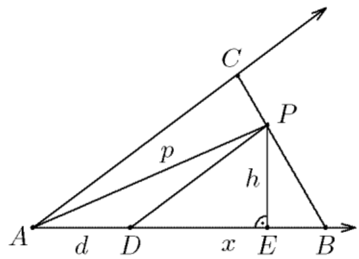
БМО 1994

1. Дадени се остар агол XAY и точка P во неговата внатрешност. Конструирај права која минува низ точката P и ги сече краците на аголот AX и AY соодветно во точките B и C така што плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на плоштината на квадрат со страна AP.

   Решение. *Анализа*. Нека претпоставиме дека $\triangle ABC$ е конструиран и нека точките D и E припаѓаат на AB и се такви што $PD \| AC$ и $PE \perp AB$ (цртеж десно). Да означиме $\overline{AP} = p, \overline{AD} = d, \overline{PE} = h$ и $\overline{BD} = x$. Тогаш од условот следува дека p, d и h се познати и треба да се најде x. Од $\triangle ABC \sim \triangle DBP$ следува дека



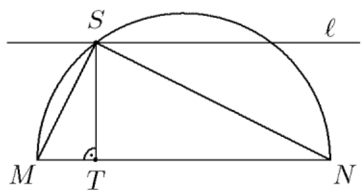
$$\frac{(d+x)^2}{x^2} = \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle DBP}} = \frac{2p^2}{xh}.$$

   Според тоа, x е корен на квадратната равенка $x^2 - 2bx + d^2 = 0$, каде $b = \frac{p^2 - dh}{h}$.

   Конструкција. 1) Конструираме отсечка со должина $b = \frac{p^2}{h} - d$.

   2) Конструираме отсечка $\overline{MN} = 2b$ и полукружница k со дијаметар MN (цртеж десно).

   3) Во полурамнината на k конструираме права $l \| MN$ која од MN е на растојание d.



   4) Конструираме нормала $ST \perp MN, T \in MN$.

   5) Отсечките MT и NT имаат должини еднакви на корените на равенката $x^2 - 2bx + d^2 = 0$.

   Доказ. Од правоаголниот $\triangle MNS$ имаме $\overline{MN} \cdot \overline{NT} = d^2$ и $\overline{MN} + \overline{NT} = 2b$.

   Дискусија. Задачата има две решенија ако $d < b$, односно $2dh < p^2$ и точно едно решение ако $d = b$, односно $2dh = p^2$.

2. Докажи, дека полиномот $P(x) = x^4 - 1994x^3 + (1993 + m)x^2 - 11x + m$, каде m е цел број, има најмногу еден целоброен корен.

   Решение. Нека претпоставиме дека полиномот има барем два целобројни корени. Тогаш

$$x^4-1994x^3+(1993+m)x^2-11x+m=(x^2-ax+b)(x^2-cx+d)$$

каде a и b се цели броеви. Со споредување на коефициентите добиваме

$$a+c=1994 \qquad (1)$$

$$ac+b+d=1993+m \qquad (2)$$

$$ad+bc=11 \qquad (3)$$

$$bd=m. \qquad (4)$$

Од (1) следува дека c е цел број, а тогаш од (2) следува дека и d е цел број. Повторно од (1) следува дека a и c се со иста парност, а од (3) добиваме дека тие не може да се истовремено парни. Според тоа, a и c се непарни, па од (3) заклучуваме дека b и d се со различна парност. Сега од (4) следува дека m е парен број. Но, тоа значи дека левата страна на (2) е парна, а десната страна е непарна што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека полиномот има најмногу еден целоброен корен.

3. Нека $(a_1,a_2,...,a_n)$ е пермутација на броевите $1,2,...,n$, $n\geq 2$. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$\sum_{n=1}^{n-1}|a_{k+1}-a_k|.$$

Решение. Да означиме

$$S(a_1,a_2,...,a_n)=|a_n-a_1|+\sum_{n=1}^{n-1}|a_{k+1}-a_k|$$

и на реалната оска да ги разгледаме точките $A_1,A_2,...,A_n$ со координати $a_1,a_2,...,a_n$, соодветно. Тогаш збирот $S(a_1,a_2,...,a_n)$ е еднаков на должината на затворената искршена линија $A_1A_2...A_nA_1$. Ќе ја оцениме оваа должина ако го разгледаме покривањето на интервалите од видот $[k,k+1]$, каде $k\in\{1,2,...,n-1\}$.

Ако $k<\frac{n}{2}$, интервалот $[k,k+1]$ е покриен најмногу $2k$ пати, бидејќи на располагање имаме најмногу k леви краеви на покривните отсечки, а секоја точка е крајна за две отсечки. Аналогно при $k\geq\frac{n}{2}$ интервалот $[k,k+1]$ е покриен најмногу $2(n-k)$ пати. Според тоа, кога $n=2m$ имаме

$$S(a_1,a_2,...,a_n)\leq 2[1+2+...+m+(m-1)+...+2+1]=2m^2,$$

а кога $n=2m+1$ имаме

$$S(a_1,a_2,...,a_n)\leq 2[1+2+...+m+m+(m-1)+...+2+1]=2m(m+1).$$

Можеме да ги обединиме двете оценки со $S(a_1, a_2, ..., a_n) \leq 2m(n-m)$, каде $m = [\frac{n}{2}]$. Тогаш бараниот збир е помал или еднаков на $2m(n-m-1)$.

Не е тешко да се провери дека пермутацијата зададена со $a_{2k} = k$ и $a_{2k-1} = n-m-k$, за $k = 1, 2, ..., m$, $a_n = m+1$, ако n е непарен број, дава збир $2m(n-m)-1$. Според тоа, бараната најголема вредност е $[\frac{n}{2}](n-[\frac{n}{2}]-1)$

4. Определи го најмалиот број $n \geq 5$ за кој постои група од n лица, така што секои две лица кои се познаваат немаат заеднички познаник, а секои две лица кои не се познаваат имаат точно два заеднички познаници. (Ако $A \neq B$ и A го познава B, тогаш и B го познава A.)

Решение. Нека A е фиксиран член на групата и $A_1, A_2, ..., A_r$ се познаниците на A. Тогаш од условот на задачата следува дека меѓу лицата $A_1, A_2, ..., A_r$ не постојат двајца кои се познаваат и за секои две лица A_i и A_j, $1 \leq i < j \leq r$ постои точно едно лице $A_{ij} \neq A$ кое се познава со двајцата. Освен тоа, не постојат две од лицата A_{ij} кои се познаваат меѓу себе, бидејќи во спротивно ќе има член на групата кој има барем три заеднички познаници со A.

Множеството членови A_{ij}, $1 \leq i < j \leq r$ всушност е множеството од оние лица кои не го познаваат A. Според тоа, $n = 1 + r + \binom{r}{2}$, од каде наоѓаме $r = \frac{\sqrt{8n-7}-1}{2}$.

Добиениот израз за r не зависи од изборот на A, што значи дека сите членови на групата имаат ист број познаници.

Од условот $n \geq 5$ следува $r \geq 3$. Уште повеќе, бидејќи познаниците на $A_{1,2}$ се A_1, A_2 и уште $r-2$ членови на множеството $\{A_{ij} \mid 3 \leq i < j \leq r\}$ треба да биде исполнето неравенството $r - 2 < \binom{r-2}{2}$, па затоа $r \geq 5$ и $n \geq 16$.

Ќе дадеме пример на група од 16 лица $A, A_1, A_2, ..., A_5, A_{1,2}, A_{1,3}, ..., A_{4,5}$ во која познанствата се меѓу следниве парови

1) $(A, A_i), i = 1, 2, ..., 5$
2) (A_i, A_{ij}), $(A_j, A_{ij}), 1 \leq i < j \leq 5$,
3) $(A_{ij}, A_{km}), 1 \leq i < j \leq 5, 1 \leq k < m \leq 5, \{i, j\} \cap \{k, m\} = \varnothing$.

Лесно се проверува дека оваа група ги има саканите својства, па затоа најмалиот број е 16.