB
Level 4: RRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRR
Level 5: BRBRBRBRBRBRBRBRBRBRBRB
Level 6: BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB
Level 7: RBRBRBRBRBRBRBRBRBRBRBRB
Level 8: RGRGRGRGRGRGRGRGRGRGRGRG
Level 9: BGBGBGBGBGBGBGBGBGBGBGBG
Level 10: BBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBBB
Level 11: RBRBRBRBRBRBRBRBRBRBRBRB
Level 12: RRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRRR

72 settled Δ s
600 S_2 : 600 settled
184 S_3 : 76 settled
24 S_4 : 0 settled

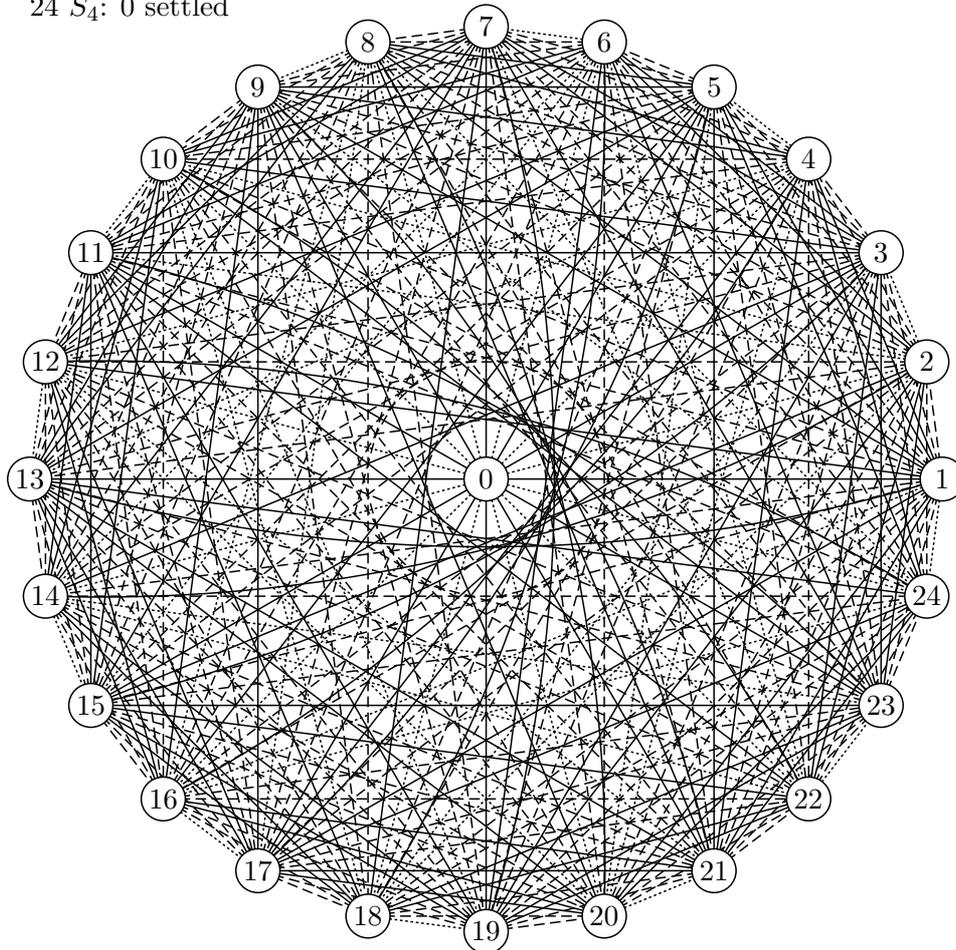


Figure 46: 12-flower example (in black and white for printing).

References

- [1] R.N. Ball, A. Pultr and P. Vojtěchovský, Colored graphs without colorful cycles, to appear in *Combinatorica*, <http://www.math.du.edu/data/preprints/m0506.pdf>
- [2] E. Boros and V. Gurvich, Perfect graphs are kernel-solvable, RUTCOR Research Report, RRR-16-1994, Rutgers University, *Discrete Math.* 159 (1996), 35-55.
- [3] E. Boros and V. Gurvich, Stable effectivity functions and perfect graphs, RUTCOR Research Report, RRR-23-1995, Rutgers University, *Mathematical Social Sciences* 39 (2000), 175-194.
- [4] E. Boros, V. Gurvich and A. Vasin, Stable families of coalitions and normal hypergraphs, RUTCOR Research Report, RRR-22-1995, Rutgers University, *Mathematical Social Sciences* 34 (1997), 107-123.
- [5] E. Boros, V. Gurvich and P.L. Hammer (1993), Dual subimplicants of positive Boolean functions, RUTCOR Research Report, RRR-11-1993, Rutgers University, *Optimization Methods and Software* 10, 1998, 147-156.
- [6] A Brandstädt, V.B. Le, and J.P. Spinrad, *Graph classes: a survey*, SIAM, Philadelphia, 1999.
- [7] H. Buer and R. Möring, A fast algorithm for decomposition of graphs and posets. *Math. Oper. Res.* 3 (1983), 170-184.
- [8] K. Cameron and J. Edmonds, Lambda composition, *J. Graph Theory* 26 (1997) 9-16.
- [9] K. Cameron, J. Edmonds, and L. Lovász, A note on perfect graphs, *Periodica Math. Hungar.* 17(3) (1986), 441-447.
- [10] F.R.K. Chung and R.L. Graham, Edge-colored complete graphs with precisely colored subgraphs, *Combinatorica* 3 (1983) 315-324.
- [11] A. Cournier and M. Habib, A new linear algorithm for modular decomposition, in *Proc. of 19th Internat. Coll. on Trees in Algebra and Programming (CAAP-94)*, Edinburgh, Scotland (S. Tison ed.), LNCS 787, Springer, Berlin (1994), 68-82.
- [12] T. Eiter, Exact transversal hypergraphs and application to Boolean μ -functions. *J. Symbolic Computation* 17 (1994) 215-225.
- [13] T. Eiter, Generating Boolean μ -expressions. *Acta Informatica*, 32 (1995) 171-187.
- [14] P. Erdős, M. Simonovits, and V.T. Sos, Anti-Ramsey theorems, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* 10 (1973), 633-643.

- [15] S. Foldes and P.L. Hammer, Split graphs; in Proc. of the 8th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Louisiana State Univ., Baton Rouge, La, 1977) *Congressus Numerantium XIX* (1977), 311-315.
- [16] T. Gallai, Transitiv orientierbare graphen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 18 (1-2) (1967), 25-66. English translation by F. Maffray and M. Preissmann, in: *Perfect Graphs* (Chapter 3) eds. J.L.R Alfonsin and B.A. Reed, John Wiley and Sons.
- [17] M.C. Golumbic and V. Gurvich, Read-once functions, chapter in: *Boolean Functions* (Y. Crama and P.L. Hammer, eds.), to appear.
- [18] V.Gurvich, On repetition-free Boolean functions, *Uspechi mat. nauk* (Russian Math. Surveys), 32, no 1 (1977), 183-184 (in Russian).
- [19] V. Gurvich, Applications of Boolean functions and contact schemes in game theory, section 5, Repetition-free Boolean functions and normal forms of positional games (1978), Ph.D. thesis, Moscow Inst. of Physics and Technology, Moscow, USSR (in Russian).
- [20] V. Gurvich, On the normal form of positional games, *Soviet math. dokl.*, 25, no 3 (1982) 572-575.
- [21] V. Gurvich, Some properties and applications of complete edge-chromatic graphs and hypergraphs, *Soviet math. dokl.*, 30, no 3 (1984) 803-807.
- [22] V. Gurvich, Criteria for repetition-freeness of functions in the Algebra of Logic, *Russian Acad. of Sci. Dokl. Math.*, **43**, no 3 (1991) 721- 726.
- [23] V. Gurvich, 1992, Positional game forms and edge-chromatic graphs, *Russian Acad. of Sci. Dokl. Math.*, **45**, no 1 (1992) 168-172.
- [24] A. Gyárfás and G. Simonyi, Edge coloring of complete graphs without tricolored triangles, *J. Graph Theory* 46 (2004), 211-216.
- [25] M.Karchmer, N.Linial, L. Newman, M. Saks, A. Wigderson, Combinatorial characterization of read-once formulae, *Discrete Math.* **114** (1993) 275-282.
- [26] T. Kloks, C.-M. Lee, J. Liu, and H. Müller, On the recognition of general partition graphs, in: *Graph-theoretic concepts of computer science*, Lecture Notes in Comput. Sci. 2880 (Springer, Berlin, 2003) 273-283.
- [27] J. Körner and G. Simonyi, Graph pairs and their entropies: modularity problems, *Combinatorica* 20 (2000) 227-240.
- [28] J. Körner, G. Simonyi, and Zs. Tuza, Perfect couples of graphs, *Combinatorica* 12 (1992) 179-192.

- [29] L. Lovász, Normal hypergraphs and the weak perfect graph conjecture, *Discrete Math.*, 2 (3) (1972), 253-267.
- [30] L. Lovász A characterization of perfect graphs, *J. Combinatorial Theory, (Ser. B)* 13 (2) (1972), 95-98.
- [31] L. Lovász, *Combinatorial problems and Exercises*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, New York, Oxford, 1979.
- [32] McAvaney, J. Robertson, and D. DeTemple, A characterization and hereditary properties for partition graphs, *Discrete Math.* 113 (1-3) (1993) 131-142.
- [33] R.M. McCollel and J.P. Spinrad, Modular decomposition and transitive orientation, *Discrete Math.* 201 (1999), 189-241.
- [34] R. Möring, Algorithmic aspects of the substitution decomposition in optimization over relations, set systems, and Boolean functions, *Ann. Oper. Res.* 4 (1985/6), 195-225.
- [35] J. Muller and J. Spinrad, Incremental modular decomposition, *J. ACM* **36** (1) (1989), 1-19.
- [36] Yu.L. Orlovich and I.E. Zverovich, Independent domination and the triangle condition, 12 pp. To appear.
- [37] G. Ravindra, Strongly perfect line graphs and total graphs, in *Finite and infinite sets*, 6-th Hungarian Combinatorial Colloquium, vol. 2, Eger, Hungary, 1981, *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai* 37 (1984) 621-633.
- [38] I.Zverovich and I.Zverovich, Bipartite hypergraphs: A survey and new results, *Discrete Math.* 306 (2006) 801-811