Здравко Цветковски,
Ристо Малчески,
Скопје

ДОКАЖУВАЊЕ НА СИМЕТРИЧНИ НЕРАВЕНСТВА СО ТРИ ПРОМЕНЛИВИ

Во оваа статија ќе дадеме еден метод, кој се користи при докажување на симетрични неравенства со три променливи. За таа цел, најпрво да забележиме дека за секои $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, ако $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$, $r = xyz$, тогаш $p, q, r \in \mathbb{R}^+$. Понатаму, со непосредна проверка можат да се докажат следниве идентитети:

$$x^2 + y^2 + z^2 = p^2 - 2q \tag{1}$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = p(p^2 - 3q) + 3r \tag{2}$$

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = q^2 - 2pr \tag{3}$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = (p^2 - 2q)^2 - 2(q^2 - 2pr) \tag{4}$$

$$(x+y)(y+z)(z+x) = pq - r \tag{5}$$

$$(x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) = p^2 + q \tag{6}$$

$$\begin{aligned}(x+y)^2(y+z)^2 + (y+z)^2(z+x)^2 + (z+x)^2(x+y)^2 &= \\ &= (p^2+q)^2 - 4p(pq-r)\end{aligned} \tag{7}$$

$$xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) = pq - 3r \tag{8}$$

$$(1+x)(1+y)(1+z) = 1 + p + q + r \tag{9}$$

$$(1+x)(1+y) + (1+y)(1+z) + (1+z)(1+x) = 3 + 2p + q \tag{10}$$

$$\begin{aligned}(1+x)^2(1+y)^2 + (1+y)^2(1+z)^2 + (1+z)^2(1+x)^2 &= \\ &= (3+2p+q)^2 - 2(3+p)(1+p+q+r)\end{aligned} \tag{11}$$

$$x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = pq - 3r \tag{12}$$

кои ќе ги користиме во натамошните разгледувања. На читателот му препорачуваме самостојно да ги докаже горните равенства.

Во следните две теореми ќе докажеме неколку неравенства кои ќе ги користиме во натамошните разгледувања. При докажувањето на овие неравенства ќе ја користиме теоремата на Schur, чиј доказ може да се види во [5], а овде истата ќе ја презентираме без доказ. За таа цел ќе ги воведеме следниве ознаки: ако се дадени $x_i \in \mathbb{R}^+, i = 1,2,...,n$ и $\alpha_i \in \mathbb{R}^+, i = 1,2,...,n$, тогаш ставаме

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$$

и со $T[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n]$ да ја означиме сумата на производите $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ по сите пермутации на $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, т.е.

$$T[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n] = \sum_{\substack{(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \\ \text{е пермутација на} \\ (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)}} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} ... x_n^{\beta_n}$$

Теорема на Schur. Нека $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\beta > 0$. Тогаш точно е неравенството:

$$T[\alpha + 2\beta, 0, 0] + T[\alpha, \beta, \beta] \geq 2T[\alpha + \beta, \beta, 0],$$

кое е еквивалентно со неравенството:

$$x^\alpha (x^\beta - y^\beta)(x^\beta - z^\beta) + y^\alpha (y^\beta - x^\beta)(y^\beta - z^\beta) + z^\alpha (z^\beta - x^\beta)(z^\beta - y^\beta) \geq 0 . \ \blacklozenge$$

Исто така, во нашите разгледувања ќе ја користиме и теоремата на Muirhead и за таа цел ќе ги воведеме следниве ознаки. Ќе велиме дека низата $(\alpha_i)_{i=1}^n$ ја мајорира низата $(\beta_i)_{i=1}^n$, во ознака $(\beta_i) \prec (\alpha_i)$, ако можеме да ги разместиме елементите на низите $(\alpha_i)_{i=1}^n$ и $(\beta_i)_{i=1}^n$ така што за новодобиените низи важи:

1. $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$,
2. $\beta_1 \geq \beta_2 \geq ... \geq \beta_n$ и $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_n$,
3. $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_s \leq \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_s$, за секој $s \in \{1, 2, ..., n\}$.

Во врска со претходно дефинираниот поим за мајоризација на низи важи теоремата на Muirhead.

Теорема на Muirhead. Нека $x_i \in \mathbb{R}^+, i = 1, 2, ..., n$, $(\alpha_i)_{i=1}^n$ и $(\beta_i)_{i=1}^n$ се низи од позитивни реални броеви. Ако $(\beta_i) \prec (\alpha_i)$, тогаш $T(\beta_i) \leq T(\alpha_i)$, при што знак за равенство важи ако и само ако низите $(\alpha_i)_{i=1}^n$ и $(\beta_i)_{i=1}^n$ се совпаѓаат или $x_1 = x_2 = ... = x_n$. ♦

Теорема 1. Нека $x, y, z \geq 0$ и нека $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$, $r = xyz$. Тогаш важат неравенствата:

$$p^3 - 4pq + 9r \geq 0 \tag{13}$$

$$p^4 - 5p^2 q + 4q^2 + 6pr \geq 0 \tag{14}$$

Доказ: Ако во Неравенството на Schur ставиме $\alpha = \beta = 1$, после средувањето го добиваме неравенството (13), а ако ставиме $\alpha = 2$ и $\beta = 1$, го добиваме неравенството (14) .♦

Теорема 2. Нека $x, y, z \geq 0$ и нека $p = x + y + z$, $q = xy + yz + zx$, $r = xyz$. Тогаш важат неравенствата:

$$pq - 9r \geq 0 \tag{15}$$

$$p^2 \geq 3q \tag{16}$$

$$p^3 \geq 27r \tag{17}$$

$$q^3 \geq 27r^2 \tag{18}$$

$$q^2 \geq 3pr \tag{19}$$

$$2p^3 + 9r \geq 7pq \tag{20}$$

Доказ. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува неравенството:

$$pq = (x+y+z)(xy+yz+zx) \geq 3\sqrt[3]{xyz} \cdot 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 9r$$

кое е еквивалентно со неравенството (15).

Неравенството $0 \leq (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$ важи за секои $x, y, z \geq 0$ и истото е еквивалентно со неравенството $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, кое пак е еквивалентно со $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, што значи дека е исполнето неравенството (16).

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува неравенството

$$p = x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{r}$$

кое е еквивалентно со неравенството (17).

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува неравенството

$$q = xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} = 3\sqrt[3]{r^2}$$

кое е еквивалентно со неравенството (18).

Ако го изкористиме неравенството $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, за $a = xy$, $b = yz$ и $c = zx$, последователно добиваме

$$\begin{aligned} q^2 &= (xy+yz+zx)^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x+y+z) \\ &\geq (xy)(yz) + (yz)(zx) + (zx)(xy) + 2xyz(x+y+z) = \\ &= 3xyz(x+y+z) = 3pr, \end{aligned}$$

што значи дека е исполнето неравенството (19).

Неравенството (20) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\begin{aligned} & 2p^3 + 9r \geq 7pq && \Leftrightarrow \\ & 2(x+y+z)^3 + 9xyz \geq 7(x+y+z)(xy+yz+zx) && \Leftrightarrow \\ & 2(x^3+y^3+z^3) \geq x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y && \Leftrightarrow \\ & T[3,0,0] \geq T[2,1,0], \end{aligned}$$

и како согласно теоремата на Muirhead последното неравенство е точно, заклучуваме дека е точно и неравенството (20).♦

Задача 1. Нека $x, y, z > 0$ се реални броеви. Да се докаже неравенството

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}\,.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\begin{aligned}4(xy+yz+zx)((z+x)^2(y+z)^2+(x+y)^2(z+x)^2+(x+y)^2(y+z)^2) \geq \\ \geq 9(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2\end{aligned} \qquad (21)$$

Ставаме $x+y+z=p$, $xy+yz+zx=q$, $xyz=r$ и ако ги искористиме равенствата (5) и (7) добиваме

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2=(pq-r)^2$$

и

$$(x+y)^2(y+z)^2+(y+z)^2(z+x)^2+(z+x)^2(x+y)^2=(p^2+q)^2-4p(pq-r)\,.$$

што значи дека неравенството (21) е еквивалентно со неравенствата

$$4q((p^2+q)^2-4p(pq-r)) \geq 9(pq-r)^2 \qquad \Leftrightarrow$$

$$4p^4q-17p^2q^2+4q^3+34pqr-9r^2 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$pq(p^3-4pq+9r)+q(p^4-5p^2q+4q^2+6pr)+r(pq-9r) \geq 0\,.$$

Точноста на последното неравенство непосредно следува од $p,q,r>0$ и неравенствата (13), (14) и (15). Според тоа, даденото равенство важи и притоа важи знак за равенство ако и само ако $x=y=z$.♦

Задача ***2.*** Нека $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, за кои важи $xyz=1$. Да се докаже неравенството

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{2}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 1\,.$$

Решение: Нека $x+y+z=p$, $xy+yz+zx=q$ и $xyz=r=1$. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\begin{aligned}(1+x)^2(1+y)^2+(1+y)^2(1+z)^2+(1+z)^2(1+x)^2+2(1+x)(1+y)(1+z) \geq \\ \geq (1+x)^2(1+y)^2(1+z)^2\end{aligned} \qquad ...(1)$$

Од I_9 и I_{11} имаме дека

$$(1+x)(1+y)(1+z)=1+p+q+r=2+p+q$$

и

$$(1+x)^2(1+y)^2+(1+y)^2(1+z)^2+(1+z)^2(1+x)^2=$$

$$=(3+2p+q)^2-2(3+p)(1+p+q+r)=(3+2p+q)^2-2(3+p)(2+p+q)$$

Па неравенството (1) е еквивалентно со

$$(3+2p+q)^2-2(3+p)(2+p+q)+2(2+p+q) \geq (2+p+q)^2 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 \geq 2q+3\,.$$

Понатаму од $N_6: q^3 \geq 27r^2=27$ следува

$$q \geq 3 \qquad \dots (3)$$

Од $N_4 : p^2 \geq 3q$, имаме $p^2 \geq 3q = 2q + q \overset{(3)}{\geq} 2q + 3$. Што и требаше да се докаже.♦

Задача 3. Нека $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ се такви што $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2$. Да се докаже неравенството

$$\frac{1}{8ab+1} + \frac{1}{8bc+1} + \frac{1}{8ca+1} \geq 1 \qquad \dots (1)$$

Решение: Нека $p = a+b+c$, $q = ab+bc+ca$, $r = abc$.

Од $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2$ имаме

$$(a+1)(b+1) + (b+1)(c+1) + (c+1)(a+1) = 2(a+1)(b+1)(c+1) \qquad \dots (2)$$

Користејќи ги идентитетите I_9 и I_{10} , (2) е еквивалентно со

$3 + 2p + q = 2(1 + p + q + r)$, од каде имаме

$$q + 2r = 1 \qquad \dots (3)$$

Лесно се покажуваат идентитетите

$$(8ab+1)(8bc+1) + (8bc+1)(8ca+1) + (8ca+1)(8ab+1) = 64pr + 16q + 3$$

и

$$(8ab+1)(8bc+1)(8ca+1) = 512r^2 + 64pr + 8q + 1 \ .$$

Треба да покажеме дека

$$64pr + 16q + 3 \geq 512r^2 + 64pr + 8q + 1 \ \Leftrightarrow$$

$$8q + 2 \geq 512r^2 \qquad \dots (4)$$

Од $q^3 \geq 27r^2$ и $q = 1 - 2r$ добиваме

$$(1-2r)^3 \geq 27r^2 \ \Leftrightarrow$$

$$8r^3 + 15r^2 + 6r - 1 \leq 0 \ \Leftrightarrow$$

$$(8r-1)(r^2 + 2r + 1) \leq 0 \ ,$$

од каде следува дека

$$8r - 1 \leq 0 \ \text{ т.е. } \ r \leq \frac{1}{8} \qquad \dots (5)$$

Сега бидејќи $q + 2r = 1$ добиваме дека (3) е еквивалентно со

$$8(1-2r) + 2 \geq 512r^2 \ \Leftrightarrow$$

$$512r^2 + 16r - 10 \leq 0 \ \Leftrightarrow$$

$$(8r-1)(64r+10) \leq 0 \ ,$$

кое е точно поради (5) .

Задача 4. Нека $a,b,c \geq 0$ се реални броеви. Да се докаже неравенството

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2} + \frac{1}{b^2+bc+c^2} + \frac{1}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2} \qquad \dots (1)$$

Решение. Нека $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ca$, $r=abc$.

Бидејќи даденото неравенство е хомогено, па без губење на општоста можеме да земеме дека $p=1$.

Понатаму

$$a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab=(1-c)^2-ab=1-2c+c^2-ab=$$
$$=1-c-c(1-c)-ab=1-c-c(a+b)-ab=1-c-q.$$

Аналогно

$$b^2+bc+c^2=1-a-q \text{ и } c^2+ca+a^2=1-b-q.$$

Со елементарни трансформации и претходните идентитети, неравенството (1) е еквивалентно со неравенството

$$9q^3+6q^2-3q+9r+1\ge 0 \text{ т.е. } q(3q+1)^2+9r+1-4q\ge 0 \qquad \dots(2)$$

Од $N_1: p^3-4pq+9r\ge 0$ и $p=1$ имаме

$$1+9r\ge 4q \qquad \dots(3)$$

Па од (3) добиваме $q(3q+1)^2+9r+1-4q\ge 0$ т.е. важи неравенството (2).

Со ова доказот е готов.♦

Задачи за самостојна работа:

1. Нека $x,y,z\in\mathbb{R}^+$ се такви што $x+y+z=1$. Да се докаже неравенството $\dfrac{z-xy}{x^2+xy+y^2}+\dfrac{y-zx}{x^2+xz+z^2}+\dfrac{x-yz}{y^2+yz+z^2}\ge 2$.

2. Нека $x,y,z\ge 0$ се реални броеви се такви што $x+y+z=1$. Да се докаже неравенството

$$12(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)(x^3+y^3+z^3)\le xy+yz+zx.$$

3. Нека $x,y,z\in\mathbb{R}^+$, за кои важи $x+y+z=1$. Да се докаже неравенството

$$(1-x^2)^2+(1-z^2)^2+(1-z^2)^2\le(1+x)(1+y)(1+z).$$

4. Нека $a,b,c>0$ се реални броеви такви што $ab+bc+ca=1$. Да се докаже неравенството $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}-\dfrac{1}{a+b+c}\ge 2$.

Литература:

1. Lee H. (2007), Topics in Inequalities - Theorems and Techniques
2. K.S. Kedlaya, A<B, http://www.unl.edu.com
3. Здравко Цветковски, Ристо Малчески, *Еден начин за докажување на неравенства со три променливи*, Сигма, 2007