II олимпијада

1. Најди ги сите трицифрени броеви кои при делење со 11 даваат број кој е еднаков на збирот на квадратите на цифрите на почетниот број.
Решение. Бараниот број е трицифрен и е делив со 11, па може да се запише во облик $11u$ каде $10 \le u \le 90$, $u \in \mathbb{N}$.
Нека $u = 10a + b$, $a, b \in \{0,1,2,...,9\}$. Ќе разгледаме два случаја.

1° Ако $a + b < 10$, тогаш бараниот број е од облик $100a + 10(a+b) + b$ и од условот на задачата следува

$$a^2 + (a+b)^2 + b^2 = 10a + b \text{ или } 2(a^2 + b^2 + ab - 5a) = b,$$

што значи дека b мора да е парен број т.е. $b \in \{0,2,4,6,8\}$. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $a = 5$, $b = 0$, т.е. 550 е бараниот број.

2° Ако $a + b \ge 10$, тогаш бараниот број е $100(a+1) + 10(a+b-10) + b$ и од условот на задачата имаме

$$(a+1)^2 + (a+b-10)^2 + b^2 = 10a + b \text{ или } 2(a^2 + b^2 + ab - 14a - 10b + 50) = b - 1,$$

па затоа b мора да биде непарен број т.е. $b \in \{1,3,5,7,9\}$. Со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $a = 7$, $b = 3$, т.е. 803 е бараниот број.
Значи, единствени броеви кои ги задоволуваат условите од задачата се 550 и 803.

2. Реши ја неравенката $\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9$, $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Изразот на левата страна е дефиниран за $x \ge -\frac{1}{2}$ и $x \ne 0$. Според тоа

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{2x-1})^2} = (1 + \sqrt{2x+1})^2 .$$

Бидејќи функцијата $f(x) = (1 + \sqrt{2x+1})^2 - 2x - 9 = 2\sqrt{2x+1} - 7$ е растечка за $x \ge -\frac{1}{2}$ и $x \ne 0$ и важи $f(\frac{45}{8}) = 0$, решение на неравенката е множеството

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, -\tfrac{1}{2} \le x < \tfrac{45}{8}, x \ne 0\} .$$

3. Даден е правоаголен триаголник со должина на хипотенузата a, која е поделена на n еднакви делови (n е непарен број). Нека α е аголот под кој од точката A се гледа оној од $n-$те делови на хипотенузата кој ја содржи нејзината средина. Докажи дека $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$.

Решение. Нека DE е отсечката која ја содржи средината на хипотенузата и $\overline{BH} = x$, каде H е подножната точка на висината спуштена од темето A кон основата BC. Тогаш, $x(a-x) = h^2$. Ако со α и β ги означиме аглите EAD и DAH, добиваме $\measuredangle EAH = \alpha + \beta$.

Од правоаголниот триаголник AHE следува $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\overline{HE}}{\overline{AH}}$. Понатаму,

$$\overline{HE} = \overline{HD} + \overline{DE}\,,\ \ \overline{HD} = \overline{BD} - \overline{BH} \ \text{ и } \ \overline{BD} = \tfrac{n-1}{2n}a\,,$$

па затоа $\overline{HE} = \frac{n+1}{2n}a - x$. Значи,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{n+1}{2n}a - x}{h}\,,\ \ \operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{n-1}{2n}a - x}{h}\,.$$

Ако го искористиме идентитетот

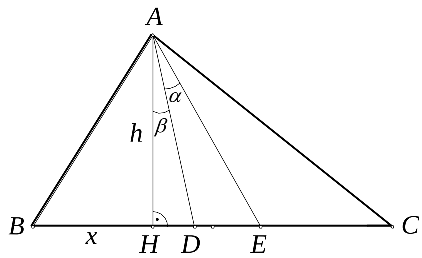
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,,$$

добиваме

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ah}{nh^2 + \frac{n^2-1}{4n}a^2 - n(ax - x^2)}\,.$$

Но, $h^2 = x(a-x)$, па затоа

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{a(n^2-1)}\,.$$

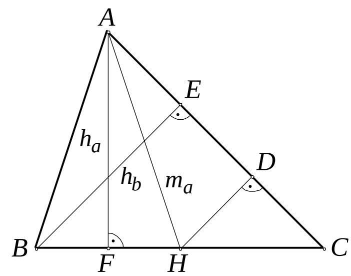


Црт. 2.1.

4. Конструирај триаголник ABC ако се познати h_a, h_b и m_a.

Решение. *Анализа.* Нека ABC е триаголникот кој што треба да го конструираме (црт. 2.2). Од средината H на страната BC повлекуваме нормала HD на AC. BE и AF се висини спуштени од темињата B и A, соодветно. Според тоа

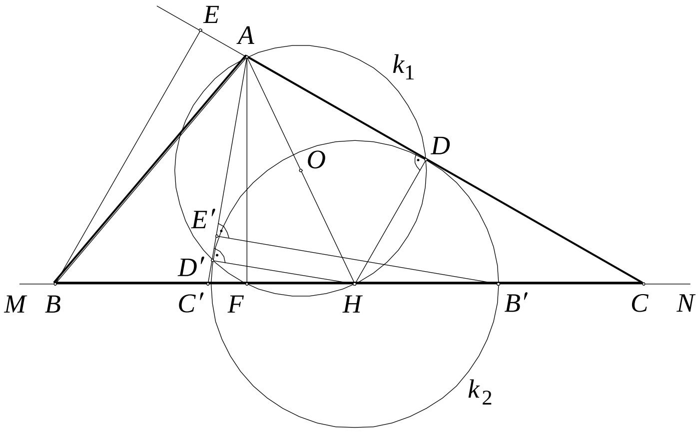
$$\overline{HD} = \tfrac{1}{2}\overline{BE} = \tfrac{1}{2}h_b\,.$$



Црт. 2.2.

Јасно, триаголникот AFH е определен. Точката D се наоѓа во пресекот на кружницата k_1 со дијаметар AH и кружницата k_2 со центар во H и радиус HD. Сега, ако ја знаеме точката D, лесно можеме да ги конструираме останатите темиња на триаголникот.

Конструкција. Повлекуваме права MN и во нејзина точка F ја конструираме висината AF. Опишуваме кружница со радиус m_a и центар во точката A. Таа ја сече правата MN во две точки H и H'. Во пресек на кружниците k_1 и k_2 (со центар во H и H' и радиус $\overline{HD} = \frac{1}{2}h_b$) ги наоѓаме точките D и D'. Точката C е пресек на правите AD и MN. Точката B е симетрична со точката C во однос на точката H. Другото решение го добиваме користејќи ја точката D'. Јасно, постојат уште две решенија кои се складни со веќе конструираните.



Црт. 2.3.

Доказ. Непосредно следува од анализата и конструкцијата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Дискусија. Ако $m_a > h_a$, $\frac{1}{2}h_b < m_a$ и $\frac{1}{2}h_b \neq h_a$, тогаш постојат две различни решенија, а ако $\frac{1}{2}h_b = h_a$ постои само едно решение $(AD \parallel MN)$.

Ако $m_a = h_a$ и $\frac{1}{2}h_b < m_a$ постои само едно решение (два триаголници кои се основиметрични во однос на правата AF).

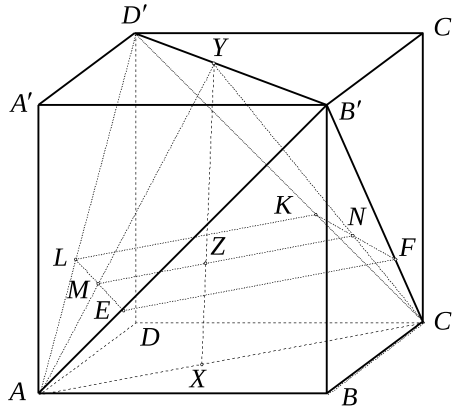
5. Дадена е коцка $ABCDA'B'C'D'$.

а) Најди го геометриското место на средините на отсечките XY, каде X е точка од отсечката AC, а Y е точка од отсечката $B'D'$.

б) Најди го геометриското место на средините Z на отсечките XY за кои $\overline{YZ} = 2\overline{ZX}$.

Решение. Ќе го најдеме геометриското место на точки Z од отсечките XY каде X и Y се менуваат на отсечките AC и $B'D'$ такви што $\overline{YZ} = k\overline{XZ}$, $k > 0$.

Ако точката X се совпаѓа со A и Y со B', точката E од дијагоналата AB' за која $\overline{B'E} = k\overline{AE}$, припаѓа на бараното множество. На ист начин ги добиваме точките F,



Црт. 2.4.

K и L кои припаѓаат на CB', CD' и AD', соодветно. Ако точката Y се движи по $B'D'$, точката Z се движи по $EL \parallel B'D'$. Триаголниците $AB'D'$ и AEL се хомотетични со коефициент на хомотетија $\frac{k}{k+1}$. Исто така, отсечките $EF \parallel AC$, $FK \parallel B'D'$ и $KL \parallel AC$ припаѓаат на бараното геометриско место точки. Бидејќи

$$FK \parallel EL \parallel B'D' \perp AC \parallel EF \parallel KL$$

четириаголникот $EFKL$ е правоаголник. Ќе докажеме дека бараното геометриско место точки е целиот правоголник $EFKL$, заедно со неговите внатрешни точки.

Нека точките X и Y припаѓаат на дијагоналите AC и $B'D'$ соодветно, и нека $Z \in XY$ е точка која ја дели отсечката во однос $\frac{\overline{YZ}}{\overline{XZ}} = k$. Рамнината ACY ги сече триаголниците $CD'B'$ и $AB'D'$ во отсечки CY и AY соодветно, а четириаголникот $EFKL$ во отсечка $MN \parallel AC$. Триаголниците YMN и YAC се хомотетични со коефициент на хомотетија $\frac{k}{k+1}$. Отсечката XY ја сече отсечката MN, која е паралелна со AC, во точка Z која ја дели во однос $k = \frac{\overline{YZ}}{\overline{XZ}}$. Но, на отсечката XY постои само една точка која ја дели во тој однос и таа лежи во четириаголникот $EFKL$.

Ќе докажеме дека секоја точка Z од внатрешноста на четириаголникот $EFKL$ припаѓа на некоја отсечка со крајни точки кои припаѓаат на отсечките AC и $B'D'$ и ја дели таа отсечка во однос k. Рамнината ACZ го сече правоаголникот $EFKL$ во отсечка $MN \parallel EF \parallel KL$. Бидејќи Z е внатрешна точка од $EFKL$, правата MN ги сече отсечките EL и FK во внатрешни точки. Таа рамнина ги сече триаголниците $CD'B'$ и $AB'D'$ по отсечки кои лежат во внатрешноста на аглите $B'CD'$ и $D'AB'$, т.е. таа ја сече отсечката $B'D'$ во некоја точка Y. Од $\triangle YMN$ и $\triangle YAC$ се добива $k = \frac{\overline{YZ}}{\overline{XZ}}$.

Бараното геометриско место точки е правоаголникот $EFKL$ чии должини на страни се еднакви на

$$\overline{EL} = \overline{FK} = \frac{1}{k+1}\overline{B'D'} = \frac{a\sqrt{2}}{k+1} \quad \text{и} \quad \overline{EF} = \overline{KL} = \frac{k}{k+1}\overline{AC} = \frac{ka\sqrt{2}}{k+1}.$$

6. Даден е рамнокрак трапез со основи a и b и висина h.

а) Конструирај точка P на оската на симетрија на трапезот од која двата негови крака се гледаат под прав агол.

б) Најди го растојанието од точката P до една од основите на трапезот.

в) Кога може да се конструира точката P (разгледај ги сите случаи).

Решение. а) Ќе ја користиме познатата теорема, дека геометриско место точки од кои дадена отсечка се гледа под прав агол е кружница чиј дијаметар е дадената отсечка. Значи, констрираме кружница со дијаметар BC над отсечката BC. Таа ја сече оската на симетрија во бараните точки.

б) Нека

$$\overline{EP_1} = x,\ \overline{FP_1} = h - x.$$

Тогаш $\triangle BP_1F \sim \triangle P_1CE$ и

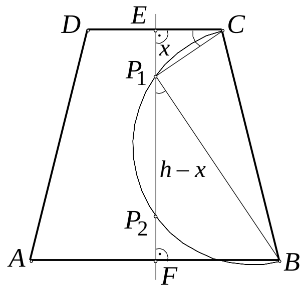
$$\frac{\overline{EP_1}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{FP_1}},$$

т.е.

$$x^2 - hx + \frac{ab}{4} = 0.$$

Решенија на оваа равенка се

$$x_{1,2} = \frac{h}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{h^2 - ab}.$$



Црт. 2.5.

в) Ако $h^2 > ab$,тогаш постојат две решенија, а ако $h^2 = ab$ постои само едно решение (конструираната кружница ја допира оската EF). Ако $h^2 < ab$, нема решение (конструираната кружница нема заеднички точки со оската EF).

7. Даден е правилен конус во кој е впишана топка. Околу топката е опишан цилиндар чија основа лежи во рамнината на основата на конусот.
Нека V_1 е волуменот на конусот, а V_2 волуменот на цилиндарот.

а) Докажи дека $V_1 \neq V_2$.

б) Најди го најмалиот број k за кој $V_1 = kV_2$, и за вака најденото k конструирај го аголот при темето на оскиниот пресек на конусот.

Решение. Го разгледуваме осниот пресек на конусот, цилиндарот и топката. Нека 2α е аголот при врвот на осниот пресек на конусот, а r е радиусот на топката. Волуменот на конусот е $V_1 = \frac{\pi h a^2}{3}$, каде $a = \overline{BD}$ и $h = \overline{CD}$. Бидејќи

$$\overline{CD} = \overline{OC} + \overline{OD} = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha} \quad \text{и}$$

$$\overline{BD} = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}\operatorname{tg}\alpha$$

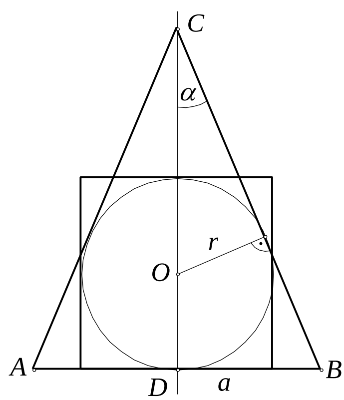
добиваме

$$V_1 = \frac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha(1-\sin\alpha)}.$$

Волуменот на цилиндарот е $V_2 = 2\pi r^3$ (висината на цилиндарот е $2r$). Нека $k = \frac{V_1}{V_2}$.

Тогаш

$$k = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)}$$



Црт. 2.6.

па според тоа

$$(1+6k)\sin^2\alpha+2(1-3k)\sin\alpha+1=0\,.$$

Оваа равенка има решение (по $\sin\alpha$) само во случај кога за нејзината дискриминанта важи $D\geq 0$, т.е. кога $(1-3k)^2-(1+6k)\geq 0$. Од овде следува $k\geq\frac{4}{3}$.

Според тоа, равенство $V_1=V_2$ не е можно. За $k=\frac{4}{3}$, добиваме $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $\overline{OC}=3r$. Од претходно изнесеното непосредно следува конструкцијата на аголот при темето на оскиниот пресек на конусот