

XVII олимпијада

1. Нека $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ и нека

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n, \quad y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n.$$

Докажи дека за секоја пермутација z_1, z_2, \dots, z_n на броевите y_1, y_2, \dots, y_n важи:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2.$$

Решение. I начин. Лесно се докажува дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\sum_{i=1}^n x_i z_i \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1)$$

Неравенството (1) ќе го докажеме со на математичка индукција.

За $n=1$ неравенството очигледно е точно.

Нека претпоставиме дека тоа е точно за некој природен број n . Ќе докажеме дека тоа е точно и за $n+1$. Разгледуваме две можности.

1° $z_{n+1} = y_{n+1}$. Во овој случај z_1, z_2, \dots, z_n е пермутација на броевите y_1, y_2, \dots, y_n , па според индуктивната претпоставка следува дека важи неравенството (1). Ако на левата и десната страна додадеме $x_{n+1}y_{n+1}$ добиваме дека неравенството (1) е точно и за $n+1$ броеви.

2° $z_k = y_{n+1}$, $k \neq n+1$. Нека $z'_1, z'_2, \dots, z'_n, z'_{n+1}$ е пермутација на броевите $z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}$ која што се добива со замена на k -тиот и $n+1$ -от член. Тогаш

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} x_i z'_i - \sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i &= x_k y_l + x_{n+1} y_{n+1} - x_k y_{n+1} - x_{n+1} y_l \\ &= (x_k - x_{n+1})(y_l - y_{n+1}) \geq 0 \end{aligned}$$

каде што $y_l = z_{n+1}$. Бидејќи $\sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n+1} x_i z'_i$ доволно е да се докаже дека

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i z'_i \leq \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i.$$

Последното неравенство е докажано во 1°.

II начин. Точни се неравенствата

$$x_1 - x_2 \geq 0, \quad x_2 - x_3 \geq 0, \quad \dots, \quad x_{n-1} - x_n \geq 0;$$

$$z_1 \leq y_1, \quad z_1 + z_2 \leq y_1 + y_2, \quad \dots, \quad z_1 + z_2 + \dots + z_n \leq y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

Даденото неравенство е еквивалентно на неравенството

$$\sum_{i=1}^n x_i z_i \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

кое може да се докаже на следниот начин:

$$\begin{aligned} x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_n z_n &= (x_1 - x_2)z_1 + (x_2 - x_3)(z_1 + z_2) + \dots \\ &\quad + (x_{n-1} - x_n)(z_1 + z_2 + \dots + z_n) + x_n(z_1 + z_2 + \dots + z_n) \\ &\leq (x_1 - x_2)y_1 + (x_2 - x_3)(y_1 + y_2) + \dots \\ &\quad + (x_{n-1} - x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n) + x_n(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \\ &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \end{aligned}$$

2. Нека a_1, a_2, a_3, \dots е строго растечка низа природни броеви. Докажи дека низата содржи бесконечно многу членови a_m кои може да се прикажат во облик

$$a_m = xa_p + ya_q$$

каде x и y се природни броеви и $p \neq q$.

Решение. Сите броеви од низата $\{a_i\}$ ги делиме во a_1 групи на следниот начин:

$$A_0 = \{a_i \mid a_i \equiv 0 \pmod{a_1}\}$$

$$A_1 = \{a_i \mid a_i \equiv 1 \pmod{a_1}\}$$

$$A_2 = \{a_i \mid a_i \equiv 2 \pmod{a_1}\}$$

.....

$$A_{a_1-1} = \{a_i \mid a_i \equiv a_1 - 1 \pmod{a_1}\}.$$

Од овие множества барем едно е бесконечно, бидејќи во спротивно множеството вредности на низата би било конечно, што не е можно бидејќи низата строго монотонно расте. Нека A_r е бесконечно множество. Тогаш, за секои два елемента $a_m > a_p$ од тоа множество е исполнето

$$a_m = la_1 + r, \quad a_p = sa_1 + r$$

од што следува

$$a_m - a_p = (l - s)a_1$$

т.е. при ознака $l - s = y$, имаме $a_m = a_p + ya_1$. При тоа важи $a_q = a_1$ и $x = 1$.

Такви броеви a_m има бесконечно многу.

3. Над страните на триаголникот ABC од надворешна страна конструирани се триаголници BPC , QAC и ARB такви што

$$\sphericalangle CBP = \sphericalangle QAC = 45^\circ,$$

$$\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACQ = 30^\circ,$$

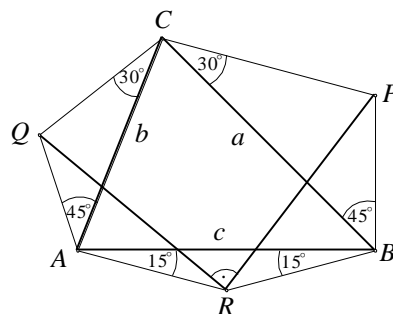
$$\sphericalangle RBA = \sphericalangle BAR = 15^\circ.$$

Докажи дека $\angle QRP = 90^\circ$ и $\overline{QR} = \overline{RP}$.

Решение. Нека α, β, γ се аглие при темињата A, B, C ; a, b, c се спротивните страни на темињата и P е плоштината на $\triangle ABC$. Од синусната теорема добиваме

$$\overline{CP} = a \frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2} \cos 15^\circ},$$

$$\overline{CQ} = b \frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{b}{\sqrt{2} \cos 15^\circ},$$



Црц. 17.1.

па затоа

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2 - 2\overline{CP}\overline{CQ} \cos(\gamma + 60^\circ) \\ &= \frac{a^2}{2\cos^2 15^\circ} + \frac{b^2}{2\cos^2 15^\circ} - 2 \frac{ab}{2\cos^2 15^\circ} \left(\frac{1}{2} \cos \gamma - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \gamma \right) \\ &= \frac{a^2}{2\cos^2 15^\circ} + \frac{b^2}{2\cos^2 15^\circ} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{\cos^2 15^\circ} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{\cos^2 15^\circ}. \end{aligned}$$

Повторно од синусната теорема следува

$$\overline{AQ} = b \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{b}{2\cos 15^\circ}, \quad \overline{AR} = c \frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{2\cos 15^\circ}.$$

па затоа

$$\begin{aligned} \overline{QR}^2 &= \overline{AQ}^2 + \overline{AR}^2 - 2\overline{AQ}\overline{AR} \cos(\alpha + 60^\circ) \\ &= \frac{b^2}{4\cos^2 15^\circ} + \frac{c^2}{4\cos^2 15^\circ} - 2 \frac{bc}{4\cos^2 15^\circ} \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right) \\ &= \frac{b^2}{2\cos^2 15^\circ} + \frac{c^2}{2\cos^2 15^\circ} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{8\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{\cos^2 15^\circ} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{2\cos^2 15^\circ}. \end{aligned}$$

На сличен начин се покажува дека

$$\overline{QR}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{2\cos^2 15^\circ}.$$

Од досега изнесеното следува дека

$$\overline{PR} = \overline{QR} \text{ и } \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2 = \overline{PQ}^2,$$

што значи дека триаголникот PQR е рамнокрак и правоаголен со прав агол кај темето R .

4. Нека A е збирот на цифрите на бројот 4444^{4444} и B збирот на цифрите на бројот A . Најди го збирот на цифрите на бројот B . (Сите броеви се запишани во декаден запис).

Решение. Нека C е збир на цифрите на бројот B . Бидејќи

$$4444^{4444} < 10000^{4444},$$

добиваме дека збирот на цифрите на бројот 4444^{4444} не е поголем од $4 \cdot 4444 < 20000$. Затоа $A < 9 \cdot 20000 = 180000$. Оттука непосредно следува дека $B \leq 9 \cdot 6 = 54$ и $C \leq 13$.

Од $4444 \equiv -2 \pmod{9}$ и

$$(-2)^{4444} = 2^{3 \cdot 1481 + 1} = 2 \cdot 8^{1481} \equiv 2 \cdot (-1)^{1481} \equiv -2 \equiv 7 \pmod{9}$$

следува $4444 \equiv 7 \pmod{9}$. При делење со 9 остатоците на секој природен број и на збирот на неговите цифри се еднакви, па затоа

$$4444 \equiv A \equiv B \equiv C \pmod{9}, \text{ т.е. } C \equiv 7 \pmod{9}.$$

Природниот број C ги задоволува условите $C \leq 13$ и $C \equiv 7 \pmod{9}$, па затоа $C = 7$.

5. Дали може на кружница со радиус 1 да се изберат 1975 точки, такви што растојанието меѓу секои две од нив да е рационален број?

Решение. Нека A, B, C се три точки на дадената кружница со центар во точката S и $\angle ASB = 2\alpha$, $\angle BSC = 2\beta$. Тогаш $\angle ASC = 2(\alpha + \beta)$ и

$$\overline{AB} = 2 \sin \alpha, \quad \overline{BC} = 2 \sin \beta, \quad \overline{AC} = 2 \sin(\alpha + \beta).$$

Од $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, следува дека растојанијата меѓу точките A, B, C ќе бидат рационални броеви ако $\sin \alpha, \cos \beta, \cos \alpha, \sin \beta$ се рационални броеви. Ќе го користиме идентитетот

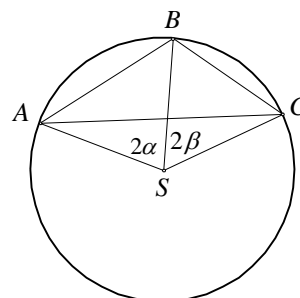
$$\left(\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\right)^2 + \left(\frac{2mn}{m^2 + n^2}\right)^2 = 1$$

Земаме:

$$\sin \alpha = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \quad \cos \alpha = \frac{2mn}{m^2 + n^2},$$

а аналогно за аголот β .

Со замена на различни парови цели броеви m, n добиваме агли кои имаат рационален синус и косинус. Понатаму, земаме точка A на кружницата и нанесуваме два пати поголеми агли од најдените. Тогаш растојанието меѓу секои две од дадените точки е рационален број.



Црп. 17.2.

6. Најди ги сите хомогени полиноми од две променливи, со n -ти степен такви што:

1° За секои три реални броеви a, b и c е исполнето

$$P(a + b, c) + P(b + c, a) + P(c + a, b) = 0$$

$$2^\circ P(1,0) = 1.$$

Забелешка. Полином P е хомоген полином од n -ти степен ако за секои реални броеви t, x, y е исполнето $P(tx, ty) = t^n P(x, y)$, каде $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Ставаме $a = 2x$, $b = c = -x$ и од условот 1° и дефиницијата на хомоген полином добиваме

$$2P_n(x, -x) + (-2)^n P_n(-x, x) = 0 \quad (1)$$

Ставаме $a = x$, $b = -x$, $c = 0$ и од $P_n(0, 0) = 0$ добиваме

$$P_n(x, -x) + P_n(-x, x) = 0. \quad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$P_n(x, -x) = P_n(-x, x) = 0.$$

Значи, $P_n(x, y) = 0$ за $y = -x$, па според тоа

$$P_n(x, y) = (x + y)Q_{n-1}(x, y). \quad (3)$$

Го заменуваме (3) во условот 1° и добиваме

$$(a + b + c)[Q(a + b, c) + Q(b + c, a) + Q(c + a, b)] = 0,$$

односно

$$Q(a + b, c) + Q(b + c, a) + Q(c + a, b) = 0.$$

Да забележиме дека полиномот $Q_{n-1}(x, y)$ го има својството 1° , па според тоа заклучуваме дека и тој е делив со $x + y$ итн. се додека не дојдеме до полином од прв степен. Значи,

$$P_n(x, y) = (x + y)^{n-1} R_1(x, y). \quad (4)$$

Ако во условот 1° ставиме $a = b = c = y$, добиваме $P(2y, y) = 0$, па според тоа $P(x, y)$ е делив со $x - 2y$, односно $R_1(x, y) = k(x - 2y)$. Сега од (4) добиваме

$$P_n(x, y) = k(x - 2y)(x + y)^{n-1}.$$

Бидејќи $P(1, 0) = 1$, добиваме $k = 1$, што значи

$$P_n(x, y) = (x - 2y)(x + y)^{n-1}.$$

Од доказот е јасно дека тоа е единствен полином од n -ти степен кој ги задоволува условите на задачата.