Ристо Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ С12

ЗБИРКА ЗАДАЧИ: ИДЕНТИТЕТИ, НЕРАВЕНСТВА, НИЗИ, ПОЛИНОМИ И ФУНКЦИИ

Скопје, 2021

Рецензент:
Зоран Мисајлески

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

> Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Книгава која се наоѓа пред вас енаменета за учениците од средното образование кои сакаат да ги прошират своите знаења од областа на алгебрата. Со други зборови, книгава е наменета за надарените ученици за математика и истата е дел од поголема серија книги кои од авторот и неговите соработници се пишувани за оваа намена. Самата книга е комплементарна со книгите [40] и [41], т.е. содржи задачи од областите кои се обработени во овие две книги. Изборот на задачите е на ниво на задачите кои се задаваат завршните натпревари по математика во соседните земји, како и задачите кои се содржани во тестовите за избор на екипите за БМО и ММО. Оттука, може да се каже дека дел од задачите се со исклучителна тежина и се потребни сериозни математички знаења за нивно решавање.

Како што може да се види и од насловот на книгава, истата содржи задачи од областите:

- идентите,
- неравенства,
- низи,
- функции и функционални равенки и
- полиноми.

Имено, во книгата се содржани 335 задачи од наведените области, чии решенија се дадени во целост во вториот дел од книгата. Притоа, во секоја од наведените области задачите, освен во првата, се поделени во посебни целини. Меѓутоа, за разлика од другите книги од оваа серија овде не е е направен обид задачите во овие делови да се подредат по тежина, бидејќи за задачите од ова ниво истото е практично невозможно да се направи. На читателот му препорачувам прво да се обиде секоја задача самостојно да ја реши, а доколку тоа не му успее потоа да го погледне решението на задачата.

Стандардно, книгава содржи список на користената литература.

На рецензентот проф. д-р Зоран Мисајлески му укажувам благодарност за дадените забелешки, кои несомнено придонесоа да се подобри овој ракопис.

За крај, и покрај вложениот напор, свесен сум дека се можни подобрувања на оваа книга, како и дека се присутни грешки, кои за жал не го одминуваат издавањето на било кој ракопис. Затоа однапред сум благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе допринесе да се подобри книгава.

Скопје Авторот
март, 2021 г.

I ИДЕНТИТЕТИ

1. Нека m и n се цели броевитакви што
$$m = m^2 + n^2 - 8n - 2mn + 16 .$$
Докажи дека m е точен квадрат.

2. Дадени се природни броеви a, b, n такви што $a^2 + 2nb^2$ е точен квадрат. Докажи дека бројот $a^2 + nb^2$ може да се претстави како збир од квадрати на два природни броеви.

3. Нека a, b, c се реални броеви такви што $a + b + c = 0$ и $a^4 + b^4 + c^4 = 50$. Пресметај ја вредноста на изразот $ab + bc + ca$.

4. Докажи дека бројот $3^{4^5} + 4^{5^6}$ може да се претстави како производ на два броја, секој од кои е поголем или еднаков на 10^{2009}.

5. Нека n е природен број и $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ се различни цели броеви чија аритметичка средина е цел број. Определи ги сите цели броеви x за кои што важи
$$(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_{2n}) = (-1)^n (n!)^2 . \qquad (1)$$

6. Докажи дека бројот $n(n + 2)(n + 4)(n + 6)$ не е квадрат на природен број.

7. а) Докажи дека производот на четири последователни природни броја не е точен квадрат на природен број.

   б) Определи ги сите природни броеви n за кои бројот $n^2 + 9n + 8$ може да се претстави како производ на четири последователни природни броја.

8. За еден природен број ќе велиме дека е *скоро квадратен* ако може да се претстави како производ на два последователни природни броја. Докажи дека секој скоро квадратен природен број може да се претстави како количник на два скоро квадратни природни броја.

9. Нека x, y се позитивни реални броеви за кои е исполнето равенството
$$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000 .$$
Докажи дека важи $x + y = 10$.

10. За реалните броеви a,b,c важи

$$(a+b)(b+c)(c+a)=abc \text{ и } (a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)=a^3b^3c^3 .$$

Докажи дека $abc=0$.

11. Нека a,b,c се позитивни броеви. Докажи го или негирај го тврдењето:

а) Ако $a(b^3+c^3)=b(c^3+a^3)=c(a^3+b^3)$, тогаш $a=b=c$.

б) Ако $a(a^3+b^3)=b(b^3+c^3)=c(c^3+a^3)$, тогаш $a=b=c$.

12. Докажи, дека ако a,b,c,d се позитивни реални броеви такви што

$$\frac{abc}{a+b+c}=\frac{bcd}{b+c+d}=\frac{cda}{c+d+a}=\frac{dab}{d+a+b},$$

тогаш $a=b=c=d$.

13. За позитивните броеви a,b,c важи

$$\frac{a(a+b)}{b+c}+b=\frac{b(b+c)}{c+a}+c=\frac{c(c+a)}{a+b}+a .$$

Докажи дека $a=b=c$.

14. Докажи дека бројот $111...1222...25$ запишан со 1997 единици, 1998 двојки и една петка е точен квадрат.

15. Нека m и n се два природни броеви. Ако постојат бесконечно многу природни броеви k такви што $k^2+2kn+m^2$ е точен квадрат, тогаш $m=n$. Докажи!

16. Дали за секој природен број $n>2009$ меѓу дропките $\frac{1}{n},\frac{2}{n-1},\frac{3}{n-2},...,\frac{n-1}{2},\frac{n}{1}$ може да избереме два пара со еднакви збирови?

17. Низата позитивни броеви $a_1,a_2,...$ е определена со $a_1=1, a_2=2$ и

$$a_{n+1}=a_n^2+a_{n-1}^2+a_{n-2}^2+a_{n-2},$$

за $n\geq 3$. Определи го a_3 ако

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+....+\frac{1}{a_{2008}+1}+\frac{1}{a_{2009}}=1. \qquad (1)$$

18. Нека

$$A=\sum_{n=1}^{99}\sqrt{10+\sqrt{n}} \text{ и } B=\sum_{n=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{n}} .$$

Докажи дека $A=(\sqrt{2}+1)B$.

19. Нека m и n се цели броеви за кои важи $0\leq m\leq 2n$. Докажи дека бројот

$2^{2n+2}+2^{m+2}+1$ е точен квадрат ако и само ако $m=n$.

20. Определи ги сите точни кубови кои не се деливи со 10 и притоа при бришење на последните три цифри павторно се добива број кој е точен куб.

21. Дали постои множество од 1992 природни броеви такво што збирот на елементите на секое негово подмножество е квадрат, куб или повисок степен на некој природен број.

22. Конечната низа цели броеви $a_0, a_1, ..., a_n$ ја нарекуваме *квадратна* ако за секој $i \in \{1, 2, ..., n\}$ важи $|a_i - a_{i-1}| = i^2$.

    а) Докажи дека за секои два цели броја b и c постои природен број n и квадратна низа $a_0, a_1, ..., a_n$ таква што $a_0 = b$ и $a_n = c$.

    б) Најди го најмалиот природен број n за кој постои квадратна низа таква што $a_0 = 0$ и $a_n = 1996$.

23. Нека $a, b, c \in \mathbb{N}$. Ако броевите $\frac{a\sqrt{13}+b}{b\sqrt{13}+1}$ и $\frac{c\sqrt{7}+a}{b\sqrt{7}+c}$ се рационални, тогаш $\frac{a^3+c^6}{a(b^2-b+1)}$ е цел број. Докажи!

24. Докажи дека секој позитивен рационален број $\frac{1}{2} < r < 2$ може да се запише во облик $\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$, каде a, b, c, d се природни броеви.

25. Нека a, b, c се позитивни реални броеви. Определи ги сите позитивни реални броеви x, y, z за кои важи

$$x+y+z=a+b+c \text{ и } 4xyz-(a^2x+b^2y+c^2z)=abc.$$

26. Дали постои природен број n таков што важи: за произволен рационален број r постојат цел број b и ненулти цели броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ такви што $r = b + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}$?

27. Дадени се различни природни броеви $a_1, a_2, ..., a_m$. Докажи дека постојат различни природни броеви $b_1, b_2, ..., b_n$, $n \le m$ за кои се исполнети следниве услови:

    а) Сите подмножества на $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ имаат различни збирови на своите елементи.

    б) Секој од броевите $a_1, a_2, ..., a_m$ е збир на елементите на подмножество од

$\{b_1, b_2, ..., b_n\}$.

28. Докажи дека во бесконечниот збир $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...$ можеме да замениме бесконечно многу знаци плус со знакот минус, така што повторно ќе имаме бесконечлно многу знаци плус и новиот збир ќе биде еднаков на $\frac{1}{3}$.

29. Дали постои множество $A \supset \{1, 2, ..., 2004\}$ од природни броеви, чиј производ е еднаков на збирот од нивните квадрати?

II НЕРАВЕНСТВА

II.1. ЕЛЕМЕНТАРНО ДОКАЖУВАЊЕ НА НЕРАВЕНСТВА

1. Докажи дека за секои реални броеви x, y, z важи

$$3(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+z)^2 .$$

2. Докажи дека за секои два броја $a\geq 1$ и $b\geq 1$ е точно неравенството

$$a^2b^2+a^2+b^2+1\geq ab(a+b)+a+b .$$

Кога важи знак за равенство?

3. Дадени се изразите

$$M=a^4-6a^3+b^2+24b-119 \text{ и } N=b^4-6b^3+a^2+24a+151$$

каде a и b се реални броеви. Докажи дека $M+N\geq 0$. Кога важи знак за равенство?

4. Ако $k\geq 25$, тогаш неравенството $x^4+(2k-99)x^2-10x+k^2+k\geq 0$ е точно за секој реален број x. Докажи!

5. Определи го најголемиот број k за кој неравенството

$$a^2+b^2+3c^2+ab\geq kc(a+b)$$

е исполнето за секои реални броеви a, b, c.

6. Нека x, y, z се реални броеви такви што

$$x^2\leq y+z,\ \ y^2\leq z+x,\ \ z^2\leq x+y .$$

Определи ја најголемата и најмалата можна вредност за z.

7. Докажи дека за произволни реални броеви x, y, z е точно неравенството

$$x^2y^2z^2+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+z^2+2\geq 2(xy+xz+yz) .$$

Кога важи знак за равенство?

8. Нека a, b, c е ненегативни реални броеви такви што $a+b+c=3$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $\frac{2a+1}{a^2+3}+\frac{2b+1}{b^2+3}+\frac{2c+1}{c^2+3}$.

9. Реши ја равенката

$$4(x-1)y^2z^2+4(y-1)z^2x^2+4(z-1)x^2y^2=3x^2y^2z^2 .$$

10. Докажи дека

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

за секои позитивни реални броеви a,b,c .

11. Нека $a>0$ и $|b-c|>4a$. Докажи дека е исполнето барем едно од неравенствата $b^2\geq 4ac$ или $c^2\geq 4ab$.

12. Нека x,y,z се ненегативни броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$xy+yz+2zx\leq\frac{1}{2} . \qquad (1)$$

13. Природните броеви a,x и y се поголеми од 100 и $y^2-1=a^2(x^2-1)$. Определи ја најмалата можна вредност на $\frac{a}{x}$.

14. Даден е природен број $n>1$. Бројот $a>n^2$ е таков што меѓу броевите $a+1,a+2,...,a+n$ има деливи со секој од броевите $n^2+1,n^2+2,...,n^2+n$. Докажи дека $a>n^4-n^3$.

15. За позитивните реални броеви a,b,c,d важи $9ac\geq 3bd\geq ac$. Докажи дека

$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(ac+bd)^2}\geq\frac{3}{4} . \qquad (1)$$

16. Докажи дека произволни 101 броеви $0=x_0\leq x_1\leq ...\leq x_{100}=1$ може да се поделат во две групи така што аритметичките средини на двете групи се разликуваат за најмалку $\frac{101}{200}$.

17. Определи ги сите тројки реални броеви (x,y,z) такви што

$$1+x^4\leq 2(y-z)^2,\ 1+^4\leq 2(z-x)^2,\ 1+z^4\leq 2(x-y)^2 .$$

18. а) Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што не постои рационален број $\frac{a}{b}$ таков што a и b се природни броеви за кои важи

$$0<b\leq\sqrt{n} \text{ и } \sqrt{n}\leq\frac{a}{b}\leq\sqrt{n+1} .$$

б) Докажи дека за секој природен број n постои рационален број $\frac{a}{b}$ таков што a и b се природни броеви за кои важи

$$0 < b \le \sqrt{n} + 1 \text{ и } \sqrt{n} \le \tfrac{a}{b} \le \sqrt{n+1}\,.$$

19. За реалните броеви a и b важи $1 < a < b < \sqrt{2}$. Докажи дека
$$\frac{a}{b} > \frac{1+\sqrt{a^2-1}}{1+\sqrt{b^2-1}}\,.$$

20. Дадени се позитивни реални броеви a,b,c,d и негативни реални броеви e,f,g,h. Докажи дека неравенствата
$$ae + bc > 0,\ ef + cg > 0,\ fd + gh > 0,\ da + hb > 0$$
не може да бидат исполенти истовремено.

21. Нека $x = |a| + |b| + |c|$ и $y = |a-2| + |b-2| + |c-2|$, каде a,b и c се реални броеви.

а) Докажи дека $x + y \ge 6$.

б) Ако $a,b,c \in [-1,3]$ и аритметичката средина на броевите a,b,c е еднаква на 1, докажи дека $x + y \le 10$.

22. Нека $n \ge 3$ е природен број и $a_1, a_2, ..., a_n$ се реални броеви такви што важи $\min\limits_{1 \le i < j \le} |a_i - a_j| = 1$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот
$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^3\,.$$

23. а) Докажи дека ако $x, y \in (1,\infty)$ и $x^y = y^x$, тогаш $x = y$ или постои $m \in (1,\infty) \setminus \{1\}$ таков што $x = m^{\frac{1}{m-1}}, y = m^{\frac{m}{m-1}}$.

б) Ако $x, y \in (1,\infty)$, реши ја равенката
$$x^y + x^{x^{y-1}} = y^x + y^{y^{x-1}}\,.$$

24. На бесконечна лента се запишани последователно броеви, при што првиот број е 1, а секој следен број се добива од претходниот со додавање кон него на најмалата ненулта цифра од неговиот декаден запис. Колку цифри има декадниот запис на бројот на $9 \cdot 1000^{1000}$ место?

25. Докажи дека за секоја пермутација $b_1, b_2, ..., b_n$ на различните ненегативни броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ важи
$$(a_1^2 + b_1)(a_2^3 + b_2)...(a_n^2 + b_n) \ge (a_1^2 + a_1)(a_2^2 + a_2)...(a_n^2 + a_n)\,.$$

26. Нека a,b,c,d се ненегативни реални броеви такви што $a+b+c+d=2$. Докажи дека
$$ab(a^2+b^2+c^2)+bc(b^2+c^2+d^2)+cd(c^2+d^2+a^2)+da(d^2+a^2+b^2)\leq 2\,.$$

27. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека
$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leq 1\,. \qquad (1)$$

28. Нека $a_1,a_2,...,a_{2005},b_1,b_2,...,b_{2005}$ се реални броеви такви што неравенството
$$(a_ix-b_i)^2\geq\sum_{j=1,\,j\neq i}^{2005}(a_jx-b_j)$$
е точно за секој реален број x и за секој $i=1,2,...,2005$. Колку најмногу од броевите a_i и b_i, $i=1,2,..,2005$ може да се позитивни.

29. Докажи ги неравенствата
$$\frac{1}{\sqrt[3]{8n}}\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot...\cdot\frac{3n-2}{3n-1}<\frac{1}{\sqrt[3]{7n}}\,.$$

30. Збирот на неколку ненегативни броеви е помал или еднаков на 200, а збирот на нивните квадрати е поголем или еднаков на 2500. Докажи дека меѓу овие броеви има четири чиј збире поголем или еднаков на 50.

31. Реалните броеви $a_i,b_i\ (i=1,2,...,n)$ се такви што $0\leq b_k\leq 1$ за секој k и $a_1\geq a_2\geq...\geq a_{n+1}=0$ Докажи дека
$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leq\sum_{k=1}^{B+1}a_k\,, \qquad (1)$$
каде $B=[\sum_{k=1}^{n}b_k]$.

32. Нека $n\geq 2$ и $0\leq x_i\leq 1$ за $i=1,2,...,n$. Докажи го неравенството
$$(x_1+x_2+...+x_n)-(x_1x_2+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n+x_nx_1)\leq[\tfrac{n}{2}]\,.$$
Кога важи знак за равенство?

33. За целите ненегативни броеви
$$a=2^{n-1}a_{n-1}+2^{n-2}a_{n-2}+...+2a_1+a_0,$$
$$b=2^{n-1}b_{n-1}+2^{n-2}b_{n-2}+...+2b_1+b_0,$$
$a_i,b_i\in\{0,1\}$ дефинираме
$$a\oplus b=c=2^{n-1}c_{n-1}+2^{n-2}c_{n-2}+...+2c_1+c_0\,,$$

каде

$$c_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_i, \\ 1, & a_i \neq b_i. \end{cases}$$

Дадени се три цели броеви $0 \le u, v, w \le 2^{n-1} - 1$, за кои важи

$$u < v \oplus w \text{ и } v < u \oplus w.$$

Докажи дека

$$u \oplus v < w.$$

II.2. НЕРАВЕНСТВА МЕЃУ СРЕДИНИТЕ

1. Нека $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$. Докажи го неравенството

$$a^2cd + b^2da + c^2ab + d^2bc \ge 4abcd\ .$$

2. Нека $0 \le x, y, z \le 1$. Докажи дека $xy + yz + zx \ge 2xyz$.

3. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x + y + z = 1$. Докажи дека

$$xy + yz + zx \ge 9xyz\ .$$

4. Збирот на позитивните броеви a, b, c, d е еднаков на 3. Докажи дека

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \le \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}\ .$$

5. Ако $x + y + z = 3$ и $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ докажи дека

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \ge xy + yz + zx\ .$$

6. Определи ги сите реални броеви r за кои неравенството

$$r(ab + bc + ca) + (3 - r)(\tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{c}) \ge 9$$

е исполнето за секои позитивни реални броеви a, b, c.

7. Збирот на позитивните броеви a, b, c и d е еднаков на 3. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \le \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}\ .$$

8. Ако a, b, c се позитивни броеви такви што $abc \ge 1$, докажи дека

$$\frac{1+a}{1+b} + \frac{1+b}{1+c} + \frac{1+c}{1+a} \le a + b + c\ .$$

9. Нека a, b, c се позитивни броеви такви што $abc = 1$. Докажи дека

$$\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \le \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c}\ .$$

10. Дадени се реалните броеви a,b,c и d, кои по модул се строго поголеми од 1 и $abc+abd+acd+bcd+a+b+c+d=0$. Докажи дека

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{d-1}>0 .$$

11. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}\geq\sqrt{2} .$$

12. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се ненегативни реални броеви и нека $a_1+a_2+...+a_k\geq\sqrt{k}$ за секој k. Докажи дека

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\geq\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}) .$$

13. Ако a,b,c се реални броеви такви што $0<a<b<c$ и $k>1$ е природен број, докажи дека

$$a^kb+b^kc+c^ka<ab^k+bc^k+ca^k , \qquad (1)$$

14. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=3$. Докажи дека

$$\frac{a^2(b+1)}{ab+a+b}+\frac{b^2(c+1)}{bc+b+c}+\frac{c^2(a+1)}{ca+c+a}\geq 2 .$$

15. Докажи го неравенството

$$\frac{a}{54b^3+1}+\frac{b}{54c^3+1}+\frac{c}{54a^3+1}\geq\frac{1}{3} ,$$

каде a,b,c се ненегативни реални броеви такви што $a+b+c=1$.

16. Нека $a_1,a_2,...,a_n$, k и M се природни броеви за кои важи

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=k \text{ и } a_1a_2...a_n=M .$$

Ако $M>1$, докажи дека изразот $M(x+1)^k-(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)$ не е еднаков на нула за ниту еден позитивен реален број x.

17. Нека x,y,z позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$xy+yz+zx\geq 4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+5xyz .$$

18. Нека a и b се природни броеви, $K=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ и $A=\frac{a+b}{2}$. Ако $\frac{K}{A}$ е природен број, докажи дека $a=b$.

19. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$\frac{x^2}{x+z}+\frac{y^2}{y+x}+\frac{z^2}{z+y}\leq\frac{1}{2} . \qquad (1)$$

20. Определи ги сите природни броеви n такви што ако $a,b,c \geq 0$ и $a+b+c=3$, тогаш $abc(a^n+b^n+c^n) \leq 3$.

21. Нека a,b,c,d се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството
$$\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}+\sqrt[4]{abcd}}{4} < \sqrt[4]{a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a+b+c+d}{4}}\ .$$

22. Нека a,b,c,d се ненегативни реални броеви. Докажи дека
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}\ .$$

23. Докажи дека ако $a,b,c>0$ и $a+b+c=3$, тогаш
$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3} \geq a^3+b^3+c^3\ .$$

24. Даден е природен број $n \geq 2$. Докажи дека за секои реални броеви $a_1 < a_2 < ... < a_{2n}$ е точно неравенството
$$\sum_{\substack{i<j \\ 2|i-j}} a_i a_j < \frac{n-1}{4n}(a_1+a_2+...+a_{2n})^2\ .$$

25. Даден е природен број n. Докажи дека за произволни реални броеви $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{2n}$ важи неравенството
$$a_1a_{n+1}+a_2a_{n+2}+...+a_na_{2n} \leq \frac{1}{4n}(a_1+a_2+...+a_{2n})^2\ .$$

26. Нека n е даден природен борј и нека $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни реални броеви. Докажи
$$x_1(1-x_1^2)+x_2(1-(x_1+x_2)^2)+...+x_n(1-(x_1+x_2+...+x_n)^2) < \frac{2}{3}$$

27. Реалните броеви x,y,z се такви што $x^2+y^2+z^2=1$. Определи ја најголемата можна вредност на изразот
$$(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)\ .$$

28. Комплексните броеви $z_i,\ i=1,2,...,n$ се такви што $|z_i-1| \leq r$, за $i=1,2,...,n$ и некој $r \in (0,1)$. Докажи дека
$$|\sum_{i=1}^{n} z_i| \cdot |\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i}| \geq n^2(1-r^2)\ .$$

29. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни броеви такви што $x_1x_2...x_n=1$. Докажи го неравенството

$$(x_1+x_2)(x_2+x_3)...(x_{n-1}+x_n)(x_n+x_1)\geq 2^n+n(x_1+x_2+...+x_n-n).$$

II.3. НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ

1. Нека $a_1,a_2,...,a_n,\,(n\geq 2)$ се реални броеви такви што $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2=n$. Докажи дека
$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{n-a_ia_j}\leq\frac{n}{2}.$$

2. Нека за позитивните реални броеви a,b,c важи $a^2\leq b^2+c^2,\, b^2\leq c^2+a^2$ и $c^2\leq a^2+b^2$. Докажи дека
$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)>4(a^6+b^6+c^6).$$

3. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека:

   а) $(3x^2+2)(3y^2+2)\geq\frac{9}{2}(x+y)^2+3$,

   б) $(3x^2+2)(3y^2+2)(3z^2+2)\geq 9(x+y+z)^2$.

4. Нека a,b,c,d се позитивни реални броеви такви што $a+b+c+d=4$. Докажи дека
$$\frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{(b+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{(c+\sqrt{d})^2}{\sqrt{c^2-cd+d^2}}+\frac{(d+\sqrt{a})^2}{\sqrt{d^2-da+a^2}}\leq 16.$$

5. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=1$. Докажи го неравенството
$$\frac{a^3}{b^2+c}+\frac{b^3}{c^2+a}+\frac{c^3}{a^2+b}\geq\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$$

6. Позитивните реални броеви $a_1,a_2,...,a_n$, $n\geq 2$ се такви што
$$(a_1+a_2+...+a_n)(\tfrac{1}{a_1}+\tfrac{1}{a_2}+...+\tfrac{1}{a_n})\leq(n+\tfrac{1}{2})^2.$$
Докажи дека
$$\max\{a_1,a_2,...,a_n\}\leq 4\min\{a_1,a_2,...,a_n\}.$$

7. Реши го системот равенки
$$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+2xy}}\\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\frac{2}{9}.\end{cases}$$

8. За секоја низа о0д 2020 реални броеви $a_1, a_2, ..., a_{2020}$ низата $b_1, b_2, ..., b_{2020}$ ја определуваме со
$$b_n = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \text{ за секој } n = 1, 2, ..., 2020.$$
Определи ги сите низи $a_1, a_2, ..., a_{2020}$ за кои
$$b_1^2 + b_2^2 + ... + b_{2020}^2 = 4(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{2020}^2).$$

9. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $abc = 1$. Докажи дека
$$\frac{a^5}{a^3+1} + \frac{b^5}{b^3+1} + \frac{c^5}{c^3+1} \geq \frac{3}{2}.$$
Кога важи знак за равенство?

II.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Племето Мамбо-Јамбо живее покрај река. Кон соседното племе заедно тргнале младиот воин Мамбо и младиот шаман Јамбо. Мамбо се движел со брзина од $11\,km/h$ кон најблиското пристаниште за сплавови и со сплав отишол кај соседното племе. Јамбо, без да брза, со брзина од $6\,km/h$ отишол кон друго пристаниште за сплавови и оттаму со сплав отишол кај соседното племе, при што пристигнал порано од Мамбо.
Познато е дека реката е праволиниска и сплавовите се движат со брзината на течението на реката, која е цел број изразена во km/h и не е помала од 6. Колку најмногу може да биде брзината на реката?

2. Определи ја најголемата константа k за која важи:
ако $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ се такви што за секои $i, j, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq i < j < k \leq 4$ важи
$$a_i^2 + a_j^2 + a_k^2 \geq 2(a_i a_j + a_j a_k + a_k a_i),$$
тогаш
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \geq K(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4).$$

3. Докажи дека, ако $1 < a \leq b \leq c$, тогаш
$$\log_a b + \log_b c + \log_c a \leq \log_b a + \log_c b + \log_a c.$$

4. Дадени се реални броеви a, b, c, d за кои важи
$$a\sqrt{c^2 - b^2} + b\sqrt{d^2 - a^2} = c^2d^2 - cd + 1.$$
Пресметај ја вредноста на изразот
$$a^2c^2 + b^2d^2.$$

5. Докажи, дека ако $\alpha,\beta,\gamma\in[0,\frac{\pi}{2})$ и $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma\leq 3$, тогаш

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\geq 0 .$$

6. Определи ја најмалата константа C со следното својство: за секој $n\in\mathbb{N}$, позитивни броеви $x_1,x_2,...,x_n$ и $y_k=\frac{x_1+x_2+...+x_k}{k}$, $k=1,2,...,n$ важи

$$y_1^2+y_2^2+...+y_n^2\leq C(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2) .$$

7. Ако a,b,c се позитивни броеви такви што $abc=1$, докажи го неравенството

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+1}}+\sqrt{\frac{b+c}{b+1}}+\sqrt{\frac{c+a}{c+1}}\geq 3 .$$

8. Природните броеви $a_1,a_2,...,a_n$ и n се такви што $a_1+a_2+...+a_n=2008$. За секој $k=1,2,...,n$ означуваме $A_k=a_1a_2...a_k$. Определи ја најголемата можна вредност на $A_1+A_2+...+A_n$.

9. Нека $\alpha(n)$ е бројот на единици во бинарниот запис на природниот број n. Докажи дека:

а) Важи неравенството $\alpha(n^2)\leq\frac{\alpha(n)(\alpha(n)+1)}{2}$.

б) Горното неравенство преминува во равенство за бесконечно многу природни броеви n.

10. Дадени се реални броеви $a_1\leq a_2\leq a_3$. Докажи дека неравенството

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2\geq 2(a_1x_2x_3+a_2x_3x_1+a_3x_1x_2)$$

е исполнето за произволни реални броеви x_1,x_2,x_3 ако и само ако постојат броеви $\theta_1,\theta_2,\theta_3\in[0,\pi]$ такви што

$$|\pi-\theta_1-\theta_2|\leq\theta_3 \text{ и } a_1=\cos\theta_1, a_2=\cos\theta_2, a_3=\cos\theta_3 .$$

11. Нека збирот на реалните броеви $a_1,a_2,...,a_n$ е еднаков на нула и нивните апсолутни вредности се помали или еднакви на 1. Ако $|x|\leq 1$, тогаш

$$\sum_{i=1}^{n}|x-a_i|\leq n .$$

Докажи!

12. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи го неравенството

$$a\sqrt{2b+1}+b\sqrt{2c+1}+c\sqrt{2a+1}\leq\sqrt{2-(a^2+b^2+c^2)} .$$

13. Нека x,y и z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\geq\sqrt{\frac{3}{2}(x+y+z)}\ .$$

14. Даден е природен број $n\geq 2$. Определи ја најмалата можна вредност на збир од видот

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(2+a_{i-1})(a_i-a_{i-1}),$$

каде $a_0=0, a_n=1$ и $a_1,...,a_{n-1}\in[0,1]$.

15. Нека $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ и a и b се произволни реални броеви. Докажи дека

$$a^2\operatorname{tg}x(\cos x)^{\frac{1}{3}}+b^2\sin x\geq 2xab\ .$$

16. Докажи дека

$$a^2(b-c)^2+b^2(a-c)^2+c^2(a-b)^2\geq\frac{9}{2}abc(1-abc)$$

каде a,b,c се произволни реални броеви чиј збир е еднаков на 3.

17. Дадена е функцијата

$$f(x)=\frac{x^2-2006x+1}{x^2+1}\ .$$

а) Реши ја неравенката $f\,'(x)\geq 0$.

б) Докажи дека $|\,f(x)-f(y)|\leq 2006$ за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

18. Нека p и q се позитивни реални броеви и

$$E(p,q)=\frac{3p+4q}{5p+6q}+\frac{3q+4p}{5q+6p}\ .$$

Докажи дека

$$\frac{19}{15}<E(p,q)\leq\frac{14}{11}\,.$$

19. За кои реални броеви x,y,z од интервалот $[1,7]$ изразот

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{y^2+z^2}+\frac{z^2}{z^2+x^2}$$

прима најмала вредност.

20. Нека $n>2$ е природен број и $a_1<a_2<...<a_{2n}$ се реални броеви. Воведуваме ознаки

$$S=\sum_{i=1}^{2n}a_i,\ A_1=\sum_{i,j;\,i<j}a_{2i}a_{2j},\ A_2=\sum_{i,j;\,i<j}a_{2i-1}a_{2j-1}\ .$$

Докажи, дека $(n-1)S^2\geq 4n(A_1+A_2)$.

21. Нека a,b,c се реални броеви такви што $a+b+c=3$ и $abc=-4$. Докажи дека

$$5(ab+bc+ca)\le 12+3abc\,.$$

Кога важи знак за равенство?

22. Докажи дека, ако $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ се произволни реални броеви, а $c_1,c_2,...,c_n$ се позитивни реални броеви, тогаш

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{c_i+c_j}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{b_ib_j}{c_i+c_j}\right)\ge\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ib_j}{c_i+c_j}\right)^2.$$

23. Нека a,b,c се позитивни реални броеви и n и k се природни броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{a^{n+k}}{b^n}+\frac{b^{n+k}}{c^n}+\frac{c^{n+k}}{a^n}\ge a^k+b^k+c^k\,.$$

24. Докажи дека

$$\left(\tfrac{6}{5}\right)^{\sqrt{3}}>\left(\tfrac{5}{4}\right)^{\sqrt{2}}.$$

III НИЗИ

III.1. АРИТМЕТИЧКА И ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

1. Дадена е аритметичка прогресија со 2025 членови, прв член $a_1 = 1$ и разлика $d \neq 0$. Познато е дека постои природен број $n, 1 < n < 2025$ за кој a_1, a_n, a_{2025} во овој редослед формираат геометриска прогресија со количник $q = d + n - 1$. Определи ја разликата d .

2. Дадена е бесконечна аритметичка прогресија $a_1, a_2, \ldots$. Познато е дека постојат природни броеви p, q, t , ($p \neq q$) такви што $a_p + pt = a_q + tq$. Ако $a_t = t$ и збирот на првите t членови на прогресијата е еднаков на 18, определи го a_{2008} .

3. Дадени се различни цели броеви a, b, c кои формираат аритметичка прогресија. Истите броеви, евентуално во некој друг редослед формираат геометриска прогресија. Докажи дека 21 е делител на $a^2 + b^2 + c^2$.

4. Дадени се аритметичка прогресија со прв член a_1 и разлика d и геометриска прогресија со прв член b_1 и количник q . Ако $a_1 + b_1 = d + 2a_1 = 0$ и збирот на првите четири члена на геометриската прогресија е еднаков на збирот на првите пет члена на аритметичката прогресија, определи го количникот на геометриската прогресија.

5. Определи ги сите природни броеви d , за кои постои бесконечна аритметичка прогресија $a_1, a_2, \ldots$ од природни броеви со разлика d и за која важи: постои природен број k таков што за секој природен број n броевите $a_{S_{n+1}}, (n+k)a_k, -a_{S_n}$ формираат (во овој редослед) аритметичка прогресија. (S_n е збирот на првите n членови на прогресијата, т.е. $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.)

6. Дадени се реални броеви a_i, b_i $(1 \leq i \leq k)$. Дефинираме
$$x_v = [a_1 n + b_1] + \ldots + [a_k n + b_k] .$$
Ако низата $x_1, x_2, \ldots$ е аритметичка прогресија, докажи дека $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ е цел број.

7. Збирот на првите n членови на аритметичка прогресија со прв член m и разлика 2 е еднаков на збирот на првите m членови на геометриска прогресија со прв член n и количник 2.

   а) Докажи, дека $m+n=2^m$.

   а) Определи ги m и n ако третиот член на геометриската прогресија е еднаков на дваесет и третиот член на аритметичката прогресија.

8. Определи ги сите тројки (a,b,c) различни реални броеви од интервалот $(0,2\pi)$ такви што

   1) Броевите a,b,c во овој редослед формираат аритметичка прогресија,

   2) Броевите $\sin a,\sin b,\sin c,\sin\frac{a+b+c}{2}$ во овој редослед формираат аритметичка прогресија.

9. Броевите $a_1=0,a_2,a_3,a_4$ и a_5 формираат во овој редослед аритметичка прогресија со разлика d, $0<d<180$. Определи го a_2 ако броевите

$$|\sin a_1^\circ|,|\sin a_3^\circ|,\sqrt{2}|\sin a_4^\circ|,\sqrt{3}|\sin a_5^\circ|$$

   се различни и се последователни членови на аритметичка прогресија.

10. Нека q и d се природни броеви. Геометриска прогресија со прв член q има количник q. Аритметичка прогресија со прв член 169, последен член 2017 и разлика d има q членови. Збирот на членовите на геометриската прогресија е еднаков на збирот на членовите на аритметичката прогресија. Определи го d.

11. Дадена е геометриска прогресија $b_1\neq 0,b_2,....,b_n$ која има $n\geq 3$ членови и количник $q>1$ кој е природен број. Аритметичка прогресија има прв член еднаков на првиот член на геометрикстата прогресија и последен член еднаков на предпоследниот член на геометриската прогресија. Збирот на членовите на геометриската прогресија е еднаков на збирот на членовите на аритметичката прогресија. Определи го бројот n.

12. Докажи дека бројот r е рационален ако и само ако постојат три различни цели броја a,b и c за кои $r+a,r+b$ и $r+c$ формираат геометриска прогресија.

13. Дадена е аритметичка прогресија со прв член $a_1>0$ и разлика d. Докажи:

   а) ако $d=2a_1$, тогаш за секој $n>1$ броевите a_1,a_n и $a_{(n-1)^2+n^2}$, земени во овој редослед формираат геометриска прогресија.

б) Ако $\frac{d}{a_1}$ е природен број и a_1, a_n и a_m за $n > 1$ формираат геометриска прогресија, тогаш $1 + \frac{d}{a_1}(m-1)$ е точен квадрат.

14. За кои вредности на $x \in (-\pi, \pi)$ броевите $2^{\sin x}, 2 - 2^{\sin x + \cos x}, 2^{\cos x}$ се последователни членови на геометриска прогресија?

15. Синусите на три различни агли од интервалот $[0, 2\pi]$ формираат аритметичка прогресија. Докажи, дека нивните косинуси, земени во истиот редослед, не може да формираат аритметичка прогресија.

16. Докажи, дека постојат природен број n и n^9 природни броеви помали од n^{10}, такви што меѓу овие n^9 не постојат три броја кои формираат аритметичка прогресија.

17. Дадени се низите реални броеви

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n \text{ и } b_1 < b_2 < \ldots < b_m,\ m, n \in \mathbb{N},\ m \geq 2, n \geq 2. \qquad (1)$$

Докажи дека множеството

$$M = \{a_i + b_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

се состои од $n + m - 1$ елементи ако и само ако и двете низи се аритметички прогресии со една иста разлика d.

18. Низата природни броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ги задоволува условите $a_{n+1} > a_n$ и $a_{2n} = 2a_n$ за секој n.

а) Докажи дека за секој прост број $p > a_1$ постои член на оваа низа кој е делив со p.

б) Докажи дека за секој непарен прост број p постои низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ со наведените својства во која ниту еден член не е делив со p.

III.2. КОНВЕРГЕНТНИ НИЗИ

1. За низата реални броеви $a_0, a_1, \ldots$ важи $a_n - a_{n-1} \geq 1$ и $a_{n+1} = n + \frac{1}{a_n - a_{n-1}}$ за $n \geq 1$. Докажи дека низата со општ член $a_n - n$ конвергира и определи ја нејзината граница.

2. Нека $a_n = \frac{4(2n)^4+1}{4(2n-1)^4+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Определи ја границата $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1a_2...a_n}{n^2}$.

3. Нека a и b се позитивни реални броеви. Докажи дека низата $\{u_n\}$ определена со
$$u_1 = \sqrt{a},\, u_{n+1} = \sqrt{a+bu_n}$$
е конвергентна и определи ја нејзината граница.

4. За низите позитивни реални броеви $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ важи
$$2a_{n+1} = a_n + b_n,\ 2b_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n},\ n \geq 1.$$
Докажи дека низите се конвергентни и определи ги нивните граници.

5. а) Нека n е природен број. Докажи дека равенката
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+x)} = 1$$
има единствено ненегативно решение x_n.

б) Докажи дека низата со општ член x_n конвергира и определи ја нејзината граница.

6. Нека $\{a_n\}$ е низа позитивни броеви таква што $2a_{n+1} \geq a_n + a_{n+2}$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека низата со општ член $\frac{a_n}{n}$ е конвергентна.

7. Нека $k \in (\frac{1}{2},1)$ и $a_1 > 0$. Докажи дека низата со општ член $a_{n+1} = ka_n + \frac{1-k}{a_n}$ е конвергентна и определи ја нејзината граница.

8. Нека $a_1 > 1$ и $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} - 1$ за $n \geq 1$. Докажи дека

а) низата $\{a_n\}$ е конвергентна и определи ја нејзината граница,

б) постои n таков што $a_{2n} < 1 + \frac{1}{2^{2^n}}$.

9. Низата $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ е определена со $x_1 = 2$ и $x_{n+1} = \frac{1+2x_n}{2+x_n}$ за $n \geq 1$.

а) Докажи дека низата со општ член $\frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{2}$ е геометриска прогресија и определи го нејзиниот количник.

б) Низата со општ член $\frac{1}{n}(\frac{1}{1+x_1} + ... + \frac{1}{1+x_n})$ е конвергентна и определи ја нејзината граница.

10. Низите позитивни реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се такви што

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + \tfrac{1}{b_n}) \text{ и } b_{n+1} = \tfrac{1}{2}(b_n + \tfrac{1}{a_n}), \text{ за секој } n \in \mathbb{N}.$$

Докажи, дека низите се конвергентни.

11. Дадена е низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што за секој природен број n важи

$$a_{n+7} = a_{n+6} - a_{n+4} + a_{n+3} - a_{n+1} + a_n .$$

Нека $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Докажи дека низата $\{\frac{s_n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна.

12. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$a_1 = \tfrac{4}{3} \text{ и } a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2, n \geq 1.$$

Докажи дека низата $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ определена со $b_k = \prod_{i=1}^{k} a_i$ е конвергентна и најди ја нејзината граница.

13. Докажи:

а) За секој природен број $n \geq 2$ постои единствен реален број $a > 1$ таков што $a_n^{n+1} + 1 = 2a_n^n$.

б) Низата $\{a_n\}$ од а) строго монотo расте и е конвергетна. Определи ја нејзината граница.

14. Низата реални броеви $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $x_1 = \frac{1}{2}$ и

$$x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} \text{ за } n \geq 2.$$

За секој природен број n нека $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}$. Докажи дека низата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна и определи ја нејзината граница.

15. Нека $f_1(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ и $f_{n+1}(x) = f_n(f_1(x))$, $n \in \mathbb{N}$. Пресметај

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=4}^{k} \frac{f_n(n-2)-1}{n-3}.$$

16. Низата реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е таква што

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{\cos(\pi a_n)}{6}, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}.$$

Докажи дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергетна и определи ја нејзината граница.

17. Нека $a_1, a_2, ...$ е низа реални броеви определена со $a_1 = a$ и $a_{n+1} = \cos a_n$ за $n \geq 1$. Докажи дека оваа низа конвергира.

18. Низата $\{a_n\}$ е определена со $a_1 = \frac{500\pi}{2017}$ и $a_{n+1} = \sin^2 a_n$ за $n \geq 1$. Докажи дека низата е конвергетна и определи ја нејзината граница.

19. Даден е природен број $t > 2$. За низата природни броеви $\{a_n\}$ важи $a_1 = t$ и $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ за $n \geq 1$.

    а) Определи го најголемиот заеднички делител на a_{2016} и a_{1008}.

    б) Пресметај ја границата $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_1 a_2 ... a_n}{a_{n+1}}$.

20. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $a_1 > 0$ и

$$a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n^2 + 1} \text{ за } n \geq 1.$$

    Докажи дека постои $n \in \mathbb{N}$ таков што $\pi a_n > 2^n$.

21. Андреј запишал конечно многу различни реални броеви (можно е еден број), ги квадрирал и потоа од секој број го одзел бројот 1, по што ги добил почетните броеви во некој редослед. Кои броеви ги запишал Андреј?

22. а) Определи ги екстремните вредности интервалите на монотоност на функцијата $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ за $x \in \mathbb{R}$.

    б) Низата $a_0, a_1, a_2, ...$ е определена со $a_0 = \frac{7}{4}$ и

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + a_n + 4 \qquad (1)$$

    за $n \geq 0$. Докажи дека низата е конвергентна и определи ја нејзината граница.

23. Нека $a_0 = 0$ и $a_n = a_{[\frac{n}{2}]} + [\frac{n}{2}], n \geq 1$. Пресметај $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}$.

III.3. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Низата $\{f_n\}_{n \geq 1}$ е определена со $f_1 = f_2 = 1$ и $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ за $n \geq 1$. Докажи дека плоштината на триаголникот чии страни имаат должини $\sqrt{f_{2n+1}}$, $\sqrt{f_{2n+3}}$ и $\sqrt{f_{2n+5}}$ е еднаква на $\frac{1}{2}$.

2. Определи го најмалиот $n \in \mathbb{N}$ за кој постои низа $a_0, a_1, ..., a_n$ таков што a_0 е цел број, a_{k+1} е еднаков на $2a_k + 1$ или $\frac{a_k}{a_k + 2}$ за секој $k \in \mathbb{N}_0$ и $a_n = 2014$.

3. За низата $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ важи
$$a_{n+1} = 2^n - 3a_n, n = 0,1,2,... .$$
а) Изрази го општиот член a_n преку a_0 и n .
б) Определи го a_0 ако $a_{n+1} > a_n$ за секој n .

4. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $a_1 = 3$, $a_2 = 11$ и $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ за $n \geq 3$. Докажи дека секој член на оваа низа е од видот $a^2 + 2b^2$ за некои природни броеви a и b .

5. Секој член на бесконечна строго растечка низа природни броеви е делив со барем еден од броевите 1005 и 1006, но не е делив со 97. Освен тоа, разликата на било кои два соседни члена е помала или еднаква на k . Определи ја најмалата можна вредност на k .

6. Дали постои строго растечка низа природни броеви $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ таква што $a_n \leq n^3$ за секој n и секој природен број на единствен начин може да се запише како разлика на два члена на оваа низа?

7. Низата $\{a_n\}$ е дефинирана со: $a_1 = 1$ и $a_n = n(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})$, за $n > 1$.
а) Докажи дека за секој парен број n членот a_n е делив со $n!$.
б) Определи ги сите непарни броеви n за кои a_n е делив со $n!$.

8. Нека n е даден природен број. Определи ги сите реални броеви a за кои за низата зададена со $x_0 = a, x_1 = 1$ и $x_{i+2} = \frac{x_{i+1} - (n-i)x_i}{i+1}, i \geq 0$ важи $x_{2010n} = 0$.

9. Определи ги сите реални броеви c за кои постои строго растечка низа $\{a_n\}$ природни броеви така $\frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{a_n} = c$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

10. Низата $\{a_n\}$ е определена со $a_0 = 2013$ и $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + 1}$, за $n = 0,1,2,...$. Докажи дека $[a_{1000}] = 1013$.

11. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се природни броеви. Да претпоставиме дека броевите

$k_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ се цели за $i=1,2,...,n$ (каде $a_0 = a_n$ и $a_{n+1} = a_1$). Докажи дека

$$2n \le k_1 + k_2 + ... + k_n < 3n . \qquad (1)$$

12. Низата $\{x_n\}$ е определена со $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_{n+1} = 1 - x_1 x_2 ... x_n$ за секој $n \ge 1$. Докажи дека $x_{100} > 0,99$.

13. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со равенствата

$$a_1 = 1,\, a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n},\, n \ge 1 .$$

Докажи дека $[a_n^2] = n$ за $n \ge 4$.

14. За низата реални броеви $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ важи

$$a_{n+1} + a_{n-1} = | a_n | \text{ за секој } n > 1 .$$

Докажи дека ова низа е периодична.

15. Низата $\{a_n\}$ е определена со $a_1 = a, a_2 = b$, каде $a,b \in \mathbb{N}$, а за $n \ge 2$ членот a_{n+1} е еднаков на бројот на членовите на низата еднакви на a_n меѓу a_1, $a_2,...,a_n$. Определи ги сите парови (a,b) за кои низата $\{a_n + a_{n+1}\}$ е неопаѓачка почнувајќи од некое место.

16. Дали постои неограничена низа $\{a_n\}$ од позитивни реални броеви такви што $a_{n+2} = \frac{1}{2009}(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})$ за $n \ge 1$.

17. Низата $a_1, a_2, ...$ е таква што $a_1 \in (1,2)$ и $a_{k+1} = a_k + \frac{k}{a_k}$ за $k \in \mathbb{N}$. Докажи дека низата содржи најмногу еден пар членови чиј збир е цел број.

18. Низата природни броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е таква што важи

$$a_{n+2} = [\frac{2a_n}{a_{n+1}}] + [\frac{2a_{n+1}}{a_n}],$$

за секој $n \ge 1$. Докажи дека за некој n важи $a_n = 4$ и $a_{n+1} \in \{3,4\}$.

19. За природниот број n дефинираме

$$c_n = \min_{z_1, z_2, ..., z_n \in \{1,-1\}} | 1^{2018} z_1 + 2^{2018} z_2 + 3^{2018} z_3 + ... + n^{2018} z_n | .$$

Дали низата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена.

IV ФУНКЦИИ И ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

IV.1. СВОЈСТВА НА ФУНКЦИИТЕ. НЕПРЕКИНАТИ ФУНКЦИИ

1. Нека за функцијата $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ важи

   1) $f(x)\geq 0$ за секој $x\in[0,1]$,

   2) $f(1)=1$,

   3) ако $x_1,x_2\in[0,1]$ и $x_1+x_2\leq 1$, тогаш $f(x_1)+f(x_2)\leq f(x_1+x_2)$.

   Докажи дека за секој $x\in[0,1]$ важи $f(x)\leq 2x$.

2. Дадени се различни остри агли α и β за кои

$$(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=2.$$

   Докажи дека $\alpha+\beta=90^\circ$.

3. Ако $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ и $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$ определи го $\sin\beta$.

4. Нека $f_k(x)=\frac{\sin^k x+\cos^k x}{k}$. Определи ги сите природни броеви m и n, $m\neq n$ за кои функцијата $f_m(x)-f_n(x)$ е константа.

5. Дадени се функциите $f(x)=|x-1|-|x-2|$ и $g(x)=|x-3|$.

   а) Конструирај го графикот на функцијата $f(x)$.

   б) Определи ја плоштината на фигурата ограничена со графиците на функциите $f(x)$ и $g(x)$.

6. Дали може функцијата $f(x)=2^x+3^x+6^x$ да се запише како конечен збир на периодични функции.

7. За функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ велиме дека е добра ако за секои $a,b\in\mathbb{N}$ важи

$$f(a+b-1)=\underbrace{f(f(\dots f}_{a\text{ пати}}(b)\dots)).$$

   Нека g е добра функција таква што за некој $A\geq 2$ важи

$$g(A+2018)=g(A)+1.$$

а) Докажи дека за секој $n \geq A+2$ важи $g(n+2017^{2017})=g(n)$.

б) Ако важи $g(A+2017^{2017}) \neq g(A)$ определи го $g(n)$ за $n \leq A-1$.

8. Нека A е конечно множество функции од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$ со следниве својства:
1) ако $f, g \in A$, тогаш $f \circ g \in A$,
2) за секој $f \in A$ постои $g \in A$ таков што важи
$$f(f(x)+y)=2x+g(g(y)-x).$$
Докажи дека функцијата $h_0(x)=x$, за секој $x \in \mathbb{R}$ припаѓа на множеството A.

9. Колку пати функцијата $f(x)=\cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{3} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{x}{2009}$ го менува знакот на интервалот $[0, \frac{2009\pi}{2}]$.

10. Нека S е множеството од сите природни броеви поголеми од 1. Дали постои функција $f: S \to S$ таква што
$$f(a)f(b)=f(a^2b^2), \text{ за секои } a,b \in S, (a \neq b)?$$

11. Определи ги сите цели броеви k такви што постои функција $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ за која важи:
а) $f(1997)=1998$,
б) $f(ab)=f(a)+f(b)+kf(\text{NZD}(a,b))$, за секои $a,b \in \mathbb{N}$.

12. Функцијата $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ги задоволува условите
1) $f(1)=p+1$,
2) $f(n+1)=f(1)f(2)...f(n)+p$
каде p е прост број. Определи го p така што постои $k \in \mathbb{N}$ таков што $f(k)$ е точен квадрат.

13. а) Дади пример на функција $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ таква што
$$2f(x^2) \geq xf(x)+x \text{ за секој } x>0.$$
б) Докажи дека ако $f(x)$ го има својството од а), тогаш $f(x^3) \geq x^2$ за секој $x>0$.

14. Нека p и q се позитивни броеви, за кои параболата $y=x^2-2px+q$ нема заеднички точки со $x-$оската. Докажи дека на параболата постојат точки A и B за кои отсечката AB е паралелна со $x-$оската и се гледа од коорди-

натниот почеток O под прав агол ако и само ако $p^2 < q \le \frac{1}{4}$. За кои вредности на p и q точките A и B се еднозначно определени?

15. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е таква што

$$f(x^2+y^2) \ge f(x+y)$$

за секои $x, y \in \mathbb{R}$. Докажи дека $f(x) = f(y)$ за секои $x, y \in (0,2)$.

IV.2. ЕКСТРЕМНИ ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИИ. ПРИМЕНА НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОТО СМЕТАЊЕ

1. Нека $x_1, x_2, ..., x_n \in [0,1]$. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$x_1(1-x_2)+x_2(1-x_3)+...+x_n(1-x_1).$$

2. Нека a,b,c,A,B,C се реални броеви такви што $a \ne 0,\ A \ne 0$ и за секој $x \in \mathbb{R}$ важи

$$|ax^2+bx+c| \le |Ax^2+Bx+C|. \qquad (1)$$

Докажи дека

$$|b^2-4ac| \le |B^2-4AC|.$$

3. Реалните броеви x, y, z ги задоволуваат условите $|x|,|y|,|z| \ge 1$ и

$$x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0. \qquad (1)$$

Определи ја најголемата можна вредност на збирот $x+y+z$.

4. Определи го најмалото моижно растојание меѓу точките M и N кои припаѓаат на графиците на функциите $y = x^2$ и $y = 5x^2+1$?

5. За секој реален број $x>0$ дефинираме триаголник $T(x) = ABC$ чии темиња во правоаголен координатен систем имаат координати $A(-1,1), B(x,\frac{1}{x})$ и $C(\frac{x}{2},-\frac{2}{x})$. Меѓу сите вакви триаголници определи го триаголникот кој има најмала плоштина.

6. Докажи дека за секоја квадратна функција $f(x) = x^2+px+q$ важи

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x)| \ge \frac{1}{8}.$$

Кога важи знак за равенство?

7. Нека O е координатниот почеток на правоаголен координатен систем во рамнината, а точката M лежи на графикот на функцијата
$$f(x)=x^2-4x+\tfrac{7}{2}.$$
Определи ја најмалата можна должина на отсечката OM .

8. а) Определи ја најголемата вредност на функцијата $y=|4x^3-3x|$ на интервалот $[-1,1]$.

   б) Нека a,b,c се реални броеви и M е најголемата вредност на функцијата $y=|4x^3+ax^2+bx+c|$ на интервалот $[-1,1]$. Докажи дека $M\geq 1$. Кога важи знак за равенство.

9. Определи ги најмалата и најголемата вредност на функцијата
$$f(x)=(\sin x+\cos x)(\sin x+\cos x+1)(\sin x+\cos x+2)(\sin x+\cos x+3).$$

10. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои множеството вредности на функцијата
$$f(x)=\frac{\sin^2 x-a}{\sin^3 x-(a^2+1)\sin x+2}$$
го содржи интервалот $[\tfrac{1}{2},2]$.

11. Определи ги локалните екстреми на функцијата
$$f(x)=\log_3(x^3-2x^2-13x-10)-\log_3(x^2-5x).$$

12. Тангентите во точките A и B од графикот на функцијата $y=x^2$ се сечат во точка C така што $\triangle ABC$ е рамностран. Определи ја должината на отсечката AB.

13. Докажи дека темињата на параболите $y=x^2+b_ix+c_i$, $i=1,2,3$ лежат на една права, која не е паралелна со оската Oy , ако и само ако овие параболи имаат заедничка тангента.

14. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои графиците на функциите x^2-2ax и $-x^2-1$ имаат две заеднички тангенти и периметарот на четириаголникот чии темиња се допирните точки на тангентите е еднаков на 6.

IV.3. ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ ВО МНОЖЕСТВАТА ПРИРОДНИ, ЦЕЛИ И РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

1. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ за кои важи:

   а) Постои $a\in\mathbb{N}$ таков што $f(a)=1$,

   б) За секои природни броеви a,b,c такви што $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ важи
$$\frac{1}{f(a)}+\frac{1}{f(b)}=\frac{1}{f(c)}.$$

2. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што за секои природни броеви m и n целиот број $f(m)+f(n)-mn$ е различен од 0 и е делител на $mf(m)+nf(n)$.

3. Испитај дали постои функција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ за која за секој $n\in\mathbb{N}$ важи:
$$f(n)f(\tfrac{1}{2015}nf(n))f(\tfrac{1}{2015^2}nf(n)f(\tfrac{1}{2015}nf(n))=2\cdot 2015^3. \qquad (1)$$

4. Определи ги сите инјекции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што $f(1)=2,\ f(2)=4$ и
$$f(f(m)+f(n))=f(f(m))+f(n), \qquad (1)$$
за секои $m,n\in\mathbb{N}$.

5. Нека $S(k)$ е збирот на цифрите на природниот број k. За природниот број a ќе велиме дека е $n-$добар, ако постои низа природни броеви $a_0,a_1,...,a_n$ за која $a_n=a$ и $a_{i+1}=a_i-S(a_i)$ засекој $i=0,1,2,...,n-1$. Дали е точно тврдењето, за секој природен број n постои природен број b кој е $n-$добар, но не е $(n+1)-$добар.

6. Нека $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е функција таква што $af(a)+bf(b)+2ab$ е точен квадрат за секои $a,b\in\mathbb{N}$. Докажи дека $f(a)=a$ за секој $a\in\mathbb{N}$.

7. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ и $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што неравенствата
$$f(g(n))<f(n+1),\ g(h(n))<g(n+1) \text{ и } h(f(n))<h(n+1)$$
се исполнети за секој $n\in\mathbb{N}$.

8. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ такви што за секои $x,y,z\in\mathbb{Q}$ важи
$$f(x+f(y+f(z)))=y+f(x+z). \qquad (1)$$

9. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ такви што $f(1)=2$ и
$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1, \qquad (1)$$
за секои $x,y\in\mathbb{Q}$.

10. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ такви што за секој $x\in\mathbb{Q}^+$ важи
$$f(x)+f(\tfrac{1}{x})=1 \text{ и } f(2x)=2f(f(x)).$$

IV.4. ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ ВО МНОЖЕСТВОТО РЕАЛНИ БРОЕВИ

1. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што
$$f(f(x)+2y)=6x+f(f(y)-x)$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

2. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи
$$f(f(x)+y)=2x+f(f(y)-x). \qquad (1)$$

3. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи
$$f(x+f(x+y))=f(x-y)+f(x)^2.$$

4. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои реални броеви x и y важи
$$(x+1)f(xf(y))=xf(y(x+1)). \qquad (1)$$

5. Определи ги сите функции $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои реални броеви x и y важи
$$g(x+y)+g(x)g(y)=g(xy)+g(x)+g(y). \qquad (1)$$

6. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е таква што $x+f(x)=f(f(x))$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Определи ги сите решенија на равенката $f(f(x))=0$.

7. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што
$$xf(x)-yf(y)=(x-y)f(x+y),$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

8. Нека $a,b\in\mathbb{R}^+$. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ такви што за секој $x\in\mathbb{R}^+$ важи
$$f(f(x)+af(x)=b(a+b)x\,. \qquad (1)$$

9. Нека функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е таква што
$$f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y) \qquad (1)$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}$. Докажи дека $f(x+y)=f(x)+f(y)$ за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

10. Дали постои функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква што $f(f(x))=x^2-2$ за секој $x\in\mathbb{R}$?

11. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што
$$f(yf(x)-x)=f(x)f(y)+2x\,,$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

12. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи
$$f(xf(y)-yf(x))=f(xy)-xy\,. \qquad (1)$$

13. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што
$$f(x)f(yf(x)-1)=x^2f(y)-f(x)\,, \qquad (1)$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

14. Определи ги сите непрекината функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што
$$((f(x)f(y)-1)f(x+y)=2f(x)f(y)-f(x)-f(y)\,. \qquad (1)$$

15. а) Определи ги сите реални броеви a за кои постои функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква што $f(0)=a$ и $f(f(x))=x^{2009}$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

б) Дали постои непрекината функција со својствата од а).

16. Определи ги сите непрекината функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што
$$f(x)=f(x^2+\tfrac{1}{4})$$
за секој $x\in\mathbb{R}$.

17. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што
$$f(x^3+y^3)=xf(x^2)+yf(y^2)\,, \qquad (1)$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

18. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што
$$(f(x)+f(y)-2f(xy))(f(x)+f(z)-2f(xz))\geq 0,$$
за секои $x,y,z\in\mathbb{R}$.

19. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што $f(xy)\leq xf(y)$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

20. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои постои функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква што
$$x+af(y)\leq y+f(f(x))$$
за секои реални броеви x и y.

21. Нека F е множеството од сите функции $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ кои ја задоволуват неравенката $f(3x)\geq f(f(2x))+x$, за секој $x\in\mathbb{R}^+$. Определи го најголемиот реален број α таков што за сите функции $f\in F$ важи $f(x)\geq\alpha x$.

22. Докажи дека не постои функција $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ таква што
$$f(x)^2\geq f(x+y)(f(x)+y), \tag{1}$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}^+$.

23. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ такви што
    1) $f(x+y)\geq f(x)+y$, за секои $x,y\in\mathbb{R}^+$ и
    2) $f(f(x))\leq x$, за секој $x\in\mathbb{R}^+$.

24. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секој $x\in\mathbb{R}$ важи
$$6f(x)\geq f^4(x+1)+f^2(x-1)+4.$$

25. Определи ги сите функции $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ такви што
$$f(x^2)+f(y)=f(x^2+y+xf(4y)), \tag{1}$$
за секои $x,y\in[0,+\infty)$.

26. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за некоја реална константа M важи $f(x)<M$ за секој $x\in\mathbb{R}$ и
$$f(xf(y))+yf(x)=xf(y)+f(xy), \tag{1}$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

27. Определи ги сите сурјекции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи
$$f(x+f(x)+2f(y))=f(2x)+f(2y)\,. \tag{1}$$

28. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што
$$f(x^{2015}+f(y)^{2015})=f(x)^{2015}+y^{2015},$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

29. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи
$$f(x)+y-f(x)y=f(x+f(y))-f(xf(y))\,. \tag{1}$$

30. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ такви што
$$f(x^2+y)=f^2(x)+\tfrac{f(xy)}{f(x)}, \tag{1}$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\, y\neq x^2$.

31. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи
$$(f(x)+xy)f(x-3y)+(f(y)+xy)f(3x-y)=(f(x+y))^2\,.$$

32. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ кои се ограничени на интервалот $(0,1)$ и такви што важи
$$x^2f(x)-y^2f(y)=(x^2-y^2)f(x+y)-xyf(x-y), \tag{1}$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

33. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што $f(-1)\neq 0$ и
$$f(xy+1)=f(x)f(y)+f(x+y), \tag{*}$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

34. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи
$$f(x+g(y))=xf(y)-yf(x)+g(x)\,. \tag{1}$$

35. Определи ги сите позитивни реални броеви k такви што постои функција $f:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ за која се исполенти следниве услови:
1) $f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))$, за секои $x,y,z\in[0,1]$,
2) $f(x,y)=f(y,x)$, за секои $x,y\in[0,1]$,
3) $f(x,1)=x$, за секој $x\in[0,1]$,
4) $f(zx,zy)=z^kf(x,y)$, за секои $x,y,z\in[0,1]$.

V ПОЛИНОМИ

V.1. СВОЈСТВА НА ПОЛИНОМИТЕ. ДЕЛИВОСТ

1. Определи ги вредностите на реалните параметри a,b,c за кои остатокот од делењето на полиномот
$$f(x)=x^5+ax^4+2bx^2+cx+1$$
со полиномот $g(x)=x^3-x^2-2x+2$ е еднаков на ax^2+bx+c.

2. Определи ги сите вредности на реалните параметри a и b, за кои остатокот при делењето на полиномот x^4-3ax^3+ax+b со полиномот x^2-1 е полиномот $(a^2+1)x+3b^2$.

3. Определи ги сите вредности на реалните параметри a и b за кои полиномот
$$f(x)=x^4+x^3-(a^2-1)x^2+2abx+a^2-a-6$$
е делив со полиномот $g(x)=x^2-a^2$.

4. Нека n е природен број. Определи ги сите вредности на реалните параметри a и b за кои остатокот од делењето на полиномот $ax^n+bx+2017$ со полиномот x^2-1 е полиномот x.

5. Определи ги сите вредности на реалните параметри a и b за кои полиномот
$$f(x)=x^3-bx^2+(3-a^2)x+3b$$
е таков што $f(a-1)=f(a+1)$ и при делењето со полиномот $x-b$ се добива остаток $-2a$.

6. Определи ги сите природни броеви n за кои постојат ненулти реални броеви a,b,c,d такви што по запишување во нормален вид на полиномот
$$(ax+b)^{1000}-(cx+d)^{1000}$$
се добиваат точно n ненулти коефициенти.

7. Ако $P(x)^2$ е полином по x^2, тогаш или $P(x)$ или $\frac{P(x)}{x}$ е полином по x^2. Докажи!

8. Полиномот $P(x), \deg P = n$ со реални коефициенти е таков што $|P(x)| \leq 1$, за секој $x \in [0,1]$. Докажи дека $P(-\frac{1}{n}) \leq 2^{n+1} - 1$.

9. Дадени се непропорционални полиноми $p(x)$ и $q(x)$, секој од кој има по $m \geq 2$ ненулти коефициенти. Определи го минималниот број ненулти коефициенти на полиномот $f(u,v) = p(u)q(v) - p(v)q(u)$.

10. Ако P и Q се монични полиноми такви што $P(P(x)) = Q(Q(x))$, докажи дека $P \equiv Q$.

11. Докажи дека полиномот $P(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1$, иако е ненегативен за секои $x, y \in \mathbb{R}$, не може да се претстави како збир на квадрати на неколку полиноми.

12. Дадени се неконстантни полиноми
$$P(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1x + a_0 \text{ и } Q(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0.$$
Докажи дека збирот на квадратите на коефициентите на полиномот $P(x)Q(x)$ не е помал од $a_0^2 + b_0^2$.

13. Докажи дека постои точно еден полином $P(x)$ со реални коефициенти за кој полиномот
$$(x+y)^{1000} - P(x) - P(y)$$
е делив со полиномот $xy - x - y$.

V.2. НУЛИ НА ПОЛИНОМИ. ИРЕДУЦИБИЛНОСТ

1. Даден е квадратен трином $P(x)$ кој определува низа $\{P(n)\}_{n=1}^{\infty}$. Определи го максималниот број елементи на низата секој од кои е еднаков на збирот на неговите два претходника.

2. Реалните броеви a и b се такви што квадратните триноми $x^2 + ax + b$ и $x^2 + bx + a$ имаат по два реални и различни корени, а производот на овие два триноми има точно три реални корени. Определи ги можните вредности на збирот на овие три корени.

3. Нека $f(x)$ е полином од трет степен со реални коефициенти. За тројката

(a,b,c) од различни реални броеви ќе велиме дека е циклична ако $f(a)=b$, $f(b)=c$ и $f(c)=a$. Се покажало дека постојат осум циклични тројки $(a_i,b_i,c_i), i=1,2,...,8$ во кои учествуваат 24 различни реални броеви. Докажи дека меѓу осумте збирови $a_i+b_i+c_i$ има најмалку пет различни.

4. За кои n полиномот x^n+x-1 е делив со полиномот
   а) x^2-x+1, б) x^3-x+1.

5. Определи ги сите монични полиноми $P(x)$ такви што полиномот $P(x)^2-1$ е делив со полиномот $P(x+1)$.

6. За моничниот полином $f(x)$, $\deg f=4$ важи $f(1)=10$, $f(2)=20$ и $f(3)=30$. Пресметај ја вредноста на изразот $f(12)+f(-8)$.

7. Докажи дека полиномот
$$P(x)=x^n+2nx^{n-1}+2n^2x^{n-2}+...$$
не може да има само реални нули.

8. Докажи дека полиномот $f(x)=x^6-2x^5+x^4-2x^3+x^2-2x+1$ има точно четири нули со модул 1.

9. За еден полином $P(x)$, $\deg P=4$ е познато дека равенката $P(x)=x$ има четири реални и различни корени, но секоја равенка од видот $P(x)=c$, каде c е реална константа има најмногу два реални и различни корени. Докажи, дека равенката $P(x)=-x$ има најмногу два реални и различни корени.

10. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти. Докажи, ако за некој цел број x важи $\underbrace{P(P(...P}_{n}(x)...))=x$, $n\geq 2$, тогаш $P(P(x))=x$.

11. Ако полиномот $Q(x)=ax^2+(c-b)x+(e-d)$, каде $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$ има реални нули поголеми од 1, докажи дека полиномот $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ има барем еден реален корен.

12. Моничен полином P со реални коефициенти е таков што $|P(i)|<1$. Докажи дека постои корен $z=a+bi$ таков што
$$(a^2+b^2+1)^2<4b^2+1. \qquad (1)$$

13. Дали постојат ненулти броеви a,b,c такви што за секој $n>3$ може да се најде полином од видот $x^n+...+ax^2+bx+c$ со точно n (не задолжително различни) целобројни корени?

14. Нека a,b,c се различни ненулти реални броеви. Докажи, ако полиномите ax^3+bx+c, bx^3+cx+a и cx^3+ax+b имаат заеднички корен, тогаш барем еден од нив има три (не задолжително различни) реални корени.

15. Определи го најмалиот природен број n за кој бројот $\cos\frac{\pi}{n}$ не може да се претстави во видот $p+\sqrt{q}+\sqrt[3]{r}$ каде p,q,r се рационални броеви.

16. Докажи дека за секој природен број n сите корени на полиномот

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{k(n-k)} x^k$$

се реални.

17. Нека $a_0,a_1,...,a_n$ се реални броеви. Ако равенката

$$\frac{a_0}{1-x}+\frac{a_1}{1-x^2}+...+\frac{a_n}{1-x^{n+1}}=0$$

има решение $x\in(0,1)$, докажи дека и равенката

$$a_0+a_1y+...+a_ny^n=0$$

има решение $y\in(0,1)$.

18. Во Декартов координатен систем во рамнината се дадени точките A_i, $i=1,2,3,4$ и B_i, $i=1,2,3,4$. Точките A_i, $i=1,2,3,4$ припаѓаат на параболата $y=x^2$, а точките B_i, $i=1,2,3,4$ на параболата $y=2009x^2$, при што за секој $i=1,2,3,4$ точките A_i и B_i имаат еднакви апсциси. Докажи, ако точките A_i, $i=1,2,3,4$ лежат на една кружница, тогаш и точките B_i, $i=1,2,3,4$ лежат на една кружница.

19. Нека $a,b_1,c_1,...,b_n,c_n$ се реални броеви такви што

$$x^{2n}+ax^{2n-1}+ax^{2n-2}+...+ax+1=(x^2+b_1x+c_1)...(x^2+b_nx+c_n),$$

за секој $x\in\mathbb{R}$. Докажи дека $c_1=c_2=...=c_n=1$.

20. Нека $n_0,n_1,...,n_{2008}$ се дадени природни броеви и M е множеството од сите полиноми

$$f(x)=a_0x^{2008}+a_1x^{2007}+...+a_{2007}x+a_{2008}$$

такви што за секој $i, 0 \le i \le 2008$ имаме $a_i \in \{1, 2, ..., n_i\}$. Определи кои полиноми од M се повеќе, тие кои немаат ниту еден реален корен или тие кај кои сите корени се цели броеви.

21. Нека $n > 1$ е природен број и $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$. Докажи дека не постојат полиноми $g(x), h(x)$ со целобројни коефициенти и степени поголеми од 0 такви што $f(x) = g(x)h(x)$.

22. Нека p е прост број. Докажи дека полиномот $F_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$ е иредуцибилен.

23. Докажи дека полиномот $P(x) = x^n + 4$ е разложлив над $\mathbb{Z}[x]$ ако и само ако n е делив со 4.

24. Нека m, n и a се природни броеви и $p < a - 1$ е прост број. Докажи дека полиномот $f(x) = x^m(x-a)^n + p$ е иредуцибилен.

V.3. ПОЛИНОМИ СО ЦЕЛОБРОЈНИ КОЕФИЦИЕНТИ

1. Нека x и y се различни реални броеви такви што $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ е цел број за некои четири последователни природни броја n. Докажи дека $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ е цел број за секој природен број n.

2. Даден е полиномот $P(x) = (x + d_1)(x + d_2)...(x + d_9)$, каде $d_i, i = 1, 2, ..., 9$ се различни цели броеви. Докажи дека постои цел број N таков што за сите цели броеви $x \ge N$ бројот $P(x)$ е делив со прост број поголем од 20.

3. Нека n е природен број. На секоја од $2n + 1$ карта е запишан по еден ненулти цел број, при што збирот на сите запишани броеви не е еднаков на нула. Со овие карти треба да се заменат ѕвездичките во изразот
$$*x^{2n} + *x^{2n-1} + ... + *x + *$$
така што добиениот полином ќе нема целобројни корени. Дали ова е секогаш можно?

4. Даден е природен број n. Определи ја најмалата можна вредност на природниот број k, за кој постои полином $f(x)$ со целобројни коефициенти кој има

целоброен корен и полиномот $f(x)+k$ има n различни целобројни корени.

5. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се некостантни низи рационални броеви. Да претпоставиме дека $(a_i-a_j)(b_i-b_j)$ е цел број за секои i и j. Докажи дека постои рационален број γ таков што $(a_i-a_j)\gamma$ и $(b_i-b_j)\gamma$ се цели броеви за секои i и j.

6. Определи го најмалиот природен број n таков што постојат полиноми f_i, $i=1,2,...,n$ со рационални коефициенти такви што
$$x^2+7=f_1(x)^2+f_2(x)^2+...+f_n(x)^2\,. \qquad (1)$$

7. а) Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$ постои полином T_n со целобројни коефициенти и водечки коефициент 2^{n-1} таков што $T_n(\cos x)=\cos nx$ за секој $x\in\mathbb{R}$.
б) Докажи дека за полиномите T_n важи
$$T_{m+n}+T_{m-n}=2T_mT_n\,,$$
за секои $m,n\in\mathbb{N},\, m\geq n$.
в) Докажи дека полиномот U_n определен со $U_n(2x)=2T_n(x)$ исто така е моничен, има целобројни коефициенти и ја задоволува релацијата
$$U_n(x+x^{-1})=x^n+x^{-n}\,.$$
Полиномите $T_n(x)$ се таканаречените полиноми на Чебишев.

8. Докажи дека ако $\cos\frac{p}{q}\pi=a$ е рационален број за некои $p\in\mathbb{Z},\, q\in\mathbb{N}$, тогаш $a\in\{0,\pm\frac{1}{2},\pm 1\}$.

9. Докажи дека максимумот на апсолутната вредност на произволен реален моничен полином од $n-$ти степен на $[-1,1]$ не е помал од $\frac{1}{2^{n-1}}$.

10. Низата цели броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е таква што $m-n\,|\,a_m-a_n$ за секои различни природни броиеви m и n. Нека претпоставиме дека постои полином $P(x)$ таков што $|\,a_n\,|<P(n)$ за секој n. Докажи дека постои полином $Q(x)$ таков што $a_n=Q(n)$ за секој n.

V.4. ПРИМЕНА НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОТО СМЕТАЊЕ

1. Полиномот $x^3 + px + q$ со целобројни коефициенти има три различни ирационални корени x_1, x_2, x_3. Определи ја најмалата можна вредност на збирот $|x_1| + x_2| + |x_3|$.

2. Дали може четири различни реални броеви кои припаѓаат на нулите на полином од трет степен и на неговиот извод да формираат аритметичка прогресија?

3. Четири позитивни броеви формираат растечка геометриска прогресија. Определи го нејзиниот количник, ако три од броевите се нули на полином од трет стешен, а четвртиот е нула на неговиот извод.

4. Нека за реалните броеви $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n < x_{n+1} = 1$ важи
$$\sum_{j=0,\ j\neq i}^{n+1} \frac{1}{x_i - x_j} = 0 \text{ за } i = 1, 2, ..., n. \qquad (1)$$
Докажи дека $x_{n+1-i} = 1 - x_i$ за $i = 1, 2, ..., n$.

5. Определи реален полином $P(x)$, $\deg P \leq 5$ таков што $P(x)$ дава остатоци -1 и 1 при делење со $(x-1)^3$ и $(x+1)^3$.

6. За дадени полиноми $P(x)$, $Q(x)$ и произволен $m \in \mathbb{C}$ нека
$$P_m = \{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = m\} \text{ и } Q_m = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = m\}.$$
Ако $P_0 = Q_0$ и $P_1 = Q_1$, докажи дека $P(x) = Q(x)$.

V.5. ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ ЗА ПОЛИНОМИ

1. Определи ги сите полиноми $f(x)$ со целобројни коефициенти за кои
$$f(1) = 9,\ f(2) = 218 \text{ и } f(3) = 2019.$$

2. Определи ги сите полиноми од видот $f(x) = x^2 + ax + b$ такви што
$$2f(x^2 - 1) = f(x-1)f(x+1) + x^4 + 6x^2 - 15,$$
за секој реален број x.

3. Определи ги сите квадратни полиноми $f(x) = ax^2 + bx + c$ со реални корени

x_1 и x_2 такви што $f(1)=2,\ f(2)=1$ и $4x_1^2-12x_1x_2+4x_2^2=15$.

4. Определи ги сите реални полиноми P со реални такви што за секој x важи
$$P(x^2)=P(x+\tfrac{1}{2})P(x-\tfrac{1}{2})\,.$$

5. Определи ги сите реални полиноми P такви што
$$16P(x^2)=P(2x)^2\,. \qquad (1)$$

6. Определи ги сите реални полиноми P за кои
$$P(x)^2+P(\tfrac{1}{x})^2=P(x^2)P(\tfrac{1}{x^2})\,. \qquad (1)$$

7. Дали постојат нелинерани полиноми P и Q такви што
$$P(Q(x))=(x-1)(x-2)...(x-15)\,. \qquad (1)$$

8. Определи ги сите реални полиноми P такви што
$$P(x)^2-1=4P(x^2-4x+1)\,. \qquad (1)$$

9. Определи ги сите неконстантни полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ со реални коефициенти такви што
$$P(x)Q(x+1)=P(x+2004)Q(x)\text{, за секој } x\in\mathbb{R}\,.$$

10. Определи ги сите полиноми $P(x)$ со реални коефициенти такви што
$$P(x-1)P(x+1)>P^2(x)-1\,,$$
за секој $x\in\mathbb{R}$.

11. Нека $n\ge 3$ е природен број. Определи ги сите неконстантни полиноми со реални коефициенти $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ такви што
$$f_k(x)f_{k+1}(x)=f_{k+1}(f(_{k+2}(x)),\quad 1\le k\le n\,,$$
за секој реален број x ($f_{n+1}(x)=f_1(x),\ f_{n+2}(x)=f_2(x)$).

12. Определи ги реалните броеви a за кои постои рационална функција $f(x)$ таква што $f(x^2)=f(x)^2-a$.

13. а) Определи ги сите полиноми $f(x,y)$ со реални коефициенти такви што $f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))$ за секои $x,y,z\in\mathbb{R}$.

б) Дали постои функција $f:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ која не е полином и горното равенство е точно за секои $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.

14. Определи ги сите полиноми p со реални коефициенти за кои важи $p(0) = 0$ и $f(f(n)) + n = 4f(n)$ за секој $n \in \mathbb{N}$, каде $f(n) = [p(n)]$.

V.6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Докажи дека за секој природен број n постои единствен полином P, $\deg P = n$ со реални коефициенти, за кој функцијата $xP^2(x) - (P(x) - 1)^2$ е непарна.

2. Нека $P(x)$ полином со реални коефициенти. Ако постои цел број t за кој $P(t)$ не е цел број, докажи дека такви цели броеви t има бесконечно многу.

3. Нека a реален број од интервалот $[2 + \sqrt{2}, 4]$. Определи ја најмалата можна вредност на $|z^2 - az + a|$ каде $z \in \mathbb{C}$ и $|z| \leq 1$.

4. Полиномот $P(x)$ е таков што за секој $y \in \mathbb{Q}$ постои $x \in \mathbb{Q}$ таков што $P(x) = y$. Докажи дека P е линеарен полином.

5. Даден е природен број $N \geq 3$. Ќе велиме дека множество од N точки во координатната рамнина е допустливо ако апсцисите на точките се различни и секоја од тие точки е обоена или во црвена или во сина боја. Ќе велиме дека полиномот $P(x)$ разделува едно допустливо множество точки ако над графикот на $P(x)$ нема црвени точки, а под него нема сини точки, или обратно (на самиот график може да лежат точки од двете бои). Определи го најмалиот природен број k за кој секое допустливо множество од N точки може да се раздели од полином чиј степен е помал или еднаков на k.

6. Квадратните триноми $f(x)$ и $g(x)$ имаат реални коефициенти и за секој позитивен број x за кој $g(x)$ е цел број важи дека и $f(x)$ е цел број. Докажи дека постојат цели броеви m и n такви што $f(x) = mg(x) + n$ за секој $x \in \mathbb{R}$.

7. Нека за полиномот P, $\deg P = n$ важи $P(i) = \binom{n+1}{i}^{-1}$, за $i = 0, 1, 2, ..., n$. Определи го $P(n+1)$.

8. Ако $P(x)$ е со парен $n-$ти степен, $P(0)=1$ и $P(i)=2^{i-1}$ за $i=1,2,...,n$, докажи дека $P(n+2)=2P(n+1)-1$.

9. Нека P е полином од $n-$ти степен таков што за $i=0,1,2,...,n$ бројот $P(i)$ е еднаков на остатокот кој се добива при делење на i со 2. Определи го $P(n+1)$.

10. Нека P е полином од $n-$ти степен таков што $P(i)=\frac{1}{i}$ за $i=1,2,...,n+1$. Определи го $P(n+2)$.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I ИДЕНТИТЕТИ

1. Нека m и n се цели броевитакви што

$$m = m^2 + n^2 - 8n - 2mn + 16 .$$

Докажи дека m е точен квадрат.

Решение. Имаме:

$$9m = m + 8m = m^2 + n^2 - 8n - 2mn + 8m + 16 = (m - n + 4)^2 .$$

Според тоа, $9m = 3^2 m$ е точен квадрат, па затоа мора да е m точен квадрат.

2. Дадени се природни броеви a, b, n такви што $a^2 + 2nb^2$ е точен квадрат. Докажи дека бројот $a^2 + nb^2$ може да се претстави како збир од квадрати на два природни броеви.

Решение. Нека постои природен број c таков што $a^2 + 2nb^2 = c^2$. Тогаш $c^2 - a^2 = 2nb^2 > 0$, што значи дека $c > a$ и $c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$ е парен број. Според тоа, броевите a и c имаат иста парност. Значи, $\frac{a+c}{2}$ и $\frac{c-a}{2}$ се природни броеви и важи

$$a^2 + nb^2 = a^2 + \frac{c^2-a^2}{2} = \frac{a^2+c^2}{2} = \frac{a^2+2ac+c^2+c^2-2ac+a^2}{4} = (\frac{a+c}{2})^2 + (\frac{c-a}{2})^2 ,$$

што и требаше да се докаже.

3. Нека a, b, c се реални броеви такви што $a + b + c = 0$ и $a^4 + b^4 + c^4 = 50$. Пресметај ја вредноста на изразот $ab + bc + ca$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} a^2 + b + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = -2(ab + bc + ca), \\ 50 = a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ &= 4(ab + bc + ca)^2 - 2((ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c)) \\ &= 2(ab + bc + ca)^2. \end{aligned}$$

Според тоа, $ab + bc + ca = \pm 5$. Бидејќи $ab + bc + ca = -\frac{a^2+b^2+c^2}{2} < 0$ добиваме $ab + bc + ca = -5$.

4. Докажи дека бројот $3^{4^5} + 4^{5^6}$ може да се претстави како производ на два броја, секој од кои е поголем или еднаков на 10^{2009} .

Решение. Нека $m,n\in\mathbb{N}(m>1)$. Имаме:

$$m^4+4n^4=(m^2+2n^2)^2-(2mn)^2=(m^2-2mn+2n^2)(m^2+2mn+2n^2)\,. \qquad (*)$$

Бидејќи $m>1$, добиваме дека бројот m^4+4n^4 е запишан како производ на два броја секој од кои е поголем од 1. Од (*), за $m=3^{4^4}$ и $n=4^{\frac{5^6-1}{4}}=4^{3906}$ добиваме

$$\begin{aligned}3^{4^5}+4^{5^6}&=((3^{4^4})^2-2\cdot3^{4^4}\cdot4^{3906}+2(4^{3906})^2)((3^{4^4})^2+2\cdot3^{4^4}\cdot4^{3906}+2(4^{3906})^2)\\&=((3^{4^4}-4^{3906})^2+(4^{3906})^2)((3^{4^4}+4^{3906})^2+(4^{3906})^2).\end{aligned}$$

Бидејќи

$$4^{3906}>4^{3900}=1024^{780}>1000^{780}=10^{2340}>10^{2009}\,,$$

бројот $3^{4^5}+4^{5^6}$ е запишан како производ на два броја секој од кои е поголем од 10^{2009}.

5. Нека n е природен број и $a_1,a_2,...,a_{2n}$ се различни цели броеви чија аритметичка средина е цел број. Определи ги сите цели броеви x за кои што важи

$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{2n})=(-1)^n(n!)^2\,. \qquad (1)$$

Решение. Нека x е цел број за кој е исполнето равенството (1). Јасно, $x-a_1$, $x-a_2,...,x-a_{2n}$ се $2n$ различни цели броеви, за кои важи

$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{2n})=(-1)\cdot1\cdot(-2)\cdot2\cdot...\cdot(-n)\cdot n\,.$$

Последното значи дека секој од дадените множители $x-a_i$, $i=1,2,...,2n$ е некој елемент од множеството $A=\{-n,-n+1,...,-1,1,...,n-1,n\}$ и на различните множители соодветствуваат различни елементи од множеството A. Значи,

$$\sum_{i=1}^{2n}(x-a_i)=\sum_{i=-n}^{n}i\text{, т.е. } 2nx-\sum_{i=1}^{2n}a_i=0\,,$$

од каде добиваме $x=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}a_i$.

6. Докажи дека бројот $n(n+2)(n+4)(n+6)$ не е квадрат на природен број.

Решение. Имаме:

$$n(n+2)(n+4)(n+6)=n(n+6)(n+2)(n+4)=(n^2+6n)(n^2+6n+8)$$

и ако земеме $k=n^2+6n$ добиваме

$$n(n+2)(n+4)(n+6)=k(k+8)=k^2+8k\,.$$

Од друга страна,

$$(k+3)^2 = k^2+6k+9 < k^2+8k < k^2+8k+16 = (k+4)^2 .$$

Значи, k^2+8k е меѓу два точни квадрати, па затоа овој број не е точен квадрат.

7. а) Докажи дека производот на четири последователни природни броја не е точен квадрат на природен број.

б) Определи ги сите природни броеви n за кои бројот n^2+9n+8 може да се претстави како производ на четири последователни природни броја.

Решение. а) Имаме

$$\begin{aligned} x(x+1)(x+2)(x+3) &= (x^2+3x)(x^2+3x+2) \\ &= (x^2+3x+1-1)(x^2+3x+1+1) \\ &= (x^2+3x+1)^2-1, \end{aligned}$$

што значи дека производ на четири последователни природни броја не е точен квадрат на природен број.

б) Од а) следува дека бројот n^2+9n+9 е точен квадрат. Од друга страна

$$(n+3)^2 < n^2+9n+9 < (n+5)^2 \text{, т.е. } n^2+9n+9 = (n+4)^2 ,$$

од каде следува $n=7$. Навистина, $7^2+9\cdot 7+8 = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$.

8. За еден природен број ќе велиме дека е *скоро квадратен* ако може да се претстави како производ на два последователни природни броја. Докажи дека секој скоро квадратен природен број може да се претстави како количник на два скоро квадратни природни броја.

Решение. Скоро квадратните броеви се од видот $n(n+1), n\in\mathbb{N}$. Сега тврдењето на задачата следува од фактот дека за секој природен број n важи

$$n(n+1) = \frac{n(n+2)(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n^2+2n)(n^2+2n+1)}{(n+1)(n+2)} .$$

9. Нека x, y се позитивни реални броеви за кои е исполнето равенството

$$x^3+y^3+(x+y)^3+30xy = 2000 .$$

Докажи дека важи $x+y=10$.

Решение. Воведуваме смени $x+y=a,\ xy=b$ и добиваме:

$$\begin{aligned} 2\cdot 10^3 &= x^3+y^3+(x+y)^3+30xy = (x+y)(x^2-xy+y^2)+(x+y)^3+30xy \\ &= (x+y)((x+y)^2-3xy)+(x+y)^3+30xy \\ &= a(a^2-3b)+a^3+30b = 2a^3-3ab+30b, \end{aligned}$$

т.е.

$$3b(10-a) = 2(10-a)(100+10a+a^2) .$$

Ако $10-a\neq 0$, тогаш $200+20a+2a^2=3b$, што не е можно, бидејќи

$$a^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2\geq 4xy=4b\,.$$

Според тоа, $10-a=0$, т.е. $x+y=10$.

10. За реалните броеви a,b,c важи

$$(a+b)(b+c)(c+a)=abc \text{ и } (a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3)=a^3b^3c^3\,.$$

Докажи дека $abc=0$.

Решение. Нека претпоставиме дека $abc\neq 0$. Ако второто равенство го поделиме со првото добиваме

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)=a^2b^2c^2\,.$$

Од друга страна важи $x^2+y^2\geq 2|xy|\geq xy+|xy|$, т.е. $x^2-xy+y^2\geq |xy|$, при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y$. Оттука следува дека

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\geq |ab|\cdot|bc|\cdot|ca|=a^2b^2c^2$$

и знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. Но, од

$$8a^3=(a+b)(b+c)(c+a)=abc=a^3$$

следува $a=0$, па затоа $abc=0$.

11. Нека a,b,c се позитивни броеви. Докажи го или негирај го тврдењето:

а) Ако $a(b^3+c^3)=b(c^3+a^3)=c(a^3+b^3)$, тогаш $a=b=c$.

б) Ако $a(a^3+b^3)=b(b^3+c^3)=c(c^3+a^3)$, тогаш $a=b=c$.

Решение. а) Ако ставиме $c=a$, условот на задачата станува

$$a(a^3+b^3)=2a^3b \text{ , т.е. } a^3-2a^2b+b^3=(a-b)(a^2-ab-b^2)=0\,.$$

Така, условот е задоволен за $a^2-ab-b^2=0$, односно $a=c=\frac{1+\sqrt{5}}{2}b$.

б) Ако $a\geq b\geq c$, тогаш $a^3+b^3\geq a^3+c^3$, па од $a(a^3+b^3)=c(c^3+a^3)$ следува $a=c$ и $b=c$. Слично, ако $a\leq b\leq c$, тогаш $a^3+b^3\geq b^3+c^3$, па од $a(a^3+b^3)=b(b^3+c^3)$ следува $a=b$ и $a=c$.

12. Докажи, дека ако a,b,c,d се позитивни реални броеви такви што

$$\frac{abc}{a+b+c}=\frac{bcd}{b+c+d}=\frac{cda}{c+d+a}=\frac{dab}{d+a+b}\,,$$

тогаш $a=b=c=d$.

Решение. Од дадените равенства добиваме

$$\frac{abcd}{(a+b+c)d}=\frac{bcda}{(b+c+d)a}=\frac{cdab}{(c+d+a)b}=\frac{dabc}{(d+a+b)c}\,,$$

од каде следува

$$(a+b+c)d=(b+c+d)a=(c+d+a)b=(d+a+b)c\,.$$

Од првите две равества добиваме $(b+c)d=(b+c)a$ и како $b+c>0$ следува $d=a$. Аналогно се докажуваат останатите равенства.

13. За позитивните броеви a,b,c важи

$$\frac{a(a+b)}{b+c}+b=\frac{b(b+c)}{c+a}+c=\frac{c(c+a)}{a+b}+a\,.$$

Докажи дека $a=b=c$.

Решение. Од $\frac{a(a+b)}{b+c}+b=\frac{b(b+c)}{c+a}+c$ следува

$$\frac{a(a+b)}{b+c}-c=\frac{b(b+c)}{c+a}-b,$$

$$\frac{(a-c)(a+b+c)}{b+c}=\frac{b(b-a)}{c+a}.$$

Бидејќи броевите $b, c+a, b+c$ и $a+b+c$ се позитивни заклучуваме дека $a-c$ и $b-a$ се со ист занк, т.е. $(a-c)(b-a)\geq 0$. Аналогно од равенството $\frac{b(b+c)}{c+a}+c=\frac{c(c+a)}{a+b}+a$ следува $(b-a)(c-b)\geq 0$. Ако ги собереме добиените неравенства наоѓаме $(b-a)(a-b)\geq 0$, т.е. $-(a-b)^2\leq 0$, па затоа $a=b$. Аналогно добиваме $a=c$.

14. Докажи дека бројот $111...1222...25$ запишан со 1997 единици, 1998 двојки и една петка е точен квадрат.

Решение . Од $\underbrace{111....11}_{n}=\frac{\overset{n}{99...9}}{9}=\frac{10^n-1}{9}$, следува:

$$\underbrace{111...1}_{1997}\underbrace{222...2}_{1998}5=\underbrace{111...1}_{1997}\underbrace{00...0}_{1999}+\underbrace{222...2}_{1998}0+5=10^{1999}\cdot\underbrace{111...1}_{1997}+10\cdot 2\cdot\underbrace{111...1}_{1998}+5$$

$$=10^{1999}\cdot\frac{10^{1997}-1}{9}+20\cdot\frac{10^{1998}-1}{9}+5=\frac{10^{3996}+10^{1999}+25}{9}=(\frac{10^{1998}+5}{3})^2.$$

Бидејќи $3\,|\,10^{1988}+5$ следува дека бараниот број е квадрат на природен број.

15. Нека m и n се два природни броеви. Ако постојат бесконечно многу природни броеви k такви што $k^2+2kn+m^2$ е точен квадрат, тогаш $m=n$. Докажи!

Решение. Ќе разгледаме два случаи:

Ако $m>n$, тогаш за секој $k>\frac{m^2-n^2-2n-1}{2}$ важи:

$$(k+n)^2=k^2+2kn+n^2<k^2+2kn+m^2$$
$$<k^2+2kn+2k+n^2+2n+1=(k+n+1)^2,$$

што значи дека $k^2+2kn+m^2$ може да биде точен квадрат најмногу за конечно многу природни броеви k, што е противречност.

Ако $m<n$, тогаш за секој $k>\frac{n^2-m^2-2n+1}{2}$ важи:

$$(k+n-1)^2=k^2+2kn-2k+n^2-2n+1<k^2+2kn+m^2$$
$$<k^2+2kn+n^2=(k+n)^2,$$

што значи дека $k^2+2kn+m^2$ може да биде точен квадрат најмногу за конечно многу природни броеви k, што е противречност.

Конечно, од добиените противречности при $n<m$ и $n>m$ следува $m=n$.

16. Дали за секој природен број $n>2009$ меѓу дропките $\frac{1}{n},\frac{2}{n-1},\frac{3}{n-2},...,\frac{n-1}{2},\frac{n}{1}$ може да избереме два пара со еднакви збирови?

Решение. Секоја од дадените дропки е од видот $\frac{n+1-a}{a}=\frac{n+1}{a}-1$, каде $1\le a\le n$. Значи, треба да определиме различни природни броеви a,b,c,d , кои не се поголеми од 2009, за кои

$$(\tfrac{n+1}{a}-1)(\tfrac{n+1}{b}-1)=(\tfrac{n+1}{c}-1)(\tfrac{n+1}{d}-1)\text{, т.е. } \tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}=\tfrac{1}{c}+\tfrac{1}{d}\,.$$

Последното е можно, на пример за $a=3,b=12,c=4$ и $d=6$.

17. Низата позитивни броеви $a_1,a_2,...$ е определена со $a_1=1,a_2=2$ и

$$a_{n+1}=a_n^2+a_{n-1}^2+a_{n-2}^2+a_{n-2},$$

за $n\ge 3$. Определи го a_3 ако

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+....+\frac{1}{a_{2008}+1}+\frac{1}{a_{2009}}=1. \qquad (1)$$

Решение. За $a_3=6$ имаме

$$a_2=a_1^2+a_1,\ a_3=a_2^2+a_2 \text{ и } a_4=a_3^2+a_2^2+a_1^2+a_1=a_3^2+a_2^2+a_2=a_3^2+a_3\,.$$

Сега, со индукција лесно се докажува дека $a_n=a_{n-1}^2+a_{n-1}$. Затоа имаме

$$\frac{1}{a_{i+1}+1}=\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_i(a_i+1)}=\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}},$$

за $i=1,2,...,2008$, па ако ги собереме горните равенства го добиваме равенството од условот на задачата. Јасно, ако $a_3>6$, тогаш збирот на левата страна од (1) е помал од 1, а ако $a_3<6$, овој збир е поголем од 1. Затоа бараната вредност е $a_3=6$.

18. Нека

$$A=\sum_{n=1}^{99}\sqrt{10+\sqrt{n}} \text{ и } B=\sum_{n=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{n}}\,.$$

Докажи дека $A=(\sqrt{2}+1)B$.

Решение. Имаме

$$(\sqrt{10+\sqrt{n}}+\sqrt{10-\sqrt{n}})^2=20+2\sqrt{100-n}\ ,$$

т.е.

$$\sqrt{10+\sqrt{n}}+\sqrt{10-\sqrt{n}}=\sqrt{2}\sqrt{10+\sqrt{100-n}}\ \text{, за } 0\le n\le 100 .$$

Ако ги собереме овие равенства за $n=1,2,...,99$ добиваме $A+B=A\sqrt{2}$, т.е. $A=(\sqrt{2}+1)B$.

19. Нека m и n се цели броеви за кои важи $0\le m\le 2n$. Докажи дека бројот $2^{2n+2}+2^{m+2}+1$ е точен квадрат ако и само ако $m=n$.

Решение. Јасно $2^{2n+2}=(2^{n+1})^2$ е точен квадрат. Ако $2^{2n+2}+2^{m+2}+1$ е точен квадрат, тогаш важи $2^{2n+2}+2^{m+2}+1\ge(2^{n+1}+1)^2$ од каде следува дека $m\ge n$. Бројот $2^{2n+2}+2^{m+2}+1$ е непарен, па затоа

$$2^{2n+2}+2^{m+2}+1=(2k+1)^2$$
$$2^{2n}+2^{m}=k(k+1)$$
$$2^{m}(2^{2n-m}+1)=k(k+1)$$

Според тоа, $2^{m}(2^{2n-m}+1)$ е производ на два последователни броја. Тоа е можно ако и само ако $2^m=2^{2n-m}$, односно $n=m$. Ако постои друго такво претставување, тогаш ќе следува дека броевите 2^k и $2^{m-k}(2^{2n-m}+1)$ се последователни, што не е можно бидејќи и двата се парни.

20. Определи ги сите точни кубови кои не се деливи со 10 и притоа при бришење на последните три цифри павторно се добива број кој е точен куб.

Решение. Нека a^3 е таков број и b^3 е бројот кој што се добива по бришење на последните три цифри на a^3. Постои природен број $c\in\{1,2,...,999\}$ таков што $a^3=1000b^3+c$, па оттука важи $c=a^3-(10b)^3\ge(10b+1)^3-(10b)^3$. Според тоа,

$$1000>c\ge 1000b^3+300b^2+30b+1-1000b^3=300b^2+30b+1$$
$$300b^2+30b-999<0$$
$$b<2.$$

Ако $b=0$, добиваме $a^3=c$, од каде наоѓаме

$$a^3\in\{1,8,27,65,125,216,343,512.729\}.$$

Ако $b=1$, имаме $a^3=1000+c$, од каде наоѓаме $a^3\in\{1331,1728\}$.

21. Дали постои множество од 1992 природни броеви такво што збирот на елементите на секое негово подмножество е квадрат, куб или повисок степен на некој природен број.

Решение. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. За секој природен број n постои природен број d така што секој елемент од множеството $\{d,2d,...,nd\}$ е квадрат, куб или повисок степен на некој природен број.

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. Јасно, за $n=1$ тврдењето е точно.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој природен број $n\geq 1$, т.е. дека $d=m_1^{k_1}, 2d=m_2^{k_2},...,nd=m_n^{k_n}$. За бројот $n+1$ земаме $D=d(n+1)^k d^k$, каде $k=\mathrm{NZS}(k_1,k_2,...,k_n)$. Сега множеството $\{D,2D,...,nD,(n+1)D\}$ е бараното множество. Навистина, $(n+1)D=((n+1)d)^{k+1}$, а за $s\in\{1,2,...,n\}$ важи $sD=sd(n+1)^k d^k=m_s^{k_s}((n+1)^{k'})^{k_s}(d^{k'})^{k_s}=(m_s(n+1)^{k'}d^{k'})^{k_s}$, со што доказот е завршен. ■

Од лемата следува дека за $n=\frac{1992\cdot 1993}{2}$ постои природен број d таков што секој елемент на $K=\{d,2d,...,nd\}$ е квадрат, куб или повисок степен на некој природен број. Сега земаме $M=\{d,2d,...,1992d\}$. Збирот на елементите на секое подмножество од M е број од множеството

$$\{d,2d,...,1992d,1993d,...,d+2d+...+1992d\},$$

а тоа е множеството K.

22. Конечната низа цели броеви $a_0,a_1,...,a_n$ ја нарекуваме *квадратна* ако за секој $i\in\{1,2,...,n\}$ важи $|a_i-a_{i-1}|=i^2$.

а) Докажи дека за секои два цели броја b и c постои природен број n и квадратна низа $a_0,a_1,...,a_n$ таква што $a_0=b$ и $a_n=c$.

б) Најди го најмалиот природен број n за кој постои квадратна низа таква што $a_0=0$ и $a_n=1996$.

Решение. а) Треба да важи

$$a_0=b,\ a_1=\pm 1^2+b,\ a_2=\pm 1^2\pm 2^2+b,\ ...,\ a_n=\pm 1^2\pm 2^2\pm ...\pm n^2+b=c.$$

Од произволноста на b и c доволно е да докажеме дека постои квадратна низа за која $a_n=a=c-b=\pm 1^2\pm 2^2\pm ...\pm n^2$. Оттука ќе следува дека $a_0=0$ и $a_i=\pm 1^2\pm 2^2\pm ...\pm i^2$. Значи, за произволен цел број a треба да докажеме дека постои природен број n и квадратна низа за која $a_0 = 0$ и $a_n = a$.

Од $(n+1)^2-(n+2)^2-(n+3)^2+(n+4)^2=4$ следува дека ако постои квадратна низа за некој цел број a, тогаш постои квадратна низа и за броевите $a \pm 4$. Во тој случај важи $a_0 = 0$ и $a_{n+4} = a \pm 4$. Според тоа доволно е да докажеме дека квадратна низа постои за $a = 1,2,3,4$.

За $a = 4$ имаме: $4 = 1^2-2^2-3^2+4^2$, т.е. $n = 4$.

За $a = 3$ имаме: $3 = -1^2+2^2$, т.е. $n = 2$.

За $a = 2$ имаме: $2 = -1^2-2^2-3^2+4^2$, т.е. $n = 4$.

За $a = 1$ имаме $1 = 1^2$, т.е. $n = 1$.

б) Бидејќи $a_n \le 1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ добиваме $1996 \le \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, т.е. $n \ge 18$. Бројот $a_{18} = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm ... \pm 18^2$ има иста парност со бројот $2009 = 1^2+2^2+...+18^2$, па затоа $a_{18} \ne 1996$. Значи, $n \ge 19$. Од

$$1^2+2^2+...+19^2 = 2470 = 1996+2\cdot 237 = 1996+2\cdot(4^2+5^2+14^2)$$

Добиваме

$$\begin{aligned}1996 &= 1^2+2^2+...+19^2-2\cdot(4^2+5^2+14^2)\\ &= 1^2+2^2+3^2-4^2-5^2+6^2+...+13^2-14^2+15^2+...+19^2\end{aligned}$$

т.е. $n = 19$.

23. Нека $a,b,c \in \mathbb{N}$. Ако броевите $\frac{a\sqrt{13}+b}{b\sqrt{13}+1}$ и $\frac{c\sqrt{7}+a}{b\sqrt{7}+c}$ се рационални, тогаш $\frac{a^3+c^6}{a(b^2-b+1)}$ е цел број. Докажи!

Решение. Од $\frac{a\sqrt{13}+b}{b\sqrt{13}+1} = n$ следува $(a-bn)\sqrt{13} = n-b$. Бидејќи $n-b$ е рационален број добиваме $n-b = a-bn = 0$, т.е. $n = b, a = nb = b^2$. Аналогно, од $\frac{c\sqrt{7}+a}{b\sqrt{7}+c} = m$ следува $(c-mb)\sqrt{7} = cm-a$, па затоа $a = cm$ и $c = mb$, од каде добиваме $ab = bmc = c^2$ или $c^2 = b^3$. Конечно,

$$\frac{a^3+c^6}{a(b^2-b+1)} = \frac{b^6+b^9}{b^2(b^2-b+1)} = \frac{b^6(b^3+1)}{b^2(b^2-b+1)} = \frac{b^4(b+1)(b^2-b+1)}{b^2-b+1} = b^4(b+1) \in \mathbb{Z}.$$

24. Докажи дека секој позитивен рационален број $\frac{1}{2} < r < 2$ може да се запише во облик $\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$, каде a,b,c,d се природни броеви.

Решение. Воочуваме дека

$$(m+n)^3+(2m-n)^3=9m(m^2-mn+n^2) \text{ и}$$

$$(m+n)^3+(2n-m)^3=9n(m^2-mn+n^2),$$

за секои природни броеви m и n. Тоа значи дека за секои природни броеви m и n важи

$$\frac{m}{n}=\frac{(m+n)^3+(2m-n)^3}{(m+n)^3+(2n-m)^3}.$$

Ако ставиме $a=c=m+n, b=2m-n, d=2n-m$ добиваме $\frac{m}{n}=\frac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$. Јасно, a и b се природни броеви, а c и d се природни броеви ако и само ако $2m>n$ и $2n>m$, од каде добиваме $r=\frac{m}{n}<2$ и $r=\frac{m}{n}>\frac{1}{2}$.

25. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Определи ги сите позитивни реални броеви x,y,z за кои важи

$$x+y+z=a+b+c \text{ и } 4xyz-(a^2x+b^2y+c^2z)=abc.$$

Решение. Нека $x=\frac{b+c}{2}-m, y=\frac{c+a}{2}-n$ и $z=\frac{a+b}{2}-p$, каде $m<\frac{b+c}{2}, n<\frac{c+a}{2}$ и $p<\frac{a+b}{2}$. Од $x+y+z=a+b+c$ следува $m+n+p=0$. Ако ги замениме x,y,z во $4xyz-(a^2x+b^2y+c^2z)=abc$ добиваме

$$am^2+bn^2+cp^2+2mnp=0. \qquad (1)$$

Ако $mnp>0$, тогаш равенството (1) не е можно, па затоа $mnp\le 0$. Значи, два од овие три броја се ненегативни, па без губење на општоста можеме да земеме дека $m,n\ge 0$. Во (1) ставаме $p=-m-n$ и добиваме

$$(a+c-2n)m^2+(b+c-2m)n^2+2cmn=0.$$

Последното равенство е можно само ако $m=n=0$, од каде следува $p=0$. Според тоа, бараните броеви се $x=\frac{b+c}{2}, y=\frac{c+a}{2}, z=\frac{a+b}{2}$.

26. Дали постои природен број n таков што важи: за произволен рационален број r постојат цел број b и ненулти цели броеви $a_1,a_2,...,a_n$ такви што $r=b+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}$?

Решение. Ќе докажеме дека одговорот на прашањето е негативен.

За $n\in\mathbb{N}$ со A_n да го означиме множеството од сите рационални броеви r за кои постојат цел број b и ненулти цели броеви $a_1,a_2,...,a_n$ такви што $r=b+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}$. Треба да докажеме дека $\mathbb{Q}\setminus A_n\neq\varnothing$.

Со индукција ќе докажеме дека $\mathbb{Q}\setminus A_n$ ги содржи рационалните броеви од интервалот (p_n, q_n), каде $p_n, q_n \in \mathbb{Q}$.

За $n = 1$ можеме да земеме $p_1 = \frac{1}{3}, q_1 = \frac{1}{2}$. Лесно се гледа дека ниту еден број од видот $b + \frac{1}{a_1}$, каде $b \in \mathbb{Z}, a_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ не е во интервалот $(p_n, q_n) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

Нека за некој природен број n се избрани соодветни p_n и q_n. Да означиме $d = p_n - q_n$ и да дефинираме $p_{n+1} = p_n + \frac{d}{3}$ и $\overset{*}{q}_{n+1} = q_n - \frac{d}{3}$. Тогаш интервалот $(p_{n+1}, \overset{*}{q}_{n+1})$ има должина $\frac{d}{3} > 0$. Ќе докажеме дека во овој интервал може да има само конечно многу броеви од A_{n+1}, по што идуктивниот чекор може да биде завршен на очигледен начин: избираме q_{n+1} да е најмалиот од овие броеви.

Нека $b \in \mathbb{Z}$ и $a_1, a_2, ..., a_{n+1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ се такви што

$$p_{n+1} < b + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{n+1}} < \overset{*}{q}_{n+1}.$$

Тогаш од индуктивната претпоставка следува дека за фиксиран индекс $l \in \{1, 2, ..., n+1\}$ имаме $b + \sum\limits_{k=1, k \neq l}^{n} \frac{1}{a_k} \in (p_n, q_n)$, што значи дека важи точно едно од неравенствата

$$p_n \geq b + \sum_{k=1, k \neq l}^{n} \frac{1}{a_k} \text{ и } b + \sum_{k=1, k \neq l}^{n} \frac{1}{a_k} \geq q_n.$$

Во првиот случај имаме $\frac{1}{a_l} > p_{n+1} - p_n = \frac{d}{3} > 0$, а во вториот $\frac{1}{a_l} < \overset{*}{q}_{n+1} - q_n = -\frac{d}{3} < 0$. Според тоа, $-\frac{3}{d} < a_l < \frac{3}{d}$, што значи дека имаме само конечен број можности за избор на a_l. Тогаш имаме само конечен број можности за избор и на броевите $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$. Понатаму, за фиксирани $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ бројот на целите броеви b за кои $b + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} \in (p_{n+1}, \overset{*}{q}_{n+1})$ исто така е конечен (најмногу еден). Според тоа, бројот на броевите во $A_{n+1} \cap (p_{n+1}, \overset{*}{q}_{n+1})$ е конечен.

27. Дадени се различни природни броеви $a_1, a_2, ..., a_m$. Докажи дека постојат различни природни броеви $b_1, b_2, ..., b_n$, $n \leq m$ за кои се исполнети следниве услови:

а) Сите подмножества на $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ имаат различни збирови на своите елементи.

б) Секој од броевите $a_1, a_2, ..., a_m$ е збир на елементите на подмножество од $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $N = a_1 + a_2 + ... + a_m$. За $N = 1$ имаме $m = 1$, $a_1 = 1$ и $b_1 = 1$ е бараниот број. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за секоја колекција броеви чиј збир е помал од N и нека $a_1, a_2, ..., a_m$ се такви што $N = a_1 + a_2 + ... + a_m$. Ако сите броеви $a_1, a_2, ..., a_m$ се парни, тогаш броевите $\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, ..., \frac{a_m}{2}$ имаат збир $\frac{N}{2}$ и според индуктивната претпоставка постојат броеви $b_1, b_2, ..., b_n$ кои го задоволуваат условот на задачата. Тогаш бараните броеви се $2b_1, 2b_2, ..., 2b_n$.

Нека меѓу дадените броеви $a_1, a_2, ..., a_m$ има барем еден непарен број и без ограничување на општоста можеме да земеме дека a_m е најмалиот број. Да ги разгледаме броевите $a_1^{'}, a_2^{'}, ..., a_{m-1}^{'}$ определени со

$$a_i^{'} = \begin{cases} \frac{a_i}{2}, & \text{ако } a_i \text{ е парен} \\ \frac{a_i - a_m}{2}, & \text{ако } a_i \text{ е непарен} \end{cases}$$

Збирот наовие броеви е помал од N, па затоа постојат броеви $b_1^{'}, b_2^{'}, ..., b_k^{'}$ кои ги задоволуваат условите на здачата. Ќе докажеме дека бараните броеви за колекцијата $a_1, a_2, ..., a_m$ се $2b_1^{'}, 2b_2^{'}, ..., 2b_k^{'}, a_m$. Ако има две две дисјунктни подмножества на $\{2b_1^{'}, 2b_2^{'}, ..., 2b_k^{'}, a_m\}$ кои имаат еднакви збирови на своите елементи, тогаш a_m како единствен непарен број не припаѓа на овие подмножества, па по скратувањето со 2 добиваме две дисјунктни подмножества од $\{b_1^{'}, b_2^{'}, ..., b_k^{'}\}$ со еднакви збирови на своите лементи, што е противречност. Лесно се покажува дека секој елемент на $a_1, a_2, ..., a_m$ е еднаков на збирот на елементите на некое подмножество до $\{2b_1^{'}, 2b_2^{'}, ..., 2b_k^{'}, a_m\}$.

28. Докажи дека во бесконечниот збир $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ...$ можеме да замениме бесконечно многу знаци плус со знакот минус, така што повторно ќе имаме бесконечлно многу знаци плус и новиот збир ќе биде еднаков на $\frac{1}{3}$.

Решение. Бидејќи

$$\sum_{i=k}^{m} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=k}^{m} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{m+1}$$

треба да определиме бесконечна низа природни броеви $1 = n_0 < n_1 < n_2 < ...$ таква што

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_{i+1}}\right) = \frac{1}{3}.$$

Еден таков пример е $n_i = 2^i$ и тогаш

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^{i+1}} = \frac{1}{3}.$$

29. Дали постои множество $A \supset \{1, 2, ..., 2004\}$ од природни броеви, чиј производ е еднаков на збирот од нивните квадрати?

Решение. Постои. Нека $a_0 = 1, a_i = 2004! a_0 a_1 ... a_{i-1} - 1,\ i \geq 1$ и

$$A_i = \{2, 3, ..., 2004, a_0, a_1, a_2, ..., a_i\},\ i \geq 0.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}(\prod_{a \in A_{i-1}} a - \sum_{a \in A_{i-1}} a^2) - (\prod_{a \in A_i} a - \sum_{a \in A_i} a^2) - 1 &= a_i^2 - 1 - (a_i - 1) \prod_{a \in A_{i-1}} a \\ &= (a_i - 1)(a_i + 1 - 2004! a_0 a_1 ... a_{i-1}) \\ &= 0,\end{aligned}$$

па затоа $\prod_{a \in A_n} a = \sum_{a \in A_n} a^2$ за $n = \prod_{a \in A_0} a - \sum_{a \in A_0} a^2$.

II НЕРАВЕНСТВА

II.1. ЕЛЕМЕНТАРНО ДОКАЖУВАЊЕ НА НЕРАВЕНСТВА

1. Докажи дека за секои реални броеви x, y, z важи

$$3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2 .$$

Решение. Имаме

$$3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2 = 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx$$
$$=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$.

2. Докажи дека за секои два броја $a \geq 1$ и $b \geq 1$ е точно неравенството

$$a^2b^2+a^2+b^2+1 \geq ab(a+b)+a+b .$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Имаме

$$a^2b^2+a^2+b^2+1-ab(a+b)-a-b = ab(a-1)(b-1)+(a-1)(b-1)+(a-b)^2 \geq 0 .$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=1$.

3. Дадени се изразите

$$M=a^4-6a^3+b^2+24b-119 \text{ и } N=b^4-6b^3+a^2+24a+151$$

каде a и b се реални броеви. Докажи дека $M+N \geq 0$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Имаме

$$M+N = a^4-6a^3+b^2+24b-119+b^4-6b^3+a^2+24a+151$$
$$=(a^4+9a^2+16-6a^3-8a^2+24a)+(b^4+9b^2+16-6b^3-8b^2+24b)$$
$$=(a^2-3a-4)^2+(b^2-3b-4)^2 \geq 0$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a^2-3a-4=0$ и $b^2-3b-4=0$. Оттука $a=-1$ или $a=4$, и исто така $b=-1$ и $b=4$. Според тоа, знак за равенство важи ако и само ако $(a,b)=(-1,-1),(-1,4),(4,-1),(4,4)$.

4. Ако $k \geq 25$, тогаш неравенството $x^4+(2k-99)x^2-10x+k^2+k \geq 0$ е точно за секој реален број x. Докажи!

Решение. Последователно добиваме

$$x^4+(2k-99)x^2-10x+k^2+k\geq 0,$$
$$(x^2-10x+k)(x^2-10x+k+1)\geq 0,$$
$$((x-5)^2+k-25)((x-5)^2+k-24)\geq 0.$$

Ако $k\geq 25$, тогаш $(x-5)^2+k-25\geq 0$ и $(x-5)^2+k-24\geq 0$ за секој реален број x, од што следува тврдењето на задачата.

5. Определи го најголемиот број k за кој неравенството

$$a^2+b^2+3c^2+ab\geq kc(a+b)$$

е исполнето за секои реални броеви a,b,c.

Решение. За $a=b=c=1$ добиваме $6\geq 2k$, т.е. $k\leq 3$. Јасно, најголемиот број е $k=3$, бидејќи

$$a^2+b^2+3c^2+ab-3c(a+b)=3(\tfrac{a}{2}+\tfrac{b}{2}-c)^2+\tfrac{1}{4}(a-b)^2\geq 0.$$

6. Нека x,y,z се реални броеви такви што

$$x^2\leq y+z,\ \ y^2\leq z+x,\ \ z^2\leq x+y.$$

Определи ја најголемата и најмалата можна вредност за z.

Решение. Нека $a\leq b\leq c$ се броевите x,y,z во растечки редослед. Според условот на задачата $c^2\leq a+b\leq 2c$ па затоа $z\leq c\leq 2$. Од друга страна $z\geq a\geq c^2-b\geq c^2-c\geq -\frac{1}{4}$. Вредностите $z=2$ и $z=-\frac{1}{4}$ се достигнуваат за тројките $(x,y,z)=(2,2,2)$ и $(x,y,z)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$.

7. Докажи дека за произволни реални броеви x,y,z е точно неравенството

$$x^2y^2z^2+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+z^2+2\geq 2(xy+xz+yz).$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(z^2+1)(xy-1)^2+(xz+yz-1)^2\geq 0,$$

па затоа важи за секои реални броеви x,y,z. Знак за равенство важи ако и само ако $xy=1$ и $xz+yz-1=0$, т.е. ако и само ако $x=p\neq 0$, $y=\frac{1}{x}=\frac{1}{p}$ и $z=\frac{1}{x+y}=\frac{p}{p^2+1}$.

8. Нека a,b,c е ненегативни реални броеви такви што $a+b+c=3$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $\frac{2a+1}{a^2+3}+\frac{2b+1}{b^2+3}+\frac{2c+1}{c^2+3}$.

Решение. Ќе докажеме дека ако $x \in [0,3]$, тогаш $\frac{2x+1}{x^2+3} \geq \frac{1}{12}(x+4)$. Навистина, ова неравенство е еквивалентно со неравенстото $x^3 + 4x^2 - 21x \leq 0$, т.е. со неравенството $v(x+7)(x-3) \leq 0$ кое е точно кога $x \in [0,3]$. Според тоа,

$$\frac{2a+1}{a^2+3} + \frac{2b+1}{b^2+3} + \frac{2c+1}{c^2+3} \geq \frac{1}{12}(a+b+c+12) = \frac{1}{12}(3+12) = \frac{5}{4}.$$

Ако еден од броевите a,b,c е еднаков на 3, а другите два се еднакви на нула, тогаш важи знак за равенство, т.е. бараната најмала вредност е еднаква на $\frac{5}{4}$.

9. Реши ја равенката

$$4(x-1)y^2z^2 + 4(y-1)z^2x^2 + 4(z-1)x^2y^2 = 3x^2y^2z^2.$$

Решение. Ако $x = 0$, тогаш $-4y^2z^2 = 0$, па затоа $y = 0$ или $z = 0$. Значи, во овој случај решенија се $(0,0,t)$ и $(0,t,0)$, $t \in \mathbb{R}$. Ако $y = 0$ или $z = 0$ ги добиваме уште решенијата $(t,0–,0)$, $t \in \mathbb{R}$. Нека $xyz \neq 0$. Тогаш равенката е еквивалентна на равенката $\frac{x-1}{x^2} + \frac{y-1}{y^2} + \frac{z-1}{z^2} = \frac{3}{4}$. Но, $\frac{a-1}{a^2} \leq \frac{1}{4}$, па затоа

$$\frac{x-1}{x^2} + \frac{y-1}{y^2} + \frac{z-1}{z^2} \leq \frac{3}{4},$$

при што равенство се достигнува само за $x = y = z = 2$.

10. Докажи дека

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

за секои позитивни реални броеви a,b,c.

Решение. Од $a^2 + b^2 \geq 2ab$ следува $a^2 + ab + b^2 \geq 3ab$, па затоа

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} = a - \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} \geq a - \frac{ab(a+b)}{3ab} = a - \frac{a+b}{3}.$$

Аналогно ги добиваме и другите две неравенства, па со собирање на трите неравенства добиваме

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq a - \frac{a+b}{3} + b - \frac{b+c}{3} + c - \frac{c+a}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

11. Нека $a > 0$ и $|b-c| > 4a$. Докажи дека е исполнето барем едно од неравенствата $b^2 \geq 4ac$ или $c^2 \geq 4ab$.

Решение. Нека претпоставиме дека $b^2 < 4ac$ и $c^2 < 4ab$. Тогаш

$$b^2 + c^2 < 4ac + 4ab, \text{ т.е. } (b-2a)^2 + (c-2a)^2 < 8a^2.$$

Оттука и од условот на задата следува дека

$$16a^2 < (b-c)^2 = ((b-2a)-(c-2a))^2 \leq 2((b-2a)^2 + (c-2a)^2) < 16a^2,$$

што е противречност.

12. Нека x, y, z се ненегативни броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$xy+yz+2zx \le \tfrac{1}{2}. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин.* Користејќи го условот $x+y+z=1$ последователно ја добиваме следнава низа еквивалентни неравенства:

$$(x-z)^2+y^2 \ge 0,$$
$$x^2+y^2+z^2 \ge 2zx$$
$$(x+y+z)^2 \ge 2xy+2yz+4zx$$
$$1 \ge 2xy+2yz+4zx.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=z,\ y=0$ и како $x+y+z=1$ добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако $x=z=\tfrac{1}{2},\ y=0$.

Втор начин. Имаме

$$xy+yz+2zx = y(x+z)+2zx = (1-x-z)(x+z)+2zx = x+z-x^2-z^2$$
$$= \tfrac{1}{2}-(x-\tfrac{1}{2})^2-(z-\tfrac{1}{2})^2 \le \tfrac{1}{2}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=z=\tfrac{1}{2}$ и тогаш добиваме $y=0$.

Трет начин. Ако го квадрираме равенството $x+y+z=1$ добиваме

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=1.$$

Оттука следува

$$2(xy+yz+2zx)=1-(x^2+y^2+z^2-2zx)$$
$$2(xy+yz+2zx)=1-(x-z)^2-y^2 \le 1$$
$$xy+yz+2zx \le \tfrac{1}{2}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=z=\tfrac{1}{2},\ y=0$.

13. Природните броеви a, x и y се поголеми од 100 и $y^2-1=a^2(x^2-1)$. Определи ја најмалата можна вредност на $\tfrac{a}{x}$.

Решение. Нека претпоставиме дека $a<2x$. Тогаш

$$y^2 = a^2(x^2-1)+1 > a^2x^2-2ax+1 = (ax-1)^2,$$

од каде добиваме $y > ax-1$. Од друга страна, од $a>1$ имаме $1-a^2<0$, па затоа

$$y^2 = a^2x^2 - a^2 + 1 < a^2x^2 ,$$

од каде добиваме $y < ax$. Така y се наоѓа меѓу два последователни природни броја, што е противреност. Според тоа, $a \geq 2x$, т.е. $\frac{a}{x} \geq 2$. Равенството $\frac{a}{x} = 2$ се достигнува за $a = 101, b = 2x$ и $y = 2x^2 - 1$.

14. Даден е природен број $n > 1$. Бројот $a > n^2$ е таков што меѓу броевите $a+1, a+2, ..., a+n$ има деливи со секој од броевите $n^2+1, n^2+2, ..., n^2+n$. Докажи дека $a > n^4 - n^3$.

Решение. Разликата меѓу секои два броја од видот $a+i, (i = 1, 2, ..., n)$ не е поголема од $n-1$. Нека $a_i(n^2+i)$ е број од горниот вид, делив со n^2+i. Јасно, е дека $a \quad > 1$. Тогаш постои $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ таков што $a_i > a_{i+1}$. Навистина, ако $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$, тогаш

$$a_n(n^2+n) - a_1(n^2+1) \geq a_1(n-1) > n-1 ,$$

што е противречност. Според тоа,

$$n-1 \geq a_i(n^2+i) - a_{i+1}(n^2+i+1) \geq a_i(n^2+i) - (a_i - 1)(n^2+i+1) = n^2+i+1-a_i ,$$

т.е. $a_i \geq n^2 - n + i + 2 > n^2 - n$. Значи,

$$a \geq a_i(n^2+i) - n \geq (n^2-n)(n^2+1) - n = n^4 - n^3 + n^2 - 2n \geq n^4 - n^3 ,$$

бидејќи $n > 1$.

15. За позитивните реални броеви a, b, c, d важи $9ac \geq 3bd \geq ac$. Докажи дека

$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)}{(ac+bd)^2} \geq \frac{3}{4} . \qquad (1)$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалелнтно со неравенствата

$$4(ab+cd)(ad+bc) - 3(ac+bd)^2 \geq 0,$$

$$4(a^2bd + ab^2c + acd^2 + bc^2d) - 3(ac+bd)^2 \geq 0,$$

$$4(ac(b^2+d^2) + bd(a^2+c^2)) - 3(ac+bd)^2 \geq 0,$$

$$4(ac(b^2+d^2) + bd(a^2+c^2) - 4abcd) + 16abcd - 3(ac+bd)^2 \geq 0,$$

$$4(ac(b-d)^2 + bd(a-c)^2) + 16abcd - 3(ac+bd)^2 \geq 0,$$

$$12(ac(b-d)^2 + bd(a-c)^2) + 48abcd - 9(ac)^2 - 9(bd)^2 - 18abcd \geq 0,$$

$$12(ac(b-d)^2 + bd(a-c)^2) + 30abcd - 9(ac)^2 - 9(bd)^2 \geq 0,$$

$$12(ac(b-d)^2 + bd(a-c)^2) + 3(10abcd - 3(ac)^2 - 3(bd)^2) \geq 0,$$

$$12(ac(b-d)^2 + bd(a-c)^2) + 3(3ac - bd)(3bd - ac) \geq 0.$$

Од неравенствата $9ac \ge 3bd \ge ac$ следува точноста на последното неравенство, што значи дека е точно неравенството (1).

16. Докажи дека произволни 101 броеви $0 = x_0 \le x_1 \le ... \le x_{100} = 1$ може да се поделат во две групи така што аритметичките средини на двете групи се разликуваат за најмалку $\frac{101}{200}$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека аритметичката средина на дадените броеви е поголема или еднаква на $\frac{1}{2}$. Во спротивно можеме да гио разгледуваме броевите $1-x_0, 1-x_1, ..., 1-x_{100}$. Да го ставиме $x_0 = 0$ во една група, а останатите броеви во друга група. Бидејќи

$$x_1 + x_2 + ... + x_{100} = x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_{100} \ge \frac{101}{2},$$

добиваме дека аритметичката средина во првата група е 0, а во втората група е

$$\frac{x_1+x_2+...+x_{100}}{100} \ge \frac{101}{200},$$

па затоа нивната разлика е поголема или еднаква на $\frac{101}{200}$.

17. Определи ги сите тројки реални броеви (x, y, z) такви што

$$1+x^4 \le 2(y-z)^2,\ 1+^4 \le 2(z-x)^2,\ 1+z^4 \le 2(x-y)^2.$$

Решение. Нека претпоставиме дека $z \le y \le x$. Од

$$2x^2 \le x^4 + 1 \le 2(y-z)^2 \qquad (1)$$

следува $|x| \le y - z|$. Аналогно добиваме $|z| \le x - y$, па затоа

$$|z| + |x| \le (x-y) + (y-z) = x - z.$$

Последното неравенство е можно само ако $x \ge 0$ и $z \le 0$ и притоа неравенството преминува во равенство. Последното значи дека неравенството (1) и аналогното неравенство по z преминуваат во равенства, т.е. $2x^2 = x^4 + 1$ и $2z^2 = z^4 + 1$. Според тоа, $x^2 = z^2 = 1$, т.е. $x = 1$ и $z = -1$. Сега, од $|x| = y - z$ следува $y = 0$.

Конечно, бараните тројки (x, y, z) се:

$$(-1,0,1), (-1,1,0), (0,-1,1), (0,1,-1), (1,0,-1), (1,-1,0).$$

18. а) Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што не постои рационален број $\frac{a}{b}$ таков што a и b се природни броеви за кои важи

$$0 < b \le \sqrt{n} \text{ и } \sqrt{n} \le \frac{a}{b} \le \sqrt{n+1}.$$

б) Докажи дека за секој природен број n постои рационален број $\frac{a}{b}$ таков што a и b се природни броеви за кои важи

$$0 < b \leq \sqrt{n} + 1 \text{ и } \sqrt{n} \leq \frac{a}{b} \leq \sqrt{n+1}.$$

Решение. а) Нека $n = k^2 - 2$, каде k е природен број поголем или еднаков на 2. Нека претпоставиме дека постојат природни броеви a и b такви што се исполнети условите на задачата. Сега имаме

$$0 < b \leq k - 1, \tag{1}$$

$$(k^2 - 2)b^2 \leq a^2 \leq (k^2 - 1)b^2. \tag{2}$$

Имаме $a < kb$, па затоа

$$a^2 \leq k^2 b^2 - 2kb + 1. \tag{3}$$

Од (2) и (3) следува $(k^2 - 2)b^2 \leq k^2 b^2 - 2kb + 1$, па затоа $2kb \leq 2b^2 + 1$, што противречи на (1). Значи, за $n = k^2 - 2$ такви броеви a и b не постојат, од што следува тврдењето на задачата.

б) Секој природен број n може да се запише во видот

$$n = k^2 + t, \text{ каде } 0 \leq t \leq 2k. \tag{1}$$

Сега условите на задачата се

$$0 < b \leq k + 1 \text{ и } (k^2 + t)b^2 \leq a^2 \leq (k^2 + t + 1)b^2.$$

Ако t е парен, земаме $b = k, a = k^2 + \frac{t}{2}$. Сега треба да докажеме дека

$$k^4 + k^2 t \leq k^4 + k^2 t + (\tfrac{t}{2})^2 \leq k^4 + k^2 t + k^2,$$

што е точно заради (1).

Ако t е парен, земаме $b = k + 1, a = (k+1)^2 - \frac{2k+1-t}{2}$. Сега имаме

$$(k+1)^4 - (k+1)^2(2k+1-t) \leq (k+1)^4 - (k+1)^2(2k+1-t) + (\tfrac{2k+1-t}{2})^2$$
$$\leq (k+1)^4 - (k+1)^2(2k+1-t) + (k+1)^2.$$

19. За реалните броеви a и b важи $1 < a < b < \sqrt{2}$. Докажи дека

$$\frac{a}{b} > \frac{1+\sqrt{a^2-1}}{1+\sqrt{b^2-1}}.$$

Решение. Имаме

$$\frac{a}{b} > \frac{1+\sqrt{a^2-1}}{1+\sqrt{b^2-1}} \quad \Leftrightarrow \quad a + a\sqrt{b^2-1} > b + b\sqrt{a^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad a - b + \frac{a^2b^2 - a^2 - b^2a^2 + b^2}{a\sqrt{b^2-1} + b\sqrt{a^2-1}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-b)(1 - \frac{a+b}{a\sqrt{b^2-1} + b\sqrt{a^2-1}} > 0.$$

Но, од $1<a<b<\sqrt{2}$ следува $a+b>a\sqrt{b^2-1}+b\sqrt{a^2-1}$, па затоа двата изрази во заградите на левата страна во последното неравенство се негативни, т.е. точно е последното неравенство кое е еквивалентно со даденото неравенство.

20. Дадени се позитивни реални броеви a,b,c,d и негативни реални броеви e, f, g, h. Докажи дека неравенствата

$$ae+bc>0, ef+cg>0, fd+gh>0, da+hb>0$$

не може да бидат исполенти истовремено.

Решение. Нека дадените неравенства се исполнети. Тие може да бидат запишани како:

$$bc>a(-e),\ (-e)(\_ f)>c(-g),\ (-g)(-h)>(-f)d,\ da>(-h)b,$$

при што сите множители се позитивни. Затоа дадените неравенства можеме да ги помножиме, по што го добиваме неравенството

$$bcefghda>aecgfdhb,$$

кое не е можно бидејќи двете страни се еднакви.

21. Нека $x=|a|+|b|+|c|$ и $y=|a-2|+|b-2|+|c-2|$, каде a,b и c се реални броеви.

а) Докажи дека $x+y\geq 6$.

б) Ако $a,b,c\in[-1,3]$ и аритметичката средина на броевите a,b,c е еднаква на 1, докажи дека $x+y\leq 10$.

Решение. а) Од неравенството на триаголник, за секој реален број x важи $2=|t-(t-2)|\leq|t|+|t-2|$. Затоа

$$x+y=(|a|+|a-2|)+(|b|+|b-2|)+(|c|+|c-2|)\geq 2+2+2=6.$$

б) Нека $f(t)=|t|+|t-2|$. За $t\in[0,2]$ имаме $f(t)=t+(2-t)=2$, за $t\in(2,3]$ имаме $f(t)=2t-2\leq 4$ и за $t\in[-1,0)$ имаме $f(t)=2-2t\leq 4$. Ќе докажеме дека ако $a,b,c\in[-1,3]$ и $a+b+c=3$, тогаш еден од броевите е во интервалот $[0,2]$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a\leq b\leq c$. Не е можно $a,b,c\in[-1,0]$ и $a,b,c\in(2,3]$. Ако $a,b,c\notin[0,2]$, можни се следниве случаи:

1) $a,b\in[-1,0)$ и $c\in(2,3]$ и тогаш $a+b+c<0+0+3=3$, што противречи на $a+b+c=3$.

2) $a\in[-1,0)$ и $b,c\in(2,3]$ и тогаш $a+b+c>-1+2+2=3$, што противречи на $a+b+c=3$.

Според тоа, $x+y=f(a)+f(b)+f(c)\leq 4+2+4=10$.

22. Нека $n \geq 3$ е природен број и $a_1, a_2, ..., a_n$ се реални броеви такви што важи $\min\limits_{1\leq i<j\leq} |a_i - a_j| = 1$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^3 .$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека

$$a_1 < a_2 < ... < a_n \ .$$

Понатаму, да забележиме дека важи

$$|a_k + a_{n-k+1}| \geq |a_{n-k+1} - a_k| \geq |n+1-2k| .$$

Имаме:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |a_k|^3 &= \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (|a_k|^3 + |a_{n+1-k}|^3) \\ &= \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |a_{n+1-k}|)(\tfrac{3}{4}(|a_k| - |a_{n+1-k}|)^2 + \tfrac{1}{4}(|a_k| + |a_{n+1-k}|)^2) \\ &\geq \tfrac{1}{8} \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |a_{n+1-k}|)^3 \\ &\geq \tfrac{1}{8} \sum_{k=1}^{n} |n+1-2k|^3\end{aligned}$$

Последниот збир може да биде пресметан директно. Ако n е непарен тој е:

$$\sum_{k=1}^{n} |n+1-2k|^3 = 2 \cdot 2^3 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i^3 = \frac{(n^2-1)^2}{4} ,$$

а за парен n имаме:

$$\sum_{k=1}^{n} |n+1-2k|^3 = 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (2i-1)^3 = 2(\sum_{j=1}^{n} j^3 - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (2i)^3) = \frac{n^2(n^2-1)}{4} .$$

Според тоа,

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^3 \geq \begin{cases} \dfrac{(n^2-1)^2}{32}, & \text{кога } n \text{ е непарен} \\ \dfrac{n^2(n^2-1)}{32}, & \text{кога } n \text{ е парен.} \end{cases}$$

Знак за равенство се достигнува кога $a_i = i - \frac{n+1}{2}$ за $i = 1, 2, ..., n$.

23. а) Докажи дека ако $x, y \in (1, \infty)$ и $x^y = y^x$, тогаш $x = y$ или постои $m \in (1, \infty) \setminus \{1\}$ таков што $x = m^{\frac{1}{m-1}}, y = m^{\frac{m}{m-1}}$.

б) Ако $x, y \in (1, \infty)$, реши ја равенката

$$x^y + x^{x^{y-1}} = y^x + y^{y^{x-1}} .$$

Решение. а) За $x=y$ имаме решение $x=y=m, m>0$. Ако $x\neq y$, нека $y=mx$, $m\neq 1$ Заменуваме во равенката $y\lg x = x\lg y$ и ги добиваме решенијата $x=m^{\frac{1}{m-1}}, y=m^{\frac{m}{m-1}}$, $m\neq 1$.

б) Ако $x^y > y^x$, добиваме $(x^y)^{x^y} > (y^x)^{y^x}$ и оттука $x^{x^{y-1}} > y^{y^{x-1}}$, што доведува до $x^y + x^{x^{y-1}} > y^x + y^{y^{x-1}}$, а тоа е противречност. Значи, $x^y = y^x$ и решенијата се определени во а).

24. На бесконечна лента се запишани последователно броеви, при што првиот број е 1, а секој следен број се добива од претходниот со додавање кон него на најмалата ненулта цифра од неговиот декаден запис. Колку цифри има декадниот запис на бројот на $9\cdot 1000^{1000}$ место?

Решение. *Одговор*. 3001.

Бидејќи секој број е поголем од претходниот, бројот на $9\cdot 1000^{1000}$ место не е помал од $9\cdot 1000^{1000}$, т.е. има најмалку 3001 цифри. Со a_n да го означиме $n-$тиот број и нека k е најмалиот број за кој бројот a_k има 3002 цифри. Треба да докажеме дека $k > 9\cdot 1000^{1000}$.

Да ги разгледаме броевите од 0 до $10^{3001}-1$ кои немаат единици во декадниот запис. Дополнувајќи ги оддесно со нули до 3001-виот знак (ако е потребно), лесно следува дека бројот на овие броеви е 9^{3001}. Значи, најмногу 9^{3001} броеви меѓу броевите $a_1,...,a_{k-1}$ немаат единици во декадниот запис (тие кои не се поголеми од $10^{3001}-1$).

Сега да го разгледаме процесот на добивање на бројот a_k од бројот a_1. Во секој чекор, од вкупно $k-1$ чекори, се додава број од 1 до 9, при што бројот на чекорите во кои се додава број различен од 1 не е поголем од 9^{3001}. Според тоа,

$$10^{3001}-1 \le a_k - a_1 \le 9\cdot 9^{3001} + 1\cdot(k-1-9^{3001}) = k-1+8\cdot 9^{3001},$$

па затоа $k \ge 10^{3001} - 8\cdot 9^{3001}$.

Останува да докажеме дека $10^{3001} - 8\cdot 9^{3001} > 9\cdot 10^{3000}$. За та цел доволно е да докажеме дека $9^{3002} < 10^{3000}$. Имаме, $9^7 = 4782969 < 5\cdot 10^6$, па затоа важи $9^{28} < 5^4\cdot 10^{24} < 10^{27}$ и $9^{56} < 10^{54}$. Според тоа,

$$9^{3002} = 9^{56}\cdot 9^{2946} < 9^{54}\cdot 10^{2946} = 10^{3000}.$$

25. Докажи дека за секоја пермутација $b_1, b_2, ..., b_n$ на различните ненегативни

броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ важи

$$(a_1^2+b_1)(a_2^3+b_2)...(a_n^2+b_n) \geq (a_1^2+a_1)(a_2^2+a_2)...(a_n^2+a_n)\,.$$

Решение. Ако некој $a_i = 0$, тогаш десната страна е еднаква на 0 и тврдењето е тривијално. Затоа можеме да сметаме дека $0 < a_1 < a_2 < ... < a_n$. Меѓу сите пермутации $x_1, x_2, ..., x_n$ на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ да изберме една за која производот $(a_1^2+x_1)(a_2^2+x_2)...(a_n^2+x_n)$ е минимален.

Оваа пермутација да ја означиме со $c_1, c_2, ..., c_n$ и да разгледаме два произволни различни индекси $i < j$. Заради направениот избор производот кој соодветствува на $c_1, c_2, ..., c_i, ..., c_j, ..., c_n$ е помал или еднаков на производот кој соодветствува на $c_1, c_2, ..., c_j, ..., c_i, ..., c_n$. Затоа важи

$$(a_i^2+c_i)(a_j^2+c_j) \leq (a_i^2+c_j)(a_j^2+c_i)\text{, т.е. } (a_i^2-a_j^2)(c_j-c_i) \leq 0\,.$$

Бидејќи $0 < a_i < a_j$, добиваме $a_i^2 - a_j^2 < 0$, па затоа $c_i < c_j$. Последното значи $0 < c_1 < c_2 < ... < c_n$, т.е. $c_k = a_k$ за секој k. Оттука следува и бараното неравенство.

26. Нека a, b, c, d се ненегативни реални броеви такви што $a+b+c+d=2$. Докажи дека

$$ab(a^2+b^2+c^2)+bc(b^2+c^2+d^2)+cd(c^2+d^2+a^2)+da(d^2+a^2+b^2) \leq 2\,.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} ab(a^2+b^2+c^2)+bc(b^2+c^2+d^2)+cd(c^2+d^2+a^2)+da(d^2+a^2+b^2) &\leq \\ \leq (ab+bc+cd+da)(a^2+b^2+c^2+d^2)& \\ \leq \tfrac{1}{8}(a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+bc+cd+da))^2& \\ \leq \tfrac{1}{8}(a+b+c+d)^4 = 2.& \end{aligned}$$

Знак за равенство важи за $(a,b,c,d) = (1,1,0,0)$ и циклични распореди.

27. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $abc = 1$. Докажи дека

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1\,. \qquad (1)$$

Решение. За позитивни реални броеви a и b важи $(a^3-b^3)(a^2-b^2) \geq 0$, т.е. $a^5+b^5 \geq a^2b^2(a+b)$, па затоа

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} \leq \frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab} \cdot \frac{c^2}{c^2} = \frac{(abc)c}{(abc)^2(a+b)+(abc)c} = \frac{c}{a+b+c}\,.$$

Аналогно се добиваат неравенствата

$$\frac{bc}{b^5+c^5+bc}\le\frac{a}{a+b+c} \text{ и } \frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le\frac{b}{a+b+c} .$$

Поседните три неравенства ги собираме и го добиваме неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

28. Нека $a_1,a_2,...,a_{2005},b_1,b_2,...,b_{2005}$ се реални броеви такви што неравенството

$$(a_ix-b_i)^2\ge\sum_{j=1,\,j\ne i}^{2005}(a_jx-b_j)$$

е точно за секој реален број x и за секој $i=1,2,...,2005$. Колку најмногу од броевите a_i и b_i, $i=1,2,..,2005$ може да се позитивни.

Решение. Прво ќе докажеме дека барем еден од броевите $a_1,a_2,...,a_{2005}$ не е позитивен. Навистина, нека го претпоставиме спротивното и нека i е таков што $\frac{b_i}{a_i}=M=\max\limits_{1\le k\le 2005}\frac{b_k}{a_k}$. Тогаш постои $\varepsilon>0$ таков што

$$(a_ix-b_i)^2<\sum_{j=1,\,j\ne i}^{2005}(a_jx-b_j) ,$$

за секој $x\in(M,M+\varepsilon)$, што е противречност.

Од друга страна, лесно се гледа дека за

$$a_1=a_2=...=a_{2004}=-a_{2005}=1 \text{ и } b_1=b_2=...=b_{2005}\ge\frac{1001^2}{2}$$

даденото неравенство е исполнето. Според тоа, одговорот е 4009 броеви.

29. Докажи ги неравенствата

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8n}}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot...\cdot\frac{3n-2}{3n-1}<\frac{1}{\sqrt[3]{7n}} .$$

Решение. Прво со математичка индукција ќе го докажеме левото неравенство. За $n=1$ имаме $\frac{1}{\sqrt[3]{8\cdot1}}\le\frac{1}{2}$, т.е. неравенството важи. Нека левото неравенство важи за n. Тогаш од индуктивната претпоставка за $n+1$ добиваме

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{n+1}}=\frac{2\sqrt[3]{n}}{2\sqrt[3]{n+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot...\cdot\frac{3n-2}{3n-1}\cdot\frac{2\sqrt[3]{n}}{2\sqrt[3]{n+1}} ,$$

па затоа доволно е да докажеме дека $\frac{2\sqrt[3]{n}}{2\sqrt[3]{n+1}}\le\frac{3n+1}{3n+2}$. Последното неравенство важи, бидејќи по дигањето на трет степен и средувањето тоа се сведува на очигледното неравенство $0\le 2n+1$.

За да го докажеме десното неравенство, со математичка индукција ќе докажеме појако неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot...\cdot\frac{3n-2}{3n-1}\le\frac{1}{\sqrt[3]{7n+1}} .$$

За $n=1$ имаме $\frac{1}{2}\le\frac{1}{\sqrt[3]{7\cdot1+1}}$, т.е. неравенствот важи. Нека неравенството важи за n. Тогаш од индуктивната претпоставка за $n+1$ добиваме

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7n+8}}=\frac{1}{\sqrt[3]{7n+1}}\cdot\frac{\sqrt[3]{7n+1}}{\sqrt[3]{7n+8}}\geq\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{3n-2}{3n-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{7n+1}}{\sqrt[3]{7n+8}},$$

па затоа доволно е да докажеме дека $\frac{\sqrt[3]{7n+1}}{\sqrt[3]{7n+8}}\geq\frac{3n+1}{3n+2}$. Последното неравенство важи, бидејќи по дигањето на трет степен и средувањето тоа се сведува на очигледното неравенство $0\leq 27n^2+13n$.

30. Збирот на неколку ненегативни броеви е помал или еднаков на 200, а збирот на нивните квадрати е поголем или еднаков на 2500. Докажи дека меѓу овие броеви има четири чиј збире поголем или еднаков на 50.

Решение. Нека броевите се $x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_n$. Доволно е да го разледаме случајот $x_1<50$. Последователно добиваме

$$\sum_{k=1}^{4}(x_k-x_4)\geq\sum_{k=1}^{4}\frac{x_k(x_k-x_4)}{50}+\sum_{k=5}^{n}\frac{x_k(x_k-x_4)}{50}=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k(x_k-x_4)}{50},$$

(неравенството следува бидејќи $x_k-x_4\geq 0$ и $x_k<50$ за $k=1,2,3,4$ и $x_k-x_4\leq 0$ за $k\geq 5$). Освe тоа, од условот следува

$$4x_4\geq x_4\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{50}.$$

Сега, ако ги собереме горните неравенства добиваме:

$$\sum_{k=1}^{4}x_k\geq\frac{1}{50}\sum_{k=1}^{n}x_k^2\geq\frac{2500}{50}=50.$$

31. Реалните броеви a_i, b_i $(i=1,2,\ldots,n)$ се такви што $0\leq b_k\leq 1$ за секој k и $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_{n+1}=0$ Докажи дека

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leq\sum_{k=1}^{B+1}a_k, \qquad (1)$$

каде $B=[\sum_{k=1}^{n}b_k]$.

Решение. Со L и D соодветно да ги означиме левата и десната страна на неравенството (1). Да ги фиксираме сите b_i и нека $f(a_1,\ldots,a_n)=D-L$. Функцијата f е линеарна по секоја променлива, па затоа достигнува минимум на еден крај на интервалот, што значи за $a_k=a_{k-1}$ или $a_k=0$ (додефинираме $a_0=0$). Затоа, без ограничување на општоста може да претпоставиме дека за секој a_k важи $a_k=a_{k-1}$ или $a_k=0$.

Нека $a_1=\ldots=a_m=a$ и $a_{m+1}=\ldots=a_{n+1}=0$. Тогаш

$$a\sum_{k=1}^{m} b_k \le (B+1)a = \sum_{k=1}^{B+1} a = D\,,$$

со што задачата е решена.

32. Нека $n \ge 2$ и $0 \le x_i \le 1$ за $i = 1, 2, ..., n$. Докажи го неравенството

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n + x_nx_1) \le [\tfrac{n}{2}]\,.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Левата страна на неравенството да ја означиме со $S(x_1, x_2, ..., x_n)$. Оваа функција е линеарна во однос на секоја променлива x_i. Во случајов

$$S(x_1, x_2, ..., x_n) \le \max(S(0, x_2, ..., x_n), S(1, x_2, ..., x_n))\,.$$

Оттука по индукција следува дека доволно е неравенството да го докажеме кога x_i се нули или единици. Од друга страна за произволни x_i точно е равенството

$$\begin{aligned}2S(x_1, x_2, ..., x_n) = n - (1-x_1)(1-x_2) - (1-x_2)(1-x_3) - ... - (1-x_n)(1-x_1)\\ -(x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n + x_nx_1)\end{aligned} \qquad (1)$$

т.е. $S(x_1, x_2, ..., x_n) \le \frac{n}{2}$, за $x_i \in [0,1]$. Во случај кога x_i се нули или единици левата страна на последното неравенство е цел број и затоа е точно неравенството $S(x_1, x_2, ..., x_n) \le [\frac{n}{2}]$. Од (1) лесно се гледа дека кога n е парен знак за равенство важи ако и само ако $(x_1, x_2, ..., x_n) = (1, 0, 1, 0, ..., 1, 0)$ или $(x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 1, 0, 1, ..., 0, 1)$. Кога n е непарен знак за равенство важи кога со точност до циклична пермутација $(x_1, x_2, ..., x_n)$ е еден од следниве видови $(x, 1, 0, 1, 0, ..., 1, 0,)$ или $(x, 0, 1, 0, 1, ..., 0, 1)$ каде $x \in [0,1]$ е произволен број.

33. За целите ненегативни броеви

$$a = 2^{n-1}a_{n-1} + 2^{n-2}a_{n-2} + ... + 2a_1 + a_0,$$
$$b = 2^{n-1}b_{n-1} + 2^{n-2}b_{n-2} + ... + 2b_1 + b_0,$$

$a_i, b_i \in \{0,1\}$ дефинираме

$$a \oplus b = c = 2^{n-1}c_{n-1} + 2^{n-2}c_{n-2} + ... + 2c_1 + c_0\,,$$

каде

$$c_i = \begin{cases} 0, & a_i = b_i, \\ 1, & a_i \ne b_i. \end{cases}$$

Дадени се три цели броеви $0 \le u, v, w \le 2^{n-1} - 1$, за кои важи

$$u < v \oplus w \text{ и } v < u \oplus w.$$

Докажи дека

$$u \oplus v < w.$$

Решение. Нека броевите

$$u = 2^{n-1}u_{n-1} + 2^{n-2}u_{n-2} + ... + 2u_1 + u_0,$$
$$v = 2^{n-1}v_{n-1} + 2^{n-2}v_{n-2} + ... + 2v_1 + v_0,$$
$$w = 2^{n-1}w_{n-1} + 2^{n-2}w_{n-2} + ... + 2w_1 + w_0,$$

ги идентификуваме со бинарните низи

$$\overline{u} = u_{n-1}u_{n-2}...u_1u_0,\ \overline{v} = v_{n-1}v_{n-2}...v_1v_0,\ \overline{w} = w_{n-1}w_{n-2}...w_1w_0 .$$

Според условот имаме

$$\overline{u} = \alpha 0...,\qquad \overline{v \oplus w} = \alpha 1...,$$
$$\overline{v} = \beta 0...,\qquad \overline{u \oplus w} = \beta 1...,$$

каде α е збор со должина i, а β е збор со должина j.

Да претпоставиме дека $i \neq j$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $i < j$. Да ставиме $\beta = \beta' x...y$ каде β' е збор со должина $i-1$. Сега имаме

$$\overline{w} = \overline{u} \oplus (\overline{u} \oplus \overline{w}) = (\alpha \oplus \beta')x \oplus 0...$$
$$\overline{w} = \overline{v} \oplus (\overline{v} \oplus \overline{w}) = (\alpha \oplus \beta')x \oplus 1...$$

што е противречност, бидејќи $i-$тиот симбол на $\overline{w}$ не може да е истовремено $x \oplus 1$ и x. Според тоа, $i = j$. Сега имаме

$$\overline{u} \oplus \overline{w} = (\alpha \oplus \beta)0...,\qquad \overline{w} = \overline{u} \oplus (\overline{u} \oplus \overline{w}) = (\alpha \oplus \beta)1...,$$

па затоа $u \oplus v < w$.

II.2. НЕРАВЕНСТВА МЕЃУ СРЕДИНИТЕ

1. Нека $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$. Докажи го неравенството

$$a^2cd + b^2da + c^2ab + d^2bc \geq 4abcd .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a^2cd + b^2da + c^2ab + d^2bc \geq 4\sqrt[4]{a^2cd \cdot b^2da \cdot c^2ab \cdot d^2bc} = 4abcd .$$

Знак за равенство важи ако и само ако

$$a^2cd = b^2da = c^2ab = d^2bc . \tag{1}$$

Бидејќи сите броеви се позитивни, по скратувањето добиваме $ac = b^2 = d^2$, па како броевите се пзоитивни од последното равенство следува $b = d$. Со замена во (1) добиваме $a = b = c = d$.

2. Нека $0 \leq x, y, z \leq 1$. Докажи дека $xy + yz + zx \geq 2xyz$.

Решение. *Прв начин.* Ако $0 \le t \le 1$, тогаш $t^2 \le t \le \sqrt{t}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $t = 0$ или $t = 1$. Затоа, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$x(y+z) \ge x(y^2+z^2) \ge x \cdot 2\sqrt{y^2z^2} = 2xyz \;.$$

Понатаму, $yz \ge 1 \cdot yz \ge xyz$, па ако ги собереме последните две неравенства добиваме

$$xy + yz + zx \ge 2xyz + xyz \ge 2xyz \;.$$

Знак за равенство важи кога во сите горни неравенства важи знак за равенство, т.е. кога најмалку два од трите броја x, y, z се еднакви на 0.

Втор начин. На потполно идентичен начин како претходно добиваме дека $xy \ge xyz, yz \ge xyz$ и $zx \ge xyz$. Ако ги последните три неравенства добиваме

$$xy + yz + zx \ge 3xyz \ge 2xyz \;.$$

Знак за равенство важи кога во сите претходни неравенства важи знак за равенство. Заради првите три неравенства добиваме дека сите x, y, z се еднакви на 0 или 1, а заради последното неравенство мора да е $xyz = 0$. Но, тоа значи дека барем еден од броевите е еднаков на 0. Сега, од првите три неравенства следува дека барем уште еден од трите броја x, y, z мора да е еднаков на 0.

3. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $x + y + z = 1$. Докажи дека

$$xy + yz + zx \ge 9xyz \;.$$

Решение. Од условот на задачата и од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= (xy + yz + zx)(x + y + z) \\ &= (x^2y + yz^2) + (z^2x + xy^2) + (y^2z + zx^2) + 3xyz \\ &\ge 2xyz + 2xyz + 2xyz + 3xyz = 9xyz. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x^2y = yz^2, z^2x = xy^2, y^2z = zx^2$ и како x, y, z се позитивни реални броеви добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z$ и како $x + y + z = 1$, добиваме $x = y = z = \frac{1}{3}$.

4. Збирот на позитивните броеви a, b, c, d е еднаков на 3. Докажи дека

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \le \frac{1}{a^2b^2c^2d^2} \;.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно на неравенството

$$a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \le 1 \;. \tag{1}$$

Бидејќи даденото неравенство е симетрично, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a \ge b \ge c \ge d$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина применето на броевите a, b и $c + d$ и условот на задачата следува

$$ab(c+d) \le (\tfrac{a+b+c+d}{3})^3 = 1 \ ,$$

па затоа $a^2b^2(c+d)^2 \le 1$. Според тоа, за да го докажеме неравенството (1) доволно е да докажеме дека

$$a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \le a^2b^2(c+d)^2 .$$

Последното неравенство е еквивалентно на неравенството

$$a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \le 2a^2b^2cd \ ,$$

кое се добива ако ги собереме очигледните неравенства $a^2c^2d^2 \le a^2b^2cd$ и $b^2c^2d^2 \le a^2b^2cd$.

5. Ако $x+y+z=3$ и $x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ докажи дека

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \ge xy + yz + zx .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометрсиката средина следува

$$x^2 + 2\sqrt{x} \ge 3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}\sqrt{x}} = 3x ,$$

за $x \ge 0$. Ако ова неравенство го собереме со аналогните неравенства и искористиме дека $x+y+z=3$ добиваме

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{z}) \ge 3(x+y+z) = (x+y+z)^2 ,$$

т.е.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \ge xy + yz + zx .$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = 1$.

6. Определи ги сите реални броеви r за кои неравенството

$$r(ab+bc+ca) + (3-r)(\tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{c}) \ge 9$$

е исполнето за секои позитивни реални броеви a, b, c .

Решение. За $a = b = c$ следува дека

$$ra^2 + (3-r)\tfrac{1}{a} \ge 3 \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)(r(a^2+a+1)-3) \ge 0, \quad \forall a > 0 .$$

Оттука лесно следува дека $r = 1$. Обратно, ако $r = 1$, тогаш неравенството ќе го запишеме во видот

$$\tfrac{2+abc}{3} \ge \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \ .$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриксата средина следува

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \sqrt[3]{abc} \ ,$$

па затоа доволно е да докажеме дека $\frac{2+x^3}{3} \ge x$, каде $x = \sqrt[3]{abc}$. Последното неравенство е еквивалентно со очигледното неравенство $(x-1)^2(x+2)\geq 0$.

7. Збирот на позитивните броеви a,b,c и d е еднаков на 3. Докажи дека

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\leq\frac{1}{a^3b^3c^3d^3}.$$

Решение. Ако двете страни на неравенството ги помножиме со $a^3b^3c^3d^3>0$, добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$b^3c^3d^3+a^3c^3d^3+a^3b^3d^3+a^3b^3c^3\leq 1.$$

Последното неравенство е симетрично, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\geq b\geq c\geq d$. Сега, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $ab(c+d)\leq(\frac{a+b+(c+d)}{3})^3=1$, па затоа $a^3b^3(c+d)^3\leq 1$. Според тоа, доволно е да го докажеме неравенството

$$b^3c^3d^3+a^3c^3d^3+a^3b^3d^3+a^3b^3c^3\leq a^3b^3(c+d)^3$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$a^3c^3d^3+a^3b^3d^3\leq 3a^3b^3c^2d+3a^3b^3cd^2.$$

Последното неравенство се добива ако ги собереме очигледните неравенства:

$$a^3c^3d^3\leq a^3b^3c^2d\ ,\ a^3b^3d^3\leq a^3b^3cd^2 \text{ и } 0\leq 2a^3b^3c^2d+2a^3b^3cd^2$$

8. Ако a,b,c се позитивни броеви такви што $abc\geq 1$, докажи дека

$$\frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}\leq a+b+c.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$3\leq(1+a)+(1+b)+(1+c)-\frac{1+a}{1+b}-\frac{1+b}{1+c}-\frac{1+c}{1+a},$$

т.е. со неравенството

$$3\leq\frac{(1+a)b}{1+b}+\frac{(1+b)c}{1+c}+\frac{(1+c)a}{1+a}.$$

Последното неравенство директно следува од неравенството меѓу средините

$$\frac{(1+a)b}{1+b}+\frac{(1+b)c}{1+c}+\frac{(1+c)a}{1+a}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{(1+a)b}{1+b}\cdot\frac{(1+b)c}{1+c}\cdot\frac{(1+c)a}{1+a}}=3\sqrt[3]{abc}\geq 3.$$

9. Нека a,b,c се позитивни броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\leq\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}.$$

Решение. Нека $x=a+b+c$, $y=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=ab+bc+ca$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $x\geq 3$ и $y\geq 3$. Бидејќи левата и десната страна на даденото неравенство се симетрични функции од a,b и c, можеме да ги изразиме преку x,y и $abc=1$. Со сведување на најмал заеднички именител го добиваме неравенството

$$\frac{3+4x+y+x^2}{2x+y+x^2+xy} \le \frac{12+4x+y}{9+4x+2y},$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$3x^2y + xy^2 + 6xy - 5x^2 - y^2 - 24x - 3y - 27 \ge 0,$$

т.е. со неравенството

$$(\tfrac{5x^2y}{3} - 5x^2) + (\tfrac{xy^2}{3} - y^2) + (\tfrac{xy^2}{3} - 3y) + (\tfrac{4x^2y}{3} - 12x) +$$
$$+ (\tfrac{xy^2}{3} - 3x) + (3xy - 9x) + (3xy - 27) \ge 0.$$

За $x \ge 3$ и $y \ge 3$ сите собирци на левата страна во горното неравенство се ненегативни, па затоа тоа е точно неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = 3, y = 3$, т.е. ако и само ако $a = b = c = 1$.

10. Дадени се реалните броеви a, b, c и d, кои по модул се строго поголеми од 1 и $abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0$. Докажи дека

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

Решение. Нека $x = \frac{a+1}{a-1}$, $y = \frac{b+1}{b-1}$, $z = \frac{c+1}{c-1}$ и $t = \frac{d+1}{d-1}$. Од $|a| > 1$ следува $x > 0$ и $x \ne 1$. Аналогно $y, z, t > 0$ и не се еднакви на 1. Условот за a, b, c и d се сведува на $xyzt = 1$ и од друга страна $\frac{1}{a-1} = \frac{x-1}{2}$. Од последното равенство и аналогните равенства за b, c и d следува

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} = \frac{x+y+z+t-4}{2}.$$

Според тоа, доволно е да докажеме дека $x + y + z + t > 4$. Последното неравенство следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот $xyzt = 1$. Навистина, $x + y + z + t \ge 4\sqrt[4]{xyzt} = 4$, при што знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = t = 1$, што не е можно, па затоа $x + y + z + t > 4$.

11. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $abc = 1$. Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}} \ge \sqrt{2}.$$

Решение. Од неравенството меѓу срединитe следува

$$2\sqrt{\tfrac{1}{2}(b + \tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{2})} \le 1 + b + \frac{1}{a},$$

т.е.

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}} \ge \frac{\sqrt{2}}{1+b+\frac{1}{a}}.$$

Ако последното неравенство го собереме со аналогните неравенства и искористиме дека $abc=1$ добиваме

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}} &\geq \frac{\sqrt{2}}{1+b+\frac{1}{a}}+\frac{\sqrt{2}}{1+c+\frac{1}{b}}+\frac{\sqrt{2}}{1+a+\frac{1}{c}}\\ &=\frac{a\sqrt{2}}{a+ab+1}+\frac{ab\sqrt{2}}{ab+abc+a}+\frac{\sqrt{2}}{1+a+ab}\\ &=\sqrt{2}\,\frac{1+a+ab}{1+a+ab}=\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Знак за равенство никогаш не се достигнува. Меѓутоа, на пример, за доволно големи a и b, вредноста на разгледуваниот израз може да биде произволно блиску до $\sqrt{2}$.

12. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се ненегативни реални броеви и нека $a_1+a_2+...+a_k\geq\sqrt{k}$ за секој k. Докажи дека

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\geq\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}).$$

Решение. Да означиме $s_k=a_1+a_2+...+a_k$. Имаме $s_k^2\geq k$, а изразот кој што треба да го оцениме е

$$\begin{aligned}S&=s_1^2+(s_2-s_1)^2+...+(s_n-s_{n-1})^2\\ &=2s_1^2-2s_2s_1+2s_2^2-2s_2s_3+...+2s_{n-1}^2-2s_{n-1}s_n+s_n^2.\end{aligned}$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, за секој $k=1,2,...,n-1$ следува

$$\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}s_k^2-2s_ks_{k+1}+\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}s_{k+1}^2\geq 0,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{s_k^2}{s_{k+1}^2}=\frac{k}{k+1}$. Ако собереме овие неравенства добиваме

$$S\geq(2-\sqrt{2})s_1^2+(2-\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}})s_2^2+...+(2-\frac{\sqrt{n-2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}})s_{n-1}^2+(1-\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}})s_n^2.$$

Акоземеме предвид дека $s_k^2\geq k$ и $2-\sqrt{2}\geq\frac{1}{4}+\frac{1}{4n}$, бараното неравенство ќе следува ако го докажеме неравенството $2-\frac{\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}\geq\frac{1}{4k^2}$, чиј доказ е едноставен. Деталите ги оставаме на читателот за вежба. Посленото неравенство се докажува непосредно

13. Ако a,b,c се реални броеви такви што $0<a<b<c$ и $k>1$ е природен број, докажи дека

$$a^kb+b^kc+c^ka<ab^k+bc^k+ca^k, \tag{1}$$

Решение. Неравенството (1) е еквивалентно со неравенството

$$(c^k - b^k)(b-a) > (b^k - a^k)(c-b),$$

т.е. последователно со неравенствата

$$\frac{c^k-b^k}{c-b} > \frac{b^k-a^k}{b-a},$$

$$\frac{(c-b)(c^{k-1}+c^{k-2}b+...+cb^{k-2}+b^{k-1})}{c-b} > \frac{(b-a)(b^{k-1}+b^{k-2}a+...+ba^{k-2}+a^{k-1})}{b-a},$$

$$c^{k-1}+c^{k-2}b+...+cb^{k-2}+b^{k-1} > b^{k-1}+b^{k-2}a+...+ba^{k-2}+a^{k-1}. \quad (2)$$

Сега бидејќи $0<a<b<c$ и $k>1$ е природен број добиваме

$$c^{k-1+i}b^i > b^{k-1+i}a^i \text{, за } i=0,1,2,3,...,k-1,$$

па ако ги собереме горните неравенства го добиваме неравенството (2).

Забелешка. Неравенството (1) важи и во случај кога $k>1$ е реален број. Навистина, како погоре заклучуваме дека даденото неравенство е еквивалентно со неравенството $\frac{c^k-b^k}{c-b} > \frac{b^k-a^k}{b-a}$. Притоа важи $\frac{c^k-b^k}{c-b} > kb^{k-1}$, бидејќи последното неравенство е еквивалентно со неравенството $c^k+(k-1)b^k > kb^{k-1}c$, кое следува од тежинското неравенство меѓу аритметичката и геометриската средина. Аналогно се докажува дека $\frac{b^k-a^k}{b-a} < kb^{k-1}$.

Овде да забележиме дека од теоремата на Лагранж, применета на функцијата $f(x)=x^k$ на интервалите $[a,b]$ и $[c,d]$ следува дека постојат $\xi_1 \in (a,b)$ и $\xi_2 \in (b,c)$ такви што

$$\frac{b^k-a^k}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = kf\,'(\xi_1) = k\xi_1^{k-1} < kb^{k-1} \text{ и}$$

$$\frac{c^k-b^k}{c-b} = \frac{f(c)-f(b)}{c-b} = f\,'(\xi_2) = k\xi_2^{k-1} > kb^{k-1}.$$

14. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=3$. Докажи дека

$$\frac{a^2(b+1)}{ab+a+b} + \frac{b^2(c+1)}{bc+b+c} + \frac{c^2(a+1)}{ca+c+a} \geq 2.$$

Решение. Имаме, $\frac{a^2(b+1)}{ab+a+b} = a - \frac{ab}{ab+a+b}$. Од неравенството меѓу срединиte следува $\frac{ab}{ab+a+b} \leq \frac{ab}{3\sqrt[3]{a^2b^2}} = \frac{\sqrt[3]{ab}}{3} \leq \frac{a+b+1}{9}$, па затоа $\frac{a^2(b+1)}{ab+a+b} \geq \frac{8a-b-1}{9}$. Ако го собереме ова неравенство со аналогните неравенства добиваме>

$$\frac{a^2(b+1)}{ab+a+b} + \frac{b^2(c+1)}{bc+b+c} + \frac{c^2(a+1)}{ca+c+a} \geq \frac{8a-b-1}{9} + \frac{8b-c-1}{9} + \frac{8c-a-1}{9}$$

$$= \frac{7(a+b+c)-3}{9} = \frac{7\cdot 3-3}{9} = 2.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

15. Докажи го неравенството

$$\frac{a}{54b^3+1}+\frac{b}{54c^3+1}+\frac{c}{54a^3+1}\geq\frac{1}{3},$$

каде a,b,c се ненегативни реални броеви такви што $a+b+c=1$.

Решение. Бидејќи $a+b+c=1$, доволно е да се докаже дека

$$A=a-\frac{a}{54b^3+1}+b-\frac{b}{54c^3+1}+c-\frac{c}{54a^3+1}$$

$$=\frac{54b^3a}{54b^3+1}+\frac{54c^3b}{54c^3+1}+\frac{54a^3c}{54a^3+1}\leq\frac{2}{3}.$$

Од неравенството меѓу средините следува

$$54b^3+1=27b^3+27b^3+1\geq 3\cdot\sqrt[3]{27b^3\cdot 27b^3\cdot 1}=27b^2,$$

па затоа

$$\frac{54b^3a}{54b^3+1}\leq\frac{54b^3a}{27b^2}=2ab.$$

Аналогно се добива дека $\frac{54c^3b}{54c^3+1}\leq 2bc$ и $\frac{54a^3c}{54a^3+1}\leq 2ac$. Според тоа,

$$A\leq 2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\leq\frac{2}{3}(a+b+c)^2=\frac{2}{3}.$$

16. Нека $a_1,a_2,...,a_n$, k и M се природни броеви за кои важи

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=k \text{ и } a_1a_2...a_n=M.$$

Ако $M>1$, докажи дека изразот $M(x+1)^k-(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)$ не е еднаков на нула за ниту еден позитивен реален број x.

Решение. Ќе докажеме дека дадениот израз е ненегативен за секој позитивен реален број x, т.е. дека важи

$$M(x+1)^k<(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n).$$

Левата страна на дадениот израз е еднаква на

$$a_1a_2...a_n(x+1)^{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}=a_1(x+1)^{\frac{1}{a_1}}a_2(x+1)^{\frac{1}{a_2}}...a_n(x+1)^{\frac{1}{a_1}}.$$

Од неравенството межу аритметичката и геометриската средина за броевите $x+1,1,1,...,1$ следува $\frac{x+a_i}{a_i}\geq(x+1)^{\frac{1}{a_i}}$, односно

$$x+a_i\geq a_i(x+1)^{\frac{1}{a_i}}, \text{ за } i=1,2,...,n.$$

Множејќи ги овие неравенства добиваме

$$a_1(x+1)^{\frac{1}{a_1}}a_2(x+1)^{\frac{1}{a_2}}...a_n(x+1)^{\frac{1}{a_1}}\leq(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n).$$

Но, $x+1>1$, па затоа знак за равенство важи само ако $a_1=a_2=...=a_n=1$, што не е можно бидејќи $M>1$.

17. Нека x,y,z позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$xy+yz+zx\geq 4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+5xyz\,.$$

Решение. Со помош на $x+y+z=1$ даденото неравенство може да се хомогенизира, т.е. тоа е еквивалентно на

$$(xy+yz+zx)(x+y+z)^2\geq 4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+5xyz(x+y+z)\,,$$

т.е. по средувањето со со неравенството

$$x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3\geq 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\,. \qquad (1)$$

Но, за секои $a,b>0$ важи $a^2+b^2\geq 2ab$, па затоа

$$\begin{aligned}x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+z^3x+zx^3&=xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)\\&\geq xy\cdot 2xy+yz\cdot 2yz+zx\cdot 2zx\\&=2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2),\end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (1).

18. Нека a и b се природни броеви, $K=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ и $A=\frac{a+b}{2}$. Ако $\frac{K}{A}$ е природен број, докажи дека $a=b$.

Решение. Од $A\leq K<2A$ и $\frac{K}{A}$ е природен број следува дека $K=A$. Сега тврдењето следува од фактот дека во неравнеството меѓу аритметичката и квадратната средина знак за равенство важи ако и само ако $a=b$.

19. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$\frac{x^2}{x+z}+\frac{y^2}{y+x}+\frac{z^2}{z+y}\leq\frac{1}{2}\,. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин*. Бидејќи

$$\frac{x^2+xz}{x+z}+\frac{y^2+yx}{y+x}+\frac{z^2+zy}{z+y}=x+y+z=1,$$

и како од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{xz}{x+z}+\frac{yx}{y+x}+\frac{zy}{z+y}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{(x+z)^2}{x+z}+\frac{(y+x)^2}{y+x}+\frac{(z+y)^2}{z+y}\right)=\frac{1}{4}(2x+2y+2z)=\frac{1}{2}\,,$$

Од последните две неравенства следува неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Втор начин. Имаме

$$\frac{x^2-z^2}{x+z}+\frac{y^2-x^2}{y+x}+\frac{z^2-y^2}{z+y}=x-z+y-x+z-y=0\,.$$

Ако се искористи горното равенство, тогаш од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува неравенството

$$2\left(\frac{x^2}{x+z}+\frac{y^2}{y+x}+\frac{z^2}{z+y}\right)=\frac{x^2+z^2}{x+z}+\frac{y^2+x^2}{y+x}+\frac{z^2+y^2}{z+y}\leq\frac{x+z}{2}+\frac{y+x}{2}+\frac{z+y}{2}=1$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = \frac{1}{3}$.

20. Определи ги сите природни броеви n такви што ако $a,b,c \ge 0$ и $a+b+c=3$, тогаш $abc(a^n+b^n+c^n) \le 3$.

Решение. За $a=2, b=c=\frac{1}{2}$ и $n \ge 3$ неравенството не е исполнето. Од друга страна, за $n=1$ тоа е еквивалентно на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина на броевите $a,b,c \ge 0$. Ќе докажеме дека даденото неравенство важи и за $n=2$. Нека $x=bc$. Тогаш

$$abc(a^2+b^2+c^2) = ax(a^2+(b+c)^2-2x).$$

Функцијата $x(p-2x)$ е растечка за $x \le \frac{p}{4}$. Бидејќи

$$bc \le \frac{(b+c)^2}{4} \le \frac{a^2+(b+c)^2}{4},$$

следува дека ако $b+c=b'+c'$ и $bc \le b'c'$, тогаш

$$abc(a^2+b^2+c^2) \le ab'c'(a^2+b'^2+c'^2). \qquad (1)$$

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $b \le 1 \le c$. Ставаме $b'=1$, $c'=b+c-1$. Бидејќи $b+c=b'+c'$ и $bc-b'c'=(b-1)(c-1) \le 0$, од (1) следува дека

$$abc(a^2+b^2+c^2) \le a(2-a)(a^2+1+(2-a)^2). \qquad (2)$$

Ставаме $d=(a-1)^2$. Тогаш

$$a(2-a)(a^2+1+(2-a)^2) = (1-d)(3+2d) = 3-d-2d^2 \le 3$$

и даденото неравенство за $n=2$ следува од (2).

21. Нека a,b,c,d се позитивни реални броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}+\sqrt[4]{abcd}}{4} < \sqrt[4]{a\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{a+b+c+d}{4}}.$$

Решение. Со $4R$ да ја означиме десната страна на неравенството. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a}{4R} = \sqrt[4]{1\cdot\frac{2a}{a+b}\cdot\frac{3a}{a+b+c}\cdot\frac{4a}{a+b+c+d}} \le \frac{1}{4}(1+\frac{2a}{a+b}+\frac{3a}{a+b+c}+\frac{4a}{a+b+c+d}),$$

$$\frac{\sqrt{ab}}{4R} = \sqrt[4]{1\cdot\frac{2a}{a+b}\cdot\frac{3b}{a+b+c}\cdot\frac{4b}{a+b+c+d}} \le \frac{1}{4}(1+\frac{2a}{a+b}+\frac{3b}{a+b+c}+\frac{4b}{a+b+c+d}),$$

$$\frac{\sqrt[3]{abc}}{4R} \le \frac{\sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}}{\sqrt[4]{a\cdot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{a+b+c+d}{4}}} = \sqrt[4]{1\cdot\frac{2b}{a+b}\cdot 1\cdot\frac{4c}{a+b+c+d}} \le \frac{1}{4}(2+\frac{2b}{a+b}+\frac{4c}{a+b+c+d}),$$

$$\frac{\sqrt[4]{abcd}}{4R} = \sqrt[4]{1\cdot\frac{2b}{a+b}\cdot\frac{3c}{a+b+c}\cdot\frac{4d}{a+b+c+d}} \le \frac{1}{4}(1+\frac{2b}{a+b}+\frac{3c}{a+b+c}+\frac{4d}{a+b+c+d})$$

т.е.

$$\frac{a}{R} \le 1 + \frac{2a}{a+b} + \frac{3a}{a+b+c} + \frac{4a}{a+b+c+d} \,,$$

$$\frac{\sqrt{ab}}{R} \le 1 + \frac{2a}{a+b} + \frac{3b}{a+b+c} + \frac{4b}{a+b+c+d} \,,$$

$$\frac{\sqrt[3]{abc}}{R} \le 2 + \frac{2b}{a+b} + \frac{4c}{a+b+c+d} \,,$$

$$\frac{\sqrt[4]{abcd}}{R} \le 1 + \frac{2b}{a+b} + \frac{3c}{a+b+c} + \frac{4d}{a+b+c+d} \,.$$

Ако ги собереме последните четири неравенства добиваме

$$\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}+\sqrt[4]{abcd}}{R} \le 5 + \frac{2a+2b}{a+b} + \frac{3a+3b+3c}{a+b+c} + \frac{4a+4b+4c+4d}{a+b+c+d} = 14 \,,$$

т.е.

$$\frac{a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc}+\sqrt[4]{abcd}}{4} \le \frac{14}{4} R < 4R = \sqrt[4]{a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{a+b+c+d}{4}} \,.$$

22. Нека a, b, c, d се ненегативни реални броеви. Докажи дека

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \ge \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина за броевите a, b, c, d добиваме

$$\frac{a+b+c+d}{4} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \,,$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \le \frac{a+b+c+d}{4} \,. \qquad (1)$$

Имаме

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^3 = a^3+b^3+c^3+d^3+3(ab^2+bc^2+ca^2)+\\ +3(a^2b+b^2d+d^2a)++3(b^2c+c^2d+d^2b) \qquad (2)\\ +3(ac^2+cd^2+da^2)+6(abc+abd+acd+bcd).\end{aligned}$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3+d^3 &= \frac{a^3+b^3+c^3}{3} + \frac{b^3+c^3+d^3}{3} + \frac{a^3+c^3+d^3}{3} + \frac{a^3+b^3+d^3}{3}\\ &\ge abc+bcd+cda+abd,\end{aligned}$$

$$ab^2+bc^2+ca^2 \ge 3abc,$$

$$a^2b+b^2d+d^2a \ge 3abd,$$

$$b^2c+c^2d+d^2b \ge 3bcd,$$

$$ac^2+cd^2+da^2 \ge 3cda,$$

па затоа од претходните неравенства и од (2) следува неравенството

$$(a+b+c+d)^3 \ge 16(abc+abd+acd+bcd),$$

кое е еквивалентно со неравенството (1).

23. Докажи дека ако $a,b,c>0$ и $a+b+c=3$, тогаш

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3} \ge a^3+b^3+c^3.$$

Решение. Можеме да сметаме дека $m=\frac{b+c}{2}\le 1$. Прво ќе докажеме дека

$$b^{-3}+c^{-3}-b^3-c^3 \ge 2m^{-3}-2m^3. \tag{1}$$

Навистина, бидејќи

$$\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} \ge \frac{b+c}{2} \ge \sqrt{bc},$$

добиваме $b^3+c^3 \ge 2m^3$ и $(bc)^{-3}-1 \ge m^{-6}-1 \ge 0$. Според тоа, точно е неравенството

$$(b^3+c^3)((bc)^{-3}-1) \ge 2m^3(m^{-6}-1),$$

кое е еквивалентно на (1).

Од претходните разгледувања следува дека доволно е неравенството да го докажеме за $b=c\le 1$. Тогаш неравенството го добива обликот

$$2a^3(1-b^6) \ge b^3(a^6-1),$$

т.е.

$$2a^3(1-b)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1) \ge b^3(a-1)(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1).$$

Бидејќи $2(1-b)=a-1\ge 0$ и $a\ge b$, последното неравенство следува од

$$\begin{aligned} &a^3(b^4+b) \ge b^3(a^4+a) && \Leftrightarrow \\ &ab(a-b)(a+b-(ab)^2) \ge 0 && \Leftrightarrow \\ &a^3(b^5+1) \ge b^3(a^5+1) && \Leftrightarrow \\ &(a-b)(a^2+ab+b^2-(ab)^3(a+b)) \ge 0. \end{aligned}$$

Да забележиме дека $ab=(3-2b)b\le \frac{9}{8}$ и тогаш $a+b\ge 2>(ab)^2$,

$$a^2+ab+b^2-(ab)^3(a+b) > a^2+ab+b^2-\frac{3}{2}(a+b)=\frac{3}{4}a(a-1)\ge 0.$$

24. Даден е природен број $n\ge 2$. Докажи дека за секои реални броеви $a_1<a_2<...<a_{2n}$ е точно неравенството

$$\sum_{\substack{i<j \\ 2|i-j}} a_i a_j < \frac{n-1}{4n}(a_1+a_2+...+a_{2n})^2.$$

Решение. Да го разгледаме полиномот

$$P(x)=(x-a_1)(x-a_3)...(x-a_{2n-1})+(x-a_2)(x-a_4)...(x-a_{2n}).$$

Сите негови нули се реални и различни, бидејќи

$$P(a_{2n}) > 0 > P(a_{2n-2}) < 0 < P(a_{2n-4}) > \dots .$$

Овие нули да ги означиме со $b_1, b_2, \dots, b_n$. Од Виетовите формули следува

$$\sum_{i=1}^{2n} a_i = 2\sum_{i=1}^{n} b_i \text{ и } \sum_{\substack{i<j \\ 2|i-j}} a_i a_j = 2\sum_{i<j} b_i b_j .$$

Сега од неравенството меѓу квадратната и аритметичката средина и горните равенства добиваме

$$\sum_{\substack{i<j \\ 2|i-j}} a_i a_j = 2\sum_{i<j} b_i b_j < 2\cdot\tfrac{n-1}{2n}(\sum_{i=1}^{n} b_i)^2 = \tfrac{n-1}{n}(\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n} a_i)^2 = \tfrac{n-1}{4n}(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n})^2 .$$

25. Даден е природен број n. Докажи дека за произволни реални броеви $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_{2n}$ важи неравенството

$$a_1 a_{n+1} + a_2 a_{n+2} + \dots + a_n a_{2n} \le \tfrac{1}{4n}(a_1 + a_2 + \dots + a_{2n})^2 .$$

Решение. *Прв начин.* Да ставиме $A = \sum_{i=1}^{2n} a_i$. Тогаш

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i a_{n+1} &= a_n \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} a_i (a_{n+i} - a_n) \\ &\le a_n \sum_{i=1}^{n} a_i + a_n \sum_{i=1}^{n} (a_{n+i} - a_n) \\ &= \tfrac{1}{n} n a_n (A - n a_n) \le \tfrac{1}{4n} A^2.\end{aligned}$$

Втор начин. Да ги разгледаме квадратните триноми

$P_i(x) = (x - a_i)(x - a_{i+n})$, за $i = 1, 2, \dots, n$ и

$$P(x) = P_1(x) + \dots + P_n(x) = nx^2 - (a_1 + \dots + a_{2n})x + a_1 a_{n+1} + \dots + a_n a_{2n} .$$

Треба да докажеме дека дискриминантата

$$D = (a_1 + \dots + a_{2n})^2 - 4n(a_1 a_{n+1} + \dots + a_n a_{2n})$$

на полиномот $P(x)$ е ненегативна, т.е. дека $P(x)$ има реална нула. Последното е точно, бидејќи за $a_n \le x \le a_{n+1}$ важи $P_i(x) \le 0$ за секој i, а со самото тоа и $P(x) \le 0$.

26. Нека n е даден природен борј и нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ се позитивни реални броеви. Докажи

$$x_1(1 - x_1^2) + x_2(1 - (x_1 + x_2)^2) + \dots + x_n(1 - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2) < \tfrac{2}{3}$$

Решение. Да означиме $y_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k$, за $1 \le k \le n$. Тогаш бараното неравенство го добива обликот

$$y_1(1-y_1^2)+(y_2-y_1)(1-y_2^2)+...+(y_n-y_{n-1})(1-y_n^2)<\frac{2}{3},$$

т.е. обликот

$$y_n-(y_1^3-y_1y_2^2+y_2^3-y_2y_3^2+...-y_{n-1}y_n^2+y_n^3)<\frac{2}{3}.$$

Од неравенството меѓу средините следува $y_i^3+y_{i+1}^3+y_{i+1}^3\ge 3y_iy_{i+1}^2$. Ако ги собереме овие неравенства добиваме

$$y_1^3-y_1y_2^2+y_2^3-y_2y_3^2+...-y_{n-1}y_n^2+y_n^3\ge\frac{2}{3}y_1^3+\frac{1}{3}y_n^3>\frac{1}{3}y_n^3,$$

па затоа доволно е да докажеме дека $y_n-\frac{1}{3}y_n^3\le\frac{2}{3}$. Последното неравенство следува од неравенството меѓу средините $y_n^3+1+1\ge 3y_n$.

27. Реалните броеви x,y,z се такви што $x^2+y^2+z^2=1$. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy).$$

Решение. Нека $f(x,y,z)=(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$. Од $f(x,0,z)=-x^3z^3$ лесно се заклучува дека саканиот максимум е позитивен. Бидејќи функцијата f е симетрична во однос на x,y,z и $f(x,y,z)=f(-x,-y,-z)$, можеме да сметаме дека $x\ge y\ge z, x+y+z\ge 0$, па затоа $x^2-yz>0$. Ако f достигнува максимум во (x,y,z), тогаш

$$f(x,y,z)-f(x,-y,-z)=-2x(x^2-yz)(y^3+z^3)\ge 0$$

и значи $y^3+z^3\le 0$. Ако $z=0$, тогаш $y=0$ и $f(x,y,z)=0$. Според тоа, $z<0$ и $y^2-zx>0$. Бидејќи $f(x,y,z)>0$ добиваме дека и $z^2-zy>0$. Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\sqrt[3]{f(x,y,z)}\le\frac{(x^2-yz)+(y^2-zx)+(z^2-xy)}{3}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(x+y+z)^2}{3}\le\frac{1}{2},$$

од каде заклучуваме дека бараната максимална вредност е $\frac{1}{8}$ и се достигнува за $x+y+z=0$.

28. Комплексните броеви $z_i, i=1,2,...,n$ се такви што $|z_i-1|\le r$, за $i=1,2,...,n$ и некој $r\in(0,1)$. Докажи дека

$$|\sum_{i=1}^{n}z_i|\cdot|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i}|\ge n^2(1-r^2).$$

Решение. Алгебарскиот запис на комплексен број $z_k=a_k+ib_k$ дава

$$(1-a_k)^2+b_k^2\le r^2\text{, т.е. } 2a_k\ge (a_k^2+b_k^2)+(1-r^2)\ge 2\sqrt{(a_k^2+b_k^2)(1-r^2)}\,,$$

при што последното неравенство следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Според тоа, $a_k\ge 0$ и

$$\frac{a_k^2}{a_k^2+b_k^2}\ge 1-r^2\,. \qquad (1)$$

Бидејќи $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k+i\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k-ib_k}{a_k^2+b_k^2}$, бараното неравенство е еквивалентно на неравенството

$$\sqrt{(\sum_{k=1}^{n} a_k)^2+(\sum_{k=1}^{n} b_k)^2}\sqrt{(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_k^2+b_k^2})^2+(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k^2+b_k^2})^2}\ge n^2(1-r^2)\,.$$

Сега, од $(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k)^2\ge 0$, $(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k^2+b_k^2})^2\ge 0$ и (1) следува

$$\begin{aligned}\sqrt{(\sum_{k=1}^{n} a_k)^2+(\sum_{k=1}^{n} b_k)^2}\sqrt{(\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_k^2+b_k^2})^2+(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k^2+b_k^2})^2} &\ge \sum_{k=1}^{n} a_k\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_k^2+b_k^2}\\ &\ge \sum_{k=1}^{n} a_k\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1-r^2}{a_k}\\ &\ge n^2(1-r^2),\end{aligned}$$

При што последното неравенство следува од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина.

29. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се позитивни броеви такви што $x_1x_2...x_n=1$. Докажи го неравенството

$$(x_1+x_2)(x_2+x_3)...(x_{n-1}+x_n)(x_n+x_1)\ge 2^n+n(x_1+x_2+...+x_n-n)\,.$$

Решение. Ако се ослободиме од заградите во изразот

$$(x_1+x_2)(x_2+x_3)...(x_{n-1}+x_n)(x_n+x_1)$$

ќе добиеме 2^n собирци, секој од кои е од $n-$ти степен, при што секој x_i во таков собирок се појавува најмногу на втор степен. Овие собирци ќе ги поделиме во две груп: во првата група да ги ставиме сите собирци во кои точно еден од броевите $x_1,x_2,...,x_n$ е на втор степен, а во втората група да ги ставиме сите останатите. Со A и B да ги означиме збировите на собирците од првата и втората група соодветно.

Да ги разгледаме собирците во кои x_1 е на втор степен, а сите останати множители се на прв степен. Лесно се гледа дека има точно $n-1$ такви собирци, кои се добивамат од $x_2x_3...x_n$ со последователно отстранување на $x_2,x_3,...,x_n$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$x_1^2x_3...x_n+x_1^2x_2x_4...x_n+...+x_1^2x_2...x_{n-1}+1\geq n\sqrt[n]{x_1^{2n-2}x_2^{n-2}...x_n^{n-2}}=nx_1.$$

Аналогни неравенства добиваме за x_i кога $i=2,3...,n$. Според тоа,

$$A+n\geq n(x_1+...+x_n).$$

Да забележиме дека изразот од преостанатите $2^n-n(n-1)$ собирци (тоа се точно собирците од втоирата група) е симетричен во однос на секоја променлива. Тоа значи дека нивниот производ ќе биде моном во кој сите променливи се на ист степен, т.е. нивниот производ е еднаков на 1. Значи, од неравенството меѓу аритметичката и геометрсиката средина следува дека збирот на овие $2^n-n(n-1)$ собирци е поголем или еднаков на $2^n-n(n-1)$. Значи,

$$B\geq 2^n-n(n-1).$$

Конечно,

$$(x_1+x_2)(x_2+x_3)...(x_{n-1}+x_n)(x_n+x_1)+n=A+n+B$$
$$=n(x_1+...+x_n)+2^n-n^2+n$$

а последното неравенство е еквивалентно со неравенството кое требаше да го докажеме.

II.3. НЕРАВЕНСТВО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ

1. Нека $a_1,a_2,...,a_n,(n\geq 2)$ се реални броеви такви што $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=n$. Докажи дека

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{n-a_ia_j}\leq\frac{n}{2}.$$

Решение. Нека $L=\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{n-a_ia_j}$. Ќе докажеме дека

$$nL-\frac{n(n-1)}{2}=\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{a_ia_j}{n-a_ia_j}\leq\frac{n}{2}.$$

Прво, да забележиме дека $a_i^2\leq n$ и ако $a_i^2=0$, тогаш $a_j=0$ за $j\neq i$, па затоа неравенството тривајлно важи. Затоа ќе сметаме дека $a_i<\sqrt{n}$, што значи $n-a_ia_j>0$. Бидејќи $a_ia_j\leq\frac{(a_i+a_j)^2}{4}$ и $a_ia_j\leq\frac{a_i^2+a_j^2}{2}$, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\frac{2a_ia_j}{n-a_ia_j}\leq\frac{(a_i+a_j)^2}{(n-a_i^2)+(n-a_j^2)}\leq\frac{a_i^2}{n-a_i^2}+\frac{a_j^2}{n-a_j^2}.$$

Ако последните неравенства ги собереме по сите парови $i<j$, го добиваме бараното неравенство.

2. Нека за позитивните реални броеви a,b,c важи $a^2 \le b^2+c^2, b^2 \le c^2+a^2$ и $c^2 \le a^2+b^2$. Докажи дека

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) > 4(a^6+b^6+c^6)\ .$$

Решение. *Прв начин.* Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3) \ge (\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^3}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{b^3}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{c^3})^2 = (a^2+b^2+c^2)^2,$$

па затоа ако ги искористиме неравенствата од условот на задачата добиваме

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) &\ge (a^2+b^2+c^2)^3\\ &= a^6+b^6+c^6+3[a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2)]+6a^2b^2c^2\\ &\ge a^6+b^6+c^6+3(a^6+b^6+c^6)+6a^2b^2c^2 > 4(a^6+b^6+c^6).\end{aligned}$$

Во последното неравенство не важи знак за равенство бидејќи a,b,c се позитивни реални броеви, па затоа $6a^2b^2c^2>0$.

Втор начин. Од $a,b,c>0$ следува $a^2 \le b^2+c^2 < b^2+2bc+c^2=(b+c)^2$, т.е. $a<b+c$. Аналогно се докажува дека $b<c+a$ и $c<a+b$. Според тоа,

$$\begin{aligned}&(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)=\\ &\quad = a^6+b^6+c^6+a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2)+\\ &\qquad +a^5(b+c)+b^5(c+a)+c^5(a+b)+\\ &\qquad +a^3(b+c)(b^2+c^2)+b^3(c+a)(c^2+a^2)+c^3(a+b)(a^2+b^2)\\ &\quad > a^6+b^6+c^6+a^4a^2+b^4b^2+c^4c^2+a^5a+b^5b+c^5c+a^3aa^2+b^3bb^3+c^3cc^3\\ &\quad = 4(a^6+b^6+c^6).\end{aligned}$$

3. Нека x,y,z се позитивни реални броеви. Докажи дека:

а) $(3x^2+2)(3y^2+2) \ge \frac{9}{2}(x+y)^2+3$,

б) $(3x^2+2)(3y^2+2)(3z^2+2) \ge 9(x+y+z)^2$.

Решение. а) Даденото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\begin{aligned}(3x^2-6xy+3y^2)+(18x^2y^2-12xy+2) &\ge 0\\ 3(x-y)^2+2(3xy-1)^2 &\ge 0.\end{aligned}$$

Конечно, последното неравенство очигледно важи за секои реални броеви x и y , што значи дека важи и даденото неравенство.

б) Од а) следува дека

$$\begin{aligned}(3x^2+2)(3y^2+2)(3z^2+2) &\ge 3(3z^2+2)(1+\tfrac{3}{2}(x+y)^2)\\ &= 3((\sqrt{3}z)^2+(\sqrt{2})^2)(1^2+(\tfrac{\sqrt{3}x+\sqrt{3}y}{\sqrt{2}})^2).\end{aligned}$$

Понатаму, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц за броевите

$$a=\sqrt{3}z\ ,\ b=\sqrt{2}\ ,\ c=1 \text{ и } \frac{\sqrt{3}x+\sqrt{3}y}{\sqrt{2}}\ ,$$

следува

$$\begin{aligned}(3x^2+2)(3y^2+2)(3z^2+2) &\geq 3((\sqrt{3}z)^2+(\sqrt{2})^2)(1^2+(\tfrac{\sqrt{3}x+\sqrt{3}y}{\sqrt{2}})^2)\\ &\geq 3(\sqrt{3}z\cdot 1+\sqrt{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}x+\sqrt{3}y}{\sqrt{2}})^2\\ &=9(x+y+z)^2.\end{aligned}$$

4. Нека a,b,c,d се позитивни реални броеви такви што $a+b+c+d=4$. Докажи дека

$$\frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{(b+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{(c+\sqrt{d})^2}{\sqrt{c^2-cd+d^2}}+\frac{(d+\sqrt{a})^2}{\sqrt{d^2-da+a^2}}\leq 16\ .$$

Решение. За произволни позитивни реални броеви x и y важи

$$\sqrt{x^2-xy+y^2}\geq\frac{x+y}{2}\ ,$$

а од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(x+\sqrt{y})^2\leq(x+y)(x+1)\ ,$$

па затоа,

$$\frac{(x+\sqrt{y})^2}{\sqrt{{}^2-xy+y^2}}\leq 2(x+1)\ .$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}&\frac{(a+\sqrt{b})^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{(b+\sqrt{c})^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{(c+\sqrt{d})^2}{\sqrt{c^2-cd+d^2}}+\frac{(d+\sqrt{a})^2}{\sqrt{d^2-da+a^2}}\leq\\ &\leq 2(a+1)+2(b+1)+2(c+1)+2(d+1)\\ &=2(a+b+c+d)+8=16.\end{aligned}$$

5. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=1$. Докажи го неравенството

$$\frac{a^3}{b^2+c}+\frac{b^3}{c^2+a}+\frac{c^3}{a^2+b}\geq\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\ .$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a(b^2+c)+b(c^2+a)+c(a^2+b))(\frac{a^3}{b^2+c}+\frac{b^3}{c^2+a}+\frac{c^3}{a^2+b})\geq a^2+b^2+c^2=1\ ,$$

па затоа е доволно да се докаже

$$ab^2+bc^2+ca^2+ab+bc+ca\leq\frac{1}{\sqrt{3}}+1\ .$$

Познато е дека

$$ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2=1\ .$$

Понатаму, повторно од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$ab^2+bc^2+ca^2 \le \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} = \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\ ,$$

па затоа е доволно да се докаже дека

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \le \tfrac{1}{3},$$

а последното неравенство важи бидејќи

$$3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \le (a^2+b^2+c^2)^2 = 1.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6. Позитивните реални броеви $a_1, a_2, ..., a_n$, $n \ge 2$ се такви што

$$(a_1+a_2+...+a_n)(\tfrac{1}{a_1}+\tfrac{1}{a_2}+...+\tfrac{1}{a_n}) \le (n+\tfrac{1}{2})^2.$$

Докажи дека

$$\max\{a_1, a_2, ..., a_n\} \le 4\min\{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

Решение. Нека $M=\max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и $m=\min\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, при што без ограничување на општоста можеме да земеме $m=a_1$ и $M=a_n$.

Прво нека допуштиме дека $n=2$. Тогаш неравенството од условот прима вид

$$(m+M)(\tfrac{1}{m}+\tfrac{1}{M}) \le \tfrac{25}{4}.$$

Ова неравенство е еквивалентно со неравенството

$$4(m+M)^2 \le 25mn,$$

т.е. со неравенството

$$(4M-m)(4m-M) \le 0.$$

Сега од последното неравенство и фактот дека $4M-m>0$ добиваме $M-4m \le 0$, т.е. $M \le 4m$. Нека $n \ge 3$. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}(n+\tfrac{1}{2})^2 &\ge (a_1+a_2+...+a_n)(\tfrac{1}{a_1}+\tfrac{1}{a_2}+...+\tfrac{1}{a_n})\\ &= (M+a_2+...+a_{n-1}+M)(\tfrac{1}{m}+\tfrac{1}{a_2}+...+\tfrac{1}{a_{n-1}}+\tfrac{1}{M})\\ &\ge (\sqrt{\tfrac{m}{M}}+\underbrace{1+...+1}_{n-2}+\sqrt{\tfrac{M}{m}})^2.\end{aligned}$$

Според тоа, $n+\frac{1}{2} \ge \sqrt{\frac{m}{M}}+n-2+\sqrt{\frac{M}{m}}$, од каде добиваме $\frac{5}{2} \ge \sqrt{\frac{m}{M}}+\sqrt{\frac{M}{m}}$.

Значи, $2(m+M) \le 5\sqrt{mM}$ и како погоре добиваме дека $M \le 4m$.

7. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+2xy}}\\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\frac{2}{9}.\end{cases}$$

Решение. Допуштливи вредности за x и y се $0\le x,y\le\frac{1}{2}$.

Лема. За секои реални броеви x и y такви што $0\le x,y\le\frac{1}{2}$ точно е неравенството

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+2xy}},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y$.

Доказ. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}})^2\le 2(\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}),\tag{1}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\sqrt{1+2x^2}=\sqrt{1+2y^2}$, т.е. $x=y$.

Од друга страна, бидејќи $0\le x,y\le\frac{1}{2}$, добиваме

$$\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}-\frac{2}{1+2xy}=\frac{2(y-x)^2(2xy-1)}{(1+2xy)(1+2x^2)(1+2y^2)}\le 0,\tag{2}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y$. Сега тврдењето на Лемата следува од (1) и (2). ■

Од Лемата следува дека дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases}x=y\\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\frac{2}{9},\end{cases}$$

шии решенија се $x=y=\frac{9-\sqrt{73}}{36}$ и $x=y=\frac{9+\sqrt{73}}{36}$.

8. За секоја низа о0д 2020 реални броеви $a_1,a_2,...,a_{2020}$ низата $b_1,b_2,...,b_{2020}$ ја определуваме со

$$b_n=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \text{ за секој } n=1,2,...,2020.$$

Определи ги сите низи $a_1,a_2,...,a_{2020}$ за кои

$$b_1^2+b_2^2+...+b_{2020}^2=4(a_1^2+a_2^2+...+a_{2020}^2).$$

Решение. За фиксиран $n\ge 2$ важи $a_n=nb_n-(n-1)b_{n-1}$, па затоа

$$\begin{aligned}b_n^2-2a_nb_n&=b_n^2-2b_n(nb_n-(n-1)b_{n-1})=(1-2n)b_n^2+2(n-1)b_nb_{n-1}\\&\le(1-2n)b_n^2+(n-1)(b_n^2+b_{n-1}^2)=(n-1)b_{n-1}^2-nb_n^2,\end{aligned}\tag{1}$$

при што знак за равенство важи ако $b_{n-1}=b_n$. Бидејжи $b_1^2-2a_1b_1=-b_1^2$ ако ги собереме неравенствата за $n=1$ до $n=2020$ добиваме

$$\sum_{n=1}^{2020} b_n^2 - \sum_{n=1}^{2020} 2a_n b_n \leq -2020 b_{2020}^2 \leq 0,$$

т.е.

$$\sum_{n=1}^{2020} b_n^2 \leq 2\sum_{n=1}^{2020} a_n b_n . \tag{2}$$

Но, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц имаме

$$\sum_{n=1}^{2020} a_n b_n \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{2020} a_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{2020} b_n^2}$$

па затоа од (2) добиваме

$$\sum_{n=1}^{2020} b_n^2 \leq 4\sum_{n=1}^{2020} a_n^2 . \tag{3}$$

Но, според условот на задачата во последното неравенство треба да важи знак за равенство, па затоа треба да е $b_{2020}=0$ и $b_n^2-2a_nb_n=(n-1)b_{n-1}^2-nb_n^2$ за секој $n=1,2,...,2020$. Од второто равенство следува $b_1=b_2=...=b_{2020}$ и од $b_{2020}=0$ добиваме $b_n=0$ за $n=1,2,...,2020$. Сега е јасно дека $a_1=b_1=0$ и $a_n=nb_n-(n-1)b_{n-1}=0$ за секој $n=2,3,...,2020$. Непосредно се проверува дека низата $a_1=a_2=...=a_{2020}=0$ е решение на задачата.

9. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{a^5}{a^3+1}+\frac{b^5}{b^3+1}+\frac{c^5}{c^3+1}\geq\frac{3}{2}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Од Енгеловиот принцип на минимум следува

$$\begin{aligned}\frac{a^5}{a^3+1}+\frac{b^5}{b^3+1}+\frac{c^5}{c^3+1}&=\frac{a^5}{a^3+abc}+\frac{b^5}{b^3+abc}+\frac{c^5}{c^3+abc}\\&=\frac{a^4}{a^2+bc}+\frac{b^4}{b^2+ac}+\frac{c^4}{c^2+ab}\\&\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+bc)+(b^2+ac)+(c^2+ab)},\end{aligned}$$

а од неравенствот меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca \quad \text{и} \quad a^2+b^2+c^2\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3.$$

Според тоа,

$$\frac{a^5}{a^3+1}+\frac{b^5}{b^3+1}+\frac{c^5}{c^3+1}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+bc)+(b^2+ac)+(c^2+ab)}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\geq\frac{3}{2}.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

II.4. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Племето Мамбо-Јамбо живее покрај река. Кон соседното племе заедно тргнале младиот воин Мамбо и младиот шаман Јамбо. Мамбо се движел со брзина од $11\,km/h$ кон најблиското пристаниште за сплавови и со сплав отишол кај соседното племе. Јамбо, без да брза, со брзина од $6\,km/h$ отишол кон друго пристаниште за сплавови и оттаму со сплав отишол кај соседното племе, при што пристигнал порано од Мамбо.

   Познато е дека реката е праволиниска и сплавовите се движат со брзината на течението на реката, која е цел број изразена во km/h и не е помала од 6. Колку најмногу може да биде брзината на реката?

   Решение. Со O да го означиме местото каде што живее племето Мамбо-Јамбо, со M пристаништето кон кое тргнал Мамбо, со J пристаништето кон кое тргнал Јамбо. Јасно, M се наоѓа нагоре по течението на реката, а J е надолу по течението на реката.

   Нека растојанијата од O до M и J се еднакви соодветно на x и y km $(x<y)$, а брзината на течењето на реката е $v\,km/h$. Јамбо пристигнал од O во J по $\frac{y}{6}$ часа, а Мамбо пристигнал од O во J по $\frac{x}{11}+\frac{x+y}{v}$ часа. Тогаш од условот на задачата следува

$$\frac{y}{6}<\frac{x}{11}+\frac{x+y}{v}. \qquad (1)$$

   Бидејќи $x<y$, од (1) добиваме $\frac{y}{6}<\frac{y}{11}+\frac{y+y}{v}$. Ако во последната неравенка скратиме со y, ја добиваме неравенката $\frac{1}{6}<\frac{1}{11}+\frac{2}{v}$, чие решение е $v<26,4$. Останува да провериме дали е можно $v=26\,km$. Ако во (1) ставиме $v=26\,km$, добиваме $\frac{y}{x}<\frac{111}{110}$. Последното е можно, на пример за $y=1,12\,km$ и $x=1,11\,km$. Според тоа, решение на задачата е $v=26\,km$.

2. Определи ја најголемата константа k за која важи:

   ако $a_1,a_2,a_3,a_4>0$ се такви што за секои $i,j,k\in\mathbb{N}$, $1\le i<j<k\le 4$ важи

$$a_i^2+a_j^2+a_k^2\ge 2(a_ia_j+a_ja_k+a_ka_i),$$

   тогаш

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2\ge K(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4).$$

   Решение. Нека $\max\{a_1,a_2\}\le a_3\le a_4$. Да означиме $a_2=b^2$, $a_3=c^2$, $b,c\ge 0$. Од условот на задачата следува $a_1\le(c-b)^2$ и $a_4\ge(c+b)^2$. Нека претпоставиме дека овие две неравенства всушност се равенства. Тогаш имаме

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=3(b^4+4b^2c^2+c^4) \text{ и}$$

$$a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4=3(b^4+b^2c^2+c^4)\,.$$

Притоа $c \le 2b$, па затоа

$$\tfrac{b^4+4b^2c^2+c^4}{b^4+b^2c^2+c^4}=1+\tfrac{3b^2c^2}{b^4+b^2c^2+c^4}=1+\tfrac{1}{1+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}}\ge\tfrac{11}{7}\,,$$

при што равенство важи за $c=2b$. Според тоа, во овој случај $K\ge\frac{11}{7}$, а равенство се достигнува за $a_1:a_2:a_3:a_4=1:1:4:9$. Ќе покажеме дека можеме да земеме $a_1=(c-b)^2$ и $a_4=(c+b)^2$. Да го разгледаме изразот

$$F=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2-\tfrac{11}{7}(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)\,.$$

За фиксирани a_2,a_3,a_4 рагледувана како функција од a_1 функцијата F опаѓа за $a_1<\frac{11}{14}(a_2+a_3+a_4)$ при што

$$\tfrac{11}{14}(a_2+a_3+a_4)\ge\tfrac{11}{14}(b^2+c^2+(b+c)^2)\ge(b-c)^2\ge a_1\,,$$

па затоа F не се зголемува ако a_1 го замениме со $(b-c)^2$. Сега, без ограничување на општоста можеме да земеме $a_1\le a_2$, т.е. $b\le c\le 2b$. Слично како претходно, за фиксирани a_1,a_2,a_3 функцијата F е растечка по a_4 за $a_4>\frac{11}{14}(a_1+a_2+a_3)$ и притоа

$$\tfrac{11}{14}(a_1+a_2+a_3)\le\tfrac{11}{14}(b^2+c^2+(c-b)^2)\le(c+b)^2\le a_4\,,$$

па затоа F не се зголемува ако a_4 го замениме со $(b+c)^2$.

3. Докажи дека, ако $1<a\le b\le c$, тогаш

$$\log_a b+\log_b c+\log_c a\le\log_b a+\log_c b+\log_a c\,.$$

Решение. Ставаме $x=\log_a b, y=\log_b c$ и неравенството добива вид

$$x+y+\tfrac{1}{xy}\le\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+xy\,.$$

По сведување под заеднички именител го добиваме еквивалентното неравенство

$$\tfrac{(x-1)(y-1)(xy-1)}{xy}\ge 0\,.$$

Последното неравенство е точно, бидејќи според условот на задачата важи $x\ge 1, y\ge 1, xy\ge 1$.

4. Дадени се реални броеви a,b,c,d за кои важи

$$a\sqrt{c^2-b^2}+b\sqrt{d^2-a^2}=c^2d^2-cd+1\,.$$

Пресметај ја вредноста на изразот

$$a^2c^2+b^2d^2.$$

Решение. Од $c^2 \ge b^2$ и $d^2 \ge a^2$ следува дека постојат агли $\alpha,\beta \in [0,\frac{\pi}{2}]$ за кои важи $|b|=|c|\sin\alpha$ и $|a|=|d|\sin\beta$. Заменуваме во даденото равенство, и ако го искористиме неравенството $c^2d^2-cd+1 \ge |cd|$, добиваме

$$|cd|\cos(\alpha+\beta)=c^2d^2-cd+1\ge|cd|.$$

Според тоа, $\cos(\alpha+\beta)\ge 1$, што значи дека $\cos(\alpha+\beta)=1$ и $cd=1$. Така, имаме

$$a^2c^2+b^2d^2=d^2c^2\sin^2\beta+c^2d^2\sin^2\alpha=c^2d^2(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=1.$$

Забелешка. Задачата може да се реши и со помош на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

5. Докажи, дека ако $\alpha,\beta,\gamma \in [0,\frac{\pi}{2})$ и $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{tg}\,\gamma \le 3$, тогаш

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma \ge 0.$$

Решение. *Прв начин*. Функцијата tg е ненегативна на $[0,\frac{\pi}{2})$, па затоа ако замениме $x=\mathrm{tg}\,\alpha, y=\mathrm{tg}\,\beta, z=\mathrm{tg}\,\gamma$, добиваме $x,y,z\ge 0$, $x+y+z\le 3$ и треба да докажеме дека

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}\ge 0,$$

Односно дека

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\ge\frac{3}{2}.$$

Последното неравенство следува од неравенството $\frac{1}{1+t^2}\ge 1-\frac{t}{2}$, кое е еквивалентно со очигледното неравенство $t(t-1)^2\ge 0$.

Втор начин. За секој $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})$ важи

$$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta=1-\sin 2\theta\,\mathrm{tg}\,\theta \ge 1-\mathrm{tg}\,\theta.$$

Понатаму, од условот на задачата имаме $-\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\gamma\ge -3$, па затоа

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma \ge 1-\mathrm{tg}\,\alpha+1-\mathrm{tg}\,\beta+1-\mathrm{tg}\,\gamma=3-3=0.$$

6. Определи ја најмалата константа C со следното својство: за секој $n\in\mathbb{N}$, позитивни броеви $x_1,x_2,...,x_n$ и $y_k=\frac{x_1+x_2+...+x_k}{k}, k=1,2,...,n$ важи

$$y_1^2+y_2^2+...+y_n^2\le C(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2).$$

Решение. Со индукција по n ќе докажеме дека важи

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \le 4(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

Од каде ќе следува дека $C \le 4$. Ова тривијално важи за $n = 1$, а за индуктивниот чекор ни е потребно неравенството

$$(2n+3)y_{n+1}^2 - 2ny_n^2 < 4x_{n+1}^2.$$

Ова неравенство со замена $x_{n+1} = (n+1)y_{n+1} - ny_n$ се сведува на неравенството

$$2n(2n+1)y_n^2 - 8n(n+1)y_n y_{n+1} + (4n^2 + 6n + 1)y_{n+1}^2 > 0,$$

кое е точно бидејќи левата страна е квадратен полином по y_n / y_{n+1} со дискриминанта $-8n$.

За да докажеме дека $C \ge 4$, од што ќе следува $C = 4$, ќе земеме $x_i = \frac{1}{\sqrt{i}}$.

Тогаш од $x_i > 2(\sqrt{i+1} - \sqrt{i})$ следува $y_k > \frac{2(\sqrt{k+1}-1)}{k}$ и оттука

$$y_k^2 > \frac{4(k+2-2\sqrt{k+1})}{k^2} > \frac{4}{k} - \frac{8}{k\sqrt{k}} = 4x_k^2 - \frac{8}{k\sqrt{k}}.$$

Бидејќи

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} < 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \le 3,$$

со собирање на горните неравенства добиваме

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 > 4(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - 24.$$

Бидејќи хармонискиот ред $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ дивергира, тврдењето следува непосредно.

7. Ако a, b, c се позитивни броеви такви што $abc = 1$, докажи го неравенството

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+1}} + \sqrt{\frac{b+c}{b+1}} + \sqrt{\frac{c+a}{c+1}} \ge 3.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+1}} + \sqrt{\frac{b+c}{b+1}} + \sqrt{\frac{c+a}{c+1}} \ge 3 \cdot \sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+1)(b+1)(c+1)}},$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge (a+1)(b+1)(c+1).$$

Воведуваме смен $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$, со што даденото неравенство го добива обликот:

$$(x^2 + yz)(y^2 + zx)(z^2 + xy) \ge xyz(x+y)(y+z)(z+x),$$

т.е.

$$3T_{3,3,0} + 3T_{4,1,1} + 2T_{2,2,2} \ge 6T_{3,2,1} + 2T_{2,2,2},$$

што всушност е неравенството на Мјурхед.

8. Природните броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ и n се такви што $a_1 + a_2 + ... + a_n = 2008$. За секој $k = 1, 2, ..., n$ означуваме $A_k = a_1 a_2 ... a_k$. Определи ја најголемата можна вредност на $A_1 + A_2 + ... + A_n$.

Решение. Да означиме $A_0 = 1$ и $S(n; a_1, a_2, ..., a_n) = A_1 + A_2 + ... + A_n$. Основните чекори на решението ќе ги презентираме како одделни леми.

Лема 1. Ако $S(n; a_1, a_2, ..., a_n)$ е максимален, тогаш $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$.

Доказ. Нека петпоставиме дека $a_k < a_{k+1}$ за некој $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Тогаш, замената на местата на a_k и a_{k+1} доведува до нова комбинација $n, b_1, b_2, ..., b_n$ ($b_i = a_i$, за $i \neq k, k+1, b_k = a_{k+1}, b_{k+1} = a_k$), за која имаме $B_i = a_1 a_2 ... a_i = A_i$ за $i \neq k$, додека $B_k - A_k = (a_{k+1} - a_k) A_{k-1} > 0$, што противречи на максималноста на $S(n; a_1, a_2, ..., a_n)$. ■

Лема 2. Ако $S(n; a_1, a_2, ..., a_n)$ е максимален, тогаш $a_i \leq 3$ за $i = 1, 2, ..., n$.

Доказ. Нека претпоставиме дека $a_i \geq 4$ за некој k. Тогаш од Лема 1 следува дека $a_1 \geq 4$. Дефинираме нова комбинација $n+1, c_1, ..., c_n, c_{n+1}$ со равенствата $c_1 = a_1 - 2$, $c_2 = 2$, $c_i = a_{i-1}$ за $i = 3, ..., n+1$. Тогаш $c_1 + c_2 + ... + c_{n+1} = 2008$ и не е тешко да се провери дека

$$\begin{aligned} S(n+1, c_1, c_2, ..., c_n, c_{n+1}) &= S(n; a_1, a_2, ..., a_n) + 2a_1 - 6 + \tfrac{(a_1-4)(A_2+...+A_n)}{a_1} \\ &> S(n; a_1, a_2, ..., a_n), \end{aligned}$$

што противречи на максималноста на $S(n; a_1, a_2, ..., a_n)$. ■

Лема 3. Постојат $n, a_1, a_2, ..., a_n$ за кои $S(n; a_1, a_2, ..., a_n)$ е максимален и 1 се појавува меѓу $a_1, a_2, ..., a_n$ најмногу еднаш.

Доказ. Нека претпоставиме дека во максималната комбинација имаме барем две единици. Тогаш од Лема 1 следува дека $a_{n-1} = a_n = 1$. Дефинираме комбинација $n-1, d_1, d_2, ..., d_{n-1}$ со равенствата $d_i = a_i$ за $i = 1, ..., n-2$ и $d_{n-1} = 2$. Тогаш $d_1 + d_2 + ... + d_{n-1} = 2008$ и не е тешко да се провери дека $A_k = D_k$ за $k = 1, 2, ..., n-2$ и $D_{n-1} = 2A_{n-2}$, па затоа

$$S(n-1, d_1, d_2, ..., d_{n-1}) = S(n; a_1, a_2, ..., a_n),$$

од што следува тврдењето на лемата. ■

Лема 4. Постојат $n, a_1, a_2, ..., a_n$ за кои $S(n; a_1, a_2, ..., a_n)$ е максимална и 2 се појавува меѓу $a_1, a_2, ..., a_n$ најмногу три пати.

Доказ. Нека претпоставиме дека во максималнаа комбинација имаме најмалку четири двојки. Тогаш од Лема 1 следува дека постои $k \in \{1, 2, ..., n-3\}$ за кој $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = a_{k+3} = 2$. Дефинираме нова комбинација $n-1, e_1, e_2, ..., e_{n-1}$ со равенствата $e_i = a_i$ за $i = 1, 2, ..., k-1$, $e_k = e_{k+1} = 3$ и $e_{i-1} = a_i$ за $i = k+3, ..., n$. Тогаш $e_1 + e_2 + ... + e_{n-1} = 2008$ и не е тешко да се провери дека

$$S(n-1, e_1, e_2, ..., e_{n-1}) - S(n; a_1, a_2, ..., a_n) = 2PA_{k-1},$$

каде $P = 0$, ако $k = n-3$ и $P = \frac{A_{k+4} + ... + A_n}{A_{k+3}}$, ако $k < n-3$. Оваа комбинација има две двојки помалку од $n, a_1, a_2, ..., a_n$ и лемата е докажана.■

Од лемите 1 – 4 следува дека треба да се определи максимумот меѓу следниве три комбинации:

1) $n = 670$, $a_1 = a_2 = ... = a_{669} = 3$ и $a_{670} = 1$,

2) $n = 670$, $a_1 = a_2 = ... = a_{668} = 3$ и $a_{669} = a_{670} = 2$,

3) $n = 671$, $a_1 = a_2 = ... = a_{667} = 3$, $a_{668} = a_{669} = a_{670} = 2$ и $a_{671} = 1$.

Ако означиме $X = 3 + 3^2 + ... + 3^{667}$ и $Y = 3^{667}$, тогаш соодветните вредности се:

1) $X + 3Y + 9Y + 9Y = X + 21Y$,

2) $X + 3Y + 6Y + 12Y = X + 21Y$,

3) $X + 2Y + 4Y + 8Y + 8Y = X + 22Y$.

Конечно, бараната комбинација е 3) и максимумот е $X + 22Y = \frac{47 \cdot 3^{667} - 3}{2}$.

9. Нека $\alpha(n)$ е бројот на единици во бинарниот запис на природниот број n. Докажи дека:

а) Важи неравенството $\alpha(n^2) \leq \frac{\alpha(n)(\alpha(n)+1)}{2}$.

б) Горното неравенство преминува во равенство за бесконечно многу природни броеви n.

Решение. а) Нека $\alpha(n) = k$. Значи, $n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + ... + 2^{a_k}$, каде a_i е позицијата (оддесно-налево) на секоја единица во бинарниот запис на n. Имаме:

$$n^2 = 2^{2a_1} + 2^{2a_2} + ... + 2^{2a_k} + 2^{a_1+a_2+1} + 2^{a_1+a_3+1} + ... + 2^{a_{k-1}+a_k+1},$$

при што $a_1 + a_2 + 1, a_1 + a_3 + 1, ..., a_{k-1} + a_k + 1$ се вкупно $\frac{(k-1)k}{2}$ броеви. Бидејќи меѓу броевите $2a_1, 2a_2, ..., 2a_k, a_1 + a_2 + 1, a_1 + a_3 + 1, ..., a_{k-1} + a_k + 1$ има најмногу $k + \frac{(k-1)k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$ различни броеви следува дека

$$\alpha(n^2) \leq \frac{k(k+1)}{2} = \frac{\alpha(n)(\alpha(n)+1)}{2}.$$

б) Нека избериме $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Бидејќи во бинарен систем $2^k = \underset{k \text{ нули}}{100...0}$ следува дека $\alpha(2^k) = 1$, па затоа $\alpha((2^k)^2) = \alpha(2^{k+1}) = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{\alpha(2^k)(\alpha(2^k)+1)}{2}$.

10. Дадени се реални броеви $a_1 \le a_2 \le a_3$. Докажи дека неравенството

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \ge 2(a_1x_2x_3 + a_2x_3x_1 + a_3x_1x_2)$$

е исполнето за произволни реални броеви x_1, x_2, x_3 ако и само ако постојат броеви $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [0, \pi]$ такви што

$$|\pi - \theta_1 - \theta_2| \le \theta_3 \text{ и } a_1 = \cos\theta_1, a_2 = \cos\theta_2, a_3 = \cos\theta_3 .$$

Решение. Даденото неравенство го разгледуваме како квадратна неравенка во однос на x_3 иу добиваме дека условот последователно е еквивалентен на

$$D_1 = (a_1x_2 + a_2x_1)^2 + 2a_3x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 \le 0,$$
$$(1 - a_1^2)x_2^2 + (1 - a_2^2)x_1^2 - 2(a_1a_2 + a_3)x_1x_2 \ge 0,$$
$$|a_1| \le 1 \text{ и } (a_1a_2 + a_3)^2 - (1 - a_1^2)(1 - a_2^2) \le 0,$$
$$|a_1| \le 1 \text{ и } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2a_3 \le 1,$$

т.е.

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2a_1a_2a_3 \le 1 . \tag{1}$$

Заради симетрија имаме $|a_2| \le 1$ и $|a_3| \le 1$, па можеме да ставиме

$$a_1 = \cos\theta_1, a_2 = \cos\theta_2, a_3 = \cos\theta_3,$$

каде $0 \le \theta_3 \le \theta_2 \le \theta_1 \le \pi$. Тогаш (1) последователно е еквивалентно на

$$-a_1a_2 - \sqrt{(1 - a_1^2)(1 - a_2^2)} \le a_3 \le -a_1a_2 + \sqrt{(1 - a_1^2)(1 - a_2^2)},$$
$$\cos(\pi - \theta_1 + \theta_2) \le \cos\theta_3 \le \cos(\pi - \theta_1 - \theta_2) . \tag{2}$$

Бидејќи $\pi - \theta_1 + \theta_2, |\pi - \theta_1 - \theta_2| \in [0, \pi]$ неравенствата (2) се еквивалентни со

$$|\pi - \theta_1 - \theta_2| \le \theta_3 \le \pi - \theta_1 + \theta_2 .$$

Последното неравенство важи секогаш, па затоа (2) е еквивалентно со

$$|\pi - \theta_1 - \theta_2| \le \theta_3 .$$

11. Нека збирот на реалните броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ е еднаков на нула и нивните апсолутни вредности се помали или еднакви на 1. Ако $|x| \le 1$, тогаш

$$\sum_{i=1}^{n} |x - a_i| \le n .$$

Докажи!

Решение. Функцијата $f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$ е збир на n конвексни функции, па затоа таа е конвексна функција. Според тоа, ако $|x| \le 1$, тогаш

$$\sum_{i=1}^{n} |x - a_i| \le \max_{x \in [-1,1]} f(x) = \max\{f(-1), f(1) = \max\{n, n\} = n .$$

12. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи го неравенството

$$a\sqrt{2b+1}+b\sqrt{2c+1}+c\sqrt{2a+1}\le\sqrt{2-(a^2+b^2+c^2)}\ .$$

Решение. *Прв начин.* Ако даденото неравенство го квадрираме и го искористиме равенството $1-(a^2+b^2+c^2)=2(ab+bc+ca)$ даденото неравенство се сведува на

$$\begin{aligned}L&=2a^2b+2b^2c+2c^2a+2ab\sqrt{(2b+1)(2c+1)}+\\&\quad+2bc\sqrt{(2c+1)(2a+1)}+2ca\sqrt{(2a+1)(2b+1)}\\&\le 4(ab+bcv+ca)=D.\end{aligned}$$

Од неравенствот меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}2ab\sqrt{(2b+1)(2c+1)}&\le ab(2b+2c+2),\\2bc\sqrt{(2c+1)(2a+1)}&\le bc(2c+2a+2),\\2ca\sqrt{(2a+1)(2b+1)}&\le ca(2a+2b+2).\end{aligned}$$

Ако ги искористиме последните три неравенства добиваме

$$\begin{aligned}L&\le 2(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+3abc)+2(ab+bc+ca)\\&=2(a+b+c)(ab+bc+ca)+2(ab+bc+ca)=4(ab+bc+ca)=D.\end{aligned}$$

Втор начин. За функцијата $f(x)=\sqrt{x}$ нејзиниот извод $f\,'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ монотоно опаѓа, па затоа таа е конкавна. Сега, бидејќи $a+b+c=1$ од неравенството на Јенсен следува

$$\begin{aligned}a\sqrt{2b+1}+b\sqrt{2c+1}+c\sqrt{2a+1}&\le\sqrt{a(2b+1)+b(2c+1)+c(2a+1)}\\&=\sqrt{(a+b+c)+(2ab+2bc+2ca)}\\&=\sqrt{2-(a^2+b^2+c^2)}.\end{aligned}$$

13. Нека x,y и z се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\ge\sqrt{\tfrac{3}{2}(x+y+z)}\ .$$

Решение. Неравенството е хомогено, па затоа е доволно да го докажеме во случај кога $x+y+z=1$. Во овој случај неравенството може да се запише во видот

$$f(x)+f(y)+f(z)\ge 3f(\tfrac{x+y+z}{3}),\qquad(1)$$

каде $f(t)=\frac{t}{\sqrt{1-t}}$. За функцијата f имаме $f\,'(t)=\frac{1}{2\sqrt{1-t}}+\frac{1}{2\sqrt{1-t}^3}$, т.е. таа строго монотоно расте на интервалот $[0,1)$, што значи дека f е конвексна на $[0,1)$. Сега неравенството (1) следува од неравенството на Јенсен.

14. Даден е природен број $n \geq 2$. Определи ја најмалата можна вредност на збир од видот

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(2+a_{i-1})(a_i-a_{i-1}),$$

каде $a_0=0, a_n=1$ и $a_1,...,a_{n-1} \in [0,1]$.

Решение. Нека S е дадениот збир. Од

$$2a(a-b)=a^2-b^2+(a-b)^2 \text{ и } 3ab(a-b)=a^3-b^3-(a-b)^3$$

следува

$$S=\tfrac{4}{3}+\sum_{i=1}^{n}[(a_i-a_{i-1})^2-\tfrac{(a_i-a_{i-1})^3}{3}].$$

Непосредно се проверува дека функцијата $f(x)=x^2-\frac{x^3}{3}$ е конвексна кога $x \leq 1$ (последното следува и од $f''(x)-2-2x$). Сега, од неравенството на Јенсен следува дека

$$S \geq \tfrac{4}{3}+n(\tfrac{1}{n^2}-\tfrac{1}{3n^3})=\tfrac{(n+1)(4n-1)}{3n^2},$$

при што знак за равенство важи за $a_i=\frac{i}{n}, 0 \leq i \leq n$.

15. Нека $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ и a и b се произволни реални броеви. Докажи дека

$$a^2 \operatorname{tg} x(\cos x)^{\frac{1}{3}}+b^2 \sin x \geq 2xab.$$

Решение. Да го разгледаме изразот

$$F(a,b)=a^2 \operatorname{tg} x(\cos x)^{\frac{1}{3}}-2xab+b^2 \sin x.$$

За $b \neq 0$ имаме

$$F(a,b)=b^2[(\tfrac{a}{b})^2 \operatorname{tg} x(\cos x)^{\frac{1}{3}}-2x\tfrac{a}{b}+\sin x].$$

За $a \neq 0$ имаме

$$F(a,b)=a^2[\operatorname{tg} x(\cos x)^{\frac{1}{3}}-2x\tfrac{b}{a}+(\tfrac{b}{a})^2 \sin x].$$

Во секој случај треба да докажеме дека $D<0$, каде

$$D=4[x^2-\operatorname{tg} x \sin x(\cos x)^{\frac{1}{3}}].$$

За $x \in (0,\frac{\pi}{2})$, неравенството $D<0$ е еквивалентно со неравенството

$$\cos x<(\tfrac{\sin x}{x})^3. \qquad (1)$$

Сега ако искористиме дека за $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ важи

$$\cos x<1-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^4}{24} \text{ и } \sin x>x-\tfrac{x^3}{6}, \qquad (2)$$

добиваме

$$\cos x < 1-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^4}{24} < (1-\tfrac{x^2}{6})^3 < (\tfrac{\sin x}{x})^3,$$

т.е. точно е неравенството (1),што значи дека е точно и почетното неравенство.

Забелешка. Неравенствата (2) се познати и истите се докажуваат со помош на Тејлоровата формула. Деталите ги оставаме на читателит за вежба.

16. Докажи дека

$$a^2(b-c)^2+b^2(a-c)^2+c^2(a-b)^2 \geq \tfrac{9}{2}abc(1-abc)$$

каде a,b,c се произволни реални броеви чиј збир е еднаков на 3.

Решение. Ставаме $q=ab+bc+ca$ и $p=abc$. Така, даденото неравенство го добива видот

$$q^2 \geq \tfrac{9}{4}p(5-p). \qquad (1)$$

Можеме да смертаме дека $p\in(0,1)$, во спротивно неравенство (1) е очигледно. Тогаш десната страна на (1) е монотоно растечка функција по p . Бидејќи $a+b+c=3$, реалните броеви a,b,c се корени на полиномот

$$f(x)=x^3-3x^2+px-q\ .$$

Движејќи се по графикот на функцијата f паралелно со оската Oy гледаме дека вредноста на p е најголема кога f има двојна нула (која не ја надминува третата нула на f). Значи, можеме да сметаме дека $a=1+2x$, $b=c=1-x$ ($x\geq 0$). Треба да докажеме дека

$$(1-x)^2(1-x+2(1+2x))^2 \geq \tfrac{9}{4}(1-x)^2(1+2x)(5-(1-x)^2(1+2x)) \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-x)^2(4(1+x)^2-(1+2x)(4+3x^2-2x^3)) \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2(x-1)^2(2x-1)^2 \geq 0,$$

што е очигледно.

17. Дадена е функцијата

$$f(x)=\tfrac{x^2-2006x+1}{x^2+1}\ .$$

а) Реши ја неравенката $f\,'(x)\geq 0$.

б) Докажи дека $|\,f(x)-f(y)\,|\leq 2006$ за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. а) Имаме

$$f\,'(x)=\frac{(2x-2006)(x^2+1)-2x(x^2-2006+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2006(x^2-1)}{(x^2+1)^2}\ .$$

Според тоа, $f\,'(x)\geq 0$ ако и само ако $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

б) *Прв начин*. Од а) следува дека $f(x)$ расте за $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ и опаѓа за $x \in (-1,1)$. Според тоа, најголемата вредност на функцијата е $f(-1)=1004$, а најмалата е $f(1)=-1002$. Оттука следува дека

$$|f(x)-f(y)| \le |1004-(-1002)| = 2006 \text{, за секои } x,y \in \mathbb{R}.$$

Втор начин. Множеството вредности на функцијата $f(x)$ се состои од сите реални броеви t за кои равенката $\frac{x^2-2006x+1}{x^2+1}=t$ има барем едно реално решение. Последното е исполнето ако дискриминантата на квадратната равенка $(1-t)x^2-2006x+1-t=0$ е ненегативна, т.е. $2006^2-4(1-t)^2 \ge 0$. Оттука наоѓаме $t \in [-1002,1004]$ и затоа $|f(x)-f(y)| \le 2006$ за секои $x,y \in \mathbb{R}$.

Трет начин. Јасно, $f(x)=\frac{x^2-2006x+1}{x^2+1}=1-1003\cdot\frac{2x}{x^2+1}$. Имаме, $-1 \le \frac{2x}{x^2+1} \le 1$, па затоа

$$1003 \ge \frac{-2006x}{x^2+1} \ge -1003 \text{, т.е. } 1+1003 \ge 1-\frac{2006x}{x^2+1} \ge 1-1003.$$

Значи, $-1002 \le f(x) \le 1004$ и затоа $|f(x)-f(y)| \le 2006$ за секои $x,y \in \mathbb{R}$.

18. Нека p и q се позитивни реални броеви и

$$E(p,q)=\frac{3p+4q}{5p+6q}+\frac{3q+4p}{5q+6p}.$$

Докажи дека

$$\frac{19}{15} < E(p,q) \le \frac{14}{11}.$$

Решение. Ставаме $x=\frac{p}{q}$ и задачата ја сведуваме на испитување на функцијата $f(x)=\frac{3x+4}{5x+6}+\frac{3+4x}{5+6x}$ на интервалот $(0,+\infty)$. Функцијата $f(x)$ е диференцијабилна на разгледуваниот интервал и важи

$$f'(x)=\frac{-22(x^2-1)}{(5x+6)^2(6x+5)^2}.$$

Според тоа, во интервалот $(0,+\infty)$ функцијата има единствена критична точка $x=1$. Понатаму, $f'(x)>0$ на $(0,1)$ и $f'(x)<0$ на $(1,+\infty)$, па затоа во точката $x=1$ функцијата има локален максимум на $(0,+\infty)$, кој истовремено е глобален максимум на $(0,+\infty)$. Имаме

$$f(1)=\frac{14}{11} \text{ и } \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{19}{15},$$

па затоа важи $\frac{19}{15} < E(p,q) \le \frac{14}{11}$.

19. За кои реални броеви x,y,z од интервалот $[1,7]$ изразот

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{y^2+z^2}+\frac{z^2}{z^2+x^2}$$

прима најмала вредност.

Решение. Нека $f(a,b,c)=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$. Изразот е цикличен, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека x е најголемиот од броевите. Ќе докажеме дека $f(x^2,y^2,z^2)\geq f(x^2,y^2,xy)$. Навистина,

$$f(x^2,y^2,z^2)-f(x^2,y^2,xy)=\frac{y^2}{y^2+z^2}+\frac{z^2}{z^2+x^2}-\frac{2y}{x+y}$$
$$=\frac{(x-y)(xy-z^2)^2}{(y^2+z^2)(z^2+x^2)(x+y)}\geq 0.$$

Притоа, знак за равенство важи ако и само ако $x=y$ или $z^2=xy$. Ако ставиме $t=\frac{x}{y}$, тогаш t ги прима сите вредности од интервалот $[1,7]$ и имаме

$$f(x^2,y^2,xy)=\frac{t^2}{t^2+1}+\frac{2}{t+1}=g(t).$$

Според тоа, на интервалот $(1,7)$ важи

$$g'(t)=\frac{2t}{(t^2+1)^2}-\frac{2}{(t+1)^2}=\frac{-2t^4+2t^3+2t-2}{(t^2+1)^2(t+1)^2}=\frac{-2(1-t)^2(t^2+t+1)}{(t^2+1)(t+1)}<0.$$

Значи, функцијата g монотоно опаѓа на разгледуваниот интервал и бидејќи е непрекината на $[1,7]$, таа најмалата вредност ја достигнува во $t=7$ и имаме $g(7)=\frac{123}{100}=1,23$. Според тоа, за секои $x,y,z\in[1,7]$ важи

$$f(x^2,y^2,z^2)\geq f(x^2,y^2,xy)=1,23,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $t=7$, т.е. $\frac{x}{y}=7$ и $z^2=xy$, што значи $x=7,y=1,z=\sqrt{7}$. Оттука, заради цикличноста имаме дека решенија на задачата се

$$(x,y,z)=(7,1,\sqrt{7}),(1,\sqrt{7},7),(\sqrt{7},7,1).$$

20. Нека $n>2$ е природен број и $a_1<a_2<...<a_{2n}$ се реални броеви. Воведуваме ознаки

$$S=\sum_{i=1}^{2n}a_i,\ A_1=\sum_{i,j;\,i<j}a_{2i}a_{2j},\ A_2=\sum_{i,j;\,i<j}a_{2i-1}a_{2j-1}.$$

Докажи, дека $(n-1)S^2\geq 4n(A_1+A_2)$.

Решение. *Лема.* Ако полиномот

$$f(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+...+b_{n-1}x+b_n$$

има n реални различни корени, тогаш $(n-1)b_1^2-2nb_0b_2>0$.

Доказ. Ако $f(x)$ го диференцираме $n-2$ пати, добиваме квадратен трином со два реални и различни корени, па затоа неговата дискриминанта

$D=(n-1)b_1^2-2nb_0b_2$ е позитивна. ■

Сега, да го разгледаме полиномот

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_3)...(x-a_{2n-1})+(x-a_2)(x-a_4)...(x-a_{2n}).$$

Не е тешко да се види дека овој полином ги задоволува условите на лемата и дека неравенството кое се добива во лемата е бараното неравенство. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

21. Нека a,b,c се реални броеви такви што $a+b+c=3$ и $abc=-4$. Докажи дека

$$5(ab+bc+ca)\le 12+3abc.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека $p=abc$, $q=ab+bc+ca$ и $f(x)=x^3-3x^2+qx-p$. Бидејќи $f'(x)=3x^2-6x+q$, добиваме $f'(x)=0$ за $x_{1,2}=1+\sqrt{1-\frac{q}{3}}$. Според тоа, равенката $f(x)=0$ има три реални решенија кога $q\le 3$ и $f(x_1)f(x_2)\le 0$ (Зошто?). Бидејќи $3f(x_i)=(x_i-1)f'(x_i)+2(q-3)x_i+q-3p$, добиваме

$$\begin{aligned}9f(x_1)f(x_2)&=(2(q-3)x_1+q-3p)(2(q-3)x_2+q-3p)\\&=4(q-3)^2x_1x_2+2(q-3)(q-3p)(x_1+x_2)+(q-3p)^2\\&=\frac{4q(q-3)^2}{3}+4(q-3)(q-3p)+(q-3p)^2\\&=9(2+p-q)^2+\frac{4(q-3)^3}{3},\end{aligned}$$

па затоа $27(2+p-q)^2\le 4(3-q)^3$. Во случајов $q\le 3$.

Тогаш $q-2-p\le\sqrt{\frac{4(3-q)^3}{27}}$ и затоа

$$12+3p-5q\ge 12+3(q-2-\sqrt{\frac{4(3-q)^3}{27}})-5q=\frac{2q(3-q)}{1+\sqrt{1-\frac{q}{3}}}.$$

Значи, $12+3p\ge 5q$, кога $q\ge 0$, а во спротивно ова неравенство следува од $p\ge -4$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$ или $q=0$, $p=-4$, т.е. еден од броевите е -1, а другите два се 2.

22. Докажи дека, ако $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ се произволни реални броеви, а $c_1,c_2,...,c_n$ се позитивни реални броеви, тогаш

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{c_i+c_j}\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{b_ib_j}{c_i+c_j}\right)\ge\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ib_j}{c_i+c_j}\right)^2.$$

Решение. Можеме да сметаме дека не се сите a_i еднакви на нула и не се сите b_i еднакви на нула. Прво ќе докажеме дека

$$f(x)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{c_i+c_j}x^{c_i+c_j}\geq 0,\ \ x\geq 0\ .$$

Имаме $xf\,'(x)=(\sum_{i=1}^{n}a_ix^{c_i})^2\geq 0$, па затоа $f(x)\geq f(0)=0$, за $x\geq 0$. Аналогно се докажува дека

$$g(x)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{b_ib_j}{c_i+c_j}x^{c_i+c_j}\geq 0,\ \ x\geq 0\ .$$

Сега ставаме

$$h(x)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_ib_j}{c_i+c_j}x^{c_i+c_j}\ .$$

Ќе докажеме поопшто неравенство од даденото, т.е. ќе докажеме дека

$$f(x)g(x)\geq h^2(x),\ \ x\geq 0\ .$$

Можеме да см,етаме дека $h(x)\geq 0$ за даден x (во спротивно го заменуваме a_i со $-a_i$). Тогаш треба да докажеме дека $s(x)=\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}-h(x)\geq 0$. Од неравенството $a^2+b^2\geq 2ab$ за $x\geq 0$ следува дека

$$\begin{aligned}xs'(x)&=\frac{xf\,'(x)\sqrt{g(x)}}{2\sqrt{f(x)}}+\frac{xg\,'(x)\sqrt{f(x)}}{2\sqrt{g(x)}}-xh'(x)\\&\geq\sqrt{xf\,'(x)g\,'(x)}-xh'(x)\\&=\mid\sum_{i=1}^{n}a_ix^{c_i}\sum_{i=1}^{n}b_ix^{c_i}\mid-\sum_{i,j=1}^{n}a_ib_jx^{c_i+c_j}\\&\geq\sum_{i=1}^{n}a_ix^{c_i}\sum_{i=1}^{n}b_ix^{c_i}-\sum_{i,j=1}^{n}a_ib_jx^{c_i+c_j}=0\end{aligned}$$

па затоа $s(x)>s(0)$ за $x\neq 0$.

23. Нека a,b,c се позитивни реални броеви и n и k се природни броеви. Докажи го неравенството

$$\frac{a^{n+k}}{b^n}+\frac{b^{n+k}}{c^n}+\frac{c^{n+k}}{a^n}\geq a^k+b^k+c^k\ .$$

Решение. Според тежинското неравенство меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$\frac{k}{n+k}\frac{a^{n+k}}{b^n}+\frac{n}{n+k}b^k\geq(\frac{a^{n+k}}{b^n})^{\frac{k}{n+k}}(b^k)^{\frac{n}{n+k}}=a^k\ ,$$

т.е.

$$\frac{a^{n+k}}{b^n}\geq\frac{n+k}{k}a^k-\frac{n}{k}b^k\ .$$

Ако ова неравенство го собереме со аналогните две неравенства го добиваме бараното неравенство. Збак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

24. Докажи дека

$$(\tfrac{6}{5})^{\sqrt{3}} > (\tfrac{5}{4})^{\sqrt{2}}.$$

Решение. Прво ќе докажеме дека ако $x > -1, x \neq 0$ и $\alpha \in (1,2)$, тогаш

$$0 < f(x) = (1+x)^{\alpha} - 1 - \alpha x - \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 - \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3. \qquad (1)$$

Имаме:

$$f'(x) = \alpha[(1+x)^{\alpha-1} - 1 - (\alpha-1)x - \tfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}x^2],$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)[(1+x)^{\alpha-2} - 1 - (\alpha-2)x],$$

$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)[(1+x)^{\alpha-3} - 1].$$

Од $f'''(x) < 0$ за $x \in (-1,0)$ и $f'''(x) > 0$ за $x > 0$, следува $f''(x) > f''(0) = 0$ за $x > -1, x \neq 0$. Тогаш $f'(x) < f'(0)$ за $x \in (-1,0)$ и $f'(x) > f'(0)$ за $x > 0$, па затоа $f(x) > f(0) = 0$ за $x > -1, x \neq 0$.

Сега ќе докажеме дека $(\tfrac{6}{5})^{\sqrt{3}} > (\tfrac{5}{4})^{\sqrt{2}}$. Ставаме $x = \tfrac{1}{5}$ и $\alpha = \sqrt{\tfrac{3}{2}}$. Според (1) доволно е да провериме дека

$$\alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 > \tfrac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{277}{1500}\alpha + \tfrac{3}{125} > \tfrac{1}{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha > \tfrac{339}{277} \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot 277^2 > 2 \cdot 339^2 \quad \Leftrightarrow \quad 230187 > 229842.$$

Последното неравенство очигледно е точно, со што задачата е решена.

III НИЗИ

III.1. АРИТМЕТИЧКА И ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

1. Дадена е аритметичка прогресија со 2025 членови, прв член $a_1 = 1$ и разлика $d \neq 0$. Познато е дека постои природен број $n, 1 < n < 2025$ за кој a_1, a_n, a_{2025} во овој редослед формираат геометриска прогресија со количник $q = d + n - 1$. Определи ја разликата d.

   Решение. Од $a_n = qa_1$ наоѓаме $1 + (n-1)d = d + n - 1$, т.е. $(n-2)(d-1) = 0$. За $d = 1$ имаме $a_{2025} = 2025$, $q = n$ и од $a_{2025} = a_1 q^2 = n^2$ следува дека $n^2 = 2025$, т.е. $n = 45$. За $n = 2$ имаме $q = d + 1$ и од $a_{2025} = a_1 q^2 = q^2$ добиваме $(1+d)^2 = 1 + 2024d$, т.е. $d = 2022$.

   Конечно, бараните вредности за d се $d = 1$ и $d = 2022$.

2. Дадена е бесконечна аритметичка прогресија $a_1, a_2, \ldots$. Познато е дека постојат природни броеви p, q, t, ($p \neq q$) такви што $a_p + pt = a_q + tq$. Ако $a_t = t$ и збирот на првите t членови на прогресијата е еднаков на 18, определи го a_{2008}.

   Решение. Од условот на задачата следува дека
   $$a_1 + (p-1)d + pt = a_1 + (q-1)d + qt,$$
   па затоа $(p-q)(d+t) = 0$. Но, $p \neq q$, па затоа $d = -t$. Сега,
   $$t = a_t = a_1 + (t-1)(-t), \text{ т.е. } a_1 = t^2.$$
   Од $\sum_{i=1}^{t} a_i = 18$ следува $\frac{t^2+t}{2}t = 18$, т.е. $t^2(t+1) = 36$. Бидејќи t е природен број, од последната равенка добиваме $t = 3$. Значи,
   $$a_{2008} = 9 + 2007 \cdot (-3) = -6012.$$

3. Дадени се различни цели броеви a, b, c кои формираат аритметичка прогресија. Истите броеви, евентуално во некој друг редослед формираат геометриска прогресија. Докажи дека 21 е делител на $a^2 + b^2 + c^2$.

   Решение. Од условот следува дека $a + c = 2b$. Бидејќи броевите формираат геометриска прогресија, ако еднoт од нив е еднаков на 0, тогаш и другите се еднакви на нула, што противречи на условот на задачата. Во зависност од редоследот во геометриската прогресија имаме $b^2 = ac, a^2 = bc$ или $c^2 = ab$, при што последните два случаја се аналогни. Ако $b^2 = ac$, тогаш

$$(a+c)^2 = 4b^2 = 4ac \text{, т.е. } a = c,$$

што значи $a = b = c$, што е противречност. Ако $a^2 = bc$, добиваме $a + \frac{a^2}{b} = 2b$, од каде добиваме $a^2 + ab - 2b^2 = 0$. Решенијата на оваа хомогена равенка се $a = b$ (што противречи на условот) и $a = -2b$. Според тоа, $c = 2b - a = 4b$ и тогаш $a^2 + b^2 + c^2 = 21b^2$, т.е. 21 е делител на $a^2 + b^2 + c^2$.

4. Дадени се аритметичка прогресија со прв член a_1 и разлика d и геометриска прогресија со прв член b_1 и количник q. Ако $a_1 + b_1 = d + 2a_1 = 0$ и збирот на првите четири члена на геометриската прогресија е еднаков на збирот на првите пет члена на аритметичката прогресија, определи го количникот на геометриската прогресија.

Решение. Од формулите за збир на првите n членови на аритметичката и геометриската проресија и од условот на задачата следува

$$b_1(q^3 + q^2 + q + 1) = 5(a_1 + 2d).$$

Ако замениме $d = 2a_1$ и $a_1 = -b_1$, добиваме $q^3 + q^2 + q - 14 = 0$. Делители на бројот 14 се $\pm1, \pm2, \pm7, \pm14$ и со непосредна проверка се добива дека едно решение на последната равенка е бројот 2. Според тоа, последната равенка е еквивалентна на равенката $(q-2)(q^2 + 3q + 7) = 0$ и како $q^2 + 3q + 7 > 0$, добиваме дека $q = 2$ е единствено решение на задачата.

5. Определи ги сите природни броеви d, за кои постои бесконечна аритметичка прогресија $a_1, a_2, ...$ од природни броеви со разлика d и за која важи: постои природен број k таков што за секој природен број n броевите $a_{S_{n+1}}, (n+k)a_k, -a_{S_n}$ формираат (во овој редослед) аритметичка прогресија. (S_n е збирот на првите n членови на прогресијата, т.е. $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.)

Решение. Од $a_{S_{n+1}} - a_{S_n} = 2(n+k)a_k$ следува $a_{n+1}d = (n+k)a_k$, односно

$$(a_1 + nd)d = (n+k)a_k.$$

Последното равенство важи за секој n, па затоа $d^2 = a_k$ и $a_1 d = ka_k$. Според тоа, $a_1 d = ka_k = kd^2$, од каде добиваме $a_1 = kd$. Сега, од

$$a_k = a_1 + (k-1)d = d^2$$

добиваме $kd+(k-1)d=d^2$ или $d=2k-1$. Според тоа, бараните броеви се сите непарни природни броеви.

6. Дадени се реални броеви a_i, b_i $(1\le i\le k)$. Дефинираме
$$x_v=[a_1n+b_1]+...+[a_kn+b_k].$$
Ако низата $x_1, x_2, ...$ е аритметичка прогресија, докажи дека $a_1+a_2+...+a_k$ е цел број.

Решение. Нека $x_n=an+b$ за некои константи $a,b\in\mathbb{Z}$. Да означиме
$$A=a_1+a_2+...+a_k \text{ и } B=b_1+b_2+...+b_k.$$
Од $a_in+b_i-1\le[a_in+b_i]\le a_in+b_i$, за $i=1,,...,k$ ако ги собереме овие неравенства добиваме $An+B-k\le x_n\le An+B$, т.е. $B-b-k\le(a-A)n\le B-b$ за секој $n\in\mathbb{N}$, што е можно единствено ако $A=a$.

7. Збирот на првите n членови на аритметичка прогресија со прв член m и разлика 2 е еднаков на збирот на првите m членови на геометриска прогресија со прв член n и количник 2.

а) Докажи, дека $m+n=2^m$.

а) Определи ги m и n ако третиот член на геометриската прогресија е еднаков на дваесет и третиот член на аритметичката прогресија.

Решение. а) Ако ги искористиме формулите за збир на првите n членови на аритметичка и геометриска прогресија, добиваме
$$\tfrac{n(2m+2(n-1))}{2}=n(2^m-1),$$
од каде добиваме $m+n=2^m$.

б) Имаме $2^2n=m+22\cdot 2$, па затоа $4n=m+44$. Ако ги искористиме резултатот под а) добиваме $2^{m+2}=44+5m$. За $m>4$, со индукција се докажеува дека $2^{m+2}>44+5m$, а за $m\le 4$ со непосредна проверка добиваме дека единствено решение е $m=4$. Притоа, $n=12$.

8. Определи ги сите тројки (a,b,c) различни реални броеви од интервалот $(0,2\pi)$ такви што

1) Броевите a,b,c во овој редослед формираат аритметичка прогресија,

2) Броевите $\sin a, \sin b, \sin c, \sin\tfrac{a+b+c}{2}$ во овој редослед формираат аритметичка прогресија.

Решение. Од равенствата $a+c=2b$ и $\sin a+\sin c=2\sin b$ добиваме
$$2\sin b=\sin a+\sin c=2\sin\tfrac{a+c}{2}\cos\tfrac{a-c}{2}=2\sin b\cos\tfrac{a-c}{2}.$$

Ако $\sin b \neq 0$, тогаш $\cos\frac{a-c}{2}=1$, што не е можно ако $a,c\in(0,2\pi)$ и $a\neq c$. Според тоа, $\sin b=0$, т.е. $b=\pi$. Сега $\sin\frac{a+b+c}{2}=\sin\frac{3b}{2}=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$, што значи дека разликата во аритметичката прогресија $\sin a,\sin b,\sin c,\sin\frac{a+b+c}{2}$ е $-\frac{1}{2}$. Значи, $\sin a=\frac{1}{2}$ и $\sin c=-\frac{1}{2}$. Оттука ги добиваме решенијата $a=\frac{\pi}{6},b=\pi,c=\frac{11\pi}{6}$ и $a=\frac{5\pi}{6},b=\pi,c=\frac{7\pi}{6}$.

9. Броевите $a_1=0,a_2,a_3,a_4$ и a_5 формираат во овој редослед аритметичка прогресија со разлика d, $0<d<180$. Определи го a_2 ако броевите

$$|\sin a_1^\circ|,|\sin a_3^\circ|,\sqrt{2}|\sin a_4^\circ|,\sqrt{3}|\sin a_5^\circ|$$

се различни и се последователни членови на аритметичка прогресија.

Решение. Од условто на задачата следува $a_1=0,a_2=d,a_3=2d,a_4=3d$ и $a_5=4d$. Тогаш броевите $0,|\sin 2d|,\sqrt{2}|\sin 3d|,\sqrt{3}|\sin 4d|$ се последователни членови на артиметичка прогресија. Според тоа, $3|\sin 2d|=\sqrt{3}|\sin 4d|$, па затоа $(\sqrt{3}-2|\cos 2d|)\sin 2d=0$. Ако $\sin 2d=0$, тогаш броевите во втората прогресија не се различни. Ако $\sqrt{3}-2|\cos 2d|=0$, т.е. $\cos 2d=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, тогаш $d=15,75,105,165$. Непосредно се проверува дека за секоја од овие вредности на d се добива решение.

10. Нека q и d се природни броеви. Геометриска прогресија со прв член q има количник q. Аритметичка прогресија со прв член 169, последен член 2017 и разлика d има q членови. Збирот на членовите на геометриската прогресија е еднаков на збирот на членовите на аритметичката прогресија. Определи го d.

Решение. Од $2017=169+(q-1)d$ следува $(q-1)d=1848$, што значи дека $q-1$ е делител на 1848. Условот двете прогресии да имаат еднакви збирови на членовите е еквивалентен на

$$\frac{169+2017}{2}q=q+q^2+...+q^n \quad\Leftrightarrow\quad 1092=q+q^2+...+q^{n-1}.$$

Според тоа, q е делител на $1092=2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 13$.

Ако $n=2$, тогаш $q=1092$ и $q=1091$ не е делител на 1848.

Ако $n=3$ ја добиваме квадратната равенка $q^2+q-1092=0$ која нема целобројни решенија.

Ако $n\geq 4$ добиваме $1092=q+q^2+...+q^{n-1}\geq q+q^2+q^3$, и за $q\geq 10$ последното неравенство не е исполнето. Со непосредна проверка на делителите на 1092 кои се помали од 10 (тоа се 2, 3, 4, 6, и 7) се добива дека единствено решение е $q=3$ и $n=7$. Сега, од $(q-1)d=1848$ следува $d=924$.

11. Дадена е геометриска прогресија $b_1 \neq 0, b_2, ..., b_n$ која има $n \geq 3$ членови и количник $q>1$ кој е природен број. Аритметичка прогресија има прв член еднаков на првиот член на геометрикстата прогресија и последен член еднаков на предпоследниот член на геометриската прогресија. Збирот на членовите на геометриската прогресија е еднаков на збирот на членовите на аритметичката прогресија. Определи го бројот n.

Решение. Од условот следува дека ако аритметичката прогресија има k членови, тогаш $a_1=b_1$ и $a_k=b_{n-1}=b_1q^{n-2}$. Според тоа,

$$b_1(1+q+...+q^{n-1})=a_1+a_2+...+a_k,$$
$$b_1(1+q+...+q^{n-1})=\frac{a_1+a_k}{2}k,$$
$$b_1(1+q+...+q^{n-1})=b_1\frac{1+q^{n-2}}{2}k,$$
$$1+q+...+q^{n-1}=\frac{1+q^{n-2}}{2}k,$$
$$k=\frac{2(1+q+...+q^{n-1})}{1+q^{n-2}}.$$

Ако $n=3$, тогаш $k=\frac{2(1+q+q^2)}{1+q}=2+\frac{q^2}{1+q}$ не е природен број.

Ако $n=4$, тогаш $k=\frac{2(1+q+q^2+q^3)}{1+q}=2(1+q^2)$.

Ако $n \geq 5$, тогаш $k=\frac{2(1+q+...+q^{n-1})}{1+q^{n-2}}=2(q+1)+\frac{2(q^2+...+q^{n-3})}{1+q^{n-2}}$ не е природен број.

12. Докажи дека бројот r е рационален ако и само ако постојат три различни цели броја a,b и c за кои $r+a, r+b$ и $r+c$ формираат геометриска прогресија.

Решение. Нека r е рационален број. Ако r е цел број, тогаш броевите a,b,c може да бидат определени, на пример, како решение на системот $r+a=1$, $r+b=2, r=c=4$. Нека $r=\frac{p}{q}$. Акоземеме $a=0, b=p, c=2p+q$, тогаш ја добиваме гееометриската прогресија $\frac{p}{q}, \frac{p}{q}(1+q), \frac{p}{q}(1+q)^2$. Очигледно дека $a \neq b$, а случајот $b=c$ соодветствува на $r=-1$ кој веќе го разгледавме. Ако $2p+q=0$, т.е. $\frac{p}{q}=-\frac{1}{2}$ можеме да земеме $a=0, b=-1$ и $c=-4$.

Нека $r+a, r+b$ и $r+c$ формираат геометриска прогресија. Тогаш

$$(r+b)^2 = (r+a)(r+b),$$

од каде добиваме $r(a+c-2b) = b^2 - ac$. Ако $a+c-2b=0$, тогаш a,b,c формираат аритметичка прогресиа со разлика d. Ставаме $a=b-d, c=b+d$ и добиваме $0 = b^2 - ac = d^2$, па затоа $d=0$ и $a=b=c$, што е противречност. Значи, $r=\frac{b^2-ac}{a+c-2b}$, т.е. r е рационален број.

13. Дадена е аритметичка прогресија со прв член $a_1 > 0$ и разлика d. Докажи:

а) ако $d = 2a_1$, тогаш за секој $n > 1$ броевите a_1, a_n и $a_{(n-1)^2+n^2}$, земени во овој редослед формираат геометриска прогресија.

б) Ако $\frac{d}{a_1}$ е природен број и a_1, a_n и a_m за $n>1$ формираат геометриска прогресија, тогаш $1+\frac{d}{a_1}(m-1)$ е точен квадрат.

Решение. Ако a_1, a_n и a_m формираат геометриска прогресија, тогаш $a_1 a_m = a_n^2$, па затоа

$$a_1(a_1+(m-1)d) = (a_1+(n-1)d)^2,$$

т.е.

$$\frac{d}{a_1} = \frac{m-1-2(n-1)}{(n-1)^2} \tag{1}$$

а) Непопсредно се проверува дека (1) важи за $\frac{d}{a_1} = 2$ и $m = (n-1)^2 + n^2$.

б) Ако $\frac{d}{a_1} = t$ и $n-1 = x$, тогаш (1) е еквивалентно на $tx^2 + 2x - (m-1) = 0$. Но, x е природен број, па затоа $D = 1+t(m-1)$ е точен квадрат.

14. За кои вредности на $x \in (-\pi, \pi)$ броевите $2^{\sin x}, 2-2^{\sin x+\cos x}, 2^{\cos x}$ се последователни членови на геометриска прогресија?

Решение. Потребен и доволен услов дадените броеви да се три последователни членови на геометриска прогресија е

$$2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x} = (\,2-2^{\sin x+\cos x})^2,$$

т.е.

$$4^{\sin x+\cos x} - 5\cdot 2^{\sin x+\cos x} + 4 = 0.$$

Воведуваме смена $y = 2^{\sin x+\cos x}$ и ја добиваме квадратната равенка

$$y^2 - 5y + 4 = 0,$$

чии решенија се $y_1 = 4$ и $y_2 = 1$.

За $2^{\sin x+\cos x}=4$, добиваме $\sin x+\cos x=2$, т.е. $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}>1$, што не е можно. За $2^{\sin x+\cos x}=1$, добиваме $\sin x+\cos x=0$, т.е. $\sin(x+\frac{\pi}{4})=0$, од каде наоѓаме $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Од овие решенија на интервалот $(-\pi,\pi)$ припаѓаат само $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

15. Синусите на три различни агли од интервалот $[0,2\pi]$ формираат аритметичка прогресија. Докажи, дека нивните косинуси, земени во истиот редослед, не може да формираат аритметичка прогресија.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека постојат три различни природни броеви $x,y,z\in[0,2\pi]$ такви што

$$\sin x+\sin y=2\sin z \text{ и } \cos x+\cos y=2\cos z\,.$$

Ако горните равенства ги квадрираме и ги собереме го добиваме равенството $\cos(x-y)=1$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $x>y$. Сега, од $x-y\in(0,2\pi]$ следува $x=2\pi, y=0$. Тогаш или $z=x$ или $z=y$, што е противрелност.

16. Докажи, дека постојат природен број n и n^9 природни броеви помали од n^{10}, такви што меѓу овие n^9 не постојат три броја кои формираат аритметичка прогресија.

Решение. Нека $k,p\in\mathbb{N}$. Да ги разгледаме природните броеви, кои имаат k цифри во броен систем со основа $p+1$. Бидејќи збирот од квадратите на цифрите на секој број е помал или еднаков на kp^2, добиваме дека има најмалку $q=\frac{(p+1)^k-1}{kp^2}$ броеви кои имаат еднаков збир на цифри, да кажеме r.

От друга страна, броевите со истите цифри, но во систем со основа $2p+1$ се различни. Освен тоа, ако три од тие броеви формираат аритметичка прогресија (на пример $a+b=2c$), тогаш нивните цифри на секоја позиција формираат аритметичка прогресија (збирот на било кои две цифри е помал или еднаков на $2p<2p+1$). Меѓутоа, тоа не е можно бидејќи разгледувани како точки во $\mathbb{R}^k$ (со координати соодветните цифри), a,b и c лежат на $k-$димензионална сфера со радиус $\sqrt{r}$ и истовремено се колинеарни (c е средина на отсечката со крајни точки a и b).

Така има најмалку q природни броеви помали од $(2p+1)^k$ такви што меѓу нив нема три кои формираат аритметичка прогресија. За $p+1=2^k$ следува дека има повеќе од $\frac{2^{k(k-2)}}{k}$ броеви помали од $2^{k(k+1)}$ такви што меѓу нив нема три броја кои формираат аритметичка прогресија. Тогаш за секој доволно голем број k можеме да избереме n да биде најмалиот природен број таков што $n^{10} \ge 2^{k(k+1)}$.

17. Дадени се низите реални броеви

$$a_1 < a_2 < ... < a_n \text{ и } b_1 < b_2 < ... < b_m, \ m,n \in \mathbb{N}, \ m \ge 2, n \ge 2. \qquad (1)$$

Докажи дека множеството

$$M = \{a_i + b_j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$$

се состои од $n+m-1$ елементи ако и само ако и двете низи се аритметички прогресии со една иста разлика d.

Решение. Ако двете низи се аритметички прогресии со една иста разлика d, тогаш $a_i = a_1 + (i-1)d$ и $b_j = b_1 + (j-1)d$. Според тоа,

$$M = \{a_i + b_j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\} = \{a_1 + b_1 + (i + j - 2)d\},$$

што значи дека множеството M има $n+m-1$ елементи.

Прво да забележиме дека

$$a_1 + b_1 < a_2 + b_1 < ... < a_n + b_1 < a_n + b_2 < ... < a_n + b_m, \qquad (2)$$

што значи дека во множеството M има најмалку $n+m-1$ елементи.

Нека множеството M има $n+m-1$ елементи.

Ќе користиме индукција по $n+m$. За $m+n=4$ имаме $m=n=2$, па затоа имаме четири збирови $a_1+b_1, a_1+b_2, a_2+b_1, a_2+b_2$. Но, M има $2+2-1=3$ елементи, па од (1) и (2) следува дека

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1, \text{ т.е. } b_2 - b_1 = a_2 - a_1 = d,$$

што значи дека и двете низи се аритметички прогресии со една иста разлика d.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој $m+n \ge 4$, при што $m \ge 2$, $n \ge 2$. Нека $m+n > 4$, при што $m > 2, n \ge 2$. Множеството M има $n+m-1$ елементи. Низата добиена со бришење на b_m содржи $m-1$ елемент и во множеството M се губи барем најголемиот елементот $a_n + b_m$, што значи дека остануваат најмногу $n+m-2$ збирови. Сега, согласно претходните разгледувања, тоа е најмалиот можен број различни збирови (види (2)), па затоа заклучуваме дека во множеството M остануваат точно $n+(m-1)-1$ елементи. Од индуктивната претпоставка следува дека двете низи $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_{m-1}$ се аритметички прогресии со еднакви разлики. На потполно ист начин, со бришење на b_1, при што се губи барем најмалиот збир $a_1 + b_1$, заклучуваме дека двете низи $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_2, ..., b_{m-1}, b_m$ се аритметички прогресии со еднакви разлики. Конечно, низите $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_m$ се аритметички прогресии со еднакви разлики, со што задачата е решена.

18. Низата природни броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ги задоволува условите $a_{n+1} > a_n$ и $a_{2n} = 2a_n$ за секој n.

а) Докажи дека за секој прост број $p > a_1$ постои член на оваа низа кој е делив со p.

б) Докажи дека за секој непарен прост број p постои низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ со наведените својства во која ниту еден член не е делив со p.

Решение. а) Нека n е таков што разликата $a_{n+1} - a_n = d$ е најмала можна. Тогаш $a_{2n+2} - a_{2n} = 2a_{n+1} - 2a_n = 2d$, па како заради изборот на d важи

$$a_{2n+2} - a_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} + a_{2n+1} - a_{2n} \geq d + d = 2d ,$$

мора да важи

$$a_{2n+2} - a_{2n+1} = a_{2n+1} - a_{2n} = d .$$

Слично, се докажува дека за секој k членовите $a_{2^k n}, a_{2^k n+1}, ..., a_{2^k (n+1)}$ формираат аритметичка прогресија со разлика d. Сега даземеме k таков што $2^k > p$. Тогаш имаме p последователни членови на низата кои се разликуваат за d. Меѓутоа, бидејќи $d \leq a_2 - a_1 = a_1 < p$ и p е прост број добиваме дека важи $\text{NZD}(p,d) = 1$, па затоа овие последователните членови на низата формираат потполн систем на остатоци по модул p. Тоа значи дека некои од овие членови се деливи со p.

б) *Прв начин*. Со $f(x)$ да го означиме најголемиот степен на бројот 2 кој не е поголем од x и да дефинираме $a_n = np + 2^{f(n)}$. Оваа низа е растечка и од дефиницијата на бројот $f(n)$ важи $f(2n) = f(n) + 1$. Затоа важи

$$a_{2n} = 2np + 2^{f(2n)} = 2np + 2^{f(n)+1} = 2(np + 2^{f(n)}) = 2a_n .$$

Од друга страна $p \nmid f(n)$, па затоа $p \nmid a_n$ за секој n.

Втор начин. Дефинираме низа $a_1 = p$, $a_{2n} = 2a_n$ и $a_{2n+1} = a_{2n} + p$ за $n \geq 1$. Очигледно за оваа низа важи $a_{2n} = 2a_n$ за секој природен број n. Ќе докажеме дека низата е растечка. За таа цел ќе докажеме и појако тврдење, т.е. дека $a_{i+1} - a_i \geq p$. Нека го претпоставиме спротивното. Нека i е најмалиот индекс тков што $a_{i+1} - a_i < p$. Од дефиницијата на низата е јасно дека i мора да биде непарен и нека $i = 2k - 1$. Заради изборот на i важи $a_k - a_{k-1} \geq p$, па затоа

$$2p\le 2a_k-2a_{k-1}=a_{2k}-a_{2k-2}=a_{2k}-a_{2k-1}+a_{2k-1}-a_{2k}$$
$$=a_{i+1}-a_i+p<p+p=2p,$$

што е противречност. Сега, лесно со математичка индукција се докажува дека не постои член на низата кој е делив со p (бидејќи од $p\nmid a_n$ следува $p\nmid a_{2n}$, а од $p\nmid a_{2n}$ следува $p\nmid a_{2n+1}$).

III.2. КОНВЕРГЕНТНИ НИЗИ

1. За низата реални броеви $a_0,a_1,...$ важи $a_n-a_{n-1}\ge 1$ и $a_{n+1}=n+\frac{1}{a_n-a_{n-1}}$ за $n\ge 1$. Докажи дека низата со општ член a_n-n конвергира и определи ја нејзината граница.

Решение. За $b_n=a_n-a_{n-1}$, $n\ge 1$ имаме

$$1\le b_{n+2}=1+\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}. \qquad (1)$$

Според тоа, $b_n\ge b_{n+1}\ge 1$, па затоа $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=t$ постои. Ако во (1) преминеме кон граница добиваме $t=1+\frac{1}{t}-\frac{1}{t}$, т.е. $t=1$. Конечно, ако искористиме дека $a_{n+1}-n=\frac{1}{a_n-a_{n-1}}$ добиваме

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n-a_{n-1}}=1+\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-(n+1)),\text{ т.е. }\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-(n+1))=0.$$

2. Нека $a_n=\frac{4(2n)^4+1}{4(2n-1)^4+1}$, $n\in\mathbb{N}$. Определи ја границата $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1a_2...a_n}{n^2}$.

Решение. Бидејќи $2x^2+2x+1=2(x+1)^2-2(x+1)+1$, добиваме

$$a_n=\frac{4(2n)^4+1}{4(2n-1)^4+1}=\frac{[2(2n)^2+2\cdot 2n+1]\cdot[2(2n)^2-2\cdot 2n+1]}{[2(2n-1)^2+2(2n-1)+1]\cdot[2(2n-1)^2-2\cdot(2n-1)+1]}=\frac{2(2n+1)^2-2(2n+1)+1}{2(2n-1)^2-2(2n-1)+1},$$

па затоа $a_1a_2...a_n=\frac{2(2n+1)^2-2(2n+1)+1}{2\cdot 1^2-2\cdot 1+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1a_2...a_n}{n^2}=8$.

3. Нека a и b се позитивни реални броеви. Докажи дека низата $\{u_n\}$ определена со

$$u_1=\sqrt{a},\, u_{n+1}=\sqrt{a+bu_n}$$

е конвергентна и определи ја нејзината граница.

Решение. Од очигледното равенство

$$u_{n+1}=\underbrace{\sqrt{a+b\sqrt{a+...+b\sqrt{a+b\sqrt{a}}}}}_{n+1\text{ корени}}=\underbrace{\sqrt{a+b\sqrt{a+...+b\sqrt{a+b\sqrt{a}}}}}_{n\text{ корени}}=u_n$$

следува дека низата монотоно расте. Нека $m=\max\{a,b\}$. Сега имаме $u_1=\sqrt{a}<a+1\leq m+1$ и

$$u_{n+1}=\sqrt{a+bu_n}\leq\sqrt{m+mu_n}<\sqrt{m+m(m+1)}=\sqrt{m^2+2m}<m+1.$$

Според тоа, низата $\{u_n\}$ е монотона и мограничена, па затоа е конвергентна. Ако $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=t$, тогаш од $u_{n+1}=\sqrt{a+bu_n}$ следува $t=\sqrt{a+bt}$ и како $t>0$ добиваме $t=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$.

4. За низите позитивни реални броеви $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ важи

$$2a_{n+1}=a_n+b_n,\ 2b_{n+1}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n},\ n\geq 1.$$

Докажи дека низите се конвергентни и определи ги нивните граници.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува дека $a_{n+1}b_{n+1}\geq 1$. Значи,

$$2b_{n+2}=\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{a_{n+1}b_{n+1}}\leq a_{n+1}+b_{n+1}=2a_{n+2},$$

па затоа $2a_{n+3}=a_{n+2}+b_{n+2}\leq 2a_{n+2}$. Според тоа, низата $\{a_n\}_{n=3}^{\infty}$ монотоно опаѓа и е ограничена од долу, па затоа таа е конвергентна. Ако t е нејзината граница, тогаш од равенството $2a_{n+1}=a_n+b_n$ следува дека $b_n\to t$. Сега од равенството $2b_{n+1}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}$ следува $2t=\frac{1}{t}+\frac{1}{t}$ и како $t>0$ заклучуваме дека $t=1$.

5. а) Нека n е природен број. Докажи дека равенката

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+x)}=1$$

има единствено ненегативно решение x_n.

б) Докажи дека низата со општ член x_n конвергира и определи ја нејзината граница.

Решение. а) Функцијата $f_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+x)}$ монотоно опаѓа на $[0,+\infty)$. Бидејќи $f_n(0)\geq 1>1-\frac{1}{n+1}=f_n(1)$ добиваме дека равенката $f_n(x)=1$ има единствено ненегативно решение x_n, при што $x_n<1$.

б) Нека $y_n=1-\frac{4}{n+3}$. Тогаш

$$f(y_n)=\frac{1}{1+y_n}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(i+y_n)}\geq\frac{1}{1+y_n}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{n+3}{2(n+1)}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=1=f(x_n).$$

Затоа $y_n \le x_n < 1$ и значи $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

6. Нека $\{a_n\}$ е низа позитивни броеви таква што $2a_{n+1} \ge a_n + a_{n+2}$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека низата со општ член $\frac{a_n}{n}$ е конвергентна.

Решение. Од условот на задачата за низата $b_n = \frac{a_n}{n}$ добиваме дека важи

$$n(b_{n+1} - b_n) \ge (n+2)(b_{n+2} - b_{n+1}). \qquad (1)$$

Ако $b_{k+1} \le b_k$ за некој k, тогаш $b_{n+1} \le b_n$ за секој $n \ge k$. Значи, низата монотоно опаѓа и со 0 е ограничена од долу, па затоа е конвергентна.

Ако $b_{n+1} > b_n$ за секој n, тоа значи дека $b_n < c = a_{n+1} - a_n$. Сега, $c_{n+1} < c_n$, што значи дека низата $\{b_n\}$ е монотоно растечка и ограничена од горе, па затоа е конвергентна.

7. Нека $k \in (\frac{1}{2}, 1)$ и $a_1 > 0$. Докажи дека низата со општ член $a_{n+1} = ka_n + \frac{1-k}{a_n}$ е конвергентна и определи ја нејзината граница.

Решение. Имаме

$$a_{n+1} - a_n = (1-k)(\tfrac{1}{a_n} - a_n),$$
$$a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)(k - \tfrac{1-k}{a_n}).$$

Бидејќи $m = \frac{1-k}{k} \in (0,1)$, со индукција се докажува дека:

- ако $a_1 \ge 1$, тогаш $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge 1$,
- ако $m \ge a_1 > 0$, тогаш $a_2 \ge a_3 \ge ... \ge 1$,
- ако $m < a_1 < 0$, тогаш $a_1 < a_2 < ... < 1$.

Според тоа, низата е монотона и ограничена, па затоа таа е конвергентна. Ако $t = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$, тогаш $t = kt + \frac{1-k}{t}$, од каде добиваме $t = 1$.

8. Нека $a_1 > 1$ и $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} - 1$ за $n \ge 1$. Докажи дека

а) низата $\{a_n\}$ е конвергентна и определи ја нејзината граница,

б) постои n таков што $a_{2n} < 1 + \frac{1}{2^{2^n}}$.

Решение. а) Имаме $a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n - 1)^2}{a_n} > 0$, т.е. $a_{n+1} > 1$, што значи дека низата е ограничена од долу. Понатаму, $a_n - a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n} > 0$, што значи дека низата монотоно опаѓа, па затоа е конвергентна. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тогаш ако преминеме кон граница во $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}-1$ добиваме $a=a+\frac{1}{a}-1$, т.е. $a=1$.

б) Од а) следува дека $a_k \le \frac{3}{2}$ за секој k. Тогаш од

$$a_{n+1}-1=\frac{(a_n-1)^2}{a_n}<(a_n-1)^2$$

по индукција следува дека $a_{n+1}-1<\frac{1}{2^{2^{n-k}}}$ за $n>k$. Останува да земеме $n\ge 2k$.

9. Низата $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ е определена со $x_1=2$ и $x_{n+1}=\frac{1+2x_n}{2+x_n}$ за $n\ge 1$.

а) Докажи дека низата со општ член $\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{2}$ е геометриска прогресија и определи го нејзиниот количник.

б) Низата со општ член $\frac{1}{n}(\frac{1}{1+x_1}+...+\frac{1}{1+x_n})$ е конвергентна и определи ја нејзината граница.

Решение. а) Имаме:

$$\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{2}=\frac{1}{1+\frac{1+2x_n}{2+x_n}}-\frac{1}{2}=\frac{1-x_n}{6(1+x_n)}=\frac{y_n}{3},$$

па затоа низата $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ е геометриска прогресија со количник $\frac{1}{3}$ и прв член $\frac{1}{6}$.

б) Од а) следува

$$z_n=\frac{1}{n}(\frac{1}{1+x_1}+...+\frac{1}{1+x_n})=\frac{1}{2}+\frac{y_1+...+y_n}{n}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6n}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}(1-\frac{1}{3^n}).$$

Јасно, оваа низа е конвергентна и

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}(1-\frac{1}{3^n})=\frac{1}{2}.$$

10. Низите позитивни реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се такви што

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{b_n}) \text{ и } b_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+\frac{1}{a_n}), \text{ за секој } n\in\mathbb{N}.$$

Докажи, дека низите се конвергентни.

Решение. Од условот на задачата следува дека $4a_{n+1}b_{n+1}=2+a_nb_n+\frac{1}{a_nb_n}\ge 4$.

Според тоа, $a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1-a_{n+1}b_{n+1}}{2b_{n+1}}\le 0$. Аналогно се добива $b_{n+2}\le b_{n+1}$, т.е. почнувајќи од вторите членови низите монотоно опаѓаат. Но, тие се ограничени од долу, па затоа се конвергентни.

11. Дадена е низа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ таква што за секој природен број n важи

$$a_{n+7}=a_{n+6}-a_{n+4}+a_{n+3}-a_{n+1}+a_n.$$

Нека $s_n=a_1+a_2+...+a_n$. Докажи дека низата $\{\frac{s_n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна.

Решение. Ако ги собереме равенствата

$$a_{n+7}=a_{n+6}-a_{n+4}+a_{n+3}-a_{n+1}+a_n,$$

$$a_{n+8}=a_{n+7}-a_{n+5}+a_{n+4}-a_{n+2}+a_{n+1} \text{ и}$$

$$a_{n+9}=a_{n+8}-a_{n+6}+a_{n+5}-a_{n+3}+a_{n+2}$$

добиваме $a_{n+9}=a_n$. Последното значи дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е периодична со период 9. За $n=9k+l$, $0\le l<9$ имаме $\frac{s_n}{n}=\frac{ks_9+s_l}{9k+l}$, па затоа

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=\lim_{k\to\infty}\frac{ks_9+s_l}{9k+l}=\frac{s_9}{9}.$$

12. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$a_1=\frac{4}{3} \text{ и } a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2, n\ge 1.$$

Докажи дека низата $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ определена со $b_k=\prod_{i=1}^{k}a_i$ е конвергентна и најди ја нејзината граница.

Решение. Имаме

$$a_{n+1}-1=a_n^2-2a_n+1=(a_n-1)^2.$$

Оттука со индукција по n добиваме, дека за секој $n\ge 1$ важи

$$a_n-1=(a_1-1)^{2^{n-1}}=\frac{1}{3^{2^{n-1}}}.$$

Според тоа, $a_n=1+\frac{1}{3^{2^{n-1}}}$, па затоа

$$b_k=\prod_{i=1}^{k}(1+\frac{1}{3^{2^{k-1}}}).$$

Последното равенство го множиме со $1-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3^{2^0}}$ и добиваме

$$(1-\frac{1}{3})b_k=(1-\frac{1}{3^{2^0}})\prod_{i=1}^{k}(1+\frac{1}{3^{2^{k-1}}})=1-\frac{1}{3^{2^k}}, \text{ т.е. } b_k=\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2^k}}).$$

Конечно, низата $\{1/3^{2^k}\}$ конвергира, па затоа низата $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ конвергира и важи

$$\lim_{k\to\infty}b_k=\lim_{k\to\infty}\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2^k}})=\frac{3}{2}.$$

13. Докажи:

а) За секој природен број $n \geq 2$ постои единствен реален број $a > 1$ таков што $a_n^{n+1} + 1 = 2a_n^n$.

б) Низата $\{a_n\}$ од а) строго моното расте и е конвергетна. Определи ја нејзината граница.

Решение. а) За функцијата $f_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$ важи

$$f_n^{'}(x) = (n+1)x^{n-1}(x - y_n)\text{, каде } y_n = \tfrac{2n}{n+1} \in (1,2)\,.$$

Според тоа, f_n строго опаѓа во интервалот $[0, y_n]$ и строго расте во интервалот $[y_n, +\infty)$. Бидејќи $f_n(y_n) < f_n(1) = 0 < 1 = f_n(2)$, заклучуваме дека постои единствен реален број $a_n > 1$ таков што $f_n(a_n) = 0$.

б) Од а) имаме дека $a_n \in (y_n, 2)$. Бидејќи $y_n \to 2$, важи $a_n \to 2$. Понатаму, точно е неравенството $f_{n+1}(a_{n+1}) < f_n(a_{n+1})$, кое е еквивалентно на неравенството

$$a_{n+1}^{n+1}(a_{n+1} - 2) < a_{n+1}^{n}(a_{n+1} - 2)\,,$$

т.е. на неравенството

$$(a_{n+1} - 1)(a_{n+1} - 2) < 0\,,$$

кое следува од $a_{n+1} \in (1,2)$. Тогаш $0 = f_n(a_n) = f_{n+1}(a_{n+1}) < f_n(a_{n+1})$. Бидејќи $a_{n+1} > y_{n+1} > y_n$, $a_n > y_n$, тогаш бидејќи f_n строго расте во интервалот $[y_n, +\infty)$ и $f_n(a_n) < f_n(a_{n+1})$ следува дека $a_n < a_{n+1}$.

14. Низата реални броеви $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $x_1 = \frac{1}{2}$ и

$$x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} \quad \text{за } n \geq 2\,.$$

За секој природен број n нека $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}$. Докажи дека низата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергентна и определи ја нејзината граница.

Решение. Од дефиницијата на низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ следува дека $x_n > 0$ за секој $n \geq 1$. Дадената рекурентна релација ја запишуваме во видот

$$2x_n - x_{n-1} = \sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}}\,,$$

од каде добиваме $x_{n-1} = x_n^2 - x_{n-1}x_n$. Бидејќи членовите на низата се позитивни, оттука наоѓаме $\frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}$. Според тоа,

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{x_1^2} + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i}\right) = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n} = 6 - \frac{1}{x_n}\,.$$

Освен тоа, од $x_n > 0$ следува $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}} < -\frac{1}{x_n^2} < 0$, што значи дека низата $\{\frac{1}{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ монотоно опаѓа и е ограничена од долу со 0. Значи, оваа низа конвергира и за нејзината граница x важи $t^2 = t - t$, т.е. $t = 0$.

Според тоа, низата $y_n = 6 - \frac{1}{x_n}$ конвергира и нејзината граница е

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(6 - \frac{1}{x_n}) = 6 - 0 = 6.$$

15. Нека $f_1(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ и $f_{n+1}(x) = f_n(f_1(x))$, $n \in \mathbb{N}$. Пресметај

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=4}^{k} \frac{f_n(n-2)-1}{n-3}.$$

Решение. Со индукција се докажува дека

$$f_n(x) = \frac{(n+2)x-n}{nx-(n-2)},$$

па затоа

$$\sum_{n=4}^{k} \frac{f_n(n-2)-1}{n-3} = \sum_{n=4}^{k} \frac{2}{(n-1)(n-2)} = 1 - \frac{2}{k-1} \to 1, \text{ кога } k \to \infty.$$

16. Низата реални броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е таква што

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{\cos(\pi a_n)}{6}, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}.$$

Докажи дека низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е конвергетна и определи ја нејзината граница.

Решение. Имаме

$$a_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{\cos(\pi a_n) - \cos(\pi/3)}{6} = \frac{1}{3}\sin\frac{\pi(a_n - 1/3)}{2}\sin\frac{\pi(a_n + 1/3)}{2}.$$

За $q = \frac{\pi}{6} \in (0,1)$ следува дека $|a_{n+1} - \frac{1}{3}| \leq q\,|a_n - \frac{1}{3}|$, па затоа

$$|a_{n+1} - \frac{1}{3}| \leq q^n\,|a_1 - \frac{1}{3}|,$$

од каде добиваме дека $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

17. Нека $a_1, a_2, ...$ е низа реални броеви определена со $a_1 = a$ и $a_{n+1} = \cos a_n$ за $n \geq 1$. Докажи дека оваа низа конвергира.

Решение. Прво ќе докажеме дека равенката $\cos x = x$ има точно едно решение. За функцијата $f(x) = x - \cos x$ важи $f'(x) = 1 + \sin x > 0$, за $x \neq -\frac{\pi + 2k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, што значи дека функцијата f строго монотоно расте. Сега од $f(0) < 0 < f(1)$ следува дека оваа функција има точно една нула и таа припаѓа на интервалот $(0,1)$, т.е. равенката $\cos x = x$ има точно едно решение, кое припаѓа на интервалот $(0,1)$.

Нека x_0 е нулата на функцијата f. Бидејќи $x_0 \in (0,1)$ и $a_n \in [-1,1]$ за $n \geq 2$, добиваме

$$|a_{n+1} - x_0| = |\cos a_{n+1} - \cos x_0| = 2|\sin\tfrac{a_{n+1}+x_0}{2}\sin\tfrac{a_{n+1}-x_0}{2}| \leq k|a_n - x_0|,$$

каде $k = \sin 1 \in (0,1)$. Според тоа, $0 \leq |a_n - x_0| \leq k^{n-2}|a_2 - x_0|$ кога $n \geq 2$. Но, $\lim\limits_{n\to\infty} k^{n-2}|a_2 - x_0| = 0$, па од теоремата за три низи следува дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$.

18. Низата $\{a_n\}$ е определена со $a_1 = \frac{500\pi}{2017}$ и $a_{n+1} = \sin^2 a_n$ за $n \geq 1$. Докажи дека низата е конвергетна и определи ја нејзината граница.

Решение. Од $a_n > 0$ следува дека низата е ограничена од долу. Освен тоа, низата монотоно опаѓа. Навистина, $a_2 - a_1 < 0$ и $a_2 + a_1 < \pi$. Понатаму, ако претпоставиме дека $a_n - a_{n-1} < 0$, тогаш $a_n + a_{n-1} < \pi$ (Зошто?) и

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sin^2 a_n - \sin^2 a_{n-1} = \cos 2a_n - \cos 2a_{n-1} \\ &= 2\sin(a_n + a_{n-1})\sin(a_n - a_{n-1}) < 0. \end{aligned}$$

Според тоа, низата е монотона и ограничена, па затоа е конвергетна. Ако t е нејзината граница, тогаш $t = \sin^2 t$. Јасно, $t = 0$ е едно решение на последната равенка. Понатаму, за функцијата $f(x) = x - \sin^2 x$ на интервалот $(0,\pi)$ важи $f'(x) = 1 - 2\sin x\cos x = 1 - \sin 2x \geq 0$, т.е. таа моното расте, па затоа равенката $t = \sin^2 t$ нема други решенија на интервалот $(0,\pi)$.

19. Даден е природен број $t > 2$. За низата природни броеви $\{a_n\}$ важи $a_1 = t$ и $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ за $n \geq 1$.

а) Определи го најголемиот заеднички делител на a_{2016} и a_{1008}.

б) Пресметај ја границата $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{a_{n+1}}$.

Решение. Ако ја квадрираме рекурентната релација добиваме

$$a_{n+1}^2 - 4 = a_n^2(a_n^2 - 4). \tag{1}$$

а) Од (1) следува

$$a_{2016}^2 - 4 = a_{2015}^2 a_{2014}^2 \ldots a_{1008}^2 (a_{1008}^2 - 4).$$

Ако $d = \mathrm{NZD}(a_{2016}, a_{1008})$, тогаш $d \mid a_{2016}^2 - 4$, т.е. $d = 1, 2$ или 4. Ако a_1 е парен број, тогаш сите членови на низата по првиот се деливи со 2, но не се деливи со 4, а ако a_1 е непарен број, тогаш сите членови на низата се непарни броеви. Значи, $d=2$ ако t е парен и $d=1$ ако t е непарен.

б) Од $a_1=t>2$ следува дека низата строго монотоно расте. Сега од (1) добиваме

$$a_n^2 a_{n-1}^2 ... a_1^2=\frac{a_{n+1}^2-4}{(a_1^2-4)}\text{, т.е. }\frac{a_1 a_2 ... a_n}{a_{n+1}}=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{a_{n+1}^2}}{a_1^2-4}}\ ,$$

и како $\lim\limits_{n\to} a_{n+1}=\infty$ добиваме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 a_2 ... a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1-\frac{4}{a_{n+1}^2}}{a_1^2-4}}=\frac{1}{\sqrt{t^2-4}}\ .$$

20. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $a_1>0$ и

$$a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n^2+1}\ \text{ за }\ n\geq 1.$$

Докажи дека постои $n\in\mathbb{N}$ таков што $\pi a_n>2^n$.

Решение. Ставаме $a_1=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \alpha\in(0,\pi)$. Сега, по индукција следува дека $a_n=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^n}$. Понатаму, ако искористиме дека $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}x=1$, добиваме дека $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\pi}$. Според тоа, постои $n_0\in\mathbb{N}$ таков што $\frac{a_n}{2^n}>\frac{1}{\pi}$ кога $n\geq n_0$.

21. Андреј запишал конечно многу различни реални броеви (можно е еден број), ги квадрирал и потоа од секој број го одзел бројот 1, по што ги добил почетните броеви во некој редослед. Кои броеви ги запишал Андреј?

Решение. Нека $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ е множеството од запишаните броеви. Тогаш $A=\{a_1^2-1, a_2^2-1,...,a_n^2-1\}$. Да забележиме дека $a\geq -1$ за секој $a\in A$.

Нека $0<a\in A$. Тогаш $a=b^2-1$ за некој $b\in A$, па затоа $b=\pm\sqrt{1+a}$. Бидејќи $b>-1$, заклучуваме дека $b=\sqrt{1+a}$. Според тоа, ако $c_1=a$ и $c_{i+1}=\sqrt{c_i+1}$, $i\in\mathbb{N}$, тогаш $c_i\in A$. Нека $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ се решенијата на равенката $x^2-x-1=0$. Лесно се проверува дека ако $c_1<x_1$ ($c_1>x_1$), тогаш низата $\{c_i\}$ монотоно расте (опаѓа) и тежи кон x_1. Бидејќи множеството A е конечно, заклучуваме дека $a=c_1=x_1$.

Нека $a\in(x_2,0)$. Тогаш $-1<a^2-1\in A$ и $a^2-1-x_2<x_2^2-1-x_2=0$. Овој случај се сведува на следниот случај.

Сега, да забележиме дека ако $a\in A$, тогаш $(a^2-1)^2-1=a^4-2a^2\in A$. Нека $a\in A$, $a\in(-1,x\ \ )$ и $c_{i+1}=c_i^4-2c_i^2$, $i\in\mathbb{N}$. Бидејќи $-1\leq c_i\in A$ и

$$c_{i+1}-c_i=c_i(c_{i+1}+1)(c_i-x_1)(c_i-x_2)<0,$$

заклучуваме дека низата дека низата $\{c_i\}$ монотоно опаѓа и тежи кон -1, што противречи на тоа дека множеството A е конечно,

Според тоа, единствени елементи на A може да бидат $0,-1,x_1,x_2$. Непосредно се проверува дека A е некое од множествата

$$\{x_1\},\{x_2\},\{x_1,x_2\},\{0,-1\},\{0,-1,x_1),\{0,-1,x_2\},\{0,-1,x_1,x_2\}.$$

22. а) Определи ги екстремните вредности интервалите на монотоност на функцијата $f(x)=x^3-3x^2+4$ за $x\in\mathbb{R}$.

б) Низата $a_0,a_1,a_2,...$ е определена со $a_0=\frac{7}{4}$ и

$$a_{n+1}=a_n^3-3a_n^2+a_n+4 \qquad (1)$$

за $n\geq 0$. Докажи дека низата е конвергентна и определи ја нејзината граница.

Решение. а) Имаме $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$. Според тоа, $f'(x)>0$ ако $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ и $f'(x)<0$ ако $x\in(0,2)$. Значи во $x_0=0$ функцијата има локален максимум $f(0)=4$ и во $x_1=2$ функцијата има локален минимум $f(2)=0$.

б) Да претпоставиме дека низата е конвергентна и нејзината граница е t. Тогаш од (1) последователно добиваме

$$t=t^3-3t^2+t+4,$$
$$t^3-4t^2+4t+t^2-4t+4=0,$$
$$t(t-2)^2+(t-2)^2=0,$$
$$(t-2)^2(t+1)=0,$$

т.е. $t=2$ или $t=-1$.

Понатаму, $a_0=\frac{7}{4}\in(0,2)$. Да претпоставиме дека $a_n\in[a_0,2)$ за некој n. Од (1) следува $a_{n+1}-a_n=a_n^3-3a_n^2+4=f(a_n)$ и како $a_n\in(0,2)$, од а) добиваме дека $f(a_n)>f(2)=0$. Значи, $a_{n+1}>a_n$. Оттука следува дека $a_{n+1}>a_0$. Останува да провериме дека $a_{n+1}<2$. Тоа значи дека треба да го провериме дека $a_n^3-3a_n^2+a_n+4<2$, т.е. $f(a_n)+a_n-2<0$. Но,

$$f(a_n)=(a_n-2)^2(a_n+1),$$

па затоа последното неравенство последователно е еквивалелнтно со неравенствата:

$$(a_n-2)((a_n-2)(a_n+1)+1)<0,$$
$$(a_n-2)(a_n^2-a_n-1)<0,$$

$$(a_n-2)(a_n-\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})(a_n-\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})<0.$$

Бидејќи $a_n \ge a_0 = \frac{9}{4} > \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $a_n < 2$, заклучуваме дека последното неравенство е точно, па затоа $a_{n+1} < 2$.

Сега, од принципот на математичка инмдукција следува дека $a_n \in [a_0, 2)$ за секој n.

Значи, низата е моното растечка и е ограничена од горе, па затоа таа е конвергентна. Конечно, бидејжи членовите на низата се позитивни заклучуваме дека нејзината граница е $t=2$./

23. Нека $a_0 = 0$ и $a_n = a_{[\frac{n}{2}]} + [\frac{n}{2}],\, n \ge 1$. Пресметај

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}.$$

Решение. Со индукција ќе докажеме дека $a_n = n - t_2(n)$, каде $t_2(n)$ ебројот на единиците во бинарниот запис на n. Навистина, за $n=0$ имаме $a_0 = 0$ и тврдењето е точно. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за секој $n \le k-1$. Ако $k = 2k_0$, тогаш бидејќи бинарните записи на k_0 и $k = 2k_0$ имаат еднаков број единици, добиваме $t_2(k_0) = t_2(2k_0)$, па затоа

$$\begin{aligned} a_k &= a_{k_0} + k_0 = k_0 - t_2(k_0) + k_0 \\ &= k - t_2(k_0) = k - t_2(2k_0) \\ &= k - t_2(k). \end{aligned}$$

Ако $k = 2k_0 + 1$, тогаш бидејќи бинарниот запис на $2k_0 + 1$ има една единица повеќе од бинарниот запис на k_0, добиваме $t_2(2k_0) = t_2(2k_0) + 1$, па затоа

$$\begin{aligned} a_k &= a_{k_0} + k_0 = k_0 - t_2(k_0) + k_0 \\ &= k - t_2(k_0) = 2k_0 - t_2(2k_0) \\ &= 2k_0 + 1 - t_2(2k_0 + 1) \\ &= k - t_2(k). \end{aligned}.$$

Бидејќи $n > 2^t - 1$ за $t_2(n) = t$, добиваме

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\frac{t_2(n)}{n} \le \lim_{t\to\infty}\frac{t}{2^t} = 0.$$

Според тоа, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_2(n)}{n} = 0$, па затоа

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-t_2(n)}{n} = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{t_2(n)}{n} = 1.$$

III.3. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Низата $\{f_n\}_{n\ge1}$ е определена со $f_1=f_2=1$ и $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ за $n\ge1$. Докажи дека плоштината на триаголникот чии страни имаат должини $\sqrt{f_{2n+1}}$, $\sqrt{f_{2n+3}}$ и $\sqrt{f_{2n+5}}$ е еднаква на $\frac{1}{2}$.

Решение. Да ги означиме $f_{2n+1}, f_{2n+2}, f_{2n+3}, f_{2n+4}, f_{2n+5}$ редоследно со $a,b,$ c,d,e. Според Хероновата формула плоштината на триаголникот е

$$P=\tfrac{1}{2}\sqrt{2ac+2ae+2ce-a^2-c^2-e^2}\ .$$

Ако замениме $a=c-b$ и е $e=c+d=2c+b$ добиваме

$$P=\tfrac{1}{2}\sqrt{c^2-bc-b^2}\ .$$

Останува со индукција по k да докажеме дека

$$g_k=f_{k+1}^2-f_kf_{k+1}-f_k^2=(-1)^k\ .$$

Последното следува од $g_0=1$ и

$$g_{k+1}=f_{k+2}(f_{k+2}-f_{k+1})-f_{k+1}^2=(f_{k+1}+f_k)f_k-f_{k+1}^2=-g_k\ .$$

2. Определи го најмалиот $n\in\mathbb{N}$ за кој постои низа $a_0,a_1,...,a_n$ таков што a_0 е цел број, a_{k+1} е еднаков на $2a_k+1$ или $\frac{a_k}{a_k+2}$ за секој $k\in\mathbb{N}_0$ и $a_n=2014$.

Решение. Според условот на задачата $\frac{1}{a_i+1}$ е еднаков на $\frac{2}{a_{i+1}+1}-\varepsilon_i$, каде $\varepsilon_i\in\{0,1\}$. Со индукција добиваме

$$\frac{1}{a_0+1}=\frac{2^n}{a_n+1}-r\ ,\ \text{за}\ r=\varepsilon_0+2\varepsilon_1+2^2\varepsilon_2+...+2^{n-1}\varepsilon_{n-1},\ \text{т.е.}\ 0\le r<2^n\ .$$

Бидејќи $a_n=2014$, оттука по средување на изразот добиваме

$$(2^n-2015r)(a_0+1)=2015\ .$$

Но, $\text{NZD}(2^n-2015r,2015)=1$, па мора да биде

$$2^n-2015r=1,$$

т.е. $2015=5\cdot13\cdot31\,|\,2^n-1$. Најмал таков број е $n=60$.

3. За низата $a_0,a_1,...,a_n,...$ важи

$$a_{n+1}=2^n-3a_n,\ n=0,1,2,...\ .$$

а) Изрази го општиот член a_n преку a_0 и n.

б) Определи го a_0 ако $a_{n+1}>a_n$ за секој n.

Решение. а) Имаме

$$a_n = 2^{n-1} - 3a_{n-1} = 2^{n-1} - 3(2^{n-2} - 3a_{n-2}) = 2^{n-1} - 3\cdot 2^{n-2} + 3^2 a_{n-2}$$

и со индукција наоѓаме

$$\begin{aligned} a_n &= 2^{n-1}(1-\tfrac{3}{2}+(\tfrac{3}{2})^2 - \ldots + (-1)^{n-1}(\tfrac{3}{2})^{n-1}) + (-1)^n 3^n a_0 \\ &= \tfrac{1}{5}\cdot 2^n (1+(-1)^{n-1}(\tfrac{3}{2})^n) + (-1)^n 3^n a_0 \\ &= \tfrac{1}{5}(2^n + (-1)^{n-1}3^n) + (-1)^n 3^n a_0. \end{aligned}$$

б) Имаме

$$a_{n+1} - a_n = \tfrac{1}{5}(2^n + (-1)^n \cdot 4\cdot 3^n) + (-1)^{n+1} 3^n \cdot 4a_0,$$

па затоа

$$\tfrac{a_{n+1}-a_n}{3^n} = \tfrac{1}{5}(\tfrac{2}{3})^n + (-1)^n \cdot 4(\tfrac{1}{5} - a_0).$$

Ако $a_0 \neq \frac{1}{5}$, тогаш при доволно големи вредности на n знакот на десната страна во последното равенство ќе зависи од знакот на $(-1)^n \cdot 4(\frac{1}{5} - a_0)$ и ќе се менува во зависност од парноста на n, што противречи на $a_{n+1} > a_n$. Ако $a_0 = \frac{1}{5}$, тогаш $a_{n+1} > a_n$. Значи, $a_0 = \frac{1}{5}$.

4. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $a_1 = 3$, $a_2 = 11$ и $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ за $n \geq 3$. Докажи дека секој член на оваа низа е од видот $a^2 + 2b^2$ за некои природни броеви a и b.

Решение. Имаме $a_1 = 1 + 2\cdot 1^2, a_2 = 3^2 + 2\cdot 1^2, a_3 = 3^2 + 2\cdot 4^2, a_4 = 11^2 + 2\cdot 4^2$ итн. Со индукција по n ќе докажеме дека

$$a_{2n-1} = a_{n-1}^2 + 2(\tfrac{a_n - a_{n-1}}{2})^2 \text{ и } a_{2n} = a_n^2 + 2(\tfrac{a_n - a_{n-1}}{2})^2$$

при што $a_0 = 1$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за n. Тогаш

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= 4a_{2n} - a_{2n-1} = 4a_n^2 + 8(\tfrac{a_n - a_{n-1}}{2})^2 - a_{n-1}^2 - 2(\tfrac{a_n - a_{n-1}}{2})^2 \\ &= \tfrac{11}{2}a_n^2 - 3a_n a_{n-1} + \tfrac{1}{2}a_{n-1}^2 = \tfrac{11}{2}a_n^2 - 3a_n(4a_n - a_{n+1}) + \tfrac{1}{2}(4a_n - a_{n+1})^2 \\ &= \tfrac{3}{2}a_n^2 - a_n a_{n+1} + \tfrac{1}{2}a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2(\tfrac{a_{n+1} - a_n}{2})^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &= 4a_{2n+1} - a_{2n} = 4a_n^2 + 8(\tfrac{a_{n+1} - a_n}{2})^2 - a_n^2 - 2(\tfrac{a_n - a_{n-1}}{2})^2 \\ &= 3a_n^2 + 8(\tfrac{a_{n+1} - a_n}{2})^2 - 2(\tfrac{a_{n+1} - 3a_n}{2})^2 \\ &= \tfrac{3}{2}a_{n+1}^2 - a_n a_{n+1} + \tfrac{1}{2}a_n^2 = a_{n+1}^2 + 2(\tfrac{a_{n+1} - a_n}{2})^2, \end{aligned}$$

со што доказот е завршен.

5. Секој член на бесконечна строго растечка низа природни броеви е делив со

барем еден од броевите 1005 и 1006, но не е делив со 97. Освен тоа, разликата на било кои два соседни члена е помала или еднаква на k. Определи ја најмалата можна вредност на k.

Решение. *Одговор*: $k = 2010$.

Нека низата е $\{a_n\}$. Јасно $a_1 < 1005 \cdot 1006 \cdot 97N = D$, за некој $N \in \mathbb{N}$. Низата е строго растечка и нејзините членови се природни броеви, па затоа постои n таков што $a_n \le D$, но $a_{n+1} > D$ (притоа од условот следува дека $a_n \ne D$). Најголемите броеви кои се помали од D, а се деливи соодветно на 1005 и 1006 се $D-1005$ и $D-1006$. Значи, $a_n \le D-1005$. Аналогно се добива $a_{n+1} \ge D+1005$, па затоа $a_{n+1} - a_n \ge (D+1005)-(D-1005) = 2010$. Според тоа, $k \ge 2010$.

За $k = 2010$, на пример низата од сите членови кои се деливи со 1005, но не се деливи со 97 го има саканото својство (1005 не е делив со 97).

6. Дали постои строго растечка низа природни броеви $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ таква што $a_n \le n^3$ за секој n и секој природен број на единствен начин може да се запише како разлика на два члена на оваа низа?

Решение. Постои. Индуктивно ќе определиме низа со саканите својства. Ставаме $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$. Нека претпоставиме дека веќе сме ги определиле $a_1, a_2, ..., a_{2k}$. Со m го означуваме најмалиот природен број кој не може да се претстави како $a_j - a_i, 1 \le i < j \le 2k$. Бидејќи имаме $d = k(2k-1)$ разлики, јасно е дека $m \le d+1$. Нека $a_{2k+2} = a_{2k+1} + m$, каде a_{2k+1} е таков што

$$a_{2k+1} \ne a_l,\ a_{2k+1} \pm m \ne a_l, a_{2k+1} - a_l \ne a_j - a_i, a_{2k+1} + m - a_l \ne a_j - a_i,$$

за $1 \le l \le 2k$, $1 \le i < j \le 2k$. Оттука следува дека $a_1, a_2, ..., a_{2k+2}$ се по парови различни броеви и секој природен број од 1 до m на единствен начин се запишува како разлика на два од овие броеви. За a_{2k+1} имаме $6k + 4dk$ недопустливи вредности и затоа можеме да избереме $a_{2k+1} \le 6k + 4dk + 1$. Тогаш

$$a_{2k+1} < a_{2k+2} = a_{2k+1} + m \le 6k + 4dk + 1 + d + 1 < (2k+1)^3$$

и останува да ги подредиме броевите по големина. Притоа неравенството $a_n \le n^3$ останува во сила.

7. Низата $\{a_n\}$ е дефинирана со: $a_1 = 1$ и $a_n = n(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})$, за $n > 1$.

а) Докажи дека за секој парен број n членот a_n е делив со $n!$.

б) Определи ги сите непарни броеви n за кои a_n е делив со $n!$.

Решение. Со математичка индукција лесно се докажува дека

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1 \text{ за } n\geq 1. \qquad (1)$$

Ќе докажеме дека $a_n=\frac{n\cdot n!}{2}$, за секој $n\geq 2$. За $n=2$ имаме

$$a_2=2a_1=2=\frac{2\cdot 2!}{2}.$$

Нека претпоставиме дека за секој $k\in\{2,...,n-1\}$ важи $a_k=\frac{k\cdot k!}{2}$. Ако го искористиме равенството (1), добиваме дека за $k=n$ важи:

$$\begin{aligned}a_n&=n(a_1+a_2+...+a_{n-1})=n(\tfrac{1\cdot 1!}{2}+\tfrac{2\cdot 3!}{2}+...+\tfrac{(n-1)\cdot(n-1)!}{2}+\tfrac{1}{2})\\&=\tfrac{n}{2}(1\cdot 1!+2\cdot 2!+...+(n-1)\cdot(n-1)!+1)=\tfrac{n}{2}(n!-1+1)=\tfrac{n\cdot n!}{2},\end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека $a_n=\frac{n\cdot n!}{2}$, за секој $n\geq 2$.

а) Ако $n=2k$, тогаш $a_{2k}=\frac{2k\cdot(2k)!}{2}=k\cdot(2k)!$, што значи $(2k)!\,|\,a_{2k}$.

б) Ако $n=2k+1$, тогаш $a_{2k+1}=\frac{(2k+1)\cdot(2k+1)!}{2}=\frac{2k+1}{2}\cdot(2k+1)!$. Бидејќи $\frac{2k+1}{2}$ не е парен број добиваме дека $(2k+1)!$ не е делител на a_{2k+1} за $k>1$. Според тоа, само $1!\,|\,a_1$.

8. Нека n е даден природен број. Определи ги сите реални броеви a за кои за низата зададена со $x_0=a,\, x_1=1$ и $x_{i+2}=\frac{x_{i+1}-(n-i)x_i}{i+1},\, i\geq 0$ важи $x_{2010n}=0$.

Решение. За $i=n$ од рекурентната врска следува $x_{n+2}=\frac{x_{n+1}}{n+1}$. Оттука следува

$$x_{n+2}=\frac{\frac{x_{n+1}}{n+1}+x_{n+1}}{n+1}=\frac{x_{n+1}}{n+1}.$$

Бидејќи $i>n$, заклучуваме дека сите следни членови на низата се од видот px_{n+1}, каде p е некој позитивен рационален број. Според тоа, ако $x_{2010n}=0$, тогаш $x_{n+1}=0$, од каде добиваме $x_{n+2}=0$.

Нека $2\leq s\leq n+2$. Ќе дока=еме дека $x_s=x_{s-1}$ ако и само ако $x_{s-2}=x_{s-3}$. Од $x_s=\frac{x_{s-1}-(n-s+2)x_{s-2}}{s-1}$ добиваме

$$(s-1)x_s-x_{s-1}=(s-n-2)x_{s-1},$$

а од $x_{s-1}=\frac{x_{s-2}-(n-s+3)x_{s-3}}{s-2}$ имаме

$$(s-1)x_s=x_{s-2}+(s-n-3)x_{s-3}.$$

Ако ги одземеме горните равенства добиваме

$$(s-1)(x_s-x_{s-1})=(s-n-3)(x_{s-2}-x_{s-3}).$$

Бидејќи $2\leq s\leq n+2$, имаме $s\neq 1$ и $s\neq n+3$ и од последното равенство следува тврдењето.

Продолжувајќи на овој начин ќе добиеме $1 = x_0 = x_1 = a$ кога n е непарен број и $x_2 = x_1$ кога n е парен број и тогаш од $x_2 = x_1 - nx_0$ добиваме $a = x_0 = 0$.

Според тоа, бараните вредности се $a = 1$ кога n е непарен и $a = 0$ кога n е парен.

9. Определи ги сите реални броеви c за кои постои строго растечка низа $\{a_n\}$ природни броеви така $\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{a_n} = c$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Јасно, $\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{a_n} = c$ е позитивен рационален број. ќе докажеме дека c мора да биде природен број. Нека $c = \frac{p}{q}$ каде $\text{NZD}(p,q) = 1$. Значи, $pa_n = q(a_{2n-1} + a_{2n})$, од каде што следува $q \mid a_n$ за секо природен број n. Нека $b_n = \frac{a_n}{q}$, $n \in \mathbb{N}$. Забележуваме дека и за низата $\{b_n\}$ е исполент условот $\frac{b_{2n-n}+b_{2n}}{b_n} = c$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Според тоа, $q \mid b_n$, односно $q^2 \mid a_n$ за секој природен број n. Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме $q^k \mid a_n$ за секој природен број k, од каде што следува $q = 1$, па затоа c е природен број. Бидејќи низата е строго растечка важи $c = \frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{a_n} > \frac{2a_n}{a_n} = 2$.

Ќе докажеме дека за $c = 3$ ваква низа не постои. Ја разгледуваме низата $r_n = a_{n+1} - a_n$. Имаме

$$\begin{aligned} 3r_n &= 3a_{n+1} - 3a_n = a_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= a_{2n} - a_{2n-1} + 2(a_{2n+1} - a_{2n}) + a_{2n+2} - a_{2n+1} \\ &= r_{2n-1} + 2r_{2n} + r_{2n+1}. \end{aligned}$$

Јасно, барем еден од броевите $r_{2n-1}, r_{2n}, r_{2n+1}$ е помал од r_n. Значи, постои строго опаѓачка подниза на низата r_n, а бидејќи тоа е низа природни броев, добиваме противречност.

Сега ќе докажеме дека за секој природен број $c > 3$ постои низа која го задоволува условот на задачата.

За $c = 4$ низата $a_n = 2n - 1$ очигледно го задовлува условот на задачата.

За $c > 4$ земаме $a_1 = 1$ и нека

$$a_{2n-1} = \left\lfloor \frac{ca_n - 1}{2} \right\rfloor \text{ и } a_{2n} = \left\lfloor \frac{ca_n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Лесно се проверува дека вака дефинираната низа ги задоволува условите на задачата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

10. Низата $\{a_n\}$ е определена со $a_0 = 2013$ и $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n+1}$, за $n = 0,1,2,...$. Докажи дека $[a_{1000}] = 1013$.

Решение. Од условот на здачата следува $a_{n+1} = a_{n+1} - 1 + \frac{1}{a_n+1}$, па затоа

$$a_{1000} = a_0 - 1000 + \sum_{n=0}^{1000} \frac{1}{a_n+1}.$$

Оттука одма следува дека $a_{1000} \geq 1013$ и уште повеќе $a_n \geq 1013$ за $n \leq 999$, па затоа

$$0 \leq a_{1000} - 1013 = \sum_{n=0}^{1000} \frac{1}{a_n+1} \leq \frac{1000}{1013} < 1,$$

од каде следува $[a_{1000}] = 1013$.

11. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се природни броеви. Да претпоставиме дека броевите $k_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ се цели за $i = 1,2,...,n$ (каде $a_0 = a_n$ и $a_{n+1} = a_1$). Докажи дека

$$2n \leq k_1 + k_2 + ... + k_n < 3n. \qquad (1)$$

Решение. Имаме:

$$k_1 + k_2 + ... + k_n = (\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}) + (\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2}) + ... + (\frac{a_n}{a_1} + \frac{a_1}{a_n}) \geq 2n,$$

т.е. точно е левото неравенство во (1). Десното неравенство ќе го докажеме со индукција. За $n = 1$ неравенството е тривијално ($k_1 = 2$). Нека $n > 1$ и нека $a_n = \max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Тогаш мора да важи $k_n = 1$ и $a_n = a_{n-1} + a_1$. Според тоа, $\frac{a_{n-2}+a_1}{a_{n-1}} = k_{n-1} - 1$ и $\frac{a_{n-1}+a_2}{a_1} = k_1 - 1$ се цели броеви, па со примена на индуктивната претпоставка на $n-1$ броеви $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ добиваме

$$(k_1 - 1) + k_2 + ... + k_{n-1} + (k_{n-1} - 1) < 3(n-1)n,$$

од каде одма следува $k_1 + k_2 + ... + k_n < 3n$.

12. Низата $\{x_n\}$ е определена со $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_{n+1} = 1 - x_1 x_2 ... x_n$ за секој $n \geq 1$. Докажи дека $x_{100} > 0,99$.

Решение. Имаме $1 - x_{n+1} = x_n(x_1 x_2 ... x_{n-1}) = x_n(1 - x_n)$, односно $x_{n+1} = f(x_n)$, каде $f(x) = x^2 - x + 1$. Со индукција по n ќе докажеме дека $x_n \geq \frac{n}{n+1}$. Неравенството важи за $n = 1$ и да претпоставиме дека важи за n. Функцијата $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ монотоно расте на интервалот $[\frac{1}{2}, +\infty)$, па затоа важи

$$x_{n+1} = f(x_n) \geq f(\frac{n}{n+1}) = 1 - \frac{n}{n^2+2n+1} > 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2},$$

со што индукцијата е завршена.

Во нашиот случај имаме $x_{100} \geq \frac{100}{101} > 0,99$.

13. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со равенствата

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n}, n \geq 1 .$$

Докажи дека $[a_n^2] = n$ за $n \geq 4$.

Решение. Нека $f(x) = \frac{x}{n} + \frac{n}{x}$. Од $f(a) - f(b) = \frac{(a-b)(ab-n^2)}{abn}$ следува дека функцијата $f(x)$ опаѓа на интервалот $(0, n)$.

Прво со индукција ќе докажеме дека $\sqrt{n} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n-1}}$ за $n \geq 3$. Имаме $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $a_3 = 2$, т.е. $\sqrt{3} \leq a_3 \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$. Нека $\sqrt{n} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n-1}}$ за некој $n \geq 3$. Тогаш $a_{n+1} = f(a_n) \leq f(\sqrt{n}) = \frac{n+1}{\sqrt{n}}$ и $a_{n+1} = f(a_n) \geq f(\frac{n}{\sqrt{n-1}}) = \frac{n}{\sqrt{n-1}} > \sqrt{n+1}$, со што идукцијата е завршена.

Бидејќи $\sqrt{n} \leq a_n$, останува да докажеме дека $a_n < \sqrt{n+1}$. Од докажаното следува $a_{n+1} = f(a_n) \geq f(\frac{n}{\sqrt{n-1}}) = \frac{n}{\sqrt{n-1}}$ за $n \geq 3$. Значи, $a_n \geq \frac{n-1}{\sqrt{n-2}}$ за $n \geq 4$. Тогаш

$$a_{n+1} = f(a_n) < f(\frac{n-1}{\sqrt{n-2}}) = \frac{(n-1)^2 + n^2(n-2)}{(n-1)n\sqrt{n-2}} < \sqrt{n+2} ,$$

за $n \geq 4$. Според тоа, $\sqrt{n} \leq a_n < \sqrt{n+1}$ за $n \geq 4$, т.е. $[a_n^2] = n$ за $n \geq 4$..

14. За низата реални броеви $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ важи

$$a_{n+1} + a_{n-1} = |a_n| \text{ за секој } n > 1 .$$

Докажи дека ова низа е периодична.

Решение. Барем еден член на низата е ненегативен. Ако $a_i \geq 0$ за $i \geq 1$, меѓу членовите a_{i-1} и a_{i+1} барем еден е ненегативен, на пример $a_{i+1} \geq 0$. Ако $a_{i+1} \geq a_i$, тогаш $a_{i+2} = a_{i+1} - a_i \leq a_{i+1}$. Значи, за некој n важи $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$.

Да означиме $a_n = x + y$ и $a_{n+1} = x$, каде $x, y \geq 0$. Тогаш $a_{n+2} = y$ и $a_{n+3} = y - x$, а понатаму разликуваме два случаја:

1) $x \geq y$. Следните членови на низата се $x,\ 2x - y,\ x - y, -x,\ y,\ x + y,\ x$.

2) $x < y$. Следните членови на низата се $2y - x,\ y,\ x - y, -x,\ y,\ x + y,\ x$.

Во двата случаја низата е периодична со период 9 почнувајќи од a_n, па со едноставна индукција следува дека е периодична и почнувајќи од a_0.

15. Низата $\{a_n\}$ е определена со $a_1 = a, a_2 = b$, каде $a, b \in \mathbb{N}$, а за $n \geq 2$ членот a_{n+1} е еднаков на бројот на членовите на низата еднакви на a_n меѓу a_1, $a_2, ..., a_n$. Определи ги сите парови (a, b) за кои низата $\{a_n + a_{n+1}\}$ е неопаѓачка почнувајќи од некое место.

Решение. За $a = b = 1$ имаме $a_{2i-1} = i$ и $a_{2i} = 1$, што значи дека низата $a_n + a_{n+1} = [\frac{n}{2}] + 1$ не опаѓа. Нека сега $a_1 = a \neq 1$ (ако $a_2 \neq 1$, тогаш можеме да ги замениме местата на a_1 и a_2, со што остатокот на низата не се менува). Јасно, низата $\{a_n\}$ не е ограничена. Навистина, меѓу $a_1, a_2, ..., a_{k^2+1}$ има најмалку $k+1$ еднакви членови, па затоа некој член на низата не е помал од $k+1$. Нека претпоставиме дека низата $\{a_n + a_{n+1}\}$ не опаѓа почнувајќи од некој $n \geq N$. Можеме да сметаме дека $a_{N+1} = t > \max\{a, b\}$, како и дека $a_i < t$ за $i \leq N$. Тогаш $a_{N+2} = 1$ и како низата не опаѓа имаме $a_N = 1$. Значи, во првите N членови има t единици, да кажеме a_{n_i} за $i = 1, 2, ..., t$. Сега, од принципот на Дирихле следува дека два меѓу $a_{n_i - 1}$ се еднакви, по меѓу членовите по нив не може да има единица, што е противречност.

16. Дали постои неограничена низа $\{a_n\}$ од позитивни реални броеви такви што $a_{n+2} = \frac{1}{2009}(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})$ за $n \geq 1$.

Решение. Ќе докажеме дека ако $q \in (0,1)$ и $\{a_n\}$ е низа од позитивни реални броеви таква што $a_{n+2} = q(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})$ за $n \geq 1$, тогаш таа е ограничена.

Ставаме $k = \frac{q}{1-q}$, $b_n = a_{n+1}a_n - k$ и тогаш условот го добива видот $b_{n+1} = qb_n$.

Според тоа, $b_n = q^{n-1}b_1$, т.е. $a_{n+1}a_n = q_{n-1}b_1 + k$. Ако $b_1 = 0$, тогаш низата е периодична со период 2, па затоа е ограничена. Во спротивно добиваме $a_{n+1} = \frac{q^{n-1}+c}{q^{n-2}+c}a_{n-1}$ каде $c = \frac{k}{b_1}$. Затоа важи

$$a_{2n+1} = a_1 \prod_{i=1}^{n} \frac{q^{2i-1}+c}{q^{2i-2}+c}.$$

Ако $b_1 < 0$, тогаш $c < -1$, $\frac{q^{2i-1}+c}{q^{2i-2}+c} \in (0,1)$ и $a_{2n+1} < a_1$. Ако $b_1 > 0$, тогаш

$$\frac{q^{2i-1}+c}{q^{2i-2}+c} < 1 + \frac{1-q}{c} q^{2i-1} < e^{\frac{(1-q)q^{2i-1}}{c}}.$$

Бидејќи $\sum_{i=1}^{n} q^{2i-1} < \frac{q}{1-q}$, довиваме дека $a_{n+1} < a_1 e^{qc}$. Аналогно се докажува дека поднизата $\{a_{2n}\}$ е ограничена, со што задачата е решена.

17. Низата $a_1, a_2, ...$ е таква што $a_1 \in (1,2)$ и $a_{k+1} = a_k + \frac{k}{a_k}$ за $k \in \mathbb{N}$. Докажи дека низата содржи најмногу еден пар членови чиј збир е цел број.

Решение. Ставаме $b_k = a_k - k$ и добиваме

$$b_{k+1} = b_k - 1 + \frac{k}{k+b_k} = b_k - \frac{b_k}{k+b_k} = b_k(1 - \frac{1}{k+b_k}).$$

Бидејќи $b_1 > 0$, од последното равенство со индукција следува дека $b_k > 0$. Освен тоа $b_{k+1} = b_k - \frac{b_k}{k+b_k} < b_k$, што значи $b_k < b_1 < 1$.

Понатаму, $b_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} - 2 = (\sqrt{a_1} - \frac{1}{\sqrt{a_1}})^2$. Изразот во заградите е позитивен и монотоно расте, и кога a_1 се менува во интервалот $(1,2)$, тогаш

$$0 = 1 + \frac{1}{1} - 2 < b_2 < 2 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}.$$

Според тоа, $b_k \le b_2 < \frac{1}{2}$ за $k \ge 2$. Сега, ако $a_k + a_j$ е цел број, тогаш $b_k + b_j$. Според тоа, еден од броевите b_k и b_j не е помал од $\frac{1}{2}$, да кажеме b_k. Значи, $k = 1$ и $b_j = 1 - b_1$. Бидејќи низата $\{b_n\}$ моното опаѓа, постои најмногу еден таков j со што задачата е решена.

18. Низата природни броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е таква што важи

$$a_{n+2} = [\frac{2a_n}{a_{n+1}}] + [\frac{2a_{n+1}}{a_n}],$$

за секој $n \ge 1$. Докажи дека за некој n важи $a_n = 4$ и $a_{n+1} \in \{3,4\}$.

Решение. Од дефиницијата на функцијата цел дел и од неравенството меѓу средините следува дека $a_{n+2} > \frac{2a_n}{a_{n+1}} + \frac{2a_{n+1}}{a_n} - 2 \ge 2$, па затоа $a_k \ge 3$ за за секој $k \ge 3$

Ако $a_n = a_{n+1} = 3$, тогаш $a_{n+2} = 4$ и $a_{n+3} = 3$, а ако $a_n = 3$ и $a_{n+1} = 4$, тогаш $a_{n+2} = 3$. Според тоа, ако за некој n важи $\max\{a_n, a_{n+1}\} \le 4$ тврдењето тврдењето е точно.

Нека претпоставиме дека $\max\{a_n, a_{n+1}\} > 4$ за секој n. Нека a_n и a_{n+1} се еднакви во некој редослед на x и y, при што важи $x \ge y \ge 3$ и $x \ge 5$.

1) Ако $x = y$, тогаш $a_{n+2} = 4$.

2) Ако $x > y$, тогаш $a_{n+2} = [\frac{2x}{y}] + [\frac{2y}{x}] \le [\frac{2x}{y}] + 1 \le \frac{2x}{y} + 1 \le \frac{2}{3}x + 1 < x$.

Понатаму, од 1) и 2) следува $a_{n+3} < \max\{a_{n+2}, a_{n+1}\} \le x$, што значи дека

$\max\{a_{n+2}, a_{n+1}\} < \max\{a_{n+1}, a_n\}$ за секој $n \ge 3$, што не е можно во множеството природни броеви. Конечно, од добиената противречност следува $\max\{a_n, a_{n+1}\} \le 4$, т.е. следува тврдењето на задачата.

19. За природниот број n дефинираме

$$c_n = \min_{z_1, z_2, \dots, z_n \in \{1,-1\}} |1^{2018} z_1 + 2^{2018} z_2 + 3^{2018} z_3 + \dots + n^{2018} z_n|.$$

Дали низата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена.

Решение. Ќе докажеме дека за секој природен број n важи $c_{n+2^{2019}} \le c_n$, од каде одма ќе следува дека низата $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена.

Лема. Дефинираме $\varepsilon_0 = 1$ и $\varepsilon_n = -\varepsilon_{n-2^k}$ за $k \in \mathbb{N}_0$ и $2^k \le n < 2^{k+1}$. Тогаш за секој полином $P(x), \deg P \le d$ важи

$$\sum_{i=0}^{2^{d+1}-1} \varepsilon_i P(x+i) = 0 .$$

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по d. За $d = 0$ полиномот $P(x)$ е константен, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = -1$ и $P(x+1) - P(x) = 0$.

Нека $d > 0$ и тврдењето важи за полином со степен $d-1$. Нека $P(x)$ е полином со степен $d > 0$. Полиномот $Q(x) = P(x+2^d) - P(x)$ има степен $d-1$, па како $\varepsilon_{i+2^d} = -\varepsilon_i$ за $0 \le i < 2^d$ од индуктивната претпоставка следува

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2^{d+1}-1} \varepsilon_i P(x+i) &= \sum_{i=0}^{2^d-1} \varepsilon_i P(x+i) - \sum_{i=0}^{2^d-1} \varepsilon_i P(x+i+2^d)\\ &= \sum_{i=0}^{2^d-1} \varepsilon_i (P(x+i) - P(x+i+2^d)) = -\sum_{i=0}^{2^d-1} \varepsilon_i Q(x) = 0.\end{aligned}$$

Сега тврдењето следува од принципот на математичка индукција. ■

Од лемата следува

$$c_{n+2^{2019}} \le c_n + \sum_{i=0}^{2^{2019}-1} \varepsilon_i (n+i+1)^{2018} = c_n .$$

IV ФУНКЦИИ И ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

IV.1. СВОЈСТВА НА ФУНКЦИИТЕ. НЕПРЕКИНАТИ ФУНКЦИИ

1. Нека за функцијата $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ важи

   1) $f(x)\geq 0$ за секој $x\in[0,1]$,

   2) $f(1)=1$,

   3) ако $x_1,x_2\in[0,1]$ и $x_1+x_2\leq 1$, тогаш $f(x_1)+f(x_2)\leq f(x_1+x_2)$.

   Докажи дека за секој $x\in[0,1]$ важи $f(x)\leq 2x$.

   Решение. Од условот на задачата следува

$$f(x)\leq f(x)+f(1-x)\leq f(1)=1.$$

Понатаму, од 3) имаме $2f(x)\leq f(2x)$, од каде со индукција се докажува дека

$$2^k f(x)\leq f(2^k x)\leq 1$$

кога $0\leq 2^k x\leq 1$. Да земеме $k\in\mathbb{N}_0$ таков што $\frac{1}{2}\leq 2^k x\leq 1$. Тогаш

$$2^k f(x)\leq 1\leq 2^{k+1}x\text{, т.е. } f(x)\leq 2x.$$

2. Дадени се различни остри агли α и β за кои

$$(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=2.$$

Докажи дека $\alpha+\beta=90^\circ$.

Решение. Имаме $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\cos^2\beta=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}$, па ако замениме во даденото равенство добиваме

$$(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-1)(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)^2=0.$$

Бидејќи α и β се различни остри агли важи $\operatorname{tg}\alpha\neq\operatorname{tg}\beta$, па затоа од последното равенство следува $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1$, т.е. $\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta$. Оттука добиваме $\cos(\alpha+\beta)=0$ и како аглите α и β се остри добиваме $\alpha+\beta=90^\circ$.

3. Ако $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ и $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$ определи го $\sin\beta$.

Решение. Нека $\sin\beta=x$. Од $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$ следува дека $\cos\beta=\sqrt{1-x^2}$ и $\cos\alpha=\frac{3}{5}$. Според тоа,

$$\tfrac{3}{5}=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\tfrac{4}{5}\sqrt{1-x^2}-\tfrac{3}{5}x,$$
$$3x+3=4\sqrt{1-x^2},$$
$$9(x+1)^2=16(1-x^2),$$
$$(x+1)(25x-7)=0.$$

Конечно, бидејќи $x\in(0,1)$ добиваме $x=\frac{7}{25}$, т.е. $\sin\beta=\frac{7}{25}$.

4. Нека $f_k(x)=\frac{\sin^k x+\cos^k x}{k}$. Определи ги сите природни броеви m и n, $m\neq n$ за кои функцијата $f_m(x)-f_n(x)$ е константа.

Решение. Нека $m<n$ и $f_m(x)-f_n(x)=c$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Ставаме $x=0$ и $x=\pi$ и добиваме $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}=c$ и $\frac{(-1)^m}{m}-\frac{(-1)^n}{n}=c$. Сега, бидејќи $m\neq n$ лесно се добива дека броевите m и n се парни. Нека $m=2p$ и $n=2q$. Сега, ставаме $x=\frac{\pi}{4}$ и добиваме дека

$$\frac{1}{2p}-\frac{1}{2q}=c=\frac{1}{p2^p}-\frac{1}{q2^q}. \tag{1}$$

Ако $p=1$, тогаш од (1) следува дека $q=1$, па затоа $m=n=2$, што е противречност. Според тоа, $p\geq 2$ и (1) може да се запише во видот $\frac{q2^q}{p2^p}=\frac{2^q-2}{2^p-2}$.

Нека $q=p+k$, каде k е природен број. Тогаш горното равенство може дасе запише во видот

$$k2^k=(2^{k+1}-2)\frac{p}{2^p-2}. \tag{2}$$

Бидејќи $k2^k\geq 2^{k+1}-2$, добиваме $\frac{p}{2^p-2}\geq 1$, т.е. $p\geq 2^p-2$. Со индукција лесно се докажува дека $2^p-2<p$ за $p\geq 3$ и затоа $p=2$. Тогаш од (2) следува дека $k2^k=2^{k+1}-2$, т.е. $k=1$. Значи $q=3$ и затоа $m=4$ и $n=6$. Останува да докажеме дека овие броеви навистина го задоволуваат условот на задачата. Навистина, во овој случај имаме

$$f_4(x)=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{4}=\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}{4}=\frac{1}{4}-\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{2} \text{ и}$$

$$f_6(x)=\frac{\sin^6 x+\cos^6 x}{4}=\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)((\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x)}{6}=\frac{1}{6}-\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{2},$$

па затоа $f_4(x)-f_6(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$.

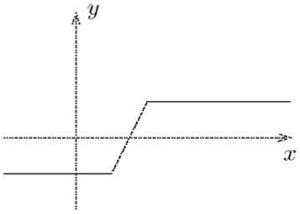
5. Дадени се функциите $f(x)=|x-1|-|x-2|$ и $g(x)=|x-3|$.

а) Конструирај го графикот на функцијата $f(x)$.

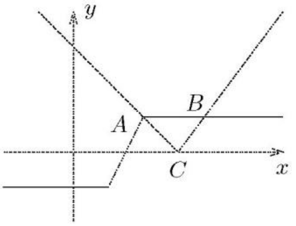
б) Определи ја плоштината на фигурата ограничена со графиците на функциите $f(x)$ и $g(x)$.

Решение. а) Од

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in(-\infty,1]\\ 2x-3, & x\in[1,2]\\ 1, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$$



следува дека графикот се состои од три дела (цртеж десно.



б) Двата графици се сечат во точките $A(2,1)$ и $B(4,1)$, а бараната фигура е триаголникот ABC, каде $C(3,0)$ е точка од графикот на функцијата $g(x)$ (цртеж десно). Бараната плоштина е

$$P_{\triangle ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot h_c}{2}=\frac{2\cdot 1}{2}=1.$$

6. Дали може функцијата $f(x)=2^x+3^x+6^x$ да се запише како конечен збир на периодични функции.

Решение. *Не*. Со индукција се докажува дека ниту една ненулта функција од видот $f(x)=2^x a+3^x b+6^x c$ не може да се запише во саканиот облик. Навистина, ако претпоставиме дека $f(x)$ е збир на n периодични функции со периоди $T_1,...,T_n$, тогаш функцијата $f_1(x)=f(x+T_1)-f(x)$ е од видот $f_1(x)=2^x a_1+3^x b_1+6^x c_1$, но може да се претстави во облик на збир на $n-1$ периодична функција. Продолжувајќи ја постапката добиваме дека функцијата од видот $f_{n-1}(x)=2^x a_{n-1}+3^x b_{n-1}+6^x c_{n-1}$ е периодична функција, што е противречност.

7. За функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ велиме дека е добра ако за секои $a,b\in\mathbb{N}$ важи

$$f(a+b-1)=\underbrace{f(f(...f}_{a\text{ пати}}(b)...)).$$

Нека g е добра функција таква што за некој $A\geq 2$ важи

$$g(A+2018)=g(A)+1.$$

а) Докажи дека за секој $n\geq A+2$ важи $g(n+2017^{2017})=g(n)$.

б) Ако важи $g(A+2017^{2017})\neq g(A)$ определи го $g(n)$ за $n\leq A-1$.

Решение. Ако е $g(a)=g(a+d)$ за некои $a,d\in\mathbb{N}$, тогаш според условот на задачата $g(a+n)=g^{n+1}(a)=g^{n+1}(a+d)=g(a+n+d)$, што значи дека функцијата $g(x)$ за $x\ge a$ е периодична со период d. Вакви a и d постојат бидејќи

$$g(A+2019)=g(g(A+2018))=g(g(A)+1)=g(g(g(A)))=g(A+2),$$

па од претходно изнесеното важи $g(n+2017)=g(n)$ за $n\ge A+2$. Да го разгледаме најмалиот d за кој ваков a постои и нека $a=a_0$ е најмалиот таков a. Заради минималноста на периодот d за $x,y\ge a_0$ важи $g(x)=g(y)$ ако и само ако $d\,|\,x-y$. Јасно, $d\,|\,2017$.

Сега, одма следува дека $g(n+2017^{2017})=g(n)$ за $n\ge A+2$. Од друга страна, од $g(A+2017^{2017})\ne g(A)$ следува дека $A\le a_0-1$, т.е. $a_0\in\{A+1,A+2\}$. Да претпоставиме дека $g(a')=g(a'+d')$ за некој $a'\le a_0-1$ и некој $d'\in\mathbb{N}$. Бидејќи тогаш функцијата $g(x)$ има период d' за $x\ge a'$ следува дека $d\,|\,d'$, но тогаш $g(a_0-1)=g(a_0-1+d')=g(a_0-1+d)$ што противречи на изборот на a_0. Според тоа, ако е $g(x)=g(y)$ и $x\le a_0-1$, тогаш $x=y$. Сега, од $g(g(n))=g(n+1)$ за $n+1\le A\le a_0-1$ следува $g(n)=n+1$.

8. Нека A е конечно множество функции од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$ со следниве својства:
1) ако $f,g\in A$, тогаш $f\circ g\in A$,
2) за секој $f\in A$ постои $g\in A$ таков што важи

$$f(f(x)+y)=2x+g(g(y)-x).$$

Докажи дека функцијата $h_0(x)=x$, за секој $x\in\mathbb{R}$ припаѓа на множеството A.

Решение. За произволна функција $h\in A$ да означиме $h^n(x)=h(h(...h(x)...))$. Бидејќи во множеството A меѓу функциите $h^{2^k}, k=0,1,2,...$ постојат две исти, да кажеме $h^{2^m}=h^{2^n}, m<n$. Тогаш функцијата $f_0=h^{2^n-2^m}$, го задоволува равенството $f_0(f_0(x))=f_0(x)$ за секој x. Ако докажеме дека f_0 е сурјекција ќе следува $f_0(x)=x$ за секој x.

Нека $g\in A$ е функција таква што $f_0(f_0(x)+y)=2x+g(g(y)-x)$ за секои x,y. Функцијата g е сурјекција, бидејќи за $y=-f_0(x)$ имаме

$$g(g(-f_0(x))-x)=f_0(0)-2x.$$

Од друга страна, за $x=0$ добиваме дека $f_0(f_0(0)+y)=g(g(y))$, што значи дека и функцијата f_0 е сурјекција.

9. Колку пати функцијата $f(x)=\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot...\cdot\cos\frac{x}{2009}$ го менува знакот на интервалот $[0,\frac{2009\pi}{2}]$.

Решение. Заради непрекинатоста на функцијата $f(x)$, таа може да го промени знакот само таму каде што прима вредност 0, а тоа се точките $x_n=\frac{n\pi}{2}$ за $n=0,1,2,...,2009$.

Функцијата $\cos\frac{x}{m}$ го менува знакот само во точките $x_{(2k+1)m}, k\in\mathbb{Z}$. Тоа значи дека бројот на косинусите во записот на $f(x)$ кои го менуваат знакот во точката x_n е еднаков на бројот на непарните делители на бројот n. Притоа $f(x)$ го менува знакот во x_n само ако бројот на тие делители е непарен, Ако ставиме $n=2^k n_1$, $2\nmid n_1$, тогаш бројот на непарните делители на n е еднаков на бројот на делителите на бројот n_1, а тој е непарен ако и само ако n_1 е точен квадрат. Според тоа, $f(x)$ го менува знакот само во точките x_n за кои n или $\frac{n}{2}$ е точен квадрат. Вакви броеви n има $[\sqrt{2009}]+[\sqrt{\frac{2009}{2}}]=75$. Значи, на интервалот $[0,\frac{2009\pi}{2}]$ дадената функција го менува знакот 75 пати.

10. Нека S е множеството од сите природни броеви поголеми од 1. Дали постои функција $f:S\to S$ таква што

$$f(a)f(b)=f(a^2b^2)\text{, за секои } a,b\in S, (a\neq b)\,?$$

Решение. За $c>a,b$ важи $a\neq bc$ и $b\neq ac$, па затоа имаме

$$f(a^2)f(b)f(c)=f(a^2)f(b^2c^2)=f(a^4b^4c^4)=f(b^2)f(a^2c^2)=f(b^2)f(a)f(c)$$

па затоа $\frac{f(a^2)}{f(a)}=\frac{f(b^2)}{f(b)}$. Според тоа, постои константа k таква што важи $f(x^2)=kf(x)$ за секој x. Сега почетната равенка го добива обликот

$$f(a)f(b)=kf(ab)\text{, за секои } a,b\in S, (a\neq b).$$

Сега имаме

$$f(a)f(a^2)=f(a^6)=\frac{1}{k}f(a)f(a^5)=\frac{1}{k^2}f(a)f(a)f(a^4)=\frac{1}{k}f(a)f(a)f(a^2),$$

од каде што следува $f(a)=k$ за секој a. Сега со замена во почетната равенка добиваме $k=1$, што е противречност. Според тоа, не постои функција со саканите својства.

11. Определи ги сите цели броеви k такви што постои функција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ за која важи:

а) $f(1997)=1998$,

б) $f(ab) = f(a) + f(b) + kf(\text{NZD}(a,b))$, за секои $a,b \in \mathbb{N}$.

Решение. За $a = b$ добиваме $f(a^2) = (k+2)f(a)$. Оттука важи

$$f(a^4) = f((a^2)^2) = (k+2)f(a^2) = (k+2)^2 f(a).$$

Од друга страна добиваме:

$$\begin{aligned} f(a^4) &= f(a^3a) = f(a^3) + f(a) + kf(a) = f(a^2) + f(a) + kf(a) + f(a) + kf(a) \\ &= (k+2)f(a) + 2f(a) + 2kf(a) = (3k+4)f(a). \end{aligned}$$

Значи $(k+2)^2 f(a) = (3k+4)f(a)$ и за $a = 1997$ од последното равенство добиваме $1998(k+2)^2 = 1998(3k+4)$, па затоа $(k+2)^2 = 3k+4$, т.е. $k = 0$ или $k = -1$.

12. Функцијата $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ги задоволува условите

1) $f(1) = p+1$,

2) $f(n+1) = f(1)f(2)...f(n) + p$

каде p е прост број. Определи го p така што постои $k \in \mathbb{N}$ таков што $f(k)$ е точен квадрат.

Решение. Прво да провериме кога $f(1)$ е точен квадрат. Тогаш $p+1 = m^2$, од каде добиваме $p = (m-1)(m+1)$, па затоа $m-1 = 1$, т.е. $m = 2$ и $p = 3$.

Понатаму, бидејќи $f(2) = f(1) + p = 2p+1$ и равенката $2p+1 = m^2$ нема решение, заклучуваме дека $f(2)$ не е точен квадрат за ниту еден прост број p.

Понатаму, $f(3) = f(1)f(2) + p = (p+1)(2p+1) + p = 2p^2 + 4p + 1$ и равенката $2p^2 + 4p + 1 = m^2$ нема решение, што е очигледно за $p = 2$, а за $p > 2$ левата страна дава остаток 2 при делење со 4, а остатокот на квадрат на природен број при делење со 4 може да биде 0 или 1.

Сега, да разгледаме $f(n), n \geq 4$. Јасно, $f(n-1) > 2p^2$, $f(n) > p^4$ и

$$f(n) = f^2(n-1) - pf(n-1) + p.$$

Нека претпоставиме дека $f(n) = k^2$. Тогаш

$$\begin{aligned} &f^2(n-1) - pf(n-1) + p - k^2 = 0, \\ &4f^2(n-1) - 4pf(n-1) + p^2 - 4k^2 = p^2 - 4p, \\ &(2f(n-1) - p)^2 - 4k^2 = p^2 - 4p, \\ &(2f(n-1) - p - 2k)(2f(n-1) - p + 2k) = p^2 - 4p. \end{aligned} ,$$

За $p > 3$ десната страна во последното равенство е позитивен број, па затоа мора да важи $2f(n-1) - p - 2k \geq 1$. Според тоа,

$$(2f(n-1)-p-2k)(2f(n-1)-p+2k)\geq 2f(n-1)-p+2k$$
$$\geq 4p^2-p+2p^2>p^2-4p,$$

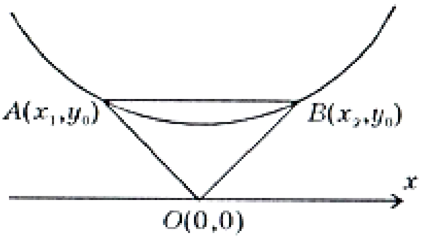
што е противречност. За $p=3$ видовме дека $f(1)$ е точен квадрат, а за $p=2$ лесно се докажува дека нема точни квадрати. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

13. а) Дади пример на функција $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ таква што
$$2f(x^2)\geq xf(x)+x \text{ за секој } x>0.$$
б) Докажи дека ако $f(x)$ го има својството од а), тогаш $f(x^3)\geq x^2$ за секој $x>0$.

Решение. а) На пример, функцијата
$$f(x)=\begin{cases}1, & x\leq 1\\ x, & x\geq 1\end{cases}$$
го има саканото својство.

б) Очигледно $f(x^2)>\frac{x}{2}$. Да претпоставиме дека $f(x)>x^{a_n}/2^{1/2^n}$ за секој $x>0$ ($a_0=\frac{1}{2}$). Бидејќи $f(x^2)\geq x\sqrt{f(x)}$, добиваме
$$f(x)\geq\sqrt{x}\sqrt{f(\sqrt{x})}>x^{a_{n+1}}/2^{1/2^{n+1}},$$
каде $a_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{a_n}{4}$. Сега, од $a_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{a_n-\frac{2}{3}}{4}$ следува дека $a_n\to\frac{2}{3}$. Бидејќи $2^{1/2^{n+1}}\to 1$, заклучуваме дека $f(x)\geq x^{2/3}$ кога $x>0$.

14. Нека p и q се позитивни броеви, за кои параболата $y=x^2-2px+q$ нема заеднички точки со $x-$оската. Докажи дека на параболата постојат точки A и B за кои отсечката AB е паралелна со $x-$оската и се гледа од координатниот почеток O под прав агол ако и само ако $p^2<q\leq\frac{1}{4}$. За кои вредности на p и q точките A и B се еднозначно определени?



Решение. Параболата нема заеднички точки со $x-$оската, па затоа равенката $x^2-2px+q=0$ нема реални решенија, т.е. $q>p^2$. Нека точките $A(x_1,y_0)$ и $B(x_2,y_0)$ ги имаат саканите својства. Тогаш x_1 и x_2 се решенија на равенката $x^2-2px+q-y_0=0$ и $y_0>q-p^2$, бидејќи темето на параболата има координати $(p, q-p^2)$. Од друга страна

$$\overline{OA}^2=x_1^2+y_0^2,\ \overline{OB}^2=x_2^2+y_0^2,\ \overline{AB}^2=(x_1-x_2)^2,$$

па од Питагоровата теорема следува $y_0^2+x_1x_2=0$. Бидејќи $x_1x_2=q-y_0$, добиваме $y_0^2+q-y_0=0$. Според тоа, егзистенцијата на точките A и B е еквивалентна на тоа дека равенката $f(y)=y^2-y+q=0$ да има решение $y_0>q-p^2$ (точките A и B се определени еднозначно ако тоа решение е единствено). Еден потребен услов е дискриминатата на горната равенка да е ненегативна, т.е. $q\le\frac{1}{4}$. Овој услов е и доволен бидејќи

$$f(q-p^2)=q-p^2+p^2>0 \text{ и } \tfrac{1}{2}>\tfrac{1}{4}\ge q-p^2.$$

Јасно, соодветното решение y_0 единствено кога $q=\frac{1}{4}$.

15. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е таква што

$$f(x^2+y^2)\ge f(x+y)$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$. Докажи дека $f(x)=f(y)$ за секои $x,y\in(0,2)$.

Решение. Ако $2z\ge t^2$, тогаш за $2x=t+\sqrt{2z-t^2}, 2y=t-\sqrt{2z-t^2}$ важи $x^2+y^2=z, x+y=t$ и затоа $f(z)\ge f(t)$. Ако $z\in(0,2)$ и $t\in(z,\sqrt{2z}]$, тогаш $2z\ge t^2, 2t>z^2$ и затоа $f(z)=f(t)$.

Нека сега $a_0=1$ и $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}, n\ge 0$. Со индукција се докажува дека $1\le a_n<a_{n+1}<2$ и затоа постои $l=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Од $l=\sqrt{2l}$, следува $l=2$.

Според тоа, $[1,2)=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}[a_n,a_{n+1})$. Тогаш, од претходните разгледувања следува дека $f(x)=f(1)$ за секој $x\in(1,2)$.

Аналогно, со помош на низата определена со $b_0=1$ и $2b_{n+1}=b_n^2$ се докажува дека $f(x)=f(1)$ за секој $x\in(0,1)$.

IV.2. ЕКСТРЕМНИ ВРЕДНОСТИ НА ФУНКЦИИ. ПРИМЕНА НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОТО СМЕТАЊЕ

1. Нека $x_1,x_2,...,x_n\in[0,1]$. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$x_1(1-x_2)+x_2(1-x_3)+...+x_n(1-x_1).$$

Решение. Дадениот израз да го означиме со $I = I(x_1, x_2, ..., x_n)$. Ако ги фиксираме сите променливи освен x_i, тогаш I е линеарна функција по x_i, па затоа на интервалот $[0,1]$ максималната вредност ја достигнува за $x_i = 0$ или $x_i = 1$. Затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x_i \in \{0,1\}$ за $i = 1, 2, ..., n$.

Собирокот $x_i(1 - x_{i+1})$ е еднаков на 1 за $(x_i, x_{i+1}) = (1,0)$, а во спротивно е еднаков на 0. Според тоа, вредноста на I е еднаква на бројот на паровите на последователните членови $(1,0)$ во низата $(x_1, x_2, ..., x_n, x_1)$. Бидејќи сите вакви парови меѓу себе се дисјунктни, може да има најмногу $[\frac{n}{2}]$ вакви парови. Значи, $I \le [\frac{n}{2}]$. Оваа вредност се достигнува, на пример, ако $x_1 = x_3 = ... = 1$ и $x_2 = x_4 = ... = 0$.

2. Нека a, b, c, A, B, C се реални броеви такви што $a \ne 0, A \ne 0$ и за секој $x \in \mathbb{R}$ важи

$$|ax^2 + bx + c| \le |Ax^2 + Bx + C|. \qquad (1)$$

Докажи дека

$$|b^2 - 4ac| \le |B^2 - 4AC|.$$

Решение. Од $|a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}| \to |a|$ и $|A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2}| \to |A|$ кога $x \to \infty$ следува дека за да за доволно голем број x биде исполенто неравенството (1) треба да важи $|a| \le |A|$. Ќе разгледаме три случаи.

1) Ако $B^2 - 4AC > 0$, тогаш равенката $Ax^2 + Bx + C = 0$ има различни реални решенија x_1 и x_2. Од (1) следува дека и равенката $ax^2 + bx + c = 0$ има исти решенија и јасно $b^2 - 4ac > 0$. Според тоа,

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{B^2-4AC}{A^2} = \frac{b^2-4ac}{a^2},$$

т.е.

$$B^2 - 4AC = A^2(x_1 - x_2)^2 \ge a^2(x_1 - x_2)^2 = b^2 - 4ac.$$

2) Нека $B^2 - 4AC \le 0$ и $b^2 - 4ac \le 0$. Бидејќи $|a| \le |A|$, во овој случај доволно е да докажеме дека тврдењето важи за $A \ge a > 0$.

Функцијата $ax^2 + bx + c$ го достигнува својот минимум во $m = -\frac{b}{2a}$, а функцијата $Ax^2 + Bx + C$ го достигнува својот минимум во $M = -\frac{B}{2A}$. Тогаш

$$\frac{4ac-b^2}{4a} = am^2 + bm + c \le aM^2 + bM + c \le AM^2 + BM + C = \frac{4AC-B^2}{4A},$$

па затоа

$$4ac-b^2 \le \tfrac{a}{A}(4AC-B^2) \le 4AC-B^2 .$$

3) Нека $B^2-4AC \le 0$ и $b^2-4ac>0$. Тогаш неравенството (1) важи за секој $x\in\mathbb{R}$ ако и само ако важи

$$ax^2+bx+c \le Ax^2+Bx+C \text{ и } -(ax^2+bx+c) \le Ax^2+Bx+C$$

за секој $x\in\mathbb{R}$, т.е. ако и само ако важи

$$(A-a)x^2+(B-b)x+(C-c)\ge 0 \text{ и } (A+a)x^2+(B+b)x+(C+c)\ge 0 ,$$

т.е. ако и само ако

$$(B-b)^2-4(A-a)(C-c)\ge 0 \text{ и } (B+b)^2-4(A+a)(C+c)\ge 0 .$$

Ако ги собереме претходните две неравенства добиавме

$$b^2-4ac \le 4AC-B^2 .$$

Со ова се разгледани сите можности и задачата е решена.

3. Реалните броеви x,y,z ги задоволуваат условите $|x|,|y|,|z|\ge 1$ и

$$x+y+z+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z}=0 . \qquad (1)$$

Определи ја најголемата можна вредност на збирот $x+y+z$.

Решение. Условот (1) може да се запише во видот $f(x)+f(y)+f(z)=0$, каде $f(t)=t+\frac{1}{t}$. Ако два од броевите x,y,z се позитивни, на пример $x,y>0>z$, тогаш очигледно $f(x)+f(y)>f(x+y)$, па затоа $-z>x+y$, т.е. $x+y+z<0$. Понатаму ќе сметаме дека $x,y<0<z$. Ако ставиме $x=-x_1$ и $y=-y_1$, условот на задачата станува $f(x_1)+f(y_1)=f(z)$, а треба да се минимизира $S=z-x_1-y_1$.

Функцијата f е непрекината, растечка и конвексна на интервалот $[1,\infty)$. Според тоа, за некој $t\ge 1$ важи

$$f(t)+f(1)=f(z)=f(x_1)+f(y_1)\le f(x_1+y_1-1)+f(1) ,$$

и тогаш $t\le x_1+y_1-1$. Значи, $S\le S'=z-t-1$, а притоа

$$S'=z-t-1=\tfrac{1}{t}+1-\tfrac{1}{z}=\tfrac{z-t}{zt}+1\le\tfrac{z-t}{z-t+1}+1=\tfrac{S'+1}{S'+2}+1 ,$$

т.е. $S'^2\le 3$. Конечно, $S\le\sqrt{3}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=-1$ и $z=2+\sqrt{3}$.

4. Определи го најмалото моижно растојание меѓу точките M и N кои припаѓаат на графиците на функциите $y=x^2$ и $y=5x^2+1$?

Решение. Ако $M(x-a,(x-a)^2)$ и $N(x,5x^2+1)$, тогаш

$$\overline{MN}^2 = a^2 + (5x^2+1-(x-a)^2)^2 = a^2 + (4(x+\tfrac{a}{4})^2 + 1 - \tfrac{5a^2}{4})^2 .$$

Ако $a^2 \geq \frac{4}{5}$ добиваме дека $\overline{MN}^2 \geq \frac{4}{5}$. Ако $a^2 < \frac{4}{5}$, тогаш

$$\overline{MN}^2 \geq a^2 + (1-\tfrac{5a^2}{4})^2 = (\tfrac{3}{5} - \tfrac{5a^2}{4})^2 + \tfrac{16}{25} .$$

Значи, $\min \overline{MN} = \frac{4}{5}$ и истиот се достигнува за $a = \pm\frac{2\sqrt{3}}{5}$, $x = \mp\frac{\sqrt{3}}{10}$.

5. За секој реален број $x > 0$ дефинираме триаголник $T(x) = ABC$ чии темиња во правоаголен координатен систем имаат координати $A(-1,1), B(x,\frac{1}{x})$ и $C(\frac{x}{2}, -\frac{2}{x})$. Меѓу сите вакви триаголници определи го триаголникот кој има најмала плоштина.

Решение. За плоштината S на триаголникот ABC добиваме

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ x & \frac{1}{x} & 1 \\ \frac{x}{2} & -\frac{2}{x} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{x^2+5x+6}{4x}$$

и како $x > 0$, добиваме $S = \frac{x^2+5x+6}{4x} = \frac{5}{4} + \frac{x}{4} + \frac{6}{4x} \geq \frac{5}{4} + 2\sqrt{\frac{x}{4}\cdot\frac{6}{4x}} = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{6}}{2}$. Знак за равенство важи кога $\frac{x}{4} = \frac{6}{4x}$, т.е. кога $x = \sqrt{6}$. Значи, најмала плоштина има триаголникот со темиња $A(-1,1), B(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}}{6})$ и $C(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$.

6. Докажи дека за секоја квадратна функција $f(x) = x^2 + px + q$ важи

$$\max_{x\in[0,1]} | f(x) | \geq \frac{1}{8} .$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека претпоставиме дека $| f(x) | < \frac{1}{8}$ за секој $x \in [0,1]$. Тогаш

$$-\tfrac{1}{8} < q < \tfrac{1}{8} \text{ и } -\tfrac{1}{8} < 1 + p + q < \tfrac{1}{8} ,$$

па затоа

$$-\tfrac{1}{8} < 1 + p + q < 1 + p + \tfrac{1}{8} \text{ и } \tfrac{1}{8} > 1 + p + q > p + \tfrac{7}{8} .$$

Од горните неравенства следува $p > -\frac{5}{4}$ и $p < -\frac{3}{4}$, па затоа $-\frac{p}{2} \in [0,1]$. Затоа

$$f(0) < \tfrac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad q < \tfrac{1}{8},$$

$$f(1) < \tfrac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + p + q < \tfrac{1}{8},$$

$$f(-\tfrac{p}{2}) < \tfrac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{p^2}{4} - q < \tfrac{1}{8}.$$

Ако првото и второто неравенство ги помножиме со 2, третото со 4 и ги собереме добиените неравенства наоѓаме $(p+1)^2 < 1$, што е противречност. Значи,

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x)| \geq \tfrac{1}{8}. \qquad (1)$$

Нека претпоставиме дека во (1) важи знак за равенство. Тогаш

$$q \leq \tfrac{1}{8}, 1+p+q \leq \tfrac{1}{8}, \tfrac{p^2}{4} - q \leq \tfrac{1}{8}.$$

Ако барем во едно од трите неравенства важи строго неравенство, тогаш како и погоре добиваме противречност. Значи, знак за равенство важи ако и само ако $q = \frac{1}{8}$ и $p = -1$.

7. Нека O е координатниот почеток на правоаголен координатен систем во рамнината, а точката M лежи на графикот на функцијата

$$f(x) = x^2 - 4x + \tfrac{7}{2}.$$

Определи ја најмалата можна должина на отсечката OM .

Решение. Нека $M(x, f(x))$. Тогаш $\overline{OM}^2 = x^2 + (x^2 - 4x + \frac{7}{2})^2 = g(x)$. Според тоа, треба да го определиме минимумот на функцијата $g(x)$ кога $x \in \mathbb{R}$. Имаме

$$g'(x) = 2x + 2(x^2 - 4x + \tfrac{7}{2})(2x-4) = 4(x-1)(x^2 - 5x + 7).$$

Бидејќи $g'(x) < 0$ за $x < 1$ и $g'(x) > 0$ за $x > 1$, функцијата $g(x)$ опаѓа на интервалот $(-\infty,1)$ и расте на интервалот $(1,+\infty)$. Според тоа, $g(x)$ има минимум во $x = 1$ и притоа $g(1) = \frac{5}{4}$. Според тоа, минималната должина на отсечката OM е еднаква на $\frac{\sqrt{5}}{2}$ и се достигнува во точката $M(1, \frac{1}{2})$.

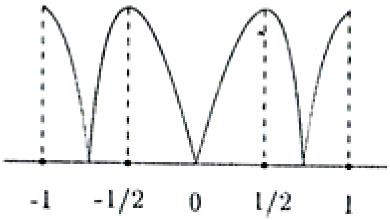
8. а) Определи ја најголемата вредност на функцијата $y = |4x^3 - 3x|$ на интервалот $[-1,1]$.

б) Нека a, b, c се реални броеви и M е најголемата вредност на функцијата $y = |4x^3 + ax^2 + bx + c|$ на интервалот $[-1,1]$. Докажи дека $M \geq 1$. Кога важи знак за равенство.

Решение. а) Ако искористиме дека

$$(4x^3 - 3x)' = 12x^2 - 3 = 12(x - \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{1}{2})$$

лесно наоѓаме дека $y = |4x^3 - 3x|$ има локален максимум за $x = \pm\frac{1}{2}$. Значи,



најголемата вредност на функцијата во интервалот $[-1,1]$ е еден од броевите $y(-1), y(1), y(-\frac{1}{2}), y(\frac{1}{2})$. Но, $y(-1)=y(1)=y(-\frac{1}{2})=y(\frac{1}{2})=1$, па затоа бараната вредност е еднаква на 1.

б) Нека $f(x)=4x^3+ax^2+bx+c$. Да претпоставиме дека постојат броеви a,b,c за кои најголемата вредност M на функцијата $y=|f(x)|$ на интервалот $[-1,1]$ е помнала од 1, т.е. $M<1$. Тогаш $-1<f(x)<1$ за секој $x\in[-1,1]$. Да ја разгледаме функцијата

$$g(x)=f(x)-(4x^3-3x)=ax^2+(b+3)x+c.$$

Имаме:

$$g(-1)=f(-1)+1>0,\ g(-\tfrac{1}{2})=f(-\tfrac{1}{2})-1<0,$$
$$g(\tfrac{1}{2})=f(\tfrac{1}{2})+1>0,\ g(1)=f(1)-1<0.$$

Според тоа, функцијата $g(x)$ го менува знакот барем три пати, што значи дека квадратната равенка $ax^2+(b+3)x+c=0$ има најмалку три реални решенија. Последното е можно само ако $a=b+3=c=0$, т.е. $f(x)=4x^3-3x$. Но, според а) максимумот на функцијата $y=|4x^3-3x|$ во интервалот $[-1,1]$ е еднаков на 1. Добивме противречност, од што следува дека $M\geq 1$ за секој избор на броевите a,b,c. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=c=0, b=-3$.

9. Определи ги најмалата и најголемата вредност на функцијата

$$f(x)=(\sin x+\cos x)(\sin x+\cos x+1)(\sin x+\cos x+2)(\sin x+\cos x+3).$$

Решение. Ставаме $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$. Сега задачата се сведува на наоѓање на најмалата и најголемата вредност на функцијата

$$f(t)=t(t+1)(t+2)(t+3)=(t^2+3t)(t^2+3t+2),\ t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}].$$

Функцијата $y=t^2+3t$ монотоно расте за $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. Затоа

$$y_{\min}=y(-\sqrt{2})=2-3\sqrt{2} \text{ и } y_{\max}=y(\sqrt{2})=2+3\sqrt{2}.$$

Останува да ја определиме најмалата и најголемата вредност на фдункцијата $f(y)=y^2+2y$ за $y\in[2-3\sqrt{2},2+3\sqrt{2}]$. Бидејќи $-1\in[2-3\sqrt{2},2+3\sqrt{2}]$, заклучуваме дека $f_{\min}=f(-1)=-1$. Најголемата вредност се достигнува на еден од краевите на интервалот и имаме $f_{\max}=f(2+3\sqrt{2})=26+18\sqrt{2}$.

10. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои множеството вредности на функцијата

$$f(x)=\frac{\sin^2 x-a}{\sin^3 x-(a^2+1)\sin x+2}$$

го содржи интервалот $[\frac{1}{2},2]$.

Решение. Ставаме $t=\sin x$ и $g(t)=\frac{t^2-a}{t^3-(a^2+2)t+2}$. Ако броителот и именителот на g имаат заедничка нула, тогаш $a\ge 0$ и $t=\pm\sqrt{a}$. За $t=-\sqrt{a}$ добиваме $\sqrt{a}(a^2-a+2)=-2$, што не е можно бидејќи $a^2-a+2>0$ за секој a. За $t=\sqrt{a}$ добиваме $\sqrt{a}(a(a-1)+2)=2$ и лесно се гледа дека $a=1$ е единствено решение на оваа равенка (кога $a\in[0,1)$ левата страна е помала од 2, а кога $a>1$ таа е поголема од 2). За $a=1$ имаме

$$g(t)=\frac{t^2-1}{t^3-3t+2}=\frac{t+1}{(t-1)(t+2)}\le 0,$$

за секој $t\in[-1,1)$ и затоа таа вредност не е меѓу бараните вредности.

Сега бараме за кои $a\ne 1$ равенката $g(t)=c$, т.е.

$$h(t)=c(t^3-(a^2+2)t+2)+a-t^2=0$$

има решение во интервалот $[-1,1]$ за секој $c\in[\frac{1}{2},2]$. Ако $c\ge\frac{1}{2}$, тогаш

$$h(-1)=ca^2+a+3c-1\ge\frac{a^2}{2}+a+\frac{1}{2}=\frac{(a+1)^2}{2},$$

па затоа $h(-1)\ge 0$ за секој a. Освен тоа, $h'(t)=3ct^2-2t-c(a^2+2)$ и затоа $h'(1)=c-ca^2-2\le 0$ за $c\in[\frac{1}{2},2]$ и секој a, т.е. $h'(t)=0$ има реални решенија t_1 и t_2 такви што $t_1\le 1<t_2$.

Така функцијата h монотоно опаѓа во интервалот $[t_1,t_2]$ кој го содржи 1 и е монотоно растечка во интервалот $(-\infty,t_1]$. Бидејќи $h(-1)\ge 0$, лесно се докажува дека $h(t)=0$ има решение во интервалот $[-1,1]$ за секој $c\in[\frac{1}{2},2]$ ако и само ако

$$h(1)=(a-1)(1-c(1+a))\le 0$$

за секој таков c. За $a>1$ ова неравенство важи $1-\frac{1}{2}(1+a)<0$, а за $a<1$ треба $1-2(1+a)\ge 0$, т.е. $a\le-\frac{1}{2}$.

Конечно, $a\in(-\infty,-\frac{1}{2}]\cup(1,+\infty)$.

11. Определи ги локалните екстреми на функцијата

$$f(x)=\log_3(x^3-2x^2-13x-10)-\log_3(x^2-5x).$$

Решение. Бидејќи

$$x^3-2x^2-13x-10=(x-5)(x+1)(x+2) \text{ и } x^2-5x=x(x-5)$$

дефиниционата област на функцијата е $x\in(-2,-1)\cup(5,+\infty)$. Тогаш

$$f(x)=\log_3\tfrac{(x+1)(x+2)}{x}$$

и како $\log_3 y$ е монотона функција, во дефиниционата област на $f(x)$ локалните екстреми на $f(x)$ се совпаѓаат со локалните екстреми на

$$g(x)=\tfrac{(x+1)(x+2)}{x}.$$

Имаме $g'(x)=\frac{x^2-2}{x^2}$, па затоа стационарни точки на $g(x)$ се $\pm\sqrt{2}$. Но, $\sqrt{2}$ не припаѓа на дефиниционата област на $f(x)$, па затоа треба да провериме само дали во стационарната точка $-\sqrt{2}$, која припаѓа на дефиниционата област, функцијата $g(x)$ има локален екстрем. Имаме, $g''(x)=\frac{4}{x^3}$ и од $g''(-\sqrt{2})<0$, следува дека функцијата во оваа точка има локален максимум.

12. Тангентите во точките A и B од графикот на функцијата $y=x^2$ се сечат во точка C така што $\triangle ABC$ е рамностран. Определи ја должината на отсечката AB.

Решение. Ако $A(a,a^2)$ и $B(b,b^2)$, тогаш равенките на соодветните тангенти се $y-a^2=2a(x-a)$ и $y-b^2=2b(x-b)$. Тогаш за $C(c_1,c_2)$ важи

$$2ac_1-a^2=2bc_1-b^2,$$

па затоа $c_1=\frac{a+b}{2}$ и $c_2=ab$. Сега од

$$(a-\tfrac{a+b}{2})^2+(a^2-ab)^2=\overline{AC}^2=\overline{BC}^2=(b-\tfrac{a+b}{2})^2+(b^2-ab)^2$$

следува $|a^2-ab|=|b^2-ab|$. Ако $a^2-ab=ab-b^2$, тогаш $(a-b)^2=0$, што е противречност. Значи, $a^2-ab=b^2-ab$, т.е. $a=-b$. Можеме да сметаме дека $a>0$ и тогаш $\measuredangle ACB=60^\circ$ ако и само аголот меѓу тангентата во A и оската Ox е 60°. Оттука следува $\overline{AB}=2a=\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$.

13. Докажи дека темињата на параболите $y=x^2+b_ix+c_i$, $i=1,2,3$ лежат на една права, која не е паралелна со оската Oy, ако и само ако овие параболи имаат заедничка тангента.

Решение. Нека правата $y=bx+c$ е тангента на параболата $y=x^2+b_ix+c_i$. Тоа значи дека равенката

$$x^2+b_ix+c_i=bx+c$$

има двоен корен, .т.е $(b_i - b)^2 = 4(c_i - c)$. Да ставиме $d = \frac{b^2}{4} + c$. Тогаш за темето $A_i(x_i^0, y_i^0)$ на параболата добиваме

$$y_i^0 = c_i - \frac{b_i^2}{4} = -\frac{b_i b}{4} + d = bx_i^0 + d .$$

Според тоа, ако правата $y = bx + c$ е тангента на трите параболи, тогаш нивните темиња лежат на правата $y = bx + c$.

Обратно, на сличен начин се докажува дека ако темињата на параболите лежат на правата $y = bx + c$, тогаш правата $y = bx + c - \frac{b^2}{4}$ е нивна тангента.

14. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои графиците на функциите $x^2 - 2ax$ и $-x^2 - 1$ имаат две заеднички тангенти и периметарот на четириаголникот чии темиња се допирните точки на тангентите е еднаков на 6.

Решение. Равенката на заедничката тангента на графиците на функциите $f(x) = x^2 - 2ax$ и $g(x) = -x^2 - 1$ во точките $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, g(x_2))$ е

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = g(x_2) + g'(x_2)(x - x_2) .$$

Оттука следува

$$f'(x_1) = g'(x_2) \text{ и } f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 .$$

Но, $f'(x) = 2x - 2a$ и $g(x) = -2x$, па затоа $x_1 + x_2 = a$ и $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Тогаш $x_1 x_2 = \frac{a^2-1}{2}$ и затоа x_1 и x_2 се корени на квадратната равенка

$$x^2 - ax + \frac{a^2-1}{2} = 0 .$$

Бидејќи графиците на функциите $f(x) = x^2 - 2ax$ и $g(x) = -x^2 - 1$ имаат две заеднички тангенти, следува дека $x_1 \neq x_2$, т.е. $a^2 < 2$ и допирните точки M, N, P, Q имаат координати $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_1, g(x_1))$ и $(x_2, g(x_2))$, соодветно. Сега наоѓаме

$$\overline{PQ}^2 = (2 - a^2)(1 + a^2) ,\ \overline{MQ} = 2 - a^2 ,$$

$$\overline{MN}^2 = (2 - a^2)(1 + a^2) \text{ и } \overline{NP} = 2 - a^2 .$$

Според тоа, $MNPQ$ е паралелограм со периметар

$$2(\sqrt{(2 - a^2)(1 + a^2)} + 2 - a^2) = 6 .$$

Значи,

$$\sqrt{(2 - a^2)(1 + a^2)} = 1 + a^2 \text{, т.е. } a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} .$$

IV.3. ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ ВО МНОЖЕСТВАТА ПРИРОДНИ, ЦЕЛИ И РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

1. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ за кои важи:

   а) Постои $a\in\mathbb{N}$ таков што $f(a)=1$,

   б) За секои природни броеви a,b,c такви што $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ важи

$$\frac{1}{f(a)}+\frac{1}{f(b)}=\frac{1}{f(c)}.$$

Решение. Равенството $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ важи за секој природен број n, па затоа $\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{f(n+1)}+\frac{1}{f(n(n+1))}>\frac{1}{f(n+1)}$, т.е. $f(n+1)>f(n)$. Според тоа, функцијата е растечка и $f(1)=1$ (ако $f(a)=1$ за $a>1$, добиваме противречност со фактот дека функција е растечка). Од равенството $\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$ следува дека $\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{f(2n)}+\frac{1}{f(2n)}$, па затоа $f(2n)=2f(n)$. Сега, од $f(1)=1$ и $f(2n)=2f(n)$ со индукција се добива дека $f(2^k)=2^k$ за секој k. Бидејќи функцијата е растечка и $f(2^{k-1})=2^{k-1}$ и $f(2^k)=2^k$, заклучуваме дека $f(n)=n$ за секој $n=2^{k-1},2^{k-1}+1,...,2^k$. Според тоа, постои единствена функција која ги задоволува условите на задачата и тоа е функцијата $f(n)=n$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

2. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што за секои природни броеви m и n целиот број $f(m)+f(n)-mn$ е различен од 0 и е делител на $mf(m)+nf(n)$.

Решение. За $m=n=1$ добиваме $2f(1)-1|2f(1)$, од каде следува дека важи $2f(1)-1|2f(1)-(2f(1)-1)=1$, па затоа $f(1)=1$. Нека $p\geq 7$ е прост број. Ако земеме $m=p$ и $n=1$ добиваме $f(p)-p+1|pf(p)+1$, па затоа

$$f(p)-p+1|pf(p)+1-p(f(p)-p+1)=p^2-p+1. \qquad (1)$$

Ако $f(p)-p+1=p^2-p+1$, тогаш $f(p)=p^2$. Сега да претпоставиме дека $f(p)-p+1\neq p^2-p+1$. Бидејќи p^2-p+1 е непарен број, од (1) следува $3(f(p)-p+1)\leq p^2-p+1$, односно

$$f(p)\leq\tfrac{1}{3}(p^2+2p-2). \qquad (2)$$

За $m=n=p$ од условот на задачата следува $2f(p)-p^2\,|\,2pf(p)$, па затоа

$$2f(p)-p^2 \mid 2pf(p)-p(2f(p)-p^2)=p^3. \qquad (3)$$

Од (2) и фактот дека $f(p)\geq 1$, бидејќи $p\geq 7$ следува

$$-p^2<2f(p)-p^2\leq \tfrac{2}{3}(p^2+2p-2)-p^2<-p.$$

Последното противречи на (3). Според тоа, $f(p)=p^2$ за секој прост број $p\geq 7$.

Нека сега n е произволен природен број и p е доволно голем прост број. Земаме $m=p$ и добиваме

$$f(p)+f(n)-pn \mid pf(p)+nf(n)-n(f(p)+f(n)-pn)=pf(p)-nf(p)+pn^2.$$

Бидејќи $f(p)=p^2$, добиваме $p^2+f(n)-pn \mid p(p^2-pn+n^2)$. Бидејќи p е доволно голем прост број важи $\text{NZD}(p,p^2+f(n)-pn)=1$, па затоа важи $p^2+f(n)-pn \mid p^2-pn+n^2$. Сега добиваме

$$p^2+f(n)-pn \mid p^2-pn+n^2-(p^2+f(n)-pn)=n^2-f(n),$$

за секој доволно голем прост број p. Последното е можно само ако $n^2-f(n)=0$, односно $f(n)=n^2$ за секој природен број n. Јасно, оваа функција го задоволува условите на задачата, бидејќи

$$f(m)+f(n)-mn=m^2-mn+n^2 \mid m^3+n^3=mf(m)+nf(n).$$

Конечно, функцијата $f(n)=n^2$ е единствебо решение на задачата.

3. Испитај дали постои функција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ за која за секој $n\in\mathbb{N}$ важи:

$$f(n)f(\tfrac{1}{2015}nf(n))f(\tfrac{1}{2015^2}nf(n)f(\tfrac{1}{2015}nf(n))=2\cdot 2015^3. \qquad (1)$$

Решение. Со воведување на ознаката $g(n)=\frac{1}{2015}nf(n)$ равенката го добива обликот

$$g(n)f(g(n))f(\tfrac{1}{2015}g(n)f(f(n)))=2\cdot 2015^2 n$$

од каде следува $g(g(n))f(g(g(n)))=2\cdot 2015n$, т.е. $g(g(g(n)))=2n$. Според тоа, треба да конструираме функција $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ за која важи $g(g(g(n)))=2n$ и $n\mid 2015g(n)$. Јасно, една таква функција е следнава: за $n=2015^r m$, каде $r\in\mathbb{N}_0$, $m\in\mathbb{N}$ и $2015\nmid m$, ставаме $g(n)=\frac{n}{2015}$ ако $3\nmid r$ и $g(n)=2\cdot 2015^2 n$ ако $3\mid r$. Навистина, на пример, за $r\equiv 1(\text{mod}\,3)$ имаме

$$g(n)=\tfrac{n}{2015},\ g(g(n))=2\cdot 2015n \text{ и } g(g(g(n)))=2n.$$

Слично се проверуваат и останатите случаи.

Во овој случај

$$f(n)=\begin{cases}1, & 3\nmid n\\ 2\cdot 2015^2, & 3\mid n.\end{cases}$$

4. Определи ги сите инјекции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што $f(1)=2,\ f(2)=4$ и

$$f(f(m)+f(n))=f(f(m))+f(n), \qquad (1)$$

за секои $m,n\in\mathbb{N}$.

Решение. Ако во (1) прво ставиме $m=1$ и n, а потоа $m=n$ и $n=1$ добиваме

$$f(f(1)+f(n))=f(f(1))+f(n) \text{ и } f(f(n)+f(1))=f(f(n))+f(1).$$

Според тоа,

$$f(f(n))=f(n)-f(1)+f(f(1))=f(n)-2+f(2)=f(n)+2.$$

Оттука добиваме дека ако $f(n)=m$, тогаш $f(m)=m+2$ и потоа со индукција од истата формула следува $f(m+2k)=m+2k+2$, за секој $k\geq 0$. Посебно, бидејќи $f(1)=2$, заклучуваме дека $f(2n)=2n+2$, за секој природен број n. Според условот на задачата функцијата f е инјекција, па затоа во непарните броеви (освен во бројот 1) мора да прима непарни вредности. Нека p е најмалиот природен број таков што за некој k важи $f(k)=2p+1$. Од претходно докажаното следува дека $f(2p+2s+1)=2p+2s+3$, за $s\geq 0$. Но, функцијата f е инјекција, па затоа броевите $3,5,...,2p-1$ се пресликуваат во броевите некои од броевите $1,3,5,...,2p+1$. Ако $f(t)=1$ за некој t, тогаш за $m=n=t$ добиваме

$$4=f(2)=f(f(t)+f(t))=f(f(t))+f(t)=3,$$

што е противречност. Исто така, ако за некој t важи $f(t)=3$, тогаш лесно се добива дека $f(3+2m)=5+2m$, за $m\geq 0$ и како $f(1)=m$, значи дека не постои t за кој важи $f(t)=3$.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека единствено решение на задачата е функцијата $f(1)=2$ и $f(n)=n+2$, за $n\geq 2$.

5. Нека $S(k)$ е збирот на цифрите на природниот број k. За природниот број a ќе велиме дека е $n-$добар, ако постои низа природни броеви $a_0,a_1,...,a_n$ за која $a_n=a$ и $a_{i+1}=a_i-S(a_i)$ засекој $i=0,1,2,...,n-1$. Дали е точно тврдењето, за секој природен број n постои природен број b кој е $n-$добар, но не е $(n+1)-$добар.

Решение. *Одговор*: ДА.

За природните броеви n и k да означиме

$$f(n)=n-S(n) \text{ и } f^k(n)=f(f^{k-1}(n)).$$

Кога n се зголемува за 1, тогаш бројот $S(n)$ или се зголемува за 1 (ако n нема цифра на единици 9) или се намалува. Според тоа, функцијата f не е строго растечка, при што важи $f(n+10)>f(n)$ за секој n.

Нека природниот број d е таков што $10^d>20d(n+1)$ и да ставиме $k=10^d$. Ставаме $b_0=10^k-1$, $c_0=10^k-k$, $b_i=f^i(b_0)$ и $c_i=f^i(c_0)$. Ќе докажеме дека

$$b_n>c_n>b_{n+1}. \qquad (1)$$

Бидејќи $S(c_i)\le 9k$ со индукција добиваме $c_i\ge 10^k-k-9ki$. За $i\le n+1$ имаме $(9i+1)k\le 10ki\le 10^{d+1}(n+1)<10^{2d}$, па значи во записот на бројот c_i првите $k-2d$ цифри се деветки. Оттука $S(c_i)\ge 9(k-2d)$, од каде повторно по индукција добиваме $c_i\le 10^k-k-9(k-2d)i$. Значи,

$$10^k-(9i+1)k\le c_i\le 10^k-k-9(k-2d)i.$$

Аналогно за b_i добиваме

$$10^k-9ki-1\le b_i\le 10^k-1-9(k-2d)i.$$

Сега неравенството $b_n>c_n$ следува од

$$10^k-k-9(k-2d)n<10^k-9kn-1,$$

т.е. $10^d=k>18dn+1$, кое е точно заради изборот на d.

Неравенството $c_n>b_{n+1}$ ќе следува од

$$10^k-1-9(k-2d)(n+1)<10^k-(9n+1)k,$$

т.е. $8k+1>18d(n+1)$, кое е точно. Со тоа ги докажавме неравенствата (1).

Со помош на неравенствата (1) сега можеме да провериме дека бројот c_n е $n-$добар, но не е $(n+1)-$добар. Првото следува од $c_n=f^n(c_0)$. Останува да докажеме дека $c_n\ne f^{n+1}(x)$ за секој природен број x. Ако $x\le 10^k-1=b_0$, тогаш $f^{n+1}(x)\le f^{n+1}(b_0)=b_{n+1}<c_n$. Ако $x\ge 10^k$, тогаш $f(x)\ge f(10^k)=b_0$, па затоа $f^{n+1}(x)\ge f^n(b_0)=b_n>c_n$.

6. Нека $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е функција таква што $af(a)+bf(b)+2ab$ е точен квадрат за секои $a,b\in\mathbb{N}$. Докажи дека $f(a)=a$ за секој $a\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека p е непарен прост број и даземеме $a=b=p$, Тогаш бројот $2p(f(p)+p)$ е точен квадрат, па затоа $p\mid f(p)$ и затоа $p\le f(p)$.

Прво ќе докажеме дека $af(a)$ е точен квадрат за секој $a\in\mathbb{N}$. Нека го претпоставиме спротивното и нека за некој $a\in\mathbb{N}$ бројот $af(a)$ не е течен квадрат. Тогаш постои прост број p за кој $p^{2k-1}\,\|\,af(a)$, $k\in\mathbb{N}$, т.е. $af(a)=p^{2k-1}s$, каде $\text{NZD}(p,s)=1$. Ставаме $b=p^{2k}$ и добиваме дека бројот $x=p^{2k-1}s+p^{2k}(f(b)+2a)$ е точен квадрат. Последното не е можно, бидејќи очигледно е дека $p^{k-1}\,\|\,x$.

Нека $p>f(1)$ е непарен прост број. Тогаш за $a=p$ и $b=1$ добиваме дека бројот

$$y=pf(p)+f(1)+2p$$

е точен квадрат. Очигледно

$$y>pf(p)=(\sqrt{pf(p)})^2.$$

Од друга страна, бидејќи $f(1)<p$ и $p\le f(p)$ добиваме дека важи

$$f(1)+2p<p+2f(p)\le 2\sqrt{2pf(p)}<4\sqrt{pf(p)}+4,$$

па затоа

$$y=pf(p)+f(1)+2p<pf(p)+4\sqrt{pf(p)}+4=(\sqrt{pf(p)}+2)^2.$$

Сега од $(\sqrt{pf(p)})^2<y<(\sqrt{pf(p)}+2)^2$ следува $y=(\sqrt{pf(p)}+1)^2$, па затоа

$$f(1)+2p=2\sqrt{pf(p)}+1. \tag{1}$$

Бидејќи $pf(p)$ е точен квадрат, имаме $f(p)=t^2p, t\in\mathbb{N}$. Ако $t\ge 2$, тогаш $p>f(1)$ и од (1) добиваме

$$3p>f(1)+2p=2\sqrt{pf(p)}+1=2tp+1\ge 4p+1,$$

што не е можно. Според тоа, $t=1$ и $f(p)=p$ за секој непарен прост број $p>f(1)$. Уште повеќе, сега од (1) следува дека $f(1)=1$, па затоа $f(p)=p$ за секој непарен прост број p.

Сега да претпоставиме дека за некој $a\in\mathbb{N}$ важи $f(a)\ne a$. Во условот ставаме $b=p$, каде p е непарен прост број и добиваме дека бројот

$$z=af(a)+p^2+2ap$$

е точен квадрат, кој е различен од $(a+p)^2$, заради претпоставката $f(a)\ne a$. Тогаш

$$|z-(a+p)^2|\ge 2(a+p)-1=\min_{x\ne a+p}|x^2-(a+p)^2|.$$

Но, $z-(a+p)^2=af(a)-a^2$, па затоа

$$|af(a)-a^2|\ge 2(a+p)-1,$$

што не е можно за фиксиран број a и произволен прост број p. Конечно, од добиената противречност следува дека $f(a)=a$ за секој $a\in\mathbb{N}$.

7. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ и $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што неравенствата
$$f(g(n))<f(n+1),\ g(h(n))<g(n+1) \text{ и } h(f(n))<h(n+1)$$
се исполнети за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Ќе докажеме дека $f(n)=g(n)=h(n)=n$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Со $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Im}(g),\mathrm{Im}(h)$ да ги означиме соодвено сликите на f,g,h. Нека $f(s)$ е минимален слемент во $\mathrm{Im}(f)$. Ако $s>1$, тогаш $f(g(s-1))<f(s)$, што е противречност. Аналогно се гледа дека $g(1)$ и $h(1)$ се минималните елементи во $\mathrm{Im}(g)$ и $\mathrm{Im}(h)$.

Сега, нека $f(t)$ е минимален елемент во $\mathrm{Im}(f)\setminus\{f(1)\}$. Јасно, $t\ge 2$. Тогаш од $f(g(t-1))<f(t)$ следува дека $f(g(t-1))=f(1)$. Последното значи дека $g(t-1)=1$, т.е. $1\in\mathrm{Im}(g)$ и значи $g(1)=1$ и $t=2$. Аналогно се покажува дека $f(1)=h(1)=1$ и $g(2)$ и $h(2)$ се минималните елементи соодветно во $\mathrm{Im}(g)\setminus\{g(1)\}$ и $\mathrm{Im}(h)\setminus\{h(1)\}$.

Нека за некој k важи $f(i)=g(i)=h(i)=i$ за $i\le k$ и $f(k+1),g(k+1),h(k+1)$ се минимланите елементи во $\mathrm{Im}(f)\setminus\{1,...,k\}$, $\mathrm{Im}(g)\setminus\{1,...,k\}$, $\mathrm{Im}(h)\setminus\{1,...,k\}$. Нека $f(a)$ е минимален елемент во $\mathrm{Im}(f)\setminus\{1,...,k,f(k+1)\}$. Јасно е дека $a\ge k+2$. Тогаш од $f(g(a-1))<f(a)$ и изборот на a следува равенството $f(g(a-1))=f(r)$ за некој $r\in\{1,2,...,k+1\}$. Последното всушност означува дека $g(a-1)=r$ и ако претпоставиме дека $r\ne k+1$, добиваме $a-1=r$, т.е. $a=r+1\le k+1$, што противречи на изборот на a. Според тоа, $r=k+1$, $k+1\in\mathrm{Im}(g)$, $g(k+1)=k+1$ и $a=k+2$. Аналогно се докажуваат равенствата $f(k+1)=h(k+1)=k+1$ и дека $g(k+2)$ и $h(k+2)$ се минималните елементи на $\mathrm{Im}(g)\setminus\{1,...,k,g(k+1)\}$ и $\mathrm{Im}(h)\setminus\{1,...,k,h(k+1)\}$.

8. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ такви што за секои $x,y,z\in\mathbb{Q}$ важи
$$f(x+f(y+f(z)))=y+f(x+z)\,. \tag{1}$$

Решение. Во (1) ставаме $x=z=0$ добиваме $f(f(y+f(0)))=y+f(0)$, т.е. $f(f(x))=x$ за секој $x\in\mathbb{Q}$. Оттука следува дека f е инјекција. Сега од
$$f(x+f(y+f(z)))=f(z+f(y+f(x)))=y+f(x+z)$$
следува $x+f(y+f(z))=z+f(y+f(x))$. Оттука ако на местото на z ста-

виме $f(z)$ иземеме предвид дека $f(f(z))=z$ добиваме

$$f(y+z)=f(z)+f(y+f(x))-x\,. \tag{2}$$

Сега за $x=b=f(0)$, ако се земе предвид дека $f(f(0))=0$, равенката (2) се сведува на $f(y+z)=f(z)+f(y)-b$. Ставаме $g(t)=f(t)-b$ и ја добиваме Кошиевата равенка $g(y+z)=g(y)+g(z)$, чие решение во множеството рационални броеви е $g(t)=at$, за некој $a\in\mathbb{Q}$. Според тоа, $f(t)=at+b$ и со замена во (2) добиваме $a^2(x-1)+ab+b=0$, од каде следува $a=1, b=0$ или $a=-1,\ b\in\mathbb{Q}$.

Непосредно се проверува дека функциите $f(x)=x$ и $f(x)=b-x$ ја задоволуваат равенката (1).

9. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ такви што $f(1)=2$ и

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1, \tag{1}$$

за секои $x,y\in\mathbb{Q}$.

Решение. Ако во (1) ставиме $x=1$ и $y=n$, добиваме $f(n+1)=f(n)+1$, па како $f(1)=2$, со индукција лесно се докажува дека $f(n)=n+1$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Понатаму, за $x=0$ и $y=n\neq 0$ добиваме $f(0)=f(0)f(n)-f(n)+1$ и како $f(n)=n+1$ имаме $f(0)=1$. Ако во (1) ставиме $x=-1$ и $y=1$ добиваме $f(-1)=0$. Понатаму, ако ставиме $x=-1$ и $y=n$ и ги искористиме претходно добиените равенства добиваме $f(-n)=-f(n-1)+1=-n+1$. Според тоа, $f(z)=z+1$ за секој $z\in\mathbb{Z}$.

Сега, ако во (1) ставиме $x=n$ и $y=\frac{1}{n}$ добиваме

$$f(1)=(n+1)f(\tfrac{1}{n})-f(n+\tfrac{1}{n})+1\,. \tag{2}$$

Понатаму, за $x=1$ и $y=m+\frac{1}{n}$ добиваме $f(m+1+\frac{1}{n})=f(m+\frac{1}{n})+1$, па со математичка индукција наоѓаме $f(m+\frac{1}{n})=m+f(\frac{1}{n})$. Сега, од (2) следува $f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n}+1$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Сега за $x=m$ и $y=\frac{1}{n}$ добиваме

$$f(\tfrac{m}{n})=f(m)f(\tfrac{1}{n})-f(m+\tfrac{1}{n})+1=(m+1)(\tfrac{1}{n}+1)-m-\tfrac{1}{n}-1+1=\tfrac{m}{n}+1,$$

т.е. $f(r)=r+1$ за секој $r\in\mathbb{Q}^+$. Конечно, ако земеме $x=-$ и $y=r$ добиваме $f(-r)=-f(r-1)+1=-r+1$, па затоа $f(x)=x+1$ за секој $x\in\mathbb{Q}$.

10. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ такви што за секој $x\in\mathbb{Q}^+$ важи

$$f(x)+f(\tfrac{1}{x})=1 \text{ и } f(2x)=2f(f(x))\,.$$

Решение. Функцијата $f(x)=\frac{x}{x+1}$, т.е. $f(\frac{p}{q})=\frac{p}{p+q}$, $p,q\in\mathbb{N}$ ги задоволува условите на задачата. Со индукција по $n=p+q$ ќе докажеме дека $f(\frac{p}{q})$ е еднозначно определена, а од тоа ќе следува дека $f(\frac{p}{q})=\frac{p}{p+q}$, $p,q\in\mathbb{N}$.

За $x=1$ добиваме $f(1)=\frac{1}{2}$, а потоа од

$$f(2)=2f(f(1))=2f(\tfrac{1}{2})=2-2f(2)$$

добиваме $f(2)=\frac{2}{3}$ и $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$. Значи, тврдењето важи за $n\le 3$.

Нека $2\,|\,n$. Од $f(\frac{p}{q})=1-f(\frac{q}{p})$ следува дека доволно е да се испита случајот $p<q$. Тогаш од индуктивната претпоставка следува

$$f(\tfrac{p}{q})=f(f(\tfrac{p}{q-p}))=\tfrac{1}{2}f(\tfrac{p}{\frac{q-p}{2}})=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{p}{p+\frac{q-p}{2}}=\frac{p}{p+q}.$$

Нека $2\nmid n$. Ако $2\nmid p$, тогаш $2\,|\,q$ и $f(\frac{p}{q})=1-f(\frac{q}{p})$. Затоа ќе сметаме дека $2\,|\,p=2k$. Имаме

$$f(\tfrac{2k}{n-2k})=2f(f(\tfrac{k}{n-2k}))=2f(\tfrac{k}{n-k})=2-2f(\tfrac{n-k}{k}).$$

Дефинираме низа

$$a_0=k \text{ и } a_{i+1}=\begin{cases}\frac{a_i}{2}, & 2\,|\,a_i,\\ \frac{n-a_i}{2}, & 2\nmid a_i.\end{cases}$$

Бидејќи a_{i+1} е еднозначно определен од a_i, заклучуваме дека низата е периодична, па затоа $a_m=a_0$ за некој $m>0$. Од претходните разгледувања следува дека

$$f(\tfrac{2a_i}{n-2a_i})=1-c_i+2c_if(\tfrac{2a_{i+1}}{n-2a_{i+1}})$$

за секој i, каде $c_i\in\{-1,1\}$. Со повторно применување на ова равенство добиваме

$$f(\tfrac{2a_0}{n-2a_0})=A+Bf(\tfrac{2a_m}{n-2a_m}),$$

т.е.

$$f(\tfrac{2k}{n-2k})=A+Bf(\tfrac{2k}{n-2k})$$

за некој A, а $B=\pm 2^m$, па ова равенство еднозначно ја определува $f(\frac{2k}{n-2k})$. Со ова индукцијата е завршена.

IV.4. ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ ВО МНОЖЕСТВОТО РЕАЛНИ БРОЕВИ

1. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(f(x)+2y)=6x+f(f(y)-x)$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Во дадената равенка ставаме $y=-\frac{f(x)}{2}$ и добиваме

$$f(0)=6x+f(f(-\tfrac{f(x)}{2})-x)\text{, т.е. } f(f(-\tfrac{f(x)}{2})-x)=f(0)-6x\,.$$

Сега за произволен y избираме $x=\frac{f(0)-y}{6}$ и со замена во последната равенка добиваме $f(A(y))=y$, каде $A(y)$ е функција од y. Според тоа, пресликувањето f е сурјекција. Ќе докажеме дека f е инјекција. Нека $a,b\in\mathbb{R}$ се такви што $f(a)=f(b)$. Но, f е сурјекција, па затоа постои y таков што $f(y)=a+b$. Тогаш

$$\begin{aligned}6a+f(b)&=6a+f(f(y)-a)\\&=f(f(a)+2y)\\&=f(f(b)+2y)\\&=6b+f(f(y)-b)\\&=6b+f(a)\end{aligned}$$

па затоа $a=b$, т.е. f е инјекција. Сега, за $x=0$ од даденото равенство следува $f(f(0)+2y)=f(f(y))$ и како f е инјекција добиваме

$$f(y)=f(0)+2y\text{, за секој } y\in\mathbb{R}\,.$$

Непосредно се проверува дека функцијата од видот $f(x)=2x+c$ е решение на задачата.

2. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f(f(x)+y)=2x+f(f(y)-x)\,. \tag{1}$$

Решение. Ако во (1) ставиме $y=-f(x)$, добиваме

$$f(f(-f(x))-x)=f(0)-2x\,,$$

од што следува дека функцијата f е сурјекција. Според тоа, постои c таков што $f(c)=0$. Ако во (1) ставиме $x=c$, добиваме

$$f(y)=2c+f(f(y)-c)\text{, т.е. } f(y)-c=c+f(f(y)-c)\,.$$

Ако во последното равенство ставиме $z=f(y)-c$, бидејќи $f(y)-c$ е сурјекција добиваме $z=c+f(z)$, т.е. $f(z)=z-c$ за секој $z\in\mathbb{R}$. Навистина, оваа функција ја задоволува (1), бидејќи

$$f(f(x)+y)=f(x)+y-c=x+y-2c=x+f(y)-c=2x+f(f(y)-x).$$

3. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f(x+f(x+y))=f(x-y)+f(x)^2.$$

Решение. Нека $z\in\mathbb{R}$ и да ставиме $x=z+f(z)$ и $y=z-x$. Тогаш,

$$f(y+x)=f(z)=x-z=-y.$$

Сега дадената равенка го добива обликот $f(z+f(z))=0$. Понатаму, за $x\in\mathbb{R}$ и $y=0$ добиваме $f(x)+f(x)^2=f(x+f(x))=0$, од што следува $f(x)\in\{0,-1\}$. Меѓутоа, ако за некои x и z важи $f(x)=-1$ и $f(z)=0$, тогаш во почетната равенка ставаме $y=x-z$ и добиваме $f(x+f(x+y))=1$, што не е можно. Според тоа, $f(x)=0$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

4. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои реални броеви x и y важи

$$(x+1)f(xf(y))=xf(y(x+1)). \qquad (1)$$

Решение. Во (1) ставаме $x=0$ и добиваме $f(0)=0$. Ако за некој $a\neq 0$ важи $f(a)=0$, тогаш за $y=a$ и за секој $x\neq 0$ од (1) добиваме $f(a(x+1))=0$, па затоа $f\equiv 0$. Затоа во натаможните разгледувања ќе претпоставиме дека $f(x)\neq 0$ за $x\neq 0$. Да петпоставиме дека за некој $y\neq 0$ важи $f(y)\neq y$. Земаме $x=\frac{y}{f(y)-y}$, т.е $xf(y)=y(x+1)$ и тогаш од (1) добиваме

$$0=(x+1)f(xf(y))-xf(y(x+1))=f(y(x+1)),$$

па затоа $x=1$. Сега од $xf(y)=y(x+1)$ следува $f(y)=0$, т.е. $y=0$, што противречи на претпоставката.

Според тоа, единствени решенија на задачата се функциите $f(x)=0$ и $f(x)=x$.

5. Определи ги сите функции $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои реални броеви x и y важи

$$g(x+y)+g(x)g(y)=g(xy)+g(x)+g(y). \qquad (1)$$

Решение. Очигледно функциите $g(x)=0$ и $g(x)=2$ се решенија на (1). Со математичка индукција лесно се докажува дека ако g не е некоја од овие две функции, тогаш $g(x)=x$ за секој $x\in\mathbb{Q}$. Исто така, лесно се докажува дека $g(r+x)=r+g(x)$ и $g(rx)=rg(x)$, каде $r\in\mathbb{Q}$ и $x\in\mathbb{R}$. Специјално, од второто равенство при $r=-1$ добиваме $g(-x)=-g(x)$, па ако во (1) ставиме

$y=-x$ добиваме $g(x)^2=g(x^2)$. Според тоа, $g(x)\geq 0$ за $x\geq 0$. Нека претпоставиме дека $g(x)<x$ и нека $r\in\mathbb{Q}$ е таков што $g(x)<r<x$. Тогаш

$$r>g(x)=g(x-r+r)=g(x-r)+r\geq r\ ,$$

што е противречност. Слично, и претпоставката $g(x)>x$ доведува до противречност, па затоа мора да важи $g(x)=x$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

Со непосредна проверка се покажува дека сите три функции навистина се решенија на (1).

6. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е таква што $x+f(x)=f(f(x))$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Определи ги сите решенија на равенката $f(f(x))=0$.

Решение. Прво ќе докажеме дека функцијата $f(x)$ е инјекција. Нека $f(x)=f(y)$. Тогаш $f(f(x))=f(f(y))$, па затоа $x+f(x)=y+f(y)$, од каде следува $x=y$, т.е. f е инјекција. Сега за $x=0$, од $f(f(0))=0+f(0)=f(0)$ и од инјективноста на f следува $f(0)=0$. Значи, $f(f(0))=0$, т.е. $x=0$ е решение на дадената равенка. Ако за некој a важи $f(f(a))=0$, тогаш $f(f(0))=f(f(a))$ и како f е инјекција добиваме $f(0)=f(a)$, па повторно бидејќи f е инјекција имаме $a=0$. Според тоа, $x=0$ е единствено решение на равенката $f(f(x))=0$.

7. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$xf(x)-yf(y)=(x-y)f(x+y),$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека f е функција која го задоволува условот на задачата. За секој $x\in\mathbb{R}$ со M_x да ја означиме точката со координати $(x,f(x))$. Од условот следува дека за секои $x,y\in\mathbb{R}$ точките M_x,M_y и M_{x+y} лежат на една права. Според тоа, за $x\neq 0$ точките $M_x,M_{2x},M_{3x},...,M_{nx},...$ лежат на една права, која ќе ја означиме со l_x. Нека $x_1\neq x_2$. Да ја означиме со l_{x_1,x_2} правата определена со точките M_{x_1} и M_{x_2}. Тогаш $M_{x_1+x_2}\in l_{x_1,x_2}$ и $M_{2x_1+x_2}\in l_{x_1,x_2}$. Од друга страна точките M_{x_2}, M_{2x_1} и $M_{2x_1+x_2}$ исто така лежат на една права, па затоа $M_{2x_1}\in l_{x_1,x_2}$. Значи $l_{x_1}\equiv l_{x_1,x_2}$. Аналогно се докажува дека $l_{x_2}\equiv l_{x_1,x_2}$, што значи $l_{x_1}\equiv l_{x_2}$. Од претходно изнесеното следува дека сите точки M_x, $x\in\mathbb{R}$ припаѓаат на една права, т.е. $f(x)$ е линеарна функција. Обратно, функцијата $f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}$ го задоволува условот на задачата.

Конечно, бараните функции се од видот $f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}$.

8. Нека $a,b\in\mathbb{R}^+$. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ такви што за секој $x\in\mathbb{R}^+$ важи

$$f(f(x)+af(x)=b(a+b)x\,. \tag{1}$$

Решение. Да означиме $a_n=f^{(n)}(x)=f(f^{(n-1)}(x))$. Ако во (1) наместо x ставиме $f^{(n-2)}(x)$, добиваме

$$a_n+aa_{n-1}-b(a+b)a_{n-2}=0\,. \tag{2}$$

Карактеристичната равенка на равенката (2) е $\lambda^2+a\lambda-b(a+b)=0$ и нејзини решенија се $\lambda_1=b$ и $\lambda_2=-a-b$. Според тоа,

$$f^{(n)}(x)=b^n\,\tfrac{(a+b)x+f(x)}{a+2b}+(-1)^n(a+b)^n\,\tfrac{bx-f(x)}{a+2b}\,. \tag{3}$$

Ќе докажеме дека $f(x)=bx$. Ако $f(x)>bx$, тогаш земаме $n=2k\to\infty$ и од (3) добиваме $f^{(n)}(x)<0$, што е противречност. Ако $f(x)<bx$ земаме $n=2k+1\to\infty$ и повотрно добиваме $f^{(n)}(x)<0$, што е противречност. Според тоа, $f(x)=bx$, за секој $x\in\mathbb{R}^+$.

9. Нека функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е таква што

$$f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y) \tag{1}$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$. Докажи дека $f(x+y)=f(x)+f(y)$ за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Во (1) ставаме $y=-1$ и добиваме $f(x)=-f(-x)$, т.е. функцијата f е непарна. Понатаму, за $y=1$ од (1) добиваме $f(2x+1)=2f(x)+f(1)$, а ако наместо x ставиме $-x$, тогаш за $y=1$ добиваме

$$f(-2x+1)=-f(2x-1)=2f(-x)+f(1)\,,$$

т.е.

$$f(2x-1)=2f(x)-f(1)\,.$$

Според тоа,

$$f(2x-1)+f(2x+1)=4f(x)\,. \tag{2}$$

Сега, ако во (1) земеме $-y$ наместо y добиваме

$$f(-xy+x-y)=f(-xy)+f(x)+f(-y)\,,$$

и како функцијата f е непарна добиваме

$$-f(xy-x+y)=-f(xy)+f(x)-f(y)\,. \tag{3}$$

Ако ги собереме (1) и (3) добиваме

$$f(xy+x+y)-f(xy-x+y)=2f(x)\,. \tag{4}$$

Конечно, ако земеме $y' = \frac{y}{x+1}$, тогаш од (3) следува

$$\begin{aligned} f(x+y)+f(x-y) &= f(x+\tfrac{y}{x+1}(x+1))+f(x-\tfrac{y}{x+1}(x+1)) \\ &= f(x+xy'+y')+f(x-xy'-y') \\ &= f(xy'+x+y')-f(xy'-x+y')=2f(x). \end{aligned}$$

Сега, ако наместо x ставиме $2x$ и земеме $y=1$ добиваме

$$f(2x-1)+f(2x+1)=2f(2x)\,. \qquad (5)$$

Понатаму, од (2) и (5) следува $f(2x)=2f(x)$, па затоа

$$f(x+y)+f(x-y)=f(2x)\,.$$

Конечно, ако во последното равенство ставиме $x+y=x'$ и $x-y=y'$, тогаш бидејќи $2x=x'+y'$, добиваме

$$f(x')+f(y')=f(x'+y')\,,$$

што и требаше да се докаже.

10. Дали постои функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква што $f(f(x))=x^2-2$ за секој $x\in\mathbb{R}$?

Решение. Да ја разгледаме функцијата $g(x)=x^2-2$. Равенката $g(x)=x$ има две реални и различни решенија, што значи дека функцијата g има две фиксни точки. Слично, равенката $g(g(x))=x$ има четири реални и различни решенија, што значи дека функцијата $g\circ g$ има четири фиксни точки. Ќе докажеме дека не постои функција f таква што $f\circ f=g$.

Нека претпоставиме дека постои функција f таква што $f\circ f=g$. Нека a,b се фиксните точки за функцијата g, а a,b,c,d се фиксните точки за функцијата $g\circ g$. Нека $g(c)=y$. Тогаш $c=g(g(c))=g(y)$, од каде добиваме $g(g(y))=g(c)=y$, што значи дека y е една од фиксните точки на функцијата $g\circ g$. Ако $y=a$, тогаш $a=g(a)=g(y)=c$, што е противречност. Слично добиваме $y\neq b$, па како $y\neq c$, важи $y=d$. Според тоа, $g(c)=d$ и $g(d)=c$. Понатаму, $g(f(x))=f(f(f(x)))=f(g(x))$. Нека $x_0\in\{a,b\}$. Од претходните разгледувања следува $f(x_0)=f(g(x_0))=g(f(x_0))$, т.е. $f(x_0)$ е фиксна точка за g, па затоа $f(x_0)\in\{a,b\}$. Слично, ако $x_1\in\{a,b,c,d\}$, добиваме дека $f(x_1)=f(g(g(x_1)))=g(f(g(x_1)))=g(g(f(x_1)))$, т.е. $f(x_1)$ е фиксна точка за $g\circ g$, па затоа $f(x_1)\in\{a,b,c,d\}$. Ќе докажеме дека ова не е можно. Прво нека $f(c)=a$. Тогаш $f(a)=f(f(c))=g(c)=d$, што противречи на $f(a)\in\{a,b\}$. На сличен начин се докажува дека важи $f(c)\neq b$. Ако $f(c)=c$, тогаш $g(c)=f(f(c))=f(c)=c$, што повторно е противречност. Значи, $f(c)=d$.

Но, тогаш $f(d)=f(f(c))=g(c)=d$, што повторно е контрадикција.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека бараната функција f не постои.

11. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(yf(x)-x)=f(x)f(y)+2x\,,$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. За $x=y=0$ добиваме $f(0)^2=f(0)$, т.е. $f(0)=0$ или $f(0)=1$. Во првиот случај го заменуваме x со $-x$ и y со 0 и добиваме $f(x)=-2x$. Непосредно се проверува дека оваа функција е решение на равенката.

Нека $f(0)=1$ и да ја означиме дадената равенка со $P(x,y)$. При $P(x,0)$ добиваме $f(-x)=f(x)+2x$. Тогаш собиајќи го $P(x,-y)$ со $P(-yf(x)-x,0)$ добиваме

$$f(yf(x)-x)=f(x+yf(x))+2x\,.$$

Ако $f(x)\neq 0$ за некој x, тогаш при $y=\frac{x}{f(x)}$ добиваме $f(2x)=1-2x$.

Да разгледаме x_0 за кој $f(x_0)=0$ (под претпоставка дека таков постои). Јасно, $x_0\neq 0$ и затоа $f(-x_0)=2x_0\neq 0$. Од претходно изнесеното следува $f(2(-x_0))=1+2x_0$, па затоа

$$f(2x_0)=f(-2x_0)-4x_0=(1+2x_0)-4x_0=1-2x_0\,.$$

Според тоа, $f(2x)=1-2x$ за секој x, па затоа $f(x)=1-x$ за секој x. Непосредно се проверува дека оваа функција е решение на дадената равенка.

12. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f(xf(y)-yf(x))=f(xy)-xy\,. \tag{1}$$

Решение. Во (1) ставаме $y=0$ и добиваме $f(xf(0))=f(0)$. Ако м $f(0)\neq 0$, тогаш изразот $xf(0)$ ги прима сите реални вредности, што значи дека функцијата f е константа и таа не ја задоволува (1). Значи, $f(0)=0$.

Во (1) ставаме $x=y$ и добиваме $f(0)=f(x^2)-x^2$, т.е. $f(x^2)=x^2$. Значи, $f(x)=x$ за секој $x\geq 0$. Нека сега $x,y<0$. Тогаш $xy>0$, па затоа $f(xy)=xy$, што значи $f(xf(y)-yf(x))=0$ и ова може да важи само за $xf(y)-yf(x)\leq 0$. Аналогно $yf(x)-xf(y)\leq 0$, па затоа $xf(y)=yf(x)$, т.е. $\frac{f(x)}{x}=\frac{f(y)}{y}$. Според тоа, $f(x)=cx$ за секој $x<0$, каде c е некоја константа.

Сега за $x<0<y$ добиваме $f((1-c)xy)=f(xy)-xy=(c-1)xy$, т.е. $f(z)=-z$

за $z=(1-c)xy$. Ако $c=1$, тогаш $f(x)\equiv x$ што очигледно е решение. Од друга страна за $c\neq 1$ важи $z\neq 0$ и оттука $f(z)\in\{cz,z\}$, па тогаш мора да биде $c=-1$ со што ја добиваме функцијата $f(x)=|x|$ за $x\in\mathbb{R}$, која исто така е решение. ите случаи, освен $x>0>y$ ги проверивме, а за $x>0>y$ имаме

$$-2xy=f(-2xy)=f(xf(y)-yf(x))=f(xy)-xy=-2xy\,.$$

Конечно решение се функциите $f(x)=x$ и $f(x)=|x|$.

13. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x)f(yf(x)-1)=x^2f(y)-f(x)\,, \qquad (1)$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Ако во (1) ставиме $x=0$, добиваме $f(0)(f(yf(0)-1)+1)=0$. Ако $f(0)\neq 0$, тогаш $f(yf(0)-1)=-1$ за секој y, па како $yf(0)-1$ ги прима сите реални вредности, заклучуваме дека $f\equiv -1$, што не е решение. Значи, $f(0)=0$.

Нека претпоставиме дека $f(a)=0$ за некој $a\neq 0$. Во (1) ставаме $x=a$ и добиваме $f(y)=0$ за секој y, што е решение.

Во натамошните разгледувања ќе сметаме дека $f(x)\neq 0$ за $x\neq 0$. Во (1) ставаме $x=y=1$ и добиваме $f(f(1)-1)=0$, па затоа $f(1)=1$. Сега за $x=1$ од (1) следува $f(y-1)=f(y)-1$. Оттука следува $f(yf(x)-1)=f(yf(x))-1$, па (1) го добива обликот $f(x)f(yf(x))=x^2f(y)$. Сега за $y=1$ добиваме $f(x)f(f(x))=x^2$, па затоа

$$\begin{aligned}(x-1)^2 &= f(x-1)f(f(x-1))=(f(x)-1)(f(f(x))-1)\\ &= f(x)f(f(x))-f(x)-f(f(x))+1,\end{aligned}$$

од што следува $f(x)+\frac{x^2}{f(x)}=f(x)+f(f(x))=2x$, т.е. $(f(x)-x)^2=0$. Според тоа, $f(x)=x$ за секој $x\neq 0$. Функцијата $f(x)=x$, за $x\in\mathbb{R}$ исто така е решение на (1).

14. Определи ги сите непрекината функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$((f(x)f(y)-1)f(x+y)=2f(x)f(y)-f(x)-f(y)\,. \qquad (1)$$

Решение. Нека $f(a)=1$ за некој $a\in\mathbb{R}$. Ако во (1) ставиме $x=y=\frac{a}{2}$ добиваме $(f(\frac{a}{2})-1)^2=0$, т.е. $f(\frac{a}{2})=1$. Според тоа, $f(\frac{a}{2^n})=1$ за секој природен број n. Сега, бидејќи функцијата f е непрекината, добиваме $f(0)=1$. Понатаму, ако во (1) ставиме $y=0$ добиваме $(f(x)-1)^2=0$, т.е. $f(x)=1$. Непосредно се проверува дека оваа функција ја задоволува равенката (1).

Сега, нека $f(x)\neq 1$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Земаме $g(x)=\frac{f(x)}{f(x)-1}$ и од (1) следува дека за функцијата g важи $g(x+y)=g(x)+g(y)$. Бидејќи функцијата g е непрекината, последната Кошиева равенка има решение $g(x)=ax$ за некој $a\in\mathbb{R}$. Бидејќи $g(x)\neq 1$ за секој $a\in\mathbb{R}$, добиваме $a=0$, т.е. $f\equiv 0$. Јасно, оваа функција ја задоволува равенката (1).

15. а) Определи ги сите реални броеви a за кои постои функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква што $f(0)=a$ и $f(f(x))=x^{2009}$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

б) Дали постои непрекината функција со својствата од а).

Решение. а) Бидејќи $f^{2009}(x)=f(f(f(x)))=f(x^{2009})$, заклучуваме дека $a^{2009}=a$, т.е. $a=0,\pm 1$. Да забележиме дека ако $\{b,c,d\}\in\{0,1,-1\}$ и

$$f(x)=\begin{cases}1/x, & |x|>1\\ 1/x^{2009}, & 0<|x|<1\\ b, & x=b\\ c, & x=d\\ d, & x=c\end{cases}$$

тогаш $f(f(x))=x^{2009}$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Значи, бараните броеви се $0,1,-1$.

б) Функцијата f е инјекција. Навистина, ако $f(x)=f(y)$, тогаш

$$x^{2009}=f(f(x))=f(f(y))=y^{2009}, \text{ т.е. } x=y.$$

Ако претпоставиме дека $a=f(0)=-1$, тогаш $f(-1)=0$. За $e=f(1)$ имаме $e\neq 0,-1$ и $e^{2009}=e$, т.е. $e=1$. Тогаш $f(0)f(1)<0$ и бидејќи f е непрекината, добиваме $f(y)=0$ за некој $y\in(0,1)$. Последното противречи на инјективноста на f и $f(-1)=0$. Аналогно $a\neq 1$. Останува $a=0$. Овој случај може да се реализира, на пример со следнава непрекината функција

$$f(x)=\begin{cases}x^{\sqrt{2009}}, & x>0\\ 0, & x=0\\ -(-x)^{\sqrt{2009}}, & x<0.\end{cases}$$

за која $f(f(x))=x^{2009}$

16. Определи ги сите непрекината функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x)=f(x^2+\tfrac{1}{4})$$

за секој $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека f е функција која го задоволува условот на задачата. Очигледно функцијата f е парна. Нека $x_0\geq 0$. Можни се два случаја.

Прв случај. $0\leq x_0\leq\frac{1}{2}$. Ја разгледуваме низата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ определена со $x_{n+1}=x_n^2+\frac{1}{4}$. Со индукција лесно се докажува дека $0\leq x_n\leq\frac{1}{2}$ за секој n. Освен тоа,

$$x_{n+1}-x_n=x_n^2-x_n+\tfrac{1}{4}=(x_n-\tfrac{1}{2})^2\geq 0,$$

што значи дека низата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е монотоно растечка и бидејжи е ограничена, таа е конвергентна. Нека $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Тогаш $a^2-a+\frac{1}{2}=0$, од каде добиваме $a=\frac{1}{2}$. Од друга страна, функцијата f е непрекината и затоа

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(\tfrac{1}{2}).$$

Но,

$$f(x_{n+1})=f(x_n^2+\tfrac{1}{4})=f(x_n)$$

за секој n. Значи,

$$f(x_0)=f(x_1)=\dots,$$

па затоа $f(x_0)=f(\frac{1}{2})$ за секој $x_0\in[0,\frac{1}{2}]$.

Втор случај. $x_0>\frac{1}{2}$. Ја разгледуваме низата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ определена со $x_{n+1}=\sqrt{x_n-\frac{1}{4}}$. Аналогно, како во претходниот случај се докажува дека низата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е конвергентна и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$. Но, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\frac{1}{2})$ и бидејќи $f(x_{n+1})=f(x_n^2+\frac{1}{4})=f(x_n)$ за секој n, повторно добиваме дека важи $f(x_0)=f(\frac{1}{2})$.

Од претходните разгледувања следува дека функцијата f е константна на интервалот $[0,+\infty)$ и бидејќи е парна таа е парна на множеството реални броеви.

Очигледно, сите константни функции го задоволуваат условот на задачата.

17. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x^3+y^3)=xf(x^2)+yf(y^2), \qquad (1)$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. За $y=0$ од (1) добиваме $f(x^3)=xf(x^2)$, од каде следува дека $f(x^3+y^3)=f(x^3)+f(y^3)$, т.е. $f(x+y)=f(x)+f(y)$ за секои $x,y\in\mathbb{R}$. Оттука, со математичка индукција лесно се добива дека $f(kx)=kf(x)$ за секој природен број k и секој реален број x.

Бидејќи за секое решение f на (1) и за секоја константа c функцијата cf исто така е решение, можеме да сметаме дека $f(1)=1$ или $f(1)=0$.

Ако $f(1)=1$, тогаш $f((x+1)^3)=(x+1)f((x+1)^2)$, од каде по примената на $f(x+y)=f(x)+f(y)$ и $f(kx)=kf(x)$, наоѓаме

$$2f(x^2)+f(x)=2xf(x)+x. \tag{2}$$

Го заменуваме x со $x+1$ и добиваме

$$2f((x+1)^2)+f(x+1)=2(x+1)f(x+1)+x+1,$$

од каде добиваме

$$2f(x^2)+3f(x)=2xf(x)+3x. \tag{3}$$

Ако од (3) го одземеме (2) добиваме $f(x)=x$. Во овој случај имаме решение $f(x)=cx$ каде $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ако $f(1)=0$, тогаш

$$f((x+1)^3)=(x+1)f((x+1)^2) \text{ или } 2f(x^2)+f(x)=2xf(x).$$

Како и во претходниот случај

$$2f((x+1)^2)+f(x+1)=(2x+2)f(x+1),$$

па затоа $f\equiv 0$.

Конечно, сите решенија на (1) се $f(x)=cx$, каде $c\in\mathbb{R}$.

18. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$(f(x)+f(y)-2f(xy))(f(x)+f(z)-2f(xz))\geq 0,$$

за секои $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Решение. За $y=0$ и $z=1$ добиваме $(f(x)-f(0))(f(x)-f(1))\leq 0$, па затоа $f(0)\leq f(x)\leq f(1)$ или $f(1)\leq f(x)\leq f(0)$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

Нека претпоставиме дека f не е константа. Ако $f(0)\leq f(x)<f(1)$ или $f(1)<f(x)\leq f(0)$ за некој $x\neq 0$, тогаш за $y=\frac{1}{x}$ и $z=1$ добиваме

$$f(1)+f(1)>f(a)+f(\tfrac{1}{a})\geq 2f(1) \text{ или } f(1)+f(1)<f(a)+f(\tfrac{1}{a})\leq 2f(1),$$

што е противречност. Значи, $f(x)=f(1)$ за $x\neq 0$.

19. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што $f(xy)\leq xf(y)$, за секои

$x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. Ако во условот ставиме $y = 0$, добиваме $f(0) \le xf(0)$, односно $(x-1)f(0) \ge 0$ за секој x, па затоа $f(0) = 0$. Да означиме $f(1) = A$ и $f(-1) = -B$. Од условот на задачата следува

$$f(x) \le xf(1) = Ax \text{ и } f(-x) \le xf(-1) = -Bx \text{, за секој } x.$$

Од друга страна, од

$$A = f(x\tfrac{1}{x}) \le \tfrac{1}{x} f(x) \text{ и } -B = f(-x\tfrac{1}{x}) \le \tfrac{1}{x} f(-x),$$

за $x > 0$ добиваме $Ax \le f(x)$ и $-Bx \le f(-x)$. Оттука следува $f(x) = Ax$ и $f(-x) = -Bx$ за $x > 0$. Притоа од $f(1) \le -1f(-1)$ добиваме $A \le B$. Според тоа,

$$f(x) = \begin{cases} Ax, & x \ge 0 \\ Bx, & x < 0, \end{cases} \text{ каде } A \le B.$$

Ќе докажеме дека овие функции го задоволуваат условот на задачата.

1) За $x, y \ge 0$ имаме $f(xy) = Axy = yf(x)$.

2) За $x, y < 0$ важи $xy > 0$, па затоа $f(xy) = Axy \le Bxy = yf(x)$.

3) За $x \ge 0 > y$ важи $xy \le 0$ и $f(xy) = Bxy \le Axy = yf(x)$.

4) За $x < 0 \le y$ важи $xy \le 0$ и $f(xy) = Bxy = yf(x)$.

20. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои постои функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква што

$$x + af(y) \le y + f(f(x))$$

за секои реални броеви x и y.

Решение. Јасно е дека $a = 0$ не е решение, бидејќи $x > 0$ и $y = -f(f(x))$ доведува допротивречност.

Случај 1. Нека $a > 0$. Прво за $x = 0$, а потоа за $y = 0$ соодветно ги добиваме неравенствата $af(y) \le y + f(f(0))$ и $x + f(0) \le f(f(x))$. Во првото неравенство го заменуваме y со $f(x)$ и добиваме $af(f(x)) \le f(x) + f(f(0))$. Тогаш

$$a(x + af(0)) \le af(f(x)) \le f(x) + f(f(0)),$$

па затоа

$$a^2(x + af(0)) \le af(x) + af(f(0)) \le ax + (a+1)f(f(0)).$$

Значи, $(a^2 - a)x \le \text{const}$, што е можно само за $a = 1$. Лесно се проверува дека за $a = 1$ функцијата $f(x) = x$ го има саканото својство.

Случај 2. Нека $-1 < a < 0$. Тогаш функцијата $f(x) = |\frac{x}{a}|$ го има саканото својство, бидејќи $x + a\frac{|y|}{|a|} \le y + \frac{|x|}{a^2}$ ако и само ако $(x - \frac{|x|}{a^2}) + (-y - |y|) \le 0$.

Случај 3. За $a \le -1$ функцијата $f(x) = |x|$ го има саканото својство, бидејќи $a + a|y| \le y + |x|$ ако и само ако $(x - |x|) + (a|y| - y) \le 0$.

21. Нека F е множеството од сите функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ кои ја задоволуват неравенката $f(3x) \ge f(f(2x)) + x$, за секој $x \in \mathbb{R}^+$. Определи го најголемиот реален број α таков што за сите функции $f \in F$ важи $f(x) \ge \alpha x$.

Решение. Јасно е дека $\frac{x}{2} \in F$, па затоа $\alpha \le \frac{1}{2}$. Понатаму, ако во дадената неравенка ставиме $x = \frac{y}{3}$ добиваме $f(y) \ge f(f(\frac{2y}{3})) + \frac{y}{3} \ge \frac{y}{3}$. Да означиме $\alpha_1 = \frac{1}{3}$. Нека претпоставиме дека $f(x) \ge \alpha_k x$, за секој $x \in \mathbb{R}^+$. Сакаме да определиме α_{k+1} така што $f(t) \ge \alpha_{k+1} t$, за секој $x \in \mathbb{R}^+$ Од даденото неравенство добиваме

$$f(3x) \ge f(f(2x)) + x \ge \alpha_k f(2x) + x \ge \alpha_k \cdot \alpha_k \cdot 2x + x = \alpha_{k+1} \cdot 3x,$$

па како $x \in \mathbb{R}^+$ добиваме $\alpha_{k+1} = \frac{2\alpha_k^2 + 1}{3}$. Низата $\{\alpha_k\}$ определена со $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ и $\alpha_{k+1} = \frac{2\alpha_k^2 + 1}{3}$, за $k \ge 1$ е ограничена од горе со $\frac{1}{2}$ и монотоно расте, што значи дека таа е конвергентна, т.е. $\lim\limits_{k \to \infty} \alpha_{k+1} = \lim\limits_{k \to \infty} \alpha_k = \lambda$. Значи, $\lambda = \frac{2\lambda^2 + 1}{3}$, од каде добиваме $\lambda = \frac{1}{2}$ (бидејќи $\lambda < 1$).

Со тоа докажавме дека $\alpha \ge \lambda = \frac{1}{2}$, па затоа $\alpha = \frac{1}{2}$.

22. Докажи дека не постои функција $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ таква што

$$f(x)^2 \ge f(x+y)(f(x) + y), \tag{1}$$

за секои $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Решение. Нека претпоставиме дека постои функција f таква што за секои $x, y \in \mathbb{R}^+$ важи (1). Од (1) следува $f(x) - f(x+y) \ge \frac{f(x+y)y}{f(x)}$, што значи дека функцијата f монотоно опаѓа. Исто така, од (1) следува

$$f(x) - f(x+y) \ge \frac{yf(x)}{f(x)+y}.$$

Ќе докажеме дека $f(x) - f(x+1) \ge \frac{1}{2}$ за секој $x > 0$. Фиксираме $x > 0$ и наоѓаме природен број n таков што $nf(x+1) \ge 1$. За секој $k = 0, 1, ..., n-1$ имаме

$$f(x + \tfrac{k}{n}) - f(x + \tfrac{k+1}{n}) \ge \frac{f(x+\frac{k}{n})\frac{1}{n}}{f(x+\frac{k}{n}) + \frac{1}{n}} \ge \frac{1}{2n}.$$

Горните неравенства ги собираме и добиваме $f(x)-f(x+1)\geq\frac{1}{2}$.

Бидејќи функцијата f монотоно опаѓа, постои природен број m таков што $m\geq 2f(x)$. Тогаш

$$f(x)-f(x+m)=\sum_{i=0}^{m-1}(f(x+i)-f(x+i+1))\geq\frac{m}{2}\geq f(x),$$

што е противречност, бидејќи $f(x+m)>0$.

23. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R}^{+}$ такви што

1) $f(x+y)\geq f(x)+y$, за секои $x,y\in\mathbb{R}^{+}$ и

2) $f(f(x))\leq x$, за секој $x\in\mathbb{R}^{+}$.

Решение. Ако последователно ги примениме 1) и 2) добиваме

$$x\geq f(f(x))=f(\tfrac{1}{n}f(x)+\tfrac{n-1}{n}f(x))\geq f(\tfrac{1}{n}f(x))+\tfrac{n-1}{n}f(x)$$

(n е природен број). Сега, бидејќи функцијата f е ненегативна, ако во горниот израз земеме $n\to+\infty$, добиваме

$$x\geq\lim_{n\to\infty}f(\tfrac{1}{n}f(x))+f(x)\geq f(x).$$

Оттука следува дека $\lim\limits_{x\to 0^{+}}f(x)=0$. Сега, од 1) и $x+y\geq f(x+y)$ следува

$$x+y\geq f(x+y)\geq f(x)+y,$$
$$x-f(x)\geq f(x+y)-f(x)-y\geq 0.$$

Во последното неравенство фиксираме $x+y$ и земаме $x\to 0^{+}$, па како $\lim\limits_{x\to 0^{+}}f(x)=0$ добиваме $x\geq f(x+y)-y\geq 0$, односно

$$0\geq f(x+y)-(x+y)\geq 0,$$

од каде следува $f(x+y)=x+y$, што значи дека $f(x)=x$. Очигледно оваа фуникција е решение на задачата.

24. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секој $x\in\mathbb{R}$ важи

$$6f(x)\geq f^{4}(x+1)+f^{2}(x-1)+4.$$

Решение. Да забележиме дека за $m=\inf f(x)\geq\frac{2}{3}$ имаме

$$0\geq g(m)=m^{4}+m^{2}+4-6m=(m-1)^{2}(m^{2}+2m+4),$$

од каде добиваме $m=1$. Со (двострана) индукција по $n\in\mathbb{Z}$ следува дека $\sqrt{6}f(x)\geq f(x+n)$. Нека претпоставиме дека $f^{2}(x+1)-f^{2}(x)=a_{x}>0$ за некој x. Тогаш

$$f^2(x)-f^2(x-1)=g(f(x))+2a_x f^2(x)+a_x^2>2a_x$$

и по индукција следува

$$36f^2(x)-1>f^2(x-n+1)-f^2(x-n)>2^n a_x,$$

за секој $n\in\mathbb{N}$, што е противречност. Според тоа, $f(x+1)\le f(x)$ за секој x, па затоа

$$6f(x)\ge f^4(x+1)+f^2(x+1)+4.$$

Тогаш за $M_x=\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\le\sqrt{6}f(x)$ следува дека $0\ge g(M_x)$, т.е. $M_x=1$. Бидејќи и $m=1$, заклучуваме дека $f(x)=1$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

25. Определи ги сите функции $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ такви што

$$f(x^2)+f(y)=f(x^2+y+xf(4y)),\qquad(1)$$

за секои $x,y\in[0,+\infty)$.

Решение. Да забележиме дека квадратната функција $g(x)=x^2+kx$ ги прима сите вредности од инетрвалот $[0,+\infty)$. Ќе докажеме дека функцијата $f(x)$ монотоно не опаѓа. Навистина, ако $z=y+a$, $a>0$, тогаш можеме да избереме $x>0$ таков што $a=g(x)=x^2+f(4y)x$ и за овој x имаме

$$f(z)=f(y+a)=f(y+x^2+xf(4y))=f(x^2)+f(y)\ge f(y).$$

Да претпоставиме дека $f(z)=0$ за некој $z>0$. Тогаш $f(x)=0$ за секој $x\in[0,z]$. Во (1) ставаме $\sqrt{x}$ наместо x и $y=\frac{z}{4}$. Добиваме

$$f(x)=f(x)+f(\tfrac{z}{4})=f(x+\tfrac{z}{4}).$$

Последното значи дека дадената функција е периодична со период $\frac{z}{4}$, па затоа $f\equiv 0$. Оваа функција навистина е решение на (1).

Нека $f(x)>0$ за секој $x>0$. Тогаш функцијата $f(x)$ строго монотоно расте и затоа таа е инјекција. Повторно ставаме $\sqrt{x}$ наместо x и добиваме

$$f(x)+f(y)=f(x+y+\sqrt{x}f(4y)).$$

Ако во последното равенство ги замениме местата на x и y добиваме

$$f(x+y+\sqrt{x}f(4y))=f(x)+f(y)=f(y+x+\sqrt{y}f(4x)),$$

па како f е инјекција добиваме $\sqrt{x}f(4y)=\sqrt{y}f(4x)$. Значи, $\frac{f(x)}{\sqrt{x}}=\text{const}$,т.е. $f(x)=c\sqrt{x}$. Сега, ставаме $x=y=1$ и добиваме $c=1$, т.е. $f(x)=\sqrt{x}$. Лесно се проверува дека оваа функција навистина е решение на (1).

26. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за некоја реална константа M важи $f(x)<M$ за секој $x\in\mathbb{R}$ и
$$f(xf(y))+yf(x)=xf(y)+f(xy), \qquad (1)$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Во (1) ставаме $x=y=1$ и добиваме $f(f(1))=f(1)$. Сега ако ставиме $x=1, y=f(1)$, добиваме $f(1)^2=f(1)$. Ако $f(1)=1$, тогаш за $y=1$ од (1) добиваме $f(x)=x$ за секој $x\in\mathbb{R}$, што противречи на ограниченоста на функцијата f. Значи, $f(1)=0$. Понатаму, ако во (1) ставиме $x=1$ добиваме $f(f(y))=2f(y)$. Последното значи дека ако $t\in S=\{f(x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$, тогаш и $2t\in S$, а оттука со индукциа добиваме $2^n t\in S$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Но, множеството S е ограничено од горе, па затоа мора да важи $t\le 0$, т.е. $f(x)\le 0$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

Ако во (1) наместо (x,y) ставиме $(\frac{x}{2}, f(y))$ добиваме
$$f(xy)-yf(x)=f(xf(y))-xf(y)=f(\tfrac{x}{2}f(y))-f(\tfrac{x}{2})f(y)\le 0,$$
бидејќи вредностите на f се помали или еднакви на нула. Според тоа, $f(xy)\le yf(x)$ за секои $x,y\in\mathbb{R}$. За $y=\frac{1}{x}$ и $x>0$ од последното неравенство добиваме $f(x)\ge 0$, па затоа $f(x)=0$ за $x>0$. Исто така важи $f(0)=f(f(1))=2f(1)=0$.

Сега, да претпоставиме дека $f(b)\ne 0$ за некој $b<0$. Од $f(b)<0$, за $x<0$ имаме $f(xf(b))=f(2xf(b))=0$, па со замена $y=f(b)$ во почетната равенка добиваме $2xf(b)-f(b)f(x)=0$, од каде следува $f(x)=2x$. Според тоа, имаме две можности:
$$f_1(x)=0 \text{ за секој } x \quad\text{или}\quad f_2(x)=\begin{cases}2x, & x<0,\\ 0, & x\ge 0.\end{cases}$$
Јасно, f_1 е тривијално решение. Функцијата f_2 исто така ја задоволува равенката (1). Навистина, ако означиме
$$L=f(xf(y))+yf(x) \text{ и } D=xf(y)+f(xy),$$
тогаш за $x,y\ge 0$ имаме $L=D=0$, за $x\ge 0>y$ имаме $L=D=4xy$, за $x<0\le y$ имаме $L=D=2xy$ и за $x,y<0$ имаме $L=D=2xy$.

27. Определи ги сите сурјекции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи
$$f(x+f(x)+2f(y))=f(2x)+f(2y). \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин*. Во (1) ставаме $x=0$ и добиваме
$$f(2y)=f(f(0)+2f(y))-f(0),$$

па затоа (1) може да се запише како

$$f(x+f(x)+2f(y))=f(2x)+f(f(0)+2f(y))-f(0)\,.$$

Бидејќи $z=2f(y)$ ги прима сите реални вредности, ако во горното равенство ставиме $z=2f(y)$, добиваме

$$f(x+f(x)+z)=f(2x)+f(f(0)+z)-f(0)\,, \tag{2}$$

за секои $x,z\in\mathbb{R}$. Во (2) заменуваме $z=x-f(x)$ и добиваме

$$f(x-f(x)+f(0))=f(0),$$

за секој $x\in\mathbb{R}$, па ако во горното равенство ставиме $x=y-f(y)+f(0)$, тогаш добиваме $f(x)=f(0)$ и ако ова го замениме во (2) добиваме

$$f(z+y-f(y)+2f(0))=f(2y-2f(y)+2f(0))+f(f(0)+z)-f(0)\,. \tag{3}$$

За $z=-f(0)$ добиваме

$$f(2y-2f(y)+2f(0))=f(y-f(y)+f(0))=f(0)\,,$$

па затоа (3) може да се запише како

$$f(z+y-f(y)+2f(0))=f(z+f(0))\,. \tag{4}$$

За $z=f(y)-2f(0)$ од (4) добиваме

$$f(y)=f(f(y)-f(0))\,.$$

Бидејќи $z=f(y)-f(0)$ ги прима сите реални вредности, оттука следува дека $f(x)=x+c$, каде $c=f(0)$. Конечно, со замена во (1) добиваме дека оваа функција е решение само за $c=0$, т.е. $f(x)=x$.

Втор начин. Ако a е таков што $f(a)=0$, со замена $x=y=a$ во (1) добиваме $f(2a)=0$. Сега за $x=2a$ и $x=a$ од (1) следува

$$f(2a+2f(y))=f(a+2f(y))=f(2y)\,.$$

Бидејќи $w=a+2f(y)$ ги прима сите реални вредности, оттука следува

$$f(w+a)=f(w)\,, \text{ кога } f(a)=0 \text{ и } w\in\mathbb{R}\,, \tag{5}$$

па затоа и $f(2f(y))=f(2y)$. Бидејќи $z=2f(y)$ ги прима сите реални вредности (1) се сведува на

$$f(x+f(x)+z)=f(2x)+f(z)\,. \tag{6}$$

Со замена $z=f(x)-x$ во (6) добиваме $f(f(x)-x)=0$, па во (5) можеме да земеме $a=f(x)-x$ и $w=x+f(x)+z$, со што (6) го добива обликот

$$f(2f(x)+z)=f(2x)+f(z)=f(2f(x))+f(z)\,.$$

Притоа $y=2f(x)$ ги прима сите реални ведности, па затоа

$$f(y+z)=f(y)+f(z) \text{ за секои } y,z\in\mathbb{R}\,.$$

Меѓу другото, $f(2f(x))=f(2x)=2f(x)$, т.е. $f(y)=y$, за секој $y\in\mathbb{R}$.

28. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x^{2015}+f(y)^{2015})=f(x)^{2015}+y^{2015},$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. *Лема*. Ако за функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ важи

$$f(x)+f(y)=f(x+y) \text{ и } f(x^{2015})=f(x)^{2015},$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$, тогаш $f(x)$ идентички е еднаква на $x,-x$ или 0.

Доказ. Како кај равенката на Коши се докажува дека $f(qx)=qf(x)$ за секој рационален q и реален број x. Тогаш

$$f(x+q)^{2015}=(f(x)+f(q))^{2015}=\sum_{i=0}^{2015}\binom{2015}{i}(qf(1))^i f(x)^{2015-i}$$

$$f(x+q)^{2015}=f((x+q)^{2015})=\sum_{i=0}^{2015}\binom{2015}{i}f(x^i q^{2015-i})=\sum_{i=0}^{2015}\binom{2015}{i}q^{2015-i}f(x^i).$$

За фиксиран x, двете претставувања се идентички еднакви полиноми на q (бидејќи важат за секој рационален q). Ако ги споредиме коефициентите пред првите степени добиваме

$$f(x^{2014})=f(1)f(x)^{2014}$$

и затоа на ненегативните реални броеви f го прима знакот на $f(1)$ и е ограничена. Според тоа, $f(x)=cx$ и со непосредна проверка се добива дека $c=1,0,-1$, што и требаше да се докаже. ■

Ставаме $x=0$ и добиваме

$$f(f(y)^{2015})=f(0)^{2015}+y^{2015}$$

од каде што следува дека f е биекција. Ако во даденото равенство x го замениме со $f(x)$ добиваме

$$f(f(x)^{2015}+f(y)^{2015})=f(f(x))^{2015}+y^{2015},$$

а заменувајќи го y со $f(y)$ добиваме

$$f(x^{2015}+f(f(y))^{2015})=f(x)^{2015}+f(y)^{2015}.$$

Оттука добиваме

$$f(f(f(f(x))^{2015}+f(y)^{2015})=f(x^{2015}+f(f(y))^{2015})=f(x)^{2015}+f(y)^{2015}.$$

Бидејќи f е биекција имаме $f(f(x))=x$, па затоа

$$\begin{aligned}f(f(x)^{2015}+f(y)^{2015})&=x^{2015}+y^{2015}\\&=f(f(x)^{2015})+f(f(y)^{2015})-2f(0)^{2015}\end{aligned}$$

и како f е биекција следува дека

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-2f(0)^{2015}.$$

Во последното равенство ставаме $x=y=0$ и добиваме дека $f(0)=0$ или $f(0)=(\pm\frac{1}{2})^{\frac{1}{2014}}$. Но, при ненултите можности полиномот $x^{2015}-x+f(0)^{2015}$ (чии корени се $f(-1), f(0), f(1)$) нема три различни реални корени. Според тоа, $f(0)=0$ и $f(1)=\pm 1$. Значи,

$$f(x)+f(y)=f(x+y) \text{ и } f(x^{2015})=f(x)^{2015},$$

па од лемата и можните вредности за $f(1)$ следува дека решенија на задачата се $f(x)=x$ и $f(x)=-x$. Непосредно се проверува дека овие функции се решенија на задачата.

29. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f(x)+y-f(x)y=f(x+f(y))-f(xf(y)). \qquad (1)$$

Решение. Во (1) ставаме $x=0$ и $y=2$ и добиваме $f(g(z))=f(z)-1$, каде $g(z)=f(1)(z-f(1))$. Специјално имаме $f(g(g(f(2))))=f(f(2))-2=0$. Да означиме $a=g(g(f(2)))$. Во (1) ставиме $y=a$ и добиваме $a(f(x)-1)=f(0)$, што за $a\neq 0$ ќе значи дека функцијата f е константна, а тоа не е можно. Затоа $a=0$ и $f(0)=0$. Сега, ако во (1) ставиме $x=0$ добиваме $f(f(y))=y$. Меѓу другото, последното значи дека f е биекција.

Ако во (1) наместо y ставиме $f(y)$ и искористиме дека $f(f(y))=y$ добиваме

$$f(x)+f(y)-f(x)f(y)=f(x+y)-f(xy). \qquad (2)$$

За $x=y=2$ од (2) следува $2f(2)=f(2)^2$, па бидејќи $f(2)\neq 0$ добиваме $f(2)=2$. Понатаму, за $x=y=1$ добиваме $3f(1)-f(1)^2=2$ и како $f(1)\neq 2$ следува $f(1)=1$. Сега за $x=1$, од (2) добиваме $f(x+1)=f(x)+1$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

Ако во (2) наместо x ставиме $x+1$ добиваме

$$f(x)-f(x)f(y)=f(x+y)-f(xy+y).$$

Сега ако од последната равенка ја одземеме (2) добиваме

$$f(xy+y)=f(xy)+f(y), \text{ т.е. } f(z+y)=f(z)+f(y),$$

за секои $z,y\neq 0$. Ова важи и за $y=0$, па затоа $f(z+y)=f(z)+f(y)$ за секои z,y. Според тоа, (2) го добива видот $f(x)f(y)=f(xy)$, од каде за $x=y=\sqrt{z}$ добиваме $f(z)=f(\sqrt{z})^2$ за $z\geq 0$. Според тоа, функцијата f е адитивна и монотоно растечка. Сега од $f(1)=1$ со едноставна индукција добиваме $f(q)=q$ за $q\in\mathbb{Q}$, а оттука и $f(x)=x$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

30. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ такви што

$$f(x^2+y)=f^2(x)+\tfrac{f(xy)}{f(x)}, \tag{1}$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ y\neq x^2$.

Решение. Нека $f(1)=c$. Од (1) за $y=1$ и $x=1$ следува

$$f(x^2+1)=f^2(x)+1, \tag{2}$$

$$f(y+1)=c^2+\tfrac{f(y)}{c}. \tag{3}$$

Сега, од (3) следува

$$f(2)=c^2+1,\ f(3)=\tfrac{c^3+c^2+1}{c},\ f(4)=\tfrac{c^4+c^3+c^2+1}{c^2},\ f(5)=\tfrac{c^5+c^4+c^3+c^2+1}{c^3}.$$

Од друга страна, ако во (2) ставиме $x=2$ добиваме $f(5)=c^4+2c^2+2$. Затоа

$$\begin{aligned}&\tfrac{c^5+c^4+c^3+c^2+1}{c^3}=c^4+2c^2+2 &&\Leftrightarrow\\ &c^7+c^5-c^4+c^3-c^2-1=0 &&\Leftrightarrow\\ &(c-1)[c^4(c^2+c+1)+(c+1)^2(c^2-c+1)+2c^2]=0\end{aligned}$$

и како изразот во последната средна заграда е позитивен, добиваме $c=1$. Сега, од (3) следува дека за секој y важи

$$f(y+1)=f(y)+1, \tag{4}$$

и затоа $f(n)=n$ за секој природен број n.

Нека $\frac{a}{b}$ (a,b се природни броеви) е позитивен рационален број. Од (4) следува дека $f(y)=y$ ако и само ако $f(y+m)=y+m$ за секој природен број m, па затоа $f(\frac{a}{b})=\frac{a}{b}$ ако и само ако $f(b^2+\frac{a}{b})=b^2+\frac{a}{b}$. Последното равенство следува од (1) за $x=b$ и $y=\frac{a}{b}$, што значи дека $f(\frac{a}{b})=\frac{a}{b}$.

Ако во (4) ставиме $y=x^2$, добиваме $f(x^2+1)=f(x^2)+1$, па сега од (2) следува $f(x^2)=f^2(x)>0$. Според тоа, $f(x)>0$ за секој $x>0$ и сега лесно се докажува дека $f(x)=x$ а секој реален број $x>0$.

Конечно, ако $x<0$, постои $y<0$ таков што $x^2+y>0$. Тогаш $xy>0$ и од (1) следува

$$x^2+y=f(x^2+y)=f^2(x)+\tfrac{f(xy)}{f(x)}=f(x^2)+\tfrac{xy}{f(x)}=x^2+\tfrac{xy}{f(x)},$$

па затоа $f(x)=x$. Конечно, $f(x)=x$ за секој $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Јасно, функцијата $f(x)=x$ ја задоволува равенката (1).

31. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$(f(x)+xy)f(x-3y)+(f(y)+xy)f(3x-y)=(f(x+y))^2 .$$

Решение. За $x=y=0$ од условот добиваме $f(0)=0$. Сега, нека $x=0$. Имаме $f(y)f(-y)=f(y)^2$ и аналогно $f(y)f(-y)=f(-y)^2$. Според тоа, функцијата f е парна.

Заменуваме $x=-y$ и добиваме дека за секој $x\in\mathbb{R}$ важи

$$f(x)=x^2 \text{ или } f(4x)=0. \tag{1}$$

Ќе докажеме дека за секој $x\in\mathbb{R}$ е точно едно од равенствата

$$f(x)=x^2 \text{ или } f(x)=0. \tag{2}$$

Нека $t\in\mathbb{R}$ е таков што $f(t)\neq 0$. Јасно, $t\neq 0$. Тогаш од (1) следува $f(\frac{t}{4})=\frac{t^2}{16}$.

Во условот ставаме $x=\frac{3t}{4}$ и $y=\frac{t}{4}$ и добиваме

$$\tfrac{t^2}{4}f(2t)=f(t)^2. \tag{3}$$

Според тоа, $f(2t)\neq 0$. Аналогно се добива дека $f(4t)\neq 0$. Сега од (1) за $x=t$ следува $f(t)=t^2$.

Сега, ќе докажеме дека ако $f(a)=0$ за некој $a\neq 0$, тогаш $f\equiv 0$.

Нека $b\in\mathbb{R}$. Ќе докажеме дека $f(b)=0$. Од (1) имаме дека $f(x)\geq 0$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Понатаму, според (1) имаме $f(a)=a^2$ или $f(4a)=0$ и бидејќи $f(a)=0\neq a^2$ заклучуваме дека $f(4a)=0$. Ако во горните разгледувања a го замениме со $4a$ добиваме $f(16a)=0$. Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека постои $c>b$ таков што $f(c)=0$. Нека $x,y>0$ се такви што $x-3y=b,\ x+y=c$, т.е. $(x,y)=(\frac{3c+b}{4},\frac{c-b}{4})$. Заменуваме во условот на задачата и добиваме

$$(f(x)+xy)f(b)+(f(y)+xy)f(3x-y)=0.$$

Во последното равенство двата собирци на левата страна се ненегативни и важи $f(x)+xy>0$ и $f(y)+xy>0$, па затоа $f(b)=f(3x-y)=0$.

Значи, ако постои $a\neq 0$ таков што $f(a)=0$, тогаш $f\equiv 0$. Со непосредна проверка се докажува дека оваа функција навистина е решение на дадената равенка. Понатаму, ако за секој $a\neq 0$ важи $f(a)\neq 0$, тогаш $f(a)=a^2$, односно $f(x)=x^2$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Лесно се проверува дека и оваа функција е решение на дадената равенка.

Конечно, бараните функции се $f(x)=x^2$ и $f(x)=0$.

32. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ кои се ограничени на интервалот $(0,1)$

и такви што важи

$$x^2 f(x) - y^2 f(y) = (x^2 - y^2) f(x+y) - xyf(x-y), \qquad (1)$$

за секои $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. За $y = -x$ од (1) добиваме $f(x) - f(-x) = f(2x)$. Според тоа, $f(-x) - f(x) = f(-2x)$ и затоа $-f(-2x) = f(2x)$. Значи, $f(-x) = -f(x)$ и затоа $f(2x) = 2f(x)$.

За $y = x+1$ и $y = -x-1$ добиваме

$$x^2 f(x) - (x+1)^2 f(x+1) = (-2x-1) f(2x+1) + (x^2 + x) f(1)$$

$$x^2 f(x) + (x+1)^2 f(x+1) = (2x+1) f(1) + (x^2 + x) f(2x+1) .$$

Ги собираме последните две равенства и добиваме

$$(x^2 - x - 1) f(2x+1) = 2x^2 f(x) - (x^2 + 3x + 1) f(1)$$

$$= x^2 f(2x) - (x^2 + 3x + 1) f(1).$$

Ако во последното равенство наместо x ставиме $\frac{x}{2}$ и помножиме со 4, добиваме

$$(x^2 - 2x - 4) f(x+1) = x^2 f(x) - (x^2 + 6x + 4) f(1) .$$

Сега за $g(x) = f(x) - f(1)x$ добиваме

$$(x^2 - 2x - 4) g(x+1) = x^2 g(x) .$$

Според тоа,

$$((x-1)^2 - 2(x-1) - 4) g(x) = (x-1)^2 g(x-1)$$

и затоа

$$(x^2 - 2x - 4)(x^2 - 4x - 1) g(x+1) = x^2 (x-1)^2 g(x-1) . \qquad (2)$$

Од друга страна за $y = 1$ и $y = -1$ следува дека

$$x^2 g(x) = (x^2 - 1) g(x+1) - xg(x-1),$$

$$x^2 g(x) = (x^2 - 1) g(x-1) + xg(x+1),$$

од каде добиваме

$$(x^2 - x - 1) g(x+1) = (x^2 + x + 1) g(x-1) .$$

Оттука и од (2) добиваме $P(x-1) g(x-1) = 0$, каде

$$P(x-1) = x^2 (x-1)^2 (x^2 - x - 1) - (x^2 - 2x - 4)(x^2 - 4x - 1)(x^2 + x + 1) .$$

Бидејќи P е полином од петта стешен, следува дека $g(x) = 0$ за секој реален број x, освен можда за реалните нулите на полиномот P, кои се најмногу пет. За доволно голем број y и фиксиран $x \neq 0$ заклучуваме дека $g \equiv 0$. Според тоа, $f(x) = f(1)x$.

Забележуваме дека при решавањето на задачата воопшто не го искорис-

тивме условто дека функцијата f *е ограничена на интервалот* $(0,1)$*, што значи дека задачата е предефинирана.*

33. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што $f(-1)\neq 0$ и

$$f(xy+1)=f(x)f(y)+f(x+y), \qquad (*)$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Ќе докажеме дека единствено решение е функцијата $f(x)=x-1$. Ставаме $g(x)=f(x)+1$ и со замена во (*) добиваме

$$g(1+xy)-g(x+y)=(g(x)-1)(g(y)-1),\ g(-1)\neq 1. \qquad (1)$$

Нека $g(-1)-1=C\neq 0$. Во (1) ставаме $y=-1$ и добиваме

$$g(1-x)-g(x-1)=C(g(x)-1). \qquad (2)$$

За $x=1$ од (2) добиваме $C(g(1)-1)=0$, па затоа $g(1)=1$. Сега заменуваме $x=0$ и $x=2$ и соодветно добиваме $g(0)=0$ и $g(2)=2$.

Ќе докажеме дека за секој реален број x точни се равенствата

$$g(x)+g(2-x)=2, \qquad (3)$$

$$g(x+2)-g(x)=2. \qquad (4)$$

Ако во (2) го замениме x со $1-x$, а потоа во добиеното равенство го замениме x со $-x$ ги добиваме равенствата $g(x)-g(-x)=C(g(1-x)-1)$ и $g(-x)-g(x)=C(g(1+x)-1)$. Последните две равенства ги собираме и добиваме $C(g(1-x)+g(1+x))=0$, од каде бидејќи $C\neq 0$ следува равенството (3).

Нека u и v се такви што $u+v=1$. Го применуваме (1) за паровите (u,v) и $(2-u,2-v)$ и добиваме

$$g(1+uv)-g(1)=(g(u)-1)(g(v)-1)$$
$$g(3+uv)-g(3)=g(2-u)-1)(g(2-v)-1).$$

Од (3) следува дека последните две равенства имаат еднакви десни страни, па затоа заради $u+v=1$ добиваме

$$g(uv+3)-g(uv+1)=g(3)-g(1).$$

Квадратниот трином $t_2-t+(x-1)$ има реални корени за $x\leq\frac{5}{4}$, што значи дека секој реален број $x\leq\frac{5}{4}$ може да се запише во видот $x=uv+1$ за некои u и v чиј збир е еднаков на 1. Според тоа, $g(x+2)-g(x)=g(3)-g(1)$ за секој $x\leq\frac{5}{4}$. Во случајов за $x=0$ добиваме $g(3)=3$, со што е докажано равенството (4) во случај кога $x\leq\frac{5}{4}$. Ако $x>\frac{5}{4}$, тогаш $-x\leq\frac{5}{4}$ и затоа $g(2-x)-g(-x)=2$. Од друга страна од (3) следува $g(x)=2-g(2-x)$ и

$g(x+2)=2-g(-x)$, па затоа

$$g(x+2)-g(x)=g(2-x)-g(-x)=2,$$

со што е докажано равенството (4).

Сега, ако во (3) ставиме $-x$ наместо x и добиеното равенство го комбинираме со (4) добиваме $g(x)=-g(-x)$ за секој реален број x. Имајќи го предвид ова равенство, ако го примениме (1) на паровите $(-x,y)$ и $(x-y)$ добиваме

$$g(1-xy)-g(-x+y)=(g(x)+1)(1-g(y)),$$
$$g(1-xy)-g(x-y)=(1-g(x))(g(y+1).$$

Ги собираме последните две равенства и добиваме $g(1-xy)=1-g(x)g(y)$. Сега заради (3) имаме $g(1+xy)=1+g(x)g(y)$, па затоа равенството (1) го добива видот $g(x+y)=g(x)+g(y)$, т.е. функцијата g е адитивна. Според тоа, $g(1+xy)=g(1)+g(xy)=1+g(xy)$ и тоа заедно со погоре добиеното равенство $g(1+xy)=1+g(x)g(y)$ дава $g(xy)=g(x)g(y)$, т.е. функцијата g е мултипликативна. Во случајов $g(x^2)=g(x)^2\geq 0$ за секој x, па затоа $g(x)\geq 0$ за секој $x\geq 0$. Бидејќи g е адитивна и ограничена од долу за $x\in[0,+\infty)$, таа е линеарна, т.е. $g(x)=g(1)x=x$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Конечно, $f(x)=g(x)-1=x-1$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

34. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f(x+g(y))=xf(y)-yf(x)+g(x). \qquad (1)$$

Решение. Ако $f(0)=0$, тогаш за $y=0$ добиваме $f(x+g(0))=g(x)$, па затоа за $x=-g(0)$ имаме $g(-g(0))=f(0)=0$. Нека $f(0)=b\neq 0$. Од (1) за $x=0$ добиваме $f(g(y))=a-by$, каде $g(0)=a$. Бидејќи $b\neq 0$ функцијата f е сурјекција. Ако во (1) го заениме x со $g(x)$ добиваме

$$f(g(x)+g(y))=g(x)f(y)-yf(g(x))+g(g(x)). \qquad (2)$$

Во последната равенка ги заменуваме местата на x и y и добиваме

$$f(g(y)+g(x))=g(y)f(x)-xf(g(y))+g(g(y)). \qquad (3)$$

Од (2) и (3) следува

$$g(x)f(y)-ay+g(g(x))=g(y)f(x)-ax+g(g(y)). \qquad (4)$$

Понатаму, бидејќи f е сурјекција следува дека постои c таков што $f(c)=0$, па ако во (4) замениме $y=c$ добиваме

$$g(g(x))=kf(x)-ax+d,$$

каде $k=g(c)$ и $d=g(g(c))+ac$. Значи, $g(x)f(y)+kf(x)=g(y)f(x)+kf(y)$, и ако во последното равенство землеме $y=0$ добиваме

$$g(x)=\tfrac{a-k}{b}f(x)+k\,.$$

Но, $a-k\neq 0$ и f е сурјекција, па затоа функцијата g е сурјекција, што значи дека постои α таков што $g(\alpha)=0$.

Докажавме дека функцијата g има нула. Нека α е нула на g. Во (1) ставаме $y=\alpha$ и добиваме $f(x)=xf(\alpha)-\alpha f(x)+g(x)$, т.е. $g(x)=(\alpha+1)f(x)-f(\alpha)x$. Сега, со замена во (1) добиваме

$$f(x+(\alpha+1)f(y)-f(\alpha)y)=(\alpha+1-y)f(x)-(f(\alpha)-f(y))x\,.$$

Ако во последната равенка земеме $y=\alpha+1$, добиваме

$$f(x+n)=mx\,,$$

каде $n=(\alpha+1)(f(\alpha+1)-f(\alpha))$ и $m=f(\alpha)-f(\alpha+1)$. Значи, $f(x)=ax+b$ и со замена за g добиваме $g(x)=cx+d$. Сега лесно се докажува дека општото решение на (1) е од видот

$$f(x)=\tfrac{p}{p+1}x-\tfrac{p^2}{p+1}\,,\ g(x)=px-p^2\,,$$

каде $p\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

35. Определи ги сите позитивни реални броеви k такви што постои функција $f:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ за која се исполенти следниве услови:

1) $f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))$, за секои $x,y,z\in[0,1]$,

2) $f(x,y)=f(y,x)$, за секои $x,y\in[0,1]$,

3) $f(x,1)=x$, за секој $x\in[0,1]$,

4) $f(zx,zy)=z^k f(x,y)$, за секои $x,y,z\in[0,1]$.

Решение. Ако во 4) ставиме $y=1$, тогаш од 3) следува дека $f(zx,z)=z^k x$. Нека $zx=y$. Тогаш $f(y,z)=yz^{k-1}$, за $y\leq z$. Обратно, ако $y\leq z$, тогаш за $y=zx,\ x\in[0,1]$, добиваме $f(y,z)=f(zx,z)=z^k x=yz^{k-1}$.

Сега нека $x\leq y\leq z$, $x,y,z\in(0,1)$. Од 1) следува $f(xy^{k-1},z)=f(x,yz^{k-1})$. Сега, од претходните разгледувања следува

$$\{xy^{k-1}z^{k-1},x^{k-1}y^{(k-1)^2}z\}\cap\{xy^{k-1}z^{(k-1)^2},x^{k-1}yz^{k-1}\}\neq\varnothing\,.$$

Понатаму, лесно се добива дека или $k=1$ и $f(x,y)=\min\{x,y\}$ или $k=2$ и $f(x,y)=xy$. Со непосредна проверка се докажува дека овие функции се решенија за соодветните вредности на k.

V ПОЛИНОМИ

V.1. СВОЈСТВА НА ПОЛИНОМИТЕ. ДЕЛИВОСТ

1. Определи ги вредностите на реалните параметри a,b,c за кои остатокот од делењето на полиномот

$$f(x)=x^5+ax^4+2bx^2+cx+1$$

со полиномот $g(x)=x^3-x^2-2x+2$ е еднаков на ax^2+bx+c.

Решение. Од $g(x)=(x-1)(x^2-2)$ следува дека нули на полиномот се 1 и $\pm\sqrt{2}$. Нека

$$x^5+ax^4+2bx^2+cx+1=(x-1)(x^2-2)q(x)+ax^2+bx+c\,.$$

Ако во горното равенство ставиме $x=1$ добиваме $a+2b+c+2=a+b+c$, па затоа $b=-2$. Сега последователно ставаме $x=\sqrt{2}$ и $x=-\sqrt{2}$ и го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 2a+c(\sqrt{2}-1)=7-6\sqrt{2} \\ 2a-c(\sqrt{2}+1)=7+6\sqrt{2} \end{cases}$$

од каде наоѓаме $a=\frac{1}{2}, c=-6$.

2. Определи ги сите вредности на реалните параметри a и b, за кои остатокот при делењето на полиномот x^4-3ax^3+ax+b со полиномот x^2-1 е полиномот $(a^2+1)x+3b^2$.

Решение. Од условот на задачата следува дека за секој x треба да биде исполнето равенството

$$x^4-3ax^3+ax+b=q(x)(x^2-1)+(a^2+1)x+3b^2\,,$$

каде $q(x)$ е количникот од делењето. Ако во последното равенство ставиме $x=1$ и $x=-1$ го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} a^2+3b^2+2a-b=0 \\ a^2-3b^2+2a+b+2=0, \end{cases}$$

чии решенија се $a=-1, b=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$.

3. Определи ги сите вредности на реалните параметри a и b за кои полиномот

$$f(x)=x^4+x^3-(a^2-1)x^2+2abx+a^2-a-6$$

е делив со полиномот $g(x)=x^2-a^2$.

Решение. Лесно се гледа дека $a=0$ не е решение на задачата. Бидејќи корените на делителот се a и $-a$, за $a\neq 0$ условот на заадачата е еквивалентен со условот $f(a)=f(-a)=0$. Оттука го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} a^4+a^3-(a^2-1)a^2+2a^2b+a^2-a-6=0 \\ a^4-a^3-(a^2-1)a^2-2a^2b+a^2-a-6=0 \end{cases}$$

Ако ги собереме равенките на системот ја добиваме квадратната равенка $2a^2-a-6=0$, чии решенија се $a_1=2$ и $a_2=-\frac{3}{2}$. Сега од првата равенка на горниот систем наоѓаме $b_1=-1$ и $b_2=\frac{3}{4}$. Значи, бараните вредности се $(a,b)=(2,-1)$ и $(a,b)=(-\frac{3}{2},\frac{3}{4})$, а соодветните разложувања се

$$\begin{aligned} x^4+x^3-3x^2-4x-4&=(x^2-4)(x^2+x+1),\\ x^4+x^3-\tfrac{5}{4}x^2-\tfrac{9}{4}x-\tfrac{9}{4}&=(x^2-\tfrac{9}{4})(x^2+x+1). \end{aligned}$$

4. Нека n е природен број. Определи ги сите вредности на реалните параметри a и b за кои остатокот од делењето на полиномот $ax^n+bx+2017$ со полиномот x^2-1 е полиномот x.

Решение. Нека $ax^n+bx+2017=(x^2-1)p(x)+x$, каде $p(x)$ е количникот од делењето. Тогаш за $x=1$ добиваме $a+b+2017=1$, а за $x=-1$ добиваме $(-1)^n a-b+2017=-1$. Според тоа, за a ја добиваме равенката

$$a(1+(-1)^n)+4034=0,$$

која нема решение ако n е непарен, а ако n е парен, тогаш $a=-2017$. Тогаш $b=-2016-a=1$. Притоа важи

$$-2017x^n+x+2017=-2017(x^2-1)(x^{n-2}+x^{n-4}+...+1)+x.$$

5. Определи ги сите вредности на реалните параметри a и b за кои полиномот

$$f(x)=x^3-bx^2+(3-a^2)x+3b$$

е таков што $f(a-1)=f(a+1)$ и при делењето со полиномот $x-b$ се добива остаток $-2a$.

Решение. Условот $f(a-1)=f(a+1)$ е еквивалентен на условот $2ab=a^2+4$, а од $f(b)=2a$ добиваме $a+3b=a^2b$. Лесно се гледа дека $a=0$ и $a^2=3$ не водат до решение, па затоа од добиените равенства наоѓаме $\frac{a^2+4}{2a}=b=\frac{a}{a^2-3}$.

Добиваме биквадратна равенка $a^4 - a^2 - 12 = 0$, од каде наоѓаме $a^2 = 4$ и $a^2 = -3$. Јасно, $a^2 = 4$, од каде добиваме $a = \pm 2$ и соодветно $b = \pm 2$. Конечно, $(a,b) = (2,2)$ или $(a,b) = (-2,-2)$ се решенија на задачата.

6. Определи ги сите природни броеви n за кои постојат ненулти реални броеви a,b,c,d такви што по запишување во нормален вид на полиномот

$$(ax+b)^{1000} - (cx+d)^{1000}$$

се добиваат точно n ненулти коефициенти.

Решение. *Одговор*: $n = 1001, 1000, 500$.

Јасно, постојат полиноми од дадениот вид кои имаат 1001 и 1000 ненулти коефициенти. На пример, тоа се полиномите

$$(2x+2)^{1000} - (x+1)^{1000} \text{ и } (2x+1)^{1000} - (x+1)^{1000}.$$

Нека претпоставиме дека нашиот полином има два нулти коефициенти, пред x^i и x^j ($i > j$). Тогаш $a^i b^{1000-i} = c^i d^{1000-i}$ и $a^j b^{1000-j} = c^j d^{1000-j}$. Ако ги поделиме последните две равенства добиваме $(\frac{ad}{bc})^i = (\frac{d}{b})^{1000} = (\frac{ad}{bc})^i$. Оттука следува $|\frac{ad}{bc}| = 1, |\frac{d}{b}| = 1$ и $|\frac{a}{c}| = 1$. Јасно, при смената на $ax+b$ со $(-a)x + (-b)$ полиномот не се менува, па затоа можеме да сметаме дека $\frac{a}{c} = 1$. Сега, ако $\frac{b}{d} = 1$, тогаш полиномот е нулти, а ако $\frac{b}{d} = -1$, тогаш полиномот е

$$(ax+b)^{1000} - (ax-b)^{1000}$$

и во него еднакви на нула се само коефициентите пред парните степени на x, т.е. се добиваат 500 ненулти коефициенти.

7. Ако $P(x)^2$ е полином по x^2, тогаш или $P(x)$ или $\frac{P(x)}{x}$ е полином по x^2. Докажи!

Решение. Нека $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0$, каде $a_n \neq 0$. Коефициентот пред x^{2n-1} во $P(x)^2$ е $2a_n a_{n-1}$, па затоа $a_{n-1} = 0$. Сега коефициентот пред x^{2n-3} во $P(x)^2$ е $2a_n a_{n-3}$ па затоа $a_{n-3} = 0$ итн. Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека $a_{n-2k-1} = 0$ за $k = 0,1,2,...$, т.е.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-4}x^{n-4} + ...$$

Од последното равеснтво следува дека за n парен $P(x)$ е полином по x^2, а за n непарен $\frac{P(x)}{x}$ е полином по x^2.

8. Полиномот $P(x), \deg P = n$ со реални коефициенти е таков што $|P(x)| \le 1$, за секој $x \in [0,1]$. Докажи дека $P(-\frac{1}{n}) \le 2^{n+1} - 1$.

Решение. Со разгледување на полиномот $Q(x) = P(nx)$ тврдењето се сведува на следното: ако Q е полином од $n-$ти степен и $|Q(x)| \le 1$ за $0 \le x \le n$, тогаш $Q(-1) \le 2^{n+1} - 1$. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n.

Базата на индукцијата $n = 0$ е тривијална. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n-1$ и нека $\deg Q = n$ и $|Q(x)| \le 1$ за $0 \le x \le n$. Тогаш полиномот $R(x) = \frac{1}{2}(Q(x) - Q(x+1))$ има степен $n-1$ и го задоволува условот $|R(x)| \le 1$ за $0 \le x \le n-1$, па од индуктивната претпоставка следува

$$\tfrac{1}{2}(Q(-1) - 1) \le R(-1) \le 2^n - 1, \text{ т.е. } Q(-1) \le 2^{n+1} - 1.$$

9. Дадени се непропорционални полиноми $p(x)$ и $q(x)$, секој од кој има по $m \ge 2$ ненулти коефициенти. Определи го минималниот број ненулти коефициенти на полиномот $f(u,v) = p(u)q(v) - p(v)q(u)$.

Решение. Полиномите

$$p(x) = x^{m-1} + x^{m-2} + ... + x + 1 \text{ и } q(x) = x^{m-1} + x^{m-2} + ... + x + a,\ a \ne 1,$$

покажуваат дека бараниот минимален број не е поголем од $2m-2$, бидејќи

$$f(u,v) = (a-1)(u^{m-1} + u^{m-2} + ... + u) + (1-a)(v^{m-1} + v^{m-2} + ... + v).$$

Со индукција по m ќе докажеме дека ненулти коефициенти се најмалку $2m-2$.

Ако во $p(x)$ или $q(x)$ учествува степен кој не е во другиот полином, тогаш во $f(u,v)$ има најмалку $2m$ ненулти коефициенти. Затоа, во натамошните разгледувања ќе сметаме дека во $p(x)$ и $q(x)$ учествуваат едни исти степени. Исто така, да забележиме дека множењето со ненулта константа на некој од полиномите $p(x)$ и $q(x)$ не го менува бројот на ненултите коефициенти на $f(u,v)$.

За $m = 2$ имаме $p(x) = ax^n + bx^k$ и $q(x) = cx^n + dx^k$, каде $ad - bc \ne 0$. Тогаш $f(u,v) = (ad - bc)u^n v^k + (bc - ad)u^k v^n$ има точно два ненулти коефициенти. За $n = 3$ нека $p(x) = x^k + ax^n + bx^l$ и $q(x) = x^k + cx^n + dx^l$, каде $ad - bc \ne 0$. Тогаш

$$f(u,v) = (ad - bc)u^l v^k + (bc - ad)u^l v^n + (c-a)u^k v^n + \\ + (a-c)u^n v^k + (d-b)u^k v^l + (b-d)u^l v^k.$$

Првите два коефициенти се ненулти, а како равенствата $a = c$ и $b = d$ не може да се истовреено исполнети, барем два од последните четири коефициенти се ненулти.

Нека $m \geq 4$ и $p(x) = p_1(x) + ax^n + bx^k$ и $q(x) = q_1(x) + cx^n + dx^k$, каде $ad - bc \neq 0$, а полиномите $p_1(x)$ и $q_1(x)$ имаат по $m - 2 \geq 2$ ненулти коефициенти. Тогаш

$$f(u,v) = f_1(u,v) + f_2(u,v) + f_3(u,v),$$

каде

$$\begin{aligned} f_1(u,v) &= p_1(u)q_1(v) - p_1(v)q_1(u), \\ f_2(u,v) &= (au^n + bu^k)q_1(v) + (cv^n + dv^k)p_1(u) - \\ &\quad -(av^n + bv^k)q_1(u) - (cu^n + du^k)p_1(c), \\ f_3(u,v) &= (ad - bc)u^n v^k + (bc - ad)u^k v^n, \end{aligned}$$

при што во различните полиноми нема слични мономи. Ако $p_1(x)$ и $q_1(x)$ се непропорционални, тогаш од индуктивната претпоставка следува дека $f_1(u,v)$ има најмалку $2(m-2) - 2 = 2m - 6$ ненулти коефициенти. Освен тоа, $f_2(u,v)$ има барем два ненулти коефциенти и $f_3(u,v)$ има два ненулти коефициенти.

Ако $p_1(x) = \alpha q_1(x)$, $\alpha \neq 0$ добиваме

$$f_2(u,v) = q_1(v)[(a - c\alpha)u^n + (b - d\alpha)u^k] + q_1(u)[(c\alpha - a)v^n + (d\alpha - b)v^k)].$$

Бидејќи равенствата $a - c\alpha = 0$ и $b - d\alpha = 0$ не може да се истовремено исполнети, полиномот $f_2(u,v)$ има најмалку $2(m-2)$ ненулти коефициенти (два или повеќе од тие на $q_1(x)$), па како $f_3(u,v)$ има два ненулти коефициенти следува тврдењето.

10. Ако P и Q се монични полиноми такви што $P(P(x)) = Q(Q(x))$, докажи дека $P \equiv Q$.

Решение. Нека претпоставиме дека $R = P - Q \neq 0$ и дека $0 < k \leq n-1$ е степен на $R(x)$. Тогаш

$$P(P(x)) - Q(Q(x)) = [Q(P(x)) - Q(Q(x))] + R(P(x)).$$

Ако $Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, тогаш

$$Q(P(x)) - Q(Q(x)) = [P(x)^n - Q(x)^n] + a_{n-1}[P(x)^{n-1} - Q(x)^{n-1}] + \ldots + a_1[P(x) - Q(x)],$$

при што сите собирци освен првиот имаат степен најмногу $n^2 - n$, додека првиот собирок е еднаков на $R(x)(P(x)^{n-1} + P(x)^{n-2}Q(x) + \ldots + Q(x)^{n-1})$ и затоа има степен $n^2 - n + k$ со водечки коефициент n. Според тоа, степенот на $Q(P(x)) - Q(Q(x))$ е $n^2 - n + k$. Степенот на полиномот $R(P(x))$ е еднаков на $kn < n^2 - n + k$, од каде заклучуваме дека разликата $P(P(x)) - Q(Q(x))$ има степен $n^2 - n + k$, што е противречност.

Останува случајот кога $R \equiv c$. Тогаш од условот $P(P(x)) = Q(Q(x))$ следува $Q(Q(x) + c) = Q(Q(x)) - c$, па затоа равенството $Q(y + c) = Q(y) - c$ важи за бесконечно многу y, што значи $Q(y + c) \equiv Q(y) - c$. Последното равенство е можно само за $c = 0$, во што можеме да се убедиме ако ги споредиме коефициентите.

11. Докажи дека полиномот $P(x, y) = x^4 y^2 + x^2 y^4 - 3x^2 y^2 + 1$, иако е ненегативен за секои $x, y \in \mathbb{R}$, не може да се претстави како збир на квадрати на неколку полиноми.

Решение. Нека претпоставиме дека постојат полиноми $Q_i, i = 1, 2, ..., n$ такви што $P(x, y) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(x, y)^2$. Тогаш $\sum_{i=1}^{n} Q_i(x, 0)^2 = 1$, што значи дека $Q_i(x, 0) = c_i$ за $i = 1, 2, ..., n$. Последното значи дека полиномото $Q_i(x, y) - c_i$ е делив со y. Аналогно се добива дека полиномот $Q_i(x, y) - c_i$ е делив со x, па заклучуваме дека $Q_i(x, y) = c_i + xyR_i(x, y)$ за некој полином R_i. Но, $\deg Q_i \le 3$, па затоа полиномите R_i мора да се најмногу линеарни. Сега имаме

$$x^2 y^2 (x^2 + y^2 - 3) + 1 = \sum_{i=1}^{n} (c_i + xyR_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (c_i^2 + 2c_i xyR_i + x^2 y^2 R_i^2)$$

т.е.

$$x^2 y^2 (x^2 + y^2 - 3 - \sum_{i=1}^{n} R_i^2) = \sum_{i=1}^{n} (c_i^2 + 2c_i xyR_i) - 1.$$

Меѓутоа, на левата страна имаме полином кој е делив со $x^2 y^2$ кој има степен 4, а на десната страна имаме полином со степен помал или еднаков на 3. Последното е можно само ако двете страни се нулти полином, што не е можно бидејќи полиномот на десната страна прима негативна вредност, на пример, за $x = y = 1$.

12. Дадени се неконстантни полиноми

$$P(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0 \text{ и } Q(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0.$$

Докажи дека збирот на квадратите на коефициентите на полиномот $P(x)Q(x)$ не е помал од $a_0^2 + b_0^2$.

Решение. Да означиме $a_m = b_n = 1$. Нека

$$P(x)Q(x) = c_{m+n}x^{m+n} + ... + c_1 x + c_0 \text{ и } P(x)Q(\tfrac{q}{x}) = d_m x^m + ... + d_{-n}x^{-n}.$$

Ќе докажеме дека $\sum\limits_i c_i^2 = \sum\limits_j d_j^2$, од каде одма ќе следува бараното неравенство, бидејќи $d_m = b_0$ и $d_{-n} = a_0$.

Бидејќи $c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j$, добиваме $c_k^2 = \sum\limits_{i+j=r+s=k} a_i a_r b_j b_s$, од каде следува

$$\sum_k c_k^2 = \sum_{i+j=r+s} a_i a_r b_j b_s \ .$$

Од друга страна $d_k = \sum\limits_{t-u=k} a_t b_u$, па затоа важи

$$d_k^2 = \sum_{t-u=v-w=k} a_t a_v b_u b_w \ ,$$

односно

$$\sum_k d_k^2 = \sum_{t-u=v-w} a_t a_v b_u b_w = \sum_{t+w=v+u} a_t a_v b_u b_w = \sum_k c_k^2 \ .$$

13. Докажи дека постои точно еден полином $P(x)$ со реални коефициенти за кој полиномот

$$(x+y)^{1000} - P(x) - P(y)$$

е делив со полиномот $xy - x - y$.

Решение. Бараме полиноми $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} p_i x^i$ и $Q(x,y) = \sum\limits_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ такви што

$$A(x,y) = (xy - x - y)Q(x,y) = (x+y)^{1000} - P(x) - P(y) \ . \qquad (1)$$

Да забележиме дека $\deg Q \le 998$. Навистина, ако $a_{i,j} x^i y^j$ е мономот со најголем степен во $Q(x,y)$, тогаш коефициентот пред $x^{i+1} y^{j+1}$ во $A(x,y)$ е еднаков на $a_{i,j} \neq 0$, па затоа $i + j + 2 \le 1000$. Според тоа, $\deg A \le 1000$, па затоа $\deg P \le 1000$. Со изедначување на коефициентите пред $x^i y^j$ во (1) ги добиваме равенствата

$a_{i-1,j-1} = \binom{1000}{i}$ за $i + j = 998 \ (i, j > 0)$,

$a_{i-1,j-1} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}$ за $i + j < 998$, $(i, j > 0)$ и $a_{i-1,0} = a_{0,j-1} = p_i$,

од каде со едноставна индукција наоѓаме $a_{i-1,j-1} = \binom{2000-i-j}{1000-i}$ за $i + j \le 1000$, $(i, j > 0)$ и $p_i = \binom{1999-i}{999}$, т.е.

$$P(x) = x^{1000} + \binom{1000}{999} x^{999} + \binom{1001}{999} x^{998} + \ldots + \binom{1998}{999} x \ .$$

Од конструкцијата следува дека овој полином ги задоволува условите на задачата.

V.2. НУЛИ НА ПОЛИНОМИ. ИРЕДУЦИБИЛНОСТ

1. Даден е квадратен трином $P(x)$ кој определува низа $\{P(n)\}_{n=1}^{\infty}$. Определи го максималниот број елементи на низата секој од кои е еднаков на збирот на неговите два претходника.

   Решение. *Одговор*: 2.

   Равенството $P(n)+P(n+1)=P(n+2)$ значи дека n е корен на квадратната равенка $P(x)+P(x+1)-P(x+2)=0$, а оваа равенка може да има најмногу два различни корени.

   Од друга страна, лесно се гледа дека полиномот $P(x)=x^2-x+4$ го има саканото својство за $n=1$ и $n=2$. Навистина, имаме $P(1)=4$, $P(2)=6$, $P(3)=10$ и $P(4)=16$.

2. Реалните броеви a и b се такви што квадратните триноми x^2+ax+b и x^2+bx+a имаат по два реални и различни корени, а производот на овие два триноми има точно три реални корени. Определи ги можните вредности на збирот на овие три корени.

   Решение. Од условот на задачата следува дека $a \neq b$ и дека двата триноми имаат точно еден заеднички корен x_0. Значи,

   $$0=(x_0^2+ax_0+b)-(x_0^2+bx_0+a)=(a-b)(x_0-1),$$

   па затоа $x_0=1$. Оттука следува дека $1+a+b=0$. Ако x_1 е вториот корен на x^2+ax+b, а x_2 е вториот корен на x^2+bx+a, од Виетовите формули следува $x_1+x_0=-a$ и $x_2+x_0=-b$. Според тоа,

   $$x_0+x_1+x_2=1+(-a-1)+(-1-b)=-1-a-b=0.$$

3. Нека $f(x)$ е полином од трет степен со реални коефициенти. За тројката (a,b,c) од различни реални броеви ќе велиме дека е циклична ако $f(a)=b$, $f(b)=c$ и $f(c)=a$. Се покажало дека постојат осум циклични тројки $(a_i,b_i,c_i), i=1,2,...,8$ во кои учествуваат 24 различни реални броеви. Докажи дека меѓу осумте збирови $a_i+b_i+c_i$ има најмалку пет различни.

   Решение. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. постојат четири циклуси (a_i,b_i,c_i) кои имаат еднаква сума s. Тогаш

   $$\begin{aligned} s=a_i+b_i+c_i &= a_i+f(a_i)+f(f(a_i)) \\ &= b_i+f(b_i)+f(f(b_i)) \\ &= c_i+f(c_i)+f(f(c_i)). \end{aligned}$$

Според тоа, сите 12 броеви од нашите четири циклуси се корени на полиномот

$$g(x) = x + f(x) + f(f(x)) - s .$$

Но, овој полином е од четврт степен, а овие 12 броеви се по парови различни, што е противречност.

4. За кои n полиномот $x^n + x - 1$ е делив со полиномот

а) $x^2 - x + 1$, б) $x^3 - x + 1$.

Решение. Ќе ја користиме теоремата на Безу искажана во следнва форма: *Полиномот P е делив со полиномот Q ако и само ако секоја нула на полиномот Q е нула на полиномот P.*

а) Нулите на полиномот $x^2 - x + 1$ се $\varepsilon_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Полиномот $x^n + x - 1$ е делив со полиномот $x^2 - x + 1$ ако и само ако $\varepsilon_{1,2}$ се нули на полиномот $x^n + x - 1$, односно $\varepsilon_j^n = 1 - \varepsilon_j = \varepsilon_j^{-1}$ за $j = 1, 2$, т.е. $\varepsilon_j^{n+1} = 1$ за $j = 1, 2$. Бидејќи $\varepsilon_j^k = 1$ ако и само ако $6 \mid k$, одговор е $n \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 6)$.

б) Ако $f(x) = x^3 - x + 1$ е делител на $x^n + x - 1$, тогаш е делител и на $x^n + x^3$. Тоа значи дека за секоја нула a на полиномот $f(x)$ важи $a^{n-3} = -1$, а отука следува дека a треба да има модул 1. Но, $f(-2) < 0 < f(1)$, што значи дека $f(x)$ има нула чиј модул не е 1. Последното значи дека не постои n за кој $x^n + x - 1$ е делив со $x^3 - x + 1$.

5. Определи ги сите монични полиноми $P(x)$ такви што полиномот $P(x)^2 - 1$ е делив со полиномот $P(x+1)$.

Решение. Ако P е константен полином, т.е. $P(x) = c$, тогаш $c \mid c^2 - 1$, а тоа е можно само ако $c = 1$. Значи, едно решение е полиномот $P(x) = 1$.

Ако P е неконстантен полином, да го запишеме во облик

$$P(x) = (x - c)(x - x_2)...(x - x_n),$$

каде е онаа нула на полиномот P која има најмал реален дел. Според условот $x + 1 - c$ е делител на $P(x)^2 - 1$, па затоа $P(c-1) = \pm 1$. Од друга страна, бидејќи $1 = |P(c-1)| = \prod_{i=2}^{n} |c - 1 - x_i|$, $|c - 1 - x_i| \geq 1$ според изборот на нулата c, мора да важи $|c - 1 - x_i| = 1$ за сите i, што е можно само ако $x_i = c$ за сите i. Според тоа, $P(x) = (x - c)^n$. Но, полиномот $P(x+c)^2 - 1 = x^{2n} - 1$ не е делив со полиномот $P(x+c+1)=(x+1)^n$, ако $n\geq 2$, па затоа единствена можност е $n=1$. Јасно, полиномот $P(x)=x-c$ е решение на задачата.

6. За моничниот полином $f(x)$, $\deg f=4$ важи $f(1)=10,\ f(2)=20$ и $f(3)=30$. Пресметај ја вредноста на изразот $f(12)+f(-8)$.

Решение. Од условот на задачата следува дека полиномот $f(x)-10x$ се анулира во точките $x=1,2,3$, па затоа тој е делив со $(x-1)(x-2)(x-3)$. Понатаму, полиномот $f(x)$ е моничен, па затоа и полиномот $f(x)-10x$ е моничен, т.е. важи $f(x)-10x=(x-1)(x-2)(x-3)(x-k)$ за некој реален број k. Сега,

$$f(12)+f(-8)=11\cdot 10\cdot 9\cdot(12-k)+120+(-9)\cdot(-10)\cdot(-11)(-8-k)-80=19840.$$

7. Докажи дека полиномот

$$P(x)=x^n+2nx^{n-1}+2n^2x^{n-2}+...$$

не може да има само реални нули.

Решение. Нека претпоставиме дека сите нули $x_i, i=1,2,...,n$ на полиномот $P(x)$ се реални. Од Виетовите формули следува дека

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=-2n \text{ и } \sum_{i<j}x_ix_j=2n^2.$$

Меѓутоа, од неравенството меѓу средините следува

$$2n^2=\sum_{i<j}x_ix_j=\tfrac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\leq\tfrac{n-1}{2n}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2=2n(n-1),$$

што е противречност.

8. Докажи дека полиномот $f(x)=x^6-2x^5+x^4-2x^3+x^2-2x+1$ има точно четири нули со модул 1.

Решение. Воведуваме замена $y=x+\frac{1}{x}$. Тогаш

$$\frac{f(x)}{x^3}=g(y)=y^3-2y^2-2y+2.$$

Бројот x има модул 1 ако и само ако $x=\cos t+i\sin t$ и тогаш $y=2\cos t$. Обратно, ако $y=2\cos t$, тогаш $x=\cos t+i\sin t$. Со други зборови, $|x|=1$ ако и само ако y е реален и $-2\leq y\leq 2$, при што на секој x му соодветствуваат точно две вредности на x ако $y\neq\pm 2$. Според тоа, останува да докажеме дека $g(y)$ има точно две реални нули во интервалот $(-1,2)$. За тоа е доволно да забележиме дека $g(-2)=-10, g(0)=2, g(2)=-2$, од што следува дека y

има по една нула на секој од интервалите $(-2,0), (0,2)$ и $(2,\infty)$.

9. За еден полином $P(x), \deg P = 4$ е познато дека равенката $P(x) = x$ има четири реални и различни корени, но секоја равенка од видот $P(x) = c$, каде c е реална константа има најмногу два реални и различни корени. Докажи, дека равенката $P(x) = -x$ има најмногу два реални и различни корени.

Решение. Бидејќи $P(x) = x$ има четири реани и различни корени, $P'(x) = 1$ има три реални и различни корени. Тоа значи дека $P'(x)$ има три интервали на монотоност и во секој од нив има по еден корен на $P'(x) = 1$.

Нека претпоставиме дека $P(x) = -x$ има барем три реални и различни корени (ако се точно три, тогаш еден ќе биде двоен корен). Тогаш $P'(x) = -1$ исто така има 3 реални и различни корени, по еден во секој од претходно споменатите интервали. Сега, од теоремата на Рол следува дека $P'(x)$ има три различни корени $a < b < c$, повторно по еден во секој од нашите интервали. На пример, ако $P(x)$ има позитвен водечки коефициент, тогаш P' во точката b го менува знакот од позитивен во негативен. Тоа значи дека $P(x) \le P(b)$ во околина на b . Но, $P(x)$ тежи кон бесконечност и во двете насоки на реалната оска, од каде ќе следува дека равенката $P(x) = P(b)$ има најмалку три реални и различни корени, што е противречност.

10. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти. Докажи, ако за некој цел број x важи $\underbrace{P(P(...P}_{n}(x)...)) = x$, $n \ge 2$, тогаш $P(P(x)) = x$.

Решение. Да ја разгледаме низата определена со $x_0 = x$ и $x_{k+1} = P(x_k)$ за $k \ge 0$. Нека $x_k = x_0$. Знаеме дека

$$d_i = x_{i+1} - x_i \mid P(x_{i+1}) - P(x_i) = x_{i+2} - x_{i+1} = d_{i+1},$$

за секој i , па како $d_k = d_0$, мора да важи $|d_0| = |d_1| = ... = |d_k|$. Нека претпоставиме дека $d_1 = d_0 = d \ne 0$. Тогаш $d_2 = d$ (во спротивно ќе имаме $x_3 = x_1$ и во низата повеќе нема да се појави x_0). Слично $d_3 = d$ итн., па затоа $x_k = x_0 + kd \ne x_0$ за секој k , што е противречност. Според тоа, $d_1 = -d_0$, па затоа $x_2 = x_0$.

11. Ако полиномот $Q(x) = ax^2 + (c-b)x + (e-d)$, каде $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}$ има реални нули поголеми од 1, докажи дека полиномот $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ има барем еден реален корен.

Решение. Имаме

$$P(x)=ax^4+(c-b)x^2+(e-d)+b(x^3+x^2)+d(x+1)$$

$$P(-x)=ax^4+(c-b)x^2+(e-d)-b(x^3-x^2)-d(x-1)\ .$$

Ако r е нула на полиномот Q, тогаш

$$P(\sqrt{r})=(br+d)(\sqrt{r}+1) \text{ и } P(-\sqrt{r})=-(br+d)(\sqrt{r}-1)\ .$$

Но, $\sqrt{r}>1$, па затоа еден од броевите $P(\pm\sqrt{r})$ е позитивен, а другиот е негативен или пак ио двата се еднакви на нула. Според тоа, на интервалот $[-\sqrt{r},\sqrt{r}]$ полиномот $P(x)$ мора да има барем една нула.

12. Моничен полином P со реални коефициенти е таков што $|P(i)|<1$. Докажи дека постои корен $z=a+bi$ таков што

$$(a^2+b^2+1)^2<4b^2+1. \qquad (1)$$

Решение. Нека

$$P(x)=(x-x_1)...(x-x_m)(x^2-p_1x+q_1)...(x^2-p_nx+q_n),$$

при што $x^2-p_kx+q_k$ нема реални нули. Имаме

$$1\ >|P(i)|=\prod_{i=1}^{m}|i-x_j|\prod_{k=1}^{n}|-1-ip_k+q_k|,$$

па како $|i-x_j|=1+x_j^2>1$ за секој j, мора за некој k да важи

$$|-1-ip_k+q_k|<1, \text{ т.е. } p_k^2+(q_k-1)^2<1.$$

Нека $a\pm ib$ се корените на полиномот $x^2-p_kx+q_k$, кои исто така се корени на полиномот $P(x)$. Тогаш $p_k=2a, q_k=a^2+b^2$, па затоа точно е неравенството $4a^2+(a^2+b^2-1)^2<1$, кое е еквивалентно со неравенството (1).

13. Дали постојат ненулти броеви a,b,c такви што за секој $n>3$ може да се најде полином од видот $x^n+...+ax^2+bx+c$ со точно n (не задолжително различни) целобројни корени?

Решение. Да претпоставиме дека за секој n постои таков полином $P\,(x)$. Според Виетовите формули a,b,c се цели броеви и производот на корените на полиномот P_n е $\pm c$. Бидејќи c може да се претстави како производ на цели броеви различни од ±1 на само конечен број начини, некое претставување ќе се повтори, т.е. постојат полиноми P_m и P_n ($m>n$) чии нули се разликуваат само во бројот на нулие еднакви на ±1.

Збировите на рецишрочните вредности на нулите на P_m и P_n се еднакви на

$-\frac{b}{c}$, но тие се разликуваат само во собирци еднакви на ± 1, па затоа има еднаков број множители $x-1$ и $x+1$ во разложувањата на количникот $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$, односно

$$P_m(x)=(d-1)^d(x+1)^d P_n(x)=(x^2-1)^d P_n(x).$$

Бидејќи $(x^2-1)^d=x^{2d}-...+(-1)^{d-1}dx^2+(-1)^d$, со споредување на коефициентите пред P_m и $(x^2-1)^d P_n$ добиваме $c=(-1)^d c$, па затоа $2\,|\,d$ и $a=(-1)^d a+(-1)^{d-1}dc=a-dc$, што не е можно бидејќи $c,d\neq 0$.

14. Нека a,b,c се различни ненулти реални броеви. Докажи, ако полиномите ax^3+bx+c, bx^3+cx+a и cx^3+ax+b имаат заеднички корен, тогаш барем еден од нив има три (не задолжително различни) реални корени.

Решение. Нека t е заедничкиот корен на трите полиноми. Ако ги собереме трите соодветни равенки добиваме

$$(a+b+c)(t^3+t+1)=0.$$

Ако $t^3+t+1=0$, тогаш од $at^3+bt+c=0$ добиваме $(b-a)t+c-a=0$, па затоа $t=\frac{c-a}{a-b}$. Аналогно од $bt^3+ct+a=0$ следува $t=\frac{a-b}{b-c}$ и од $ct^3+at+b=0$ следува $t=\frac{b-c}{c-a}$. Ако ги помножиме трите равенства добиваме $t^3=1$, што противречи на $t^3+t+1=0$.

Според тоа, $a+b+c=0$. Сега е јасно дека $t=1$ е заедничкиот корен на трите полиноми. Доволно е да докажеме дека некој од полиномите има барем уште еден реален корен. Имаме два случаја.

1) Точно два од броевите a,b,c се позитивни, да кажеме a и b. Да ја разгледаме функцијата $f(y)=by^3+cy+a$. Имаме $f(0)=a>0$ и бидејќи кога $y\to-\infty$ имаме $f(y)<0$ следува дека f има и негативен корен, кој е различен од 1.
2) Точно два од броевите a,b,c се негативни, да кажеме a и b. Тогаш $f(0)=a<0$ и кога $y\to-\infty$ како и во претходниот случај добиваме дека $g(y)=-f(y)$ има реален корен различен од 1.

15. Определи го најмалиот природен број n за кој бројот $\cos\frac{\pi}{n}$ не може да се претстави во видот $p+\sqrt{q}+\sqrt[3]{r}$ каде p,q,r се рационални броеви.

Решение. Ќе докажеме дека $n=7$. Имаме:

$$\cos\pi=-1,\ \cos\tfrac{\pi}{2}=0,\ \cos\tfrac{\pi}{3}=\tfrac{1}{2},\ \cos\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\tfrac{\pi}{6}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Освен тоа, од $0=\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}$ следува дека $x_5=\cos\frac{\pi}{5}$ е решение на равенката $0=4x^3+2x^2-3x+1=(x+1)(4x^2-2x-1)$ од каде следува $x_5=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Останува да докажеме дека $x_7=\cos\frac{\pi}{7}$ не може да се запише во саканиот вид. Од $0=\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$ следува дека x_7 е решение на равенката

$$0=2(2x^2-1)^2-1+4x^3-3x=(x+1)(8x^3-4x^2-4x-1),$$

т.е. x_7 е нула на полиномот $P(x)=8x^3-4x^2-4x-1$. Нека претпоставиме дека $x_7=p+\sqrt{q}+\sqrt[3]{r}$, каде $q\geq 0, p,r\in\mathbb{Q}$. Тогаш x_7 е нула на полиномот

$$Q(x)=(x-p-\sqrt{q})^3-r$$

со коефициенти од $\mathbb{Q}[\sqrt{q}]$, т.е. од видот $a+b\sqrt{q}, a,b\in\mathbb{Q}$. Бидејќи коефициентот пред x е ненегативен, заклучуваме дека $P\neq 8Q$. Значи, $P=8Q+R$, каде R е полином со степен 1 или 2, коефициенти од $\mathbb{Q}[\sqrt{q}]$ и $R(x_7)=0$. Ако $\deg R=1$, тогаш $x_7\in\mathbb{Q}[\sqrt{q}]$. Ако $\deg R=2$ и R не е делител на P, тогаш x_7 е нулата на остатокот на P при делење со R, т.е. повторно $x_7\in\mathbb{Q}[\sqrt{q}]$. Ако $\deg R=2$ и R е делител на P, тогаш нулата на $\frac{P}{R}$ која припаѓа на $\mathbb{Q}[\sqrt{q}]$, е нула и на P. Според тоа, P има нула од $\mathbb{Q}[\sqrt{q}]$. Оваа нула е нула на полином со степен 1 или 2 со рационални коефициенти. Поточно, од горните разгледувања следува дека P има рационална нула. Јасно, таа треба да е меѓу броевите $\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{8}$ и со непосредна проверка во сите случаи се добива противречност.

16. Докажи дека за секој природен број n сите корени на полиномот

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{k(n-k)}x^k$$

се реални.

Решение. Случајот $n\leq 2$ непосредно се проверува. За $n>2$ ги разгледуваме точките $x_i=-2^{2i-n}$, $0\leq i\leq n$. Тогаш

$$(-1)^i P(x_i)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{i-k}2^{i^2-(i-k)^2}=2^{i^2}(1-\frac{2}{2^{1^2}}+\frac{2}{2^{2^2}}-\frac{2}{2^{3^2}}+...)>0,$$

што значи дека P има нула на секој од интервалите $(x_i,x_{i+1}), i=0,1,...,n-1$.

17. Нека $a_0,a_1,...,a_n$ се реални броеви. Ако равенката

$$\frac{a_0}{1-x}+\frac{a_1}{1-x^2}+...+\frac{a_n}{1-x^{n+1}}=0$$

има решение $x\in(0,1)$, докажи дека и равенката

$$a_0+a_1y+...+a_ny^n=0$$

има решение $y\in(0,1)$.

Решение. Да означиме $P(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$. Бидејќи

$$\frac{1}{1-x^k}=\lim_{m\to\infty}(1+x^k+x^{2k}+...+x^{mk}),\text{ за } 0\le x<1,$$

важи

$$\begin{aligned}0=\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{1-x^{i+1}}&=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{n}a_i(1+x^{i+1}+...+x^{m(i+1)})\\&=\lim_{m\to\infty}(P(1)+xP(x)+...+x^mP(x^m)).\end{aligned}$$

Бидејќи не се сите собици $x^iP(x^i)$ еднакви на 0, меѓу нив мора да има и позитивни и негативни. Според тоа, полиномот P го менува знакот во интервалот $[0,1]$, па затоа има нула внатре во овој интервал.

18. Во Декартов координатен систем во рамнината се дадени точките A_i, $i=1,2,3,4$ и $B_i, i=1,2,3,4$. Точките $A_i, i=1,2,3,4$ припаѓаат на параболата $y=x^2$, а точките $B_i, i=1,2,3,4$ на параболата $y=2009x^2$, при што за секој $i=1,2,3,4$ точките A_i и B_i имаат еднакви апсциси. Докажи, ако точките A_i, $i=1,2,3,4$ лежат на една кружница, тогаш и точките $B_i, i=1,2,3,4$ лежат на една кружница.

Решение. Бидејќи права и парабола се сечат најмногу во две точки, заклучуваме дека никои три точки од точките $B_i, i=1,2,3,4$ не се колинеарни.

Ако точките $(a,ka^2),(b,kb^2),(c,kc^2)$ и (d,kd^2) од параболата $y=kx^2$, $k\ne0$, лежат на една кружница, тогаш $a+b+c+d=0$. Навистина, решенија на равенката од четврти степен $(t-m)^2+(kt^2-m)=r^2$, која е еквивалентна со равенката

$$k^2t^4+(1-2kn)t^2+2mt+m^2+n^2-r^2=0$$

се пресечните точки на параболата и кружницата со центар (m,n) и радиус r. Ако тоа се горните четири точки, тогаш од Виетовите правила следува равенството $a+b+c+d=0$.

Оттука и од од условот (за $k=1$) следува дека збирот на абсцисите на точките A_i, $i=1,2,3,4$ е еднаков на нула. Тоа значи дека и збирот на апсцисите на точките $B_i, i=1,2,3,4$ е еднаков на 0. Кружницата определена од точките

$B_i, i=1,2,3$ ја сече параболата параболата $y=2009x^2$ во уште една точка C (која евентуално може да се совпадне со некоја од трите точки) и апсцисата на C, заедно со апсцисите на $B_i, i=1,2,3$ е решение на равенката од видот $y=kx^2$ за $k=2009$. Значи, збирот на апсцисите на овие четири точки е еднаков на 0. Значи, апсцисите c и b_4 се еднакви, па затоа и ординатите $2009c^2$ и $2009b_4^2$ се еднакви, т.е. $C \equiv B_4$.

19. Нека $a, b_1, c_1, ..., b_n, c_n$ се реални броеви такви што

$$x^{2n}+ax^{2n-1}+ax^{2n-2}+...+ax+1=(x^2+b_1x+c_1)...(x^2+b_nx+c_n),$$

за секој $x \in \mathbb{R}$. Докажи дека $c_1=c_2=...=c_n=1$.

Решение. *Лема.* Полиномот $P(z)=z^{2n}+az^{2n-1}+az^{2n-2}+...+az+1$ има најмалку $2n-2$ комплексни корени кои лежат на единечната кружница и се различни од ± 1.

Доказ. Доволно е да докажеме дека дадениот полином има најмалку $n-1$ корени кои лежат на горната полукружница. Имено, тогаш тој има најмалку уште $n-1$ корени кои лежат на долната полукружница (тоа се корените кои се коњугирани на корените кои лежат на горната полукружница). Нека $z=e^{i2\theta}$. Тогаш

$$\frac{z^{2n}+1}{z^{2n-1}+...+z}=\frac{(z^{2n}+1)(z-1)}{z(z^{2n-1}-1)}=\frac{(e^{i2n\theta}+e^{-i2n\theta})(e^{i\theta}-e^{i\theta})}{e^{i(2n-1)\theta}-e^{-i(2n-1)\theta}}=2\frac{\cos 2n\theta \sin\theta}{\sin(2n-1)\theta}=\frac{\sin(2n+1)\theta}{2in(2n-1)\theta}-1.$$

Според тоа, треба да докажеме дека равенката

$$f(\theta)=\sin(2n+1)\theta+(a-1)\sin(2n-1)\theta=0$$

има барем $n-1$ корени во интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$. За $a=1$ тоа е очигледно, бидејќи $f(\theta_k)=0$, каде $\theta_k=\frac{k\pi}{2n+1}, 1 \le k \le n$. Уште да забележиме дека $(k-1)\pi<(2n-1)\theta_k<k\pi$, па затоа $(-1)^{k-1}\sin(2n-1)\theta_k>0$. Според тоа, $f(\theta_k)f(\theta_{k-1})<0$ кога $a \ne 1$ и од теоремата на Болцано-Ваерштрас следува дека равенката $f(\theta)=0$ има барем еден корен на секој од интервалите (θ_i, θ_{i+1}), за $i=1,2,...,n-1$. Со тоа лемата е докажана. ■

Полиномот $P(x)=x^{2n}+ax^{2n-1}+ax^{2n-2}+...+ax+1$ е со реални коефициенти, па затоа неговите комплексни корени се коњугирано коплексни броеви. Според лемата тоа се најмалку $2n-2$ коњугирано комлексни броеви: $\alpha_i, \overline{\alpha_i}$, $i=1,2,...,n-1$. Можеме да сметаме дека

$$x^2+b_1x+c_1=(x-\alpha_1)(x-\overline{\alpha_1}),...,x^2+b_{n-1}x+c_{n-1}=(x-\alpha_{n-1})(x-\overline{\alpha_{n-1}}),$$

па затоа $c_1=c_2=...=c_{n-1}=1$, што значи дека и $c_n=1$.

20. Нека $n_0, n_1, ..., n_{2008}$ се дадени природни броеви и M е множеството од сите полиноми

$$f(x) = a_0 x^{2008} + a_1 x^{2007} + ... + a_{2007} x + a_{2008}$$

такви што за секој $i, 0 \leq i \leq 2008$ имаме $a_i \in \{1, 2, ..., n_i\}$. Определи кои полиноми од M се повеќе, тие кои немаат ниту еден реален корен или тие кај кои сите корени се цели броеви.

Решение. Нека $f(x) \in M$ и сите негови корени се цели броеви. Бидејќи полиномот $f(x)$ нема ненегативни корени, важи

$$f(x) = a_0(x + \alpha_1)(x + \alpha_2)...(x + \alpha_{2008}),$$

каде α_i се природни броеви, при што без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_{2008}$. Го разгледуваме полиномот

$$\begin{aligned} f^*(x) = a_0(&x^{2008} + \alpha_1 x^{2007} + (\alpha_1 \alpha_{1005} + 1) x^{2006} + \alpha_1 \alpha_2 x^{2005} + \\ &+ (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_{1005} \alpha_{1004} + 1) x^{2004} + ... + \\ &+ (\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{1003} \alpha_{1005} ... \alpha_{2006} \alpha_{2007} + 1) x^2 + \\ &+ \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{1004} x + \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_{1004} \alpha_{1005} ... \alpha_{2007} \alpha_{2008}). \end{aligned}$$

Полиномот $f^*(x)$ можеме да го запишеме како збир на триноми од видот

$$x^{2k} + \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_t x^{2k-1} + \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_t \alpha_{1005} ... \alpha_{1004+t} x^{2k-2}.$$

Ако извадиме x^{2k-2} пред заграда, добиваме квадратен трином со дискриминанта $D = \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_t (\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_t - 4\alpha_{1005} ... \alpha_{1004+t})$, па од подредувањето на корените следува дека $D < 0$. Тоа значи дека $f^*(x)$ нема реални корени, бидејќи $f^*(x) > 0$ за секој x. Освен тоа, од Виетовите формули следува дека ако $f(x) \in M$, тогаш $f^*(x) \in M$. Исто така, ако $f(x) \not\equiv g(x)$, $f, g \in M$, тогаш $f^*(x) \not\equiv g^*(x)$, бидејќи во спротивно од принципот на спшоредување на коефициентите ќе следува дека $f(x)$ и $g(x)$ имаат едни исти корени и водечки коефициент, т.е. $f(x) \equiv g(x)$.

При оваа кореспонденција полиномот $x^{2008} + x^{2007} + ... + x^2 + x + 1$ не е придружен на ниту еден полином, тој нема реални корени и припаѓа на M. Според тоа, полиномите од M кои немаат ниту еден реален корен се повеќе од полиномите од M на кои сите корени се цели броеви.

21. Нека $n > 1$ е природен број и $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$. Докажи дека не постојат полиноми $g(x), h(x)$ со целобројни коефициенти и степени поголеми од 0 такви што $f(x) = g(x)h(x)$.

Решение. Ќе го користиме проширениот Ајзенштајнов критериум, кој гласи:

Нека $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ *е полином со целобројни коефициенти. Ако постојат прост број* p *и цел број* $k\in\{0,1,...,n-1\}$ *таков што*

$$p\,|\,a_0,a_1,...,a_k,\ p\nmid a_{k+1}\ \text{и}\ p^2\nmid a_0,$$

тогаш $P(x)$ *има неразложлив множител со степен поголем од* k*.*

Специјално, ако p *може да се земе така што* $k=n-1$*, тогаш* $P(x)$ *е неразложлив (иредуцибилен).*

Според овој критериум полиномот $f(x)$ има иредуцибилен фактор чиј степен е поголем или еднаков на $n-1$. Но, $f(x)$ нема целобројни (реални) нули, па затоа мора да е неразложлив.

22. Нека p е прост број. Докажи дека полиномот $F_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+...+x+1$ е иредуцибилен.

Решение. Наместо полиномот $F_p(x)$ ќе го разгледуваме полиномот $F_p(x+1)$ и ќе докажеме дека истиот е иредуцибилен. Јасно, оттука следува тврдењето на задачата. Имаме

$$F_p(x+1)=\tfrac{(x+1)^p-1}{x}=x^{p-1}+(\tbinom{p}{p-2})x^{p-2}+...+(\tbinom{p}{2})x+p\,.$$

Овој полином ги задоволува сите претпоставки на Ајзенштајновиот критериум, при што $k=p-2$, па затоа е иредуцибилен.

23. Докажи дека полиномот $P(x)=x^n+4$ е разложлив над $\mathbb{Z}[x]$ ако и само ако n е делив со 4.

Решение. Сите нули на полиномот P имаат модули еднакови на $2^{\frac{2}{n}}$. Ако $Q(x)$ и $R(x)$ се полиноми од $\mathbb{Z}[x]$ и $\deg Q=k$, тогаш $|Q(0)|$ е производ на модулите на нулите на полиномот $Q(x)$ и е еднаков на $2^{\frac{2k}{n}}$, па како тоа е цел број заклучуваме дека $n=2k$.

Ако k е непарен број, тогаш полиномот $Q(x)$ има реална нула, што не е можно бидејќи полиномот $P(x)$ нема реални нули. Значи, $2\,|\,k$, па затоа $4\,|\,n$.

24. Нека m,n и a се природни броеви и $p<a-1$ е прост број. Докажи дека полиномот $f(x)=x^m(x-a)^n+p$ е иредуцибилен.

Решение. Нека претпоставиме дека $f(x)=g(x)h(x)$ за некои неконстантни полиноми со целобројни коефициенти.

Од $| f(0)| = p$ следува или $| g(0)| = 1$ или $| h(0)| = 1$. Без ограничување на општоста можеме да земеме $| g(0)| = 1$.

Од $| g(a)h(a)| = p$ следува $| g(a)| \in \{1, p\}$, а освен тоа a е делител на $| g(a) - g(0)| \leq p+1 < a$, па затоа мора да важи $| g(a)| = | g(0)| = 1$. Од друга страна, ако $g(x) = (x - \alpha_1)...(x - \alpha_k)$, тогаш $| \alpha_1 ... \alpha_k | = 1$. Понатаму, бидејќи $f(\alpha_i) = g(\alpha_i) = 0$ добиваме

$$\alpha_i^m (\alpha_i - a)^n = f(\alpha_i) - p = -p ,$$

па затоа ако земеме производ по $i = 1, 2, ..., k$ добиваме

$$p^k = \prod_{i=1}^{k} | \alpha_i^m (\alpha_i - a)^n | = | \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i - a) |^n | \prod_{i=1}^{k} \alpha_i |^m = | \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i - a) |^n = | g(a) |^n = 1 ,$$

што е противречност.

V.3. ПОЛИНОМИ СО ЦЕЛОБРОЈНИ КОЕФИЦИЕНТИ

1. Нека x и y се различни реални броеви такви што $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ е цел број за некои четири последователни природни броја n. Докажи дека $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ е цел број за секој природен број n.

Решение. Нека $t_n = \frac{x^n - y^n}{x - y}$. Тогаш $t_{n+2} + bt_{n+1} + ct_n = 0$ за $b = -(x+y)$, $c = xy$, при што $t_0 = 1$ и $t_1 = 1$. Ќе докажеме дека $b, c \in \mathbb{Z}$. Нека $t_n \in \mathbb{Z}$ за $n = m,$ $m+1, m+2, m+3$. Бидејќи $c^n = (xy)^n = t_{n+1}^2 - t_n t_{n+2} \in \mathbb{Z}$ за $n = m, m+1$, добиваме дека $c^m, c^{m+1} \in \mathbb{Z}$. Според тоа, c е рационален број и од $c^{m+1} \in \mathbb{Z}$ следува дека $c \in \mathbb{Z}$. Од друга страна $b = \frac{t_m t_{m+3} - t_{m+1} t_{m+2}}{c^m}$, т.е. b е рационален број. Од рекурентната равенка по индукција следува дека t_n може да се запише во видот $t_n = f_{n-1}(b)$, каде $f_{n-1}(u)$ е полином со степен $n-1$ и водечки коефициент 1. Бидејќи b е решение на равенката $f_m(x) = t_{m+1}$, заклучуваме дека $b \in \mathbb{Z}$. Сега тврдењето на задачата следува од рекурентната равенка $t_{n+2} + bt_{n+1} + ct_n = 0$, $b, c \in \mathbb{Z}$, $t_0 = 1$ и $t_1 = 1$.

2. Даден е полиномот $P(x) = (x + d_1)(x + d_2)...(x + d_9)$, каде $d_i, i = 1, 2, ..., 9$ се различни цели броеви. Докажи дека постои цел број N таков што за сите цели броеви $x \geq N$ бројот $P(x)$ е делив со прост број поголем од 20.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $d_i, i=1,2,\ldots,9$ се природни броеви. Ќе докажеме дека за $N=d^8$, $d=\max\{d_i, i=1,\ldots,9\}$ е исполнет условот на задачата. Нека претпоставиме дека за $N=d^8$ постои цел број $x\geq N$ таков што $P(x)$ не е делив со прост број поголем од 20. Според тоа, за секој $i\in\{1,2,\ldots,9\}$ важи $x+d_i=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_8^{\alpha_8}$, каде $\alpha_i\geq 0$ и p_i е $i-$ тиот прост број.

Бидејќи $x+d_i>x\geq N=d^8$ добиваме дека постои $k\in\{1,2,\ldots,8\}$ таков што $p_k^{\alpha_k}>d$. Од принцип на Дирихле, бидејќи имаме девет броеви $x+d_i$ и $k\in\{1,2,\ldots,8\}$ следува дека постои $j\neq i$, $j\in\{1,2,\ldots,8,9\}$ за кој $p_k^{\beta_k}$ е делител на $x+d_j$ и $p_k^{\beta_k}>d$. Заради симетрија можеме да земеме дека $p_k^{\alpha_k}\leq p_k^{\beta_k}$, што значи $p_k^{\alpha_k}\,|\,x+d_i$ и $p_k^{\alpha_k}\,|\,x+d_j$. Затоа $p_k^{\alpha_k}\,|\,x+d_i-(x+d_j)$, односно $p_k^{\alpha_k}\,|\,d_i-d_j$. Од друга страна имаме

$$0<|d_i-d_j|\leq\max\{d_i,d_j\}\leq d<p_k^{\alpha_k},$$

што противречи на $p_k^{\alpha_k}\,|\,d_i-d_j$. Од добиената противречност следува дека постои $N=d^8$ таков што за секој $x\geq N$ бројот $P(x)$ има прост делител $p\geq p_9=23>20$.

3. Нека n е природен број. На секоја од $2n+1$ карта е запишан по еден ненулти цел број, при што збирот на сите запишани броеви не е еднаков на нула. Со овие карти треба да се заменат ѕвездичките во изразот

$$*x^{2n}+*x^{2n-1}+\ldots+*x+*$$

така што добиениот полином ќе нема целобројни корени. Дали ова е секогаш можно?

Решение. Нека $p_0,p_1,\ldots,p_{2n}$ зе броевите запишани на картите така што p_{2n} е бројот со најголема апсолутна вредност, а p_i е коефициентот пред x^i. Нека a е цел број таков што $|a|\geq 2$. Тогаш

$$\begin{aligned}|p_{2n}a^{2n}|&>|p_{2n}|\cdot|a^{2n-1}+a^{2n-2}+\ldots+a+1|\\&\geq|p_{2n-1}a^{2n-1}|+|p_{2n-2}a^{2n-2}|+\ldots+|p_0|\\&\geq|p_{2n-1}a^{2n-1}+p_{2n-2}a^{2n-2}+\ldots+p_0|.\end{aligned}$$

Според тоа, при ваков избор на броевите не постои целоброен корен со апсолутна вредност поголема или еднаква на 2. Останува да разгледаме кога $-1,0$

и 1 се корени. Од условот $p_0 \neq 0$ следува дека 0 не може да е корен. Исто така, од условот $p_0 + p_1 + ... + p_{2n} \neq 0$ следува дека 1 не може да е корен. Да претпоставиме дека $x = -1$ е корен на равенката при произволно разместување на коефициентите p_i за $i \leq 2n-1$. Тогаш вредноста на полиномот во -1 не се менува кога коефициентите p_i и p_{i-1}, каде $i = 1, 2, ..., 2n-1$, ќе ги заменат местата. Оттука ќе следува дека $p_i = p_{i-1}$ за $i = 1, 2, ..., 2n-1$, па затоа полиномот има вид

$$p_{2n}x^{2n} + p_0(x^{2n-1} + x^{2n-2} + ... + 1)$$

и затоа

$$p_{2n}(-1)^{2n} + p_0((-1)^{2n-1} + (-1)^{2n-2} + ... + 1) = p_{2n} \neq 0,$$

што е противречност.

4. Даден е природен број n. Определи ја најмалата можна вредност на природниот број k, за кој постои полином $f(x)$ со целобројни коефициенти кој има целоброен корен и полиномот $f(x) + k$ има n различни целобројни корени.

Решение. Нека $n = 2m$. Од условот следува

$$g(x) = f(x) + k = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{2m})h(x)$$

каде $x_1, x_2, ..., x_{2m}$ се различни цели броеви и $h(x)$ е полином со целобројни коефициенти. Ако $f(x)$ има целоброен корен x_0, тогаш од горното равенство следува $k = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)...(x_0 - x_{2m})h(x_0)$, па затоа

$$k = | x_0 - x_1 | \cdot | x_0 - x_2 | ... | x_0 - x_{2m} | \cdot | h(x_0) |.$$

Множителите на десната страна се природни броеви и меѓу броевите

$$| x_0 - x_1 |, | x_0 - x_2 |, ..., | x_0 - x_{2m} |$$

ниту еден природен број не може да се појави повеќе од двапати. Според тоа,

$$k \geq | x_0 - x_1 | \cdot | x_0 - x_2 | ... | x_0 - x_{2m} | \geq 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot m \cdot m = (m!)^2.$$

Нека $k = (m!)^2$ и

$$f(x) = (-1)^m(x^2 - 1)(x^2 - 4)...(x^2 - m^2) - (m!)^2.$$

Лесно се гледа дека $f(0) = 0$ и $f(x) + k$ има корени $\pm 1, \pm 2, ..., \pm m$.

Ако $n = 2m + 1$ разгледувањата се анналогни, при што во овој случај оценката е $k \geq (m+1)(m!)^2$, а полнимот со саканите својства е

$$f(x) = (-1)^{m+1}(x^2 - 1)(x^2 - 4)...(x^2 - m^2)(x - m - 1) - (m+1)(m!)^2.$$

5. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се некостантни низи рационални броеви. Да претпоставиме дека $(a_i - a_j)(b_i - b_j)$ е цел број за секои i и j. Докажи дека по-

стои рационален број γ таков што $(a_i - a_j)\gamma$ и $(b_i - b_j)\gamma$ се цели броеви за секои i и j.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме $a_1 = b_1 = 0$. Тогаш $a_i b_i = (a_i - a_1)(b_i - b_1)$ е цел број за секој i. Понатаму, бројот

$$a_i b_j + a_j b_i = a_i b_i + a_j b_j - (a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

е исто така цел број за секои i и j.

Ги разгледуваме полиномите $A_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}$ и $B_n(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x^{i-1}$. Секој коефициент во полиномот $C_n(x) = A_n(x)B_n(x)$ е збир на неколку изрази од обликот $a_i b_i$ и $a_i b_j + a_j b_i$, па затоа полиномот $C_n(x)$ има целобројни коефициенти. Сега од лемата на Гаус следува дека постои рационален број γ_n таков што полиномите $\gamma_n A_n(x)$ и $\frac{B_n(x)}{\gamma_n}$ имаат целобројни коефциеинти. Множеството од сите вакви броеви γ_n да го означиме со Γ_n. Јасно, Γ_n е конечно множество и $\Gamma_n \supseteq \Gamma_{n+1}$, за секој n, па како сите множества Γ_n се непразни, заклучуваме дека и нивниот пресек $\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ е непразен. За γ можеме да го земеме било кој елемент од множеството Γ.

6. Определи го најмалиот природен број n таков што постојат полиноми f_i, $i = 1, 2, ..., n$ со рационални коефициенти такви што

$$x^2 + 7 = f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + ... + f_n(x)^2 . \qquad (1)$$

Решение. Од $x^2 + 7 = x^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ следува дека $n \le 5$. Ќе докажеме дека $x^2 + 7$ не може да се претстави како збир од четири (или помалку) квадрати на полиноми со рационални коефициенти.

Нека $x^2 + 7 = f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + f_3(x)^2 + f_4(x)^2$. Јасно, дека степенот на секој полиноим f_1, f_2, f_3, f_4 е најмногу еден, т.е. дека $f_i(x) = a_i x + b_i$, за $1, 2, 3, 4$ каде a_i, b_i се рационални броеви. Добиваме

$$x^2 + 7 = x^2 \sum_{i=1}^{4} a_i^2 + 2x \sum_{i=1}^{4} a_i b_i + \sum_{i=1}^{4} b_i^2 . \qquad (2)$$

Споредувајќи ги коефициентите во (1) и (2) добиваме $\sum_{i=1}^{4} a_i^2 = 1$, $\sum_{i=1}^{4} a_i b_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{4} b_i^2 = 7$. Сега, од Ојлеровиот идентитет следува

$$\sum_{i=1}^{4} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{4} b_i^2 = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)^2 +$$

$$+ (a_1b_3 - a_3b_1 + a_4b_2 - a_2b_4)^2 + (a_1b_4 - a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)^2.$$

Понатаму, постојат $a,b,c \in \mathbb{Z}$ и $d \in \mathbb{N}$ такви што

$$a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 = \tfrac{a}{d},$$

$$a_1b_3 - a_3b_1 + a_4b_2 - a_2b_4 = \tfrac{b}{d},$$

$$a_1b_4 - a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2 = \tfrac{c}{d},$$

па затоа $a^2 + b^2 + c^2 = 7d^2$, т.е.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8d^2. \qquad (1)$$

Понатаму, ако $m = 2k+1$, тогаш $m^2 = 4k(k+1)+1 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 8)$, па како десната страна на (1) е делива со 8, заклучуваме дека броевите a,b,c,d се парни. Нека $d = d'$ е најмалиот природен број за кој важи (1). Тогаш за броевите $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}, \frac{d'}{2})$ имаме $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{d'^2}{4} = 8\frac{d'^2}{4}$, што значи дека за четворката $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}, \frac{d'}{2})$ важи (1), што противречи на минималноста на природниот број d'. Конечно, од добиената противречност следува дека $n_{\min} = 5$.

7. а) Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ постои полином T_n со целобројни коефициенти и водечки коефициент 2^{n-1} таков што $T_n(\cos x) = \cos nx$ за секој $x \in \mathbb{R}$.

б) Докажи дека за полиномите T_n важи

$$T_{m+n} + T_{m-n} = 2T_mT_n,$$

за секои $m,n \in \mathbb{N}, m \geq n$.

в) Докажи дека полиномот U_n определен со $U_n(2x) = 2T_n(x)$ исто така е моничен, има целобројни коефициенти и ја задоволува релацијата

$$U_n(x + x^{-1}) = x^n + x^{-n}.$$

Полиномите $T_n(x)$ се таканаречените полиноми на Чебишев.

Решение. а) Очигледно $T_0(x) = 1$ и $T_1(x) = x$ ги задоволуваат условите на задачата. За $n > 1$ ќе користиме индукција по n. Од

$$\cos(n+1)x = 2\cos x \cos nx - \cos(n-1)x,$$

можеме да земеме $T_{n+1} = 2T_1T_n - T_{n-1}$. Полиномите T_1T_n и T_{n-1} се со степен $n+1$ и $n-1$, соодветно, па затоа степенот на полиномот T_{n+1} е $n+1$ и тој има водечки коефициент $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. Од самата конструкција следува дека коефициентите на T_{n+1} се цели броеви.

б) Идентитетот $T_{m+n}+T_{m-n}=2T_mT_n$ следува од идентитетот

$$\cos(m+n)x+\cos(m-n)x=2\cos mx\cos nx\,.$$

в) Низата $\{U_n\}$ задоволува $U_0(x)=2$, $U_1(x)=x$ и $U_{n+1}=U_1U_n-U_{n-1}$, од каде со индукција следува дека нејзините членови се монични полиноми со целобројни коефициенти. Равенството

$$U_n(x+x^{-1})=x^n+x^{-n}$$

важи за $x=\cos t+i\sin t$, па затоа важи за секој x.

8. Докажи дека ако $\cos\frac{p}{q}\pi=a$ е рационален број за некои $p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}$, тогаш $a\in\{0,\pm\frac{1}{2},\pm1\}$.

Решение. Нека претпоставиме дека $\cos\frac{p}{q}\pi=a$. Според претходната задача

$$U_q(2a)=2T_q(a)=2T_q(\cos\frac{p}{q}\pi)=2\cos p\pi=\pm2\,.$$

Полиномот U_q е моничен и е со целобројни коефициенти, од каде следува дека $2a$ е цел број. Но, $|a|\le1$, па затоа $a\in\{0,\pm\frac{1}{2},\pm1\}$.

9. Докажи дека максимумот на апсолутната вредност на произволен реален моничен полином од $n-$ти степен на $[-1,1]$ не е помал од $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Решение. Водечкиот коефициент на полиномот на Чебишев $T_n(x)$ е 2^{n-1}, па затоа полиномот $C_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ е моничен и важи

$$|C_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}|T_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}|\cos(n\arccos x)|\le\frac{1}{2^{n-1}} \text{ за } x\in[-1,1]\,.$$

Уште повеќе, полиномот C_n во точките $1,\cos\frac{\pi}{n},\cos\frac{2\pi}{n},...,\cos\frac{(n-1)\pi}{n},-1$ наизменично прима вредности $\frac{1}{2^{n-1}}$ и $-\frac{1}{2^{n-1}}$.

Нека $P\ne C_n$ е моничен полином таков што $\max\limits_{-1\le x\le1}|P(x)|<\frac{1}{2^{n-1}}$. Тогаш полиномот $P(x)-C_n(x)$ во точките $1,\cos\frac{\pi}{n},\cos\frac{2\pi}{n},...,\cos\frac{(n-1)\pi}{n},-1$ наизменично го менува знакот, што значи дека полиномот $P(x)-C_n(x)$ има барем n нули, по една меѓу секои две соседни точки. Но, во $P(x)-C_n(x)$ мономот x^n се поништува, па затоа $\deg(P-C_n)<n$, што е противречност.

10. Низата цели броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е таква што $m-n\,|\,a_m-a_n$ за секои различни

природни броиеви m и n. Нека претпоставиме дека постои полином $P(x)$ таков што $|a_n|< P(n)$ за секој n. Докажи дека постои полином $Q(x)$ таков што $a_n = Q(n)$ за секој n.

Решение. Нека $\deg P = d$. Постои единствен полином Q, $\deg Q \le d$ таков што $Q(k) = a_k, k = 1, 2, ..., d+1$. Ќе докажеме дека $a_n = Q(n)$ за секој n. Нека $n > d+1$. Полиномот Q можда нема целобројни коефициенти, па не можеме да заклучиме дека $n-m \mid Q(n)-Q(m)$, но тој има рационални коефициенти, што значи дека постои природен број M таков што $R(x) = MQ(x)$ има целобројни коефициенти. Според условот на задачата

$$M(a_n - Q(n)) = M(a_n - a_k) - (R(n) - R(k))$$

е делив со $n-k$ за секој $k = 1, 2, ..., d+1$. Според тоа, за секој n важи или $a_n = Q(n)$, или

$$L_n = \text{NZS}(n-1, n-2, ..., n-d-1) \le M(a_n - Q(n)) < Cn^d ,$$

за некоја константа C која не зависи од n.

Нека претпоставиме дека $a_n \ne Q(n)$ за некој n. Да забележиме дека L_n не е помал од производот $(n-1)(n-2)...(n-d-1)$ поделен со производот A од сите $\text{NZD}(n-i, n-j)$ по сите парови (i, j) различни броеви од $\{1, 2, ..., d+1\}$. Притоа $\text{NZD}(n-i, n-j) \le |i-j|$, па затоа $A \le 1^d 2^{d-1} \cdot ... \cdot d$. Според тоа,

$$(n-1)(n-2)...(n-d-1) \le AL_n < CAn^d ,$$

што не е точно за доволно голем n, бидејќи левата страна е полином по n со степен $d+1 > d$. Значи, $a_n = Q(n)$ за доволно големи n, да кажеме $n > N$. Но, според условот на задачата кога $n \le N$ бројот

$$M(a_n - Q(n)) = M(a_n - a_k) - (R(n) - R(k))$$

е делив со $k-n$ за секој $k > N$, што значи дека $M(a_n - Q(n))$ има бесконечно многу делители, па затоа мора да биде еднаков на нула. Конечно, $a_n = Q(n)$ за секој n.

V.4. ПРИМЕНА НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОТО СМЕТАЊЕ

1. Полиномот $x^3 + px + q$ со целобројни коефициенти има три различни ирационални корени x_1, x_2, x_3. Определи ја најмалата можна вредност на збирот $|x_1| + x_2| + |x_3|$.

Решение. Ако полиномот $P(x) = x^3 + px + q$ има три реални нули, тогаш

$P'(x)=3x^2+p$ има реални нули меѓу кои се наоѓа барем една нула на полиномот P. Нулите на полиномот P' се $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Значи, $p<0$ и

$$P(\sqrt{-\tfrac{p}{3}})P(-\sqrt{-\tfrac{p}{3}})<0,$$

од каде што следува $4p^3+27q^2<0$, т.е. $|q|<\sqrt{-\frac{4p^3}{27}}$.

Нека $r_1<r_2<r_3$ се нули на полиномот P. Од Виетовите правила следува $r_1+r_2+r_3=0$, па ако полиномот $P(x)$ го замениме со $-P(-x)$ по потреба можеме да сметаме дека $q<0$ и $r_1<r_2<0<r_3$. Тогаш $|r_1|+|r_2|+|r_3|=2r_3$. Ја бараме најмалата можна вредност за $2r_3$. Имаме, $P(1)=1+p+q<0$, па затоа $r_3>1$. Нека претпоставиме дека $r_3<2$, т.е. $8+2p+q>0$. Тогаш при условот $4p^3+27q^2<0$, единствена можност се полиномите x^3-2x-1 и x^3-3x-1, од кои првиот отпаѓа бидејќи има нула -1. Во другиот случај се добива $2r_3=4\cos\frac{\pi}{9}$.

2. Дали може четири различни реални броеви кои припаѓаат на нулите на полином од трет степен и на неговиот извод да формираат аритметичка прогресија?

Решение. Нека претпоставиме дека четири различни рферални броеви кои припаѓаат на полиномот

$$P(x)=x^3+ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \tag{1}$$

и неговиот извод

$$P'(x)=(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_3)(x-x_1)=3(x-y_1)(x-y_2) \tag{2}$$

формираат артиметичка прогресија. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x_1<y_1<x_2<y_2<x_3$. Од (1) и (2) имаме

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}. \tag{3}$$

Ако x_1,y_1,x_2 се членови на аритметичка прогресија, тогаш од (3) следува

$$0=\frac{P'(y_1)}{P(y_1)}=\frac{1}{y_1-x_1}+\frac{1}{y_1-x_2}+\frac{1}{y_1-x_3}=\frac{1}{y_1-x_3},$$

што е пртоивречност. На потполно ист начин случајот кога x_2,y_2,x_3 се членови на аритметичка прогресија доведува до противречност. Останува случајот кога x_1,y_1,y_2,x_3 формираат прогресија. Тогаш $2(y_1-x_1)=x_3-y_1$, па затоа

$$0=\frac{P'(y_1)}{P(y_1)}=\frac{1}{y_1-x_1}+\frac{1}{y_1-x_2}+\frac{1}{y_1-x_3}=\frac{1}{y_1-x_2}-\frac{1}{y_1-x_3},$$

од каде добиваме $x_2 = x_3$, што повторно е противречност.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека одговорот на поставеното прашање е *не*.

3. Четири позитивни броеви формираат растечка геометриска прогресија. Определи го нејзиниот количник, ако три од броевите се нули на полином од трет степен, а четвртиот е нула на неговиот извод.

Решение. Нека броевите се x_1, x_2, x_3, x_4 и x_4 е нула на

$$[(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)]' = 3x^2 + 3(x_1+x_2+x_3)x + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 .$$

Тогаш

$$3x_4 = x_1 + x_2 + x_3 \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1} .$$

Можеме да сметаме дека $1 = x_1 < x_2 < x_3$. При знак $-$ имаме $x_1 < x_4 < x_2$, па затоа

$$x_4 = q,\ x_2 = q^2,\ x_3 = q^3,$$

а при знак $+$ имаме $x_2 < x_4 < x_3$, па затоа

$$x_2 = q,\ x_4 = q^2,\ x_3 = q^3 .$$

Според тоа, $q > 1$ и

$$3q = 1 + q^2 + q^3 - \sqrt{1 - q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6} \text{ или}$$

$$3q^2 = 1 + q + q^3 - \sqrt{1 - q + q^2 - q^3 - q^4 + q^6} ,$$

и по средувањето добиваме

$$q(q^2 - 2) = 0 \text{ или } q(2q^2 - 1) = 0 .$$

Всушност, со смената на q со $\frac{1}{q}$ вториот случај се сведува на првиот, т.е. на обратно подредување на броевите. Според тоа, $q = \sqrt{2}$.

4. Нека за реалните броеви $0 = x_0 < x_1 < ... < x_n < x_{n+1} = 1$ важи

$$\sum_{j=0,\ j\neq i}^{n+1} \frac{1}{x_i - x_j} = 0 \text{ за } i = 1, 2, ..., n . \tag{1}$$

Докажи дека $x_{n+1-i} = 1 - x_i$ за $i = 1, 2, ..., n$.

Решение. Нека

$$P(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)(x-x_{n+1}) .$$

Имаме

$$P'(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{P(x)}{x-x_j} \text{ и } P''(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{k\neq j} \frac{P(x)}{(x-x_j)(x-x_k)} .$$

Според тоа,

$$P''(x_i)=2P'(x_i)\sum_{j\neq i}\tfrac{1}{x_i-x_j}$$

за $i=0,1,...,n+1$, па од условот следува $P''(x_i)=0$ за $i=1,2,...,n$. Оттука следува дека

$$x(x-1)P''(x)=(n+2)(n+1)P(x)\,. \qquad (2)$$

Лесно се гледа дека постои единствен моничен полином $P(x)$, $\deg P=n+2$ кој ја задоволува релацијата (2) (доволно е да се споредаткоефициентите на двете страни на (2)). Од друга страна полиномот $Q(x)=(-1)^n P(1-x)$ исто така ја задоволува (2), тој е моничен и $\deg Q=n+2$. Затоа мора да важи $(-1)^n P(1-x)=P(x)$, од каде следува тврдењето на задачата.

5. Определи реален полином $P(x)$, $\deg P\le 5$ таков што $P(x)$ дава остатоци -1 и 1 при делење со $(x-1)^3$ и $(x+1)^3$.

Решение. Имаме $P(x)+1$ еделив со $(x-1)^3$, што значи дека трикратна нула во точката 1. Тоа значи дека $P'(x)$ има двократна нула во точката 1. Слично, $P'(x)$ има двократна нула во точката -1. Според тоа, полиномот $P'(x)$ е делив со полиномот $(x-1)^2(x+1)^2$. Но, $\deg P'\le 4$, па затоа

$$P'(x)=c(x-1)^2(x+1)^2=c(x^4-2x^2+1)\,,$$

за некоја константа c. Оттука добиваме

$$P(x)=c(\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{2}{3}x^3+x)+d$$

за некои реални броеви c и d. Од условот $P(-1)=1$ и $P(1)=-1$ добиваме $c=-\frac{15}{8}$, $d=0$, па затоа

$$P(x)=-\tfrac{1}{8}(3x^5-10x^3+15x)\,.$$

6. За дадени полиноми $P(x)$, $Q(x)$ и произволен $m\in\mathbb{C}$ нека

$$P_m=\{z\in\mathbb{C}\mid P(z)=m\} \text{ и } Q_m=\{z\in\mathbb{C}\mid Q(z)=m\}\,.$$

Ако $P_0=Q_0$ и $P_1=Q_1$, докажи дека $P(x)=Q(x)$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $n=\deg P\ge\deg Q$. Нека $P_0=\{z_1,z_2,...,z_k\}$ и $P_1=\{z_{k+1},z_{k+2},...,z_{k+m}\}$. Полиномите P и Q имаат исти вредности во $k+m$ точки $z_1,z_2,...,z_{k+m}$. Тврдењето на задачата ќе следува ако докажеме дека $k+m>n$. Според условот на задачата

$$P(x)=(x-z_1)^{\alpha_1}...(x-z_k)^{\alpha_k}=(x-z_{k+1})^{\alpha_{k+1}}...(x-z_{k+m})^{\alpha_{k+m}}+1,$$

за некои природни броеви $\alpha_1,...,\alpha_{k+m}$.

Полиномот $P'(x)$ е делив со $(x-z_i)^{\alpha_i-1}$ за $i=1,2,...,k+m$, па затоа

$$\prod_{i=1}^{k+m}(x-z_i)^{\alpha_i-1} \mid P'(x).$$

Оттука следува

$$\begin{aligned}2n-k-m &= \deg\prod_{i=1}^{k+m}(x-z_i)^{\alpha_i-1}, \\ &\le \deg P'(x)=n-1\end{aligned}$$

т.е. $k+m\ge n+1$, што и требаше да докажеме.

V.5. ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ ЗА ПОЛИНОМИ

1. Определи ги сите полиноми $f(x)$ со целобројни коефициенти за кои

$$f(1)=9,\ f(2)=218 \text{ и } f(3)=2019.$$

Решение. Нека претпоставиме дека $f(x)$ има коефициент a_l кој е поголем или еднаков на 3. Тогаш полиномот $g(x)=f(x)-3x^l+x^{l+1}$ е со целобројни коефициенти и важи $g(3)=f(3)=2019$ и $g(1)=7<9$. Продолжувајќи на ист начин добиваме полином $h(x)$ со коефициенти меѓу 0, 1 и 2, за кој ќе важи $h(3)=2019$ и $h(1)<9$. Но, тогаш $h(3)=2019$ е записот на бројот 2019 во систем со основа 3, кој е единствен и затоа

$$h(x)=2x^6+2x^5+2x^3+2x^2+x.$$

Бидејќи $h(1)=9$, тоа е противречност, што значи дека f нема коефициент поголем или еднаков на 3. Значи, $f(x)=2x^6+2x^5+2x^3+2x^2+x$ и притоа $f(2)=218$.

2. Определи ги сите полиноми од видот $f(x)=x^2+ax+b$ такви што

$$2f(x^2-1)=f(x-1)f(x+1)+x^4+6x^2-15,$$

за секој реален број x.

Решение. *Прв начин.* Со споредување на коефициентите пред третите степени на равенството се добива $a=0$, а потоа ако ги споредеиме коефициентите пред вторите степени добиваме $b=-4$. Непосредно се проверува дека полиномот $f(x)=x^2-4$ е решение на задачата.

Втор начин. Ставаме $x=1$ и добиваме $2f(0)=f(0)f(2)-8$. Аналогно за

$x=-1$ добиваме $2f(0)=f(-2)f(0)-8$. Од последните две равенства следува $f(2)=f(-2)$, односно $2a=-2a$, од каде добиваме $a=0$. Сега

$$2f(0)=f(0)f(2)-8 \quad\Leftrightarrow\quad 2b=b(4+b)-8 \quad\Leftrightarrow\quad b=2 \text{ или } b=-4.$$

Непосредно се проверува дека за $b=2$ немаме решение на задачата, а додека за $b=-4$, го добиваме полиномот $f(x)=x^2-4$ кој е решение на задачата.

3. Определи ги сите квадратни полиноми $f(x)=ax^2+bx+c$ со реални корени x_1 и x_2 такви што $f(1)=2,\ f(2)=1$ и $4x_1^2-12x_1x_2+4x_2^2=15$.

Решение. Од $f(1)=2,\ f(2)=1$ следува соодветно $a+b+c=2, 4a+2b+c=1$, од каде добиваме $b=-3a-1, c=2a+3$. Според тоа,

$$f(x)=ax^2-(3a+1)x+2a+3$$

и дискриминантата на $f(x)$ е $(3a+1)^2-4a(2a+3)=a^2-6a+1$. Од условот $4x_1^2-12x_1x_2+4x_2^2=15$ е еквивалентен со $4(x_1+x_2)^2-20x_1x_2=15$, од каде добиваме $\frac{4(3a+1)^2}{a^2}-\frac{20(2a+3)}{a}=15$, т.е. $19a^2+36a-4=0$. Решенија на последната равенка се $a_1=-2$ и $a_2=\frac{2}{19}$. Лесно се гледа дека и во двата случаја дискриминатата се позитивна. За $a=2$ имаме $b=5$ и $c=-1$, а за $a=\frac{2}{19}$ имаме $b=-\frac{25}{19}$ и $c=\frac{61}{19}$.

4. Определи ги сите реални полиноми P со реални такви што за секој x важи

$$P(x^2)=P(x+\tfrac{1}{2})P(x-\tfrac{1}{2}).$$

Решение. Единствени такви константни полиноми се $P\equiv 0$ и $P\equiv 1$. Нека претпоставиме дека P не е константен и да ја разгледаме неговата нула c со најголем модул. Со замена $x=c\pm\frac{1}{2}$ добиваме дека и $(c\mp\frac{1}{2})^2$ се нули на полиномот P, па затоа $|(c\mp\frac{1}{2})^2|\leq|c|$. Меѓутоа, од $(c+\frac{1}{2})^2-(c-\frac{1}{2})^2=2c$ следува дека ова е можно единствено ако $(c+\frac{1}{2})^2=c$ и $(c-\frac{1}{2})^2=-c$, т.е. $c=\frac{1}{2}i$. Според тоа, $\pm\frac{1}{2}i$ се нули на полиномот P, па затоа $x^2+\frac{1}{4}\,|\,P$. Во почетната равенка ставаме $P(x)=(x^2+\frac{1}{4})Q(x)$ и добиваме дека и полиномот $Q(x)$ ги задоволува условите на задачата. На овој начин индуктивно добиваме дека единствени решенија на задачата се полиномите

$$P\equiv 0 \text{ и } P(x)=(x^2+\tfrac{1}{4})^n,\ n\in\mathbb{N}_0.$$

5. Определи ги сите реални полиноми P такви што

$$16P(x^2) = P(2x)^2 . \tag{1}$$

Решение. *Прв начин.* Во (1) ставаме $x = 0$ и добиваме $16P(0) = P(0)^2$, па затоа $P(0) = 0$ или $P(0) = 16$.

1) Нека $P(0) = 0$. Тогаш $P(x) = xQ(x)$ за некој полином Q и важи

$$16x^2Q(x^2) = 4x^2Q(2x)^2 \text{, т.е. } 4Q(x^2) = Q(2x)^2 .$$

Воведуваме смена $4Q(x) = R(x)$ и добиваме $16R(x^2) = R(2x)^2$. Според тоа, $P(x) = \frac{1}{4}xR(x)$, каде R е исто така решение на равенката (1).

2) Нека $P(0) = 16$. Воведуваме смена $P(x) = Q(x) + 16$ и од (1) добиваме $4xQ(x^2) = xQ(2x)^2 + 16Q(2x)$, па затоа $Q(0) = 0$, т.е. $Q(x) = xQ_1(x)$ за некој полином Q_1. Понатаму, $x^2Q_1(x^2) = x^2Q_1(2x)^2 + 8Q_1(2x)$, па затоа $Q_1(0) = 0$, т.е. Q_1 е делив со x, односно Q е делив со x^2. Нека x^n е најголемиот степен кој е делител на Q, т.е. $Q(x) = x^nR(x)$, каде $R(0) \neq 0$. Тогаш R ја задоволува равенката

$$4x^{n+1}R(x^2) = 2^{2n}x^{n+1}R(2x)^2 + 2^{n+4}R(2x) \text{, т.е. } R(0) = 0 ,$$

што не е можно. Според тоа, $Q(x) = 0$ за секој x и $P(x) = 16$, за секој x.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека $P(x) = 16(\frac{1}{4}x)^n$ за некој $n \in \mathbb{N}_0$.

Втор начин. Од (1) добиваме дека $P(x)^2 = 16P(\frac{x^2}{4})$ е полином по x^2, што според задача 4 значи дека или $P(x) = Q(x^2)$ или $P(x) = xQ(x^2)$. Во првиот случај имаме $16Q(x^4) = Q(4x^2)^2$, па затоа и $16Q(x^2) = Q(4x)^2$, а во вториот на сличен начин добиваме $4Q(x^2) = Q(4x)^2$, па заклучуваме дека во двата случаја важи $Q(x) = R(x^2)$ или $Q(x) = xR(x^2)$, за некој полином R, т.е. $P(x) = x^iR(x^4)$ за некој $i \in \{0,1,2,3\}$. Продолжувајќи на ист начин добиваме $P(x) = x^iS(x^{2^k})$ за секој $k \in \mathbb{N}$ и некој $i \in \{0,1,...,2^k\}$. Сега е доволно да земеме $2^k > \deg P$, од што следува дека $S = \text{const}$, па затоа $P(x) = Cx^i$ за некој $C \in \mathbb{R}$. Со едноствна проверка се добива $P(x) = 16(\frac{1}{4}x)^n$ за некој $n \in \mathbb{N}_0$.

6. Определи ги сите реални полиноми P за кои

$$P(x)^2+P(\tfrac{1}{x})^2=P(x^2)P(\tfrac{1}{x^2}). \qquad (1)$$

Решение. Според задача 4 постои полином Q таков што или $P(x)=Q(x^2)$ или $P(x)=xQ(x^2)$. Во првиот случај

$$Q(x^2)^2+Q(\tfrac{1}{x^2})^2=Q(x^4)Q(\tfrac{1}{x^4}),$$

па затоа $Q(x)^2+Q(\tfrac{1}{x})^2=Q(x^2)Q(\tfrac{1}{x^2})$, што е истата релација која ја задоволува P, а слично во вториот случај важи $xQ(x)^2+\tfrac{1}{x}Q(\tfrac{1}{x})^2=Q(x^2)Q(\tfrac{1}{x^2})$, што не е можно бидејќи степенот на левата страна е непарен, а степенот на десната страна е парен. Според тоа, $P(x)=Q(x^2)$ каде Q е решение на (1). Сега ако го разгледуваме решението со најмал степен, лесно заклучуваме дека $P=\text{const}$.

7. Дали постојат нелинерани полиноми P и Q такви што

$$P(Q(x))=(x-1)(x-2)...(x-15). \qquad (1)$$

Решение. Нека претпоставиме дека постојат полиноми P и Q такви што важи (1). Тогаш $\deg P\cdot\deg Q=15$, па затоа $\deg P=k$, каде $k\in\{3,5\}$. Ако ставиме $P(x)=c(x-a_1)...(x-a_k)$, тогаш

$$c(Q(x)-a_1)...(Q(x)-a_k)=(x-1)(x-2)...(x-15).$$

Според тоа, корените на полиномите $Q(x)-a_i$ се различни и го формираат множеството $\{1,2,...,15\}$. Но, овие полиноми се разликуваат само во последниот коефициент. Разгледувајќи ја парноста на преостанатите коефициенти заклучуваме дека секој од овие полиноми (кои се три или пет) имаеднаков број непарни корени. Последното не е можно, бидејќи вкупно има 8 непарни корени, а бројот 8 не е делив ниту со 3 ниту со 5.

8. Определи ги сите реални полиноми P такви што

$$P(x)^2-1=4P(x^2-4x+1). \qquad (1)$$

Решение. Нека претпоставиме дека полиномот P не е константен. Нека $\deg P=n$ и $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_0$. Заменуваме во (1) и споредувајќи ги коефцициентите на левата и десната страна од добиеното равенство заклучуваме дека коефициентите на полиномот P се рационални. Од друга страна, за $a=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ важи $a=a^2-4a+1$, па затоа за $x=a$ добиваме $P(a)=b$, каде $b^2-4b-1=0$, т.е. $b=2\pm\sqrt{5}$. Последното не е можно, бидејќи од тоа што P е полином со рационални коефциенти следува дека

$P(a)$ мора да биде од облик $p+q\sqrt{21}$ за некои $p,q\in\mathbb{Q}$. Конечно, од добиената противречност следува дека $P=\mathrm{const}$.

9. Определи ги сите неконстантни полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ со реални коефициенти такви што

$$P(x)Q(x+1)=P(x+2004)Q(x),\text{ за секој } x\in\mathbb{R}.$$

Решение. Нека $R(x)=P(x)P(x+1)...P(x+2003)$. Од условот следува, дека ако x е поголем од реалните корени на $P(x)$, тогаш

$$\frac{Q(x)}{R(x)}=\frac{Q(x+1)}{R(x+1)}. \qquad (1)$$

Понатаму, со индукција добиваме дека $\frac{Q(x)}{R(x)}=\frac{Q(x+n)}{R(x+n)}$ за секој природен број n. Бидејќи границата $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Q(x+n)}{R(x+n)}$ е број кој не зависи од x или е еднаква на бесконечност, а од друга страна таа граница е еднаква на $\frac{Q(x)}{R(x)}$. Според тоа, $Q(x)=cR(x)$ за секој x, каде $c\neq 0$ е константа. Обратно, јасно е дека ако $Q(x)=cP(x)P(x+1)...P(x+2003)$, тогаш условот на задачата е исполнет.

10. Определи ги сите полиноми $P(x)$ со реални коефициенти такви што

$$P(x-1)P(x+1)>P^2(x)-1,$$

за секој $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека претпоставиме дека $\deg P=n\geq 2$ и

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...,\ a_0\neq 0.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}P(x\pm 1)&=a_0(x\pm 1)^n+a_1(x\pm 1)^{n-1}+a_2(x\pm 1)^{n-2}+...\\&=a_0x^n+(a_1\pm na_0)x^{n-1}+(a_2\pm na_1+\tfrac{n(n-1)}{2}a_0)x^{n-2}+...\end{aligned}$$

и затоа

$$P(x-1)P(x+1)=a_0^2x^{2n}+2a_0a_1x^{2n-1}+(a_1^2+2a_0a_2-na_0^2)x^{2n-2}+....$$

Од друга страна

$$P^2(x)=a_0^2x^{2n}+2a_0a_1x^{2n-1}+(a_1^2+2a_0a_2)x^{2n-2}+...$$

и затоа

$$1>P^2(x)-P(x-1)P(x+1)=na_0^2x^{2n-2}+... \ .$$

Последното неравенство не важи за секој доволно голем x, што е противречност. Според тоа, $P(x)=ax+b$ и тогаш $1>P^2(x)-P(x-1)P(x+1)=a^2$, од каде добиваме $a\in(-1,1)$.

11. Нека $n\geq 3$ е природен број. Определи ги сите неконстантни полиноми со реални коефициенти $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ такви што
$$f_k(x)f_{k+1}(x)=f_{k+1}(f(_{k+2}(x)),\quad 1\leq k\leq n\,,$$
за секој реален број x ($f_{n+1}(x)=f_1(x), f_{n+2}(x)=f_2(x)$).

Решение. Нека $\deg f_k=\alpha_k\in\mathbb{N}, 1\leq k\leq n$. Во натамошните разгледувања индексите ќе ги разгледуваме по модул n. Од условот на задачата следуваат равенствата $\alpha_k+\alpha_{k+1}=\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}$, т.е. α_{k+1} е делител на α_k за секој $k=1,2,...,n$ и како $\alpha_k=\alpha_{k+1}(\alpha_{k+2}-1)$ заклучуваме дека $\alpha_1=...=\alpha_n=2$.

Нека $f(x)=a_kx^2+b_kx+c_k$, $1\leq k\leq n$, при што $a_k\neq 0$. Со споредување на коефициентите пред x^4 во дадените равенства добиваме $a_k=a_{k+2}^2$, за $1\leq k\leq n$. Ако $n=2m$, тогаш
$$a_1=a_3^2=a_5^{2^2}=...=a_{2m-1}^{2^{m-1}}=a_1^{2^m}$$
и затоа $a_1=a_3=...=a_{2m-1}=1$. Аналогно добиваме $a_2=a_4=...=a_{2m}=1$. Ако n е непарен број, тогаш на истиот начин добиваме $a_1=a_2=...=a_n=1$.

Споредувајќи ги коефициентите пред x^3 во дадените равенства добиваме $b_k+b_{k+1}=2b_{k+2}$, $1\leq k\leq n$. Нека $\min\{b_1,b_2,...,b_n\}=b_s=b$. Тогаш од равенството $b_{s-2}+b_{s-1}=2b_s$ следува дека $b_{s-2}=b_{s-1}=b$ и продолжувајќи на истиот начин добиваме $b_1=b_2=...=b_n=b$. Сега споредувајќи ги коефициентите пред x^2 во дадените равенства добиваме $c_k+c_{k+1}=2c_{k+2}$, $1\leq k\leq n$. Ако ги собереме овие равенства добиваме $nb=0$, т.е. $b=0$. На потполно ист начин заклучуваме дека $c_1=c_2=...=c_n=c$. Според тоа, $f_k(x)=x^2+c$ и ако замениме во условот на задачата добиваме $(x^2+c)(x^2+c)=(x^2+c)^2+c$, од каде добиваме $c=0$. Конечно, бараните полиноми се
$$f_k(x)=x^2,\ 1\leq k\leq n\,.$$

12. Определи ги реалните броеви a за кои постои рационална функција $f(x)$ таква што $f(x^2)=f(x)^2-a$.

Решение. Нека $f=\frac{P}{Q}$, каде P и Q се заемно прости полиноми и Q е моничен (водечкиот коефициент е 1). Со споредување на водечкиот коефициент заклучуваме дека и P е моничен. Сега, равенството од условот на задачата го добива видот $\frac{P(x^2)}{Q(x^2)}=\frac{P(x)^2}{Q(x)^2}-a$. Полиномите $P(x^2)$ и $Q(x^2)$ се заемно прости (ако тие имаат заедничка нула, тогаш заедничка нула имаат и полиномите P и Q), па од последното равенство следува дека $Q(x^2)=Q(x)^2$. Оттука следува дека $Q(x)=x^n$ за некој $n\in\mathbb{N}$. Сега добиваме

$$P(x^2)=P(x)^2-ax^{2n}.$$

Нека $P(x)=x^m+a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1x+a_0$. Со споредување на коефициентите на $P(x)^2$ и $P(x^2)$ добиваме дека

$$a_{n-1}=...=a_{2m-n+1}=0,\ a_{2m-n}=\tfrac{a}{2},\ a_1=...=a_{m-1}=0 \text{ и } a_0=1.$$

Оттука заклучуваме дека или $a=0$ или $a=2$ и $2m-n=0$.

13. а) Определи ги сите полиноми $f(x,y)$ со реални коефициенти такви што $f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))$ за секои $x,y,z\in\mathbb{R}$.

б) Дали постои функција $f:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ која не е полином и горното равенство е точно за секои $x,y,z\in\mathbb{R}^+$.

Решение. а) Нека m (односно n) е степен на $f(u,v)$ како полином од u (односно v). Од даденото равенство следува дека $m^2=m$ и $n^2=n$. Значи, $m,n\in\{0,1\}$, т.е. $f(u,v)=auv+bu+cv+d$. Ако замениме во даденото равенство добиваме дека $f(u,v)$ го има еден од следниве облици

$$u,\ v \text{ и } auv+bu+bv+d,$$

каде $ad=b^2-b$.

б) Постои, на пример $f(u,v)=\frac{u+v}{1+uv}$.

14. Определи ги сите полиноми p со реални коефициенти за кои важи $p(0)=0$ и $f(f(n))+n=4f(n)$ за секој $n\in\mathbb{N}$, каде $f(n)=[p(n)]$.

Решение. Ако $\deg p=k>1$, тогаш

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty \text{ и } 4=\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-x}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(f(x))}{f(x)}=\infty,$$

што е противречност. Според тоа, $k=1$ и $p(x)=cx$. Понатаму,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=c \text{ и } 4c-1=\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(f(x))}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}=c^2,$$

од каде следува $c=2\pm\sqrt{3}$. Притоа $c=2-\sqrt{3}$ отпаѓа бидејќи тогаш

$$f(f(1))=0\neq 4f(1)-1.$$

Значи, $p(x)=cx$ каде $c=2+\sqrt{3}$. Останува да докажеме дека овој полином ги задоволува условите на задачата, т.е. дека

$$[c[cn]]=4[cn]-n \text{ за секој } n\in\mathbb{N}.$$

За $m=[cn]$ имаме

$$[cm]=[4m-\tfrac{m}{c}]=4m-[\tfrac{m}{c}]-1,$$

но бидејќи $c(n-1)<m=[cn]<cn$ важи $[\tfrac{m}{c}]=n-1$, па тврдењето одма следува.

V.7. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Докажи дека за секој природен број n постои единствен полином P, $\deg P=n$ со реални коефициенти, за кој функцијата $xP^2(x)-(P(x)-1)^2$ е непарна.

Решение. Нека

$$P(x)=Q(x^2)+xR(x^2) \tag{1}$$

е полином кој ги задоволува условите на задачата. Од

$$\begin{aligned}xP^2(x)-(P(x)-1)^2 &= -(Q(x^2)-1)^2-x^2R^2(x^2)+2x^2Q(x^2)R(x^2)+\\ &+x[Q^2(x^2)+x^2R^2(x^2)-2Q(x^2)R(x^2)+2R(x^2)],\end{aligned}$$

следува

$$(Q(x)-1)^2+xR^2(x)-2xQ(x)R(x)=0\,. \tag{2}$$

Оттука лесно следува дека $\deg Q=\deg R$ илиу $\deg Q=1+\deg R$. Значи, ако $\deg P=2n-1$, тогаш $\deg Q=\deg R=n-1$, а ако $\deg P=2n$, тогаш важи $\deg Q=1+\deg R=n$.

Понатаму, ќе го користиме методот на бесконечно спуштање.

Нека $\deg P=2n$. Од Виетовите формули следува дека полиномите $R(x)$ и $f(x)=-Q(x)+2xR(x)+2$ ја задоволуваат (2), при што $Q(x)f(x)=xR^2(x)-1$.

Во случајов $\deg f=n-1$. За полиномот $g(x)=f(x^2)+xR(x^2)$ важи (1) при што $\deg g=2n-1$ (Зошто?).

Слично се добива дека, ако $\deg P=2n-1$ и $h(x)=2Q(x)-R(x)$, тогаш полиномот $g(x)=Q(x^2)+xh(x^2)$ го задоволува (1) и $\deg g=2n-2$.

Продолжувајќи ја постапката доаѓаме до константен полином P_0 кој ја задоволува (1), т.е. $P_0\equiv 1$.

Обратно, ако $Q_0\equiv 1$ и $R_0\equiv 0$,

$$Q_{2n-1}=Q_{2n-2},\ R_{2n-1}=2Q_{2n-2}-R_{2n-2},$$
$$Q_{2n}=2xR_{2n-1}+2-Q_{2n-1},\ R_{2n}=R_{2n-1},$$

тогаш $P_n(x)=Q_n(x^2)+xR_n(x^2)$ го задоволува (1) и важи $\deg P_n=n$.

2. Нека $P(x)$ полином со реални коефициенти. Ако постои цел број t за кој $P(t)$ не е цел број, докажи дека такви цели броеви t има бесконечно многу.

   Решение. Нека претпоставиме дека тврдењето не е точно. Нека P е контрапример со најмал степен n (очигледно $n>0$) и нека $t_1<t_2<...<t_m$ се сите цели броеви t за кои $P(t)\notin\mathbb{Z}$. Нека $Q(x)=P(x+1)-P(x)$. Јасно, $Q(t_m)\notin\mathbb{Z}$ и $Q(x)\in\mathbb{Z}$ за $x\in\mathbb{Z}$ секогаш кога x и $x+1$ не припаѓаат на множеството $\{t_1,t_2,...,t_m\}$. Според тоа, Q е контрапример, но неговиот степен е $n-1$, што е противречност.

3. Нека a реален број од интервалот $[2+\sqrt{2},4]$. Определи ја најмалата можна вредност на $|z^2-az+a|$ каде $z\in\mathbb{C}$ и $|z|\le 1$.

   Решение. Нека z_1 и z_2, $z_1=\overline{z_2}=\frac{a+i\sqrt{4a-a^2}}{2}$ се корените на $z^2-az+a=0$.

   Имаме $|z^2-az+a|=|z-z_1|\cdot|z-z_2|=\overline{MA}\cdot\overline{MB}$, каде M,A,B се точките чи афикси се z,z_1,z_2, соодветно. Нека T е точката со афикс 1 и M_1 е пресечната точка на AM и единичната кружница кога $\measuredangle AM_1B$ е остар, а кога тој агол е тап M_1 е пресечната точка на BM и единичната кружница.

   Имаме

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}\ge\overline{M_1A}\cdot\overline{M_1B}\ge\overline{TA}\cdot\overline{TB}=\overline{TA}^2,$$

   па затоа

$$\min|z^2-az+a|=|1-z_1|^2=(\tfrac{a}{2}-1)^2+(\tfrac{\sqrt{4a-a^2}}{2})^2=1.$$

4. Полиномот $P(x)$ е таков што за секој $y\in\mathbb{Q}$ постои $x\in\mathbb{Q}$ таков што $P(x)=y$. Докажи дека P е линеарен полином.

   Решение. Ќе ја користиме следнава:

   Теорема (Лагранжов интерполационен полином). За дадени броеви $y_0,...,y_n$ и различни $x_0,...,x_n$ постои единствен полином $P(x)$ од $n-$ти степен таков што $P(x_i)=y_i$ за $i=0,1,2,...,n$ и тој е даден со формулата

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\prod_{j\ne i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}.\ \square$$

   Нека $\deg P=n$ и да земеме $n+1$ различни рационални броеви $y_0,...,y_n$. Според условот на задачата постојат рационални броеви $x_0,...,x_n$ такви што

$P(x_i) = y_i$, за $i = 1, 2, ..., n$. Јасно, броевите $x_0, ..., x_n$ се различни. Според тоа, Лагранжовиот интерполационен полином определен со паровите (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., n$ полиномот се совпаѓаат во $n+1$ различна точка, па затоа тие се идентични. Но, $x_i, y_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, 2, ..., n$, па затоа P е полином со рационални коефициенти. Понатаму, постои $m \in \mathbb{N}$ таков што коефициентите на полиномот $mP(x)$ се целобројни. Нека p е прост број кој не е делиел на m. Тврдиме дека, ако P не е линерен полином, тогаш не постои рационален број x таков што $P(x) = \frac{1}{mp}$. Навистина, ако таков x постои тогаш ќе важи $Q(x) = mpP(x) - 1 = 0$. Меѓутоа, полиномот $Q(x)$ е иредуцибилен, бидејќи според проширениот Ајзенштајнов критериум неразложлив е полиномот $x^n Q(\frac{1}{n})$, бидејќи сите коефициенти освен првиот му се деливи со p и слободниот член не е делив со p^2.

5. Даден е природен број $N \geq 3$. Ќе велиме дека множество од N точки во координатната рамнина е допустливо ако апсцисите на точките се различни и секоја од тие точки е обоена или во црвена или во сина боја. Ќе велиме дека полиномот $P(x)$ разделува едно допустливо множество точки ако над графикот на $P(x)$ нема црвени точки, а под него нема сини точки, или обратно (на самиот график може да лежат точки од двете бои). Определи го најмалиот природен број k за кој секое допустливо множество од N точки може да се раздели од полином чиј степен е помал или еднаков на k.

Решение. *Одговор*: $k = N - 2$.

Да разгледаме кои било $N-1$ од дадените точки. Тогаш полиномот од степен помал или еднаков на $N-2$ чиј график минува низ дадените точки (интерполација на Лагранж), го разделува нашето множество.

Останува да конструираме допустливо множество, кое не може да биде разделено од полином со степен помал од $N-2$. Да фиксираме полином $f(x)$ со степен $N-2$ и на неговиот график да поставиме N сини и црвени точки, при што боите наизменично се менуваат. Да претпоставиме дека полином со степен помал или еднаков на $N-3$ го разделува ова допустливо множество. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека под графикот на $P(x)$ нема црвени точки, а над него нема сини точки.

Нека $Q(x) = f(x) - P(x)$. Тогаш степенот на полиномот $Q(x)$ е $N-2>1$ и ако r и b се апсциси на произволни црвена и сина точка, тогаш од $P(r) \leq f(r)$ и $P(b) \geq f(b)$ следува дека $Q(r) \geq 0$ и $Q(b) \leq 0$.

Да забележиме, дека ако за некои реални броеви $s < t$ е познато дека

$Q(s) \le Q(t)$, тогаш во отворениот интервал (s,t) постои точка u за која $Q'(u) > 0$ (користиме дека Q не е константен, т.е. расте на некој подинтервал од (s,t)).Тоа значи дека во секој интервал меѓу црвена и сина точка (црвената е лево од сината) постои точка во која изводот Q' е позитивен. Аналогно, во секој интервал меѓу сина и црвена точка (сината е лево од црвената) постои точка во која изводот Q' е негативе,. Најдовме $N-1$ точка во која Q' наизменично го менува знакот. Тоа значи дека Q' има најмалку $N-2$ различнн реалични корени, што противречи на фактот дека $\deg Q' \le N-3$.

6. Квадратните триноми $f(x)$ и $g(x)$ имаат реални коефициенти и за секој позитивен број x за кој $g(x)$ е цел број важи дека и $f(x)$ е цел број. Докажи дека постојат цели броеви m и n такви што $f(x) = mg(x) + n$ за секој $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Нека $g(x) = px^2 + qx + r$, при што можеме да сметаме дека $p > 0$. Од $g(x) = p(x+\frac{q}{2p})^2 + r - \frac{q^2}{4p}$ по замената на x со $x+\frac{q}{2p}$ задачата ја сведуваме на квадратните триноми $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = px^2 + s,\ p > 0$. Нека k е цел број, таков што $k > s$ и $\sqrt{\frac{k-s}{p}} > \frac{q}{2p}$. Од $g(\sqrt{\frac{k-s}{p}}) = k$ е цел број следува дека $f(\sqrt{\frac{k-s}{p}}) = \frac{a(k-s)}{p} + b\sqrt{\frac{k-s}{p}} + c$ е цел број. Тогаш

$$f(\sqrt{\frac{k+1-s}{p}}) - f(\sqrt{\frac{k-s}{p}}) = \frac{b}{\sqrt{p}}\frac{1}{\sqrt{k+1-s}+\sqrt{k-ss}} + \frac{a}{p} \qquad (1)$$

е цел број за сите доволно големи k. Оттука следува дека $\frac{a}{p}$ е цел број. Навистина, нека претпоставиме дека $\frac{a}{p}$ не е цел број. Ако $b > 0$, тогаш избираме k толку голем што

$$\frac{b}{\sqrt{p}}\frac{1}{\sqrt{k+1-s}+\sqrt{k-ss}} \le [\frac{a}{p}] + 1 - \frac{a}{p},$$

а ако $b < 0$ избираме k таков што

$$\frac{b}{\sqrt{p}}\frac{1}{\sqrt{k+1-s}+\sqrt{k-ss}} > [\frac{a}{p}] - \frac{a}{p}.$$

И во двата случаи добиваме противречност со тоа дека (1) е цел број. Сега следува дека $\frac{b}{\sqrt{p}}\frac{1}{\sqrt{k+1-s}+\sqrt{k-ss}}$ е цел број за секој доволно голем k. Последното е можно само ако $b = 0$, бидејќи при доволно големи k горниот број по модул е помал од 1. Нека $\frac{a}{p} = m$. Тогаш $f(\sqrt{\frac{k-s}{p}}) = m(k-s) + c$ при доволно големи вредности на k е цел број, па затоа c е цел број. Нека $n = c - ms$.

Сега е јасно дека $f(x)=mg(x)+n$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

7. Нека за полиномот P, $\deg P=n$ важи $P(i)=\binom{n+1}{i}^{-1}$, за $i=0,1,2,...,n$. Определи го $P(n+1)$.

Решение. При решавање на оваа задача ќе ја користиме конечната разлика на полином P која се дефинира како $P^{[1]}(x)=P(x+1)-P(x)$, при што важи $1+\deg P^{[1]}=\deg P$. Понатаму, $k-$тата конечна разлика се дефинира со $P^{[k]}=(P^{[k-1]})^{[1]}$ и за истата важи $k+\deg P^{[k]}=\deg P$. Со индукција лесно се докажува дека

$$P^{[k]}(x)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}P(x+i). \qquad (1)$$

Понатаму, ако се искористи дека ако $\deg P=n$, тогаш $P^{[n]}(x)$ е константа и $P^{[n+1]}(x)=0$, може да се докаже дека

$$P(x+n+1)=P(x+n)+\sum_{i=1}^{n}P^{[i]}(x+n-i)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n+1}{i}P(x+i). \qquad (2)$$

На читателот за вежба му препорачуваме да ги докаже горните тврдења.
Да се вратиме на задачата. Ако во (2) ставиме $x=0$ добиваме

$$P(n+1)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n+1}{i}P(i)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n+1}{i}\binom{n+1}{i}^{-1}$$
$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}=\begin{cases}1, & 2\mid n,\\ 0, & 2\nmid n.\end{cases}$$

8. Ако $P(x)$ е со парен $n-$ти степен, $P(0)=1$ и $P(i)=2^{i-1}$ за $i=1,2,...,n$, докажи дека $P(n+2)=2P(n+1)-1$.

Решение. Имаме $P^{[1]}(0)=0$ и $P^{[1]}(i)=2^{i-1}$ за $i=1,2,...,n-1$. Понатаму, $P^{[2]}(0)=1$ и $P^{[2]}(i)=2^{i-1}$ за $i=1,2,...,n-2$ итн. Воопшто лесно се покажува дека $P^{[k]}(i)=2^{i-1}$ за $i=1,2,...,n-k$ и $P^{[k]}(0)$ е 0 ако k е непарен, а 1 ако k е парен. Сега, ако земеме $x=0$ од равенството (2) во претходната задача добиваме

$$P(n+1)=P(n)+\sum_{i=1}^{n}P^{[i]}(n-i)=\begin{cases}2^{n}, & 2\mid n\\ 2^{n}-1, & 2\nmid n.\end{cases}$$

Слично, наоѓаме $P(n+2)=2^{2n+1}-1$.

9. Нека P е полином од $n-$ти степен таков што за $i=0,1,2,...,n$ бројот $P(i)$ е еднаков на остатокот кој се добива при делење на i со 2. Определи го $P(n+1)$.

Решение. Од условот на задачата следува дека $P^{[i]}(x)=(-2)^{i-1}(-1)^{x}$ за $x=0,1,2,...,n-i$. Сега, ако земеме $x=0$ од равенството (2) во задача 7 добиваме

$$P(n+1)=P(n)+\sum_{i=1}^{n}P^{[i]}(n-i)=\begin{cases}2^{n}, & 2\mid n\\ 1-2^{n}, & 2\nmid n.\end{cases}$$

10. Нека P е полином од $n-$ти степен таков што $P(i)=\frac{1}{i}$ за $i=1,2,...,n+1$. Определи го $P(n+2)$.

Решение. Ако во равенството (2) во задача 7 земеме $x=1$ добиваме

$$P(n+2)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n+1}{i}P(i)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\cdot\frac{1}{i+1}\binom{n+1}{i}$$

$$=\frac{1}{n+2}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n+2}{i+1}=\begin{cases}0, & 2\nmid n\\ \frac{2}{n+2}, & 2\mid n.\end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Andreescu, A., Feng, Z.: Mathematical Olympiads 1998–1999, Problems and Solutions from Around the World, TheMathematical Association of America, 2000
2. Andreescu, T. , Feng, Z. : Mathematical Olympiads 1999–2000, Problems and Solutions from Around the World, TheMathematical Association of America, 2002
3. Andreescu, T., Feng, Z.: Mathematical Olympiads 2000–2001, Problems and Solutions from Around the World, TheMathematical Association of America, 2003
4. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Olympiads 2003, The Mathematical Association of America, 2004
5. Andreescu, T., Kedlaya, K., Zeitz, P.: Mathematical Contests 1995-1996, Olympiads Problems and Solutions from Around the World, American Mathematics Competitions, 1997
6. Andreescu, T., Kedlaya, K.: Mathematical Contests 1996-1997, Olympiads Problems and Solutions from Around the World, American Mathematics Competitions, 1998
7. Andreescu, T., Kedlaya, K.: Mathematical Contests 1997-1998, Olympiads Problems and Solutions from Around the World, American Mathematics Competitions, 1999
8. Djukić, D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium - A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959-2009 (Second Edition), Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011
9. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Olympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, 2007
10. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
11. Radovanović, M.: Funkcionalne jednačine (dodatnanastava za drugi razred), Matematička gimnazija, Beograd, 2005
12. Shortlisted Problems with Solutions, 47th International Mathematical Olympiad, Slovenia, 2006
13. Shortlisted Problems with Solutions, 48th International Mathematical Olympiad, Vietnam, 2007
14. Shortlisted Problems with Solutions, 49th International Mathematical Olympiad, Spain, 2008
15. Shortlisted Problems with Solutions, 50th International Mathematical Olympiad, Germany, 2009

16. Shortlisted Problems with Solutions, 51th International Mathematical Olympiad, Kazakhstan, 2010
17. Shortlisted Problems with Solutions, 52th International Mathematical Olympiad, Netherlands, 2011
18. Shortlisted Problems with Solutions, 53th International Mathematical Olympiad, Argentina, 2012
19. Shortlisted Problems with Solutions, 54th International Mathematical Olympiad, Colombia, 2013
20. Shortlisted Problems with Solutions, 55th International Mathematical Olympiad, South Africa, 2014
21. Shortlisted Problems with Solutions, 56th International Mathematical Olympiad, Thailand, 2015
22. Shortlisted Problems with Solutions, 57th International Mathematical Olympiad, Hong Kong, 2016
23. Shortlisted Problems with Solutions, 58th International Mathematical Olympiad, Brazil, 2017
24. Shortlisted Problems with Solutions, 59th International Mathematical Olympiad, Romania, 2018
25. Shortlisted Problems with Solutions, 60th International Mathematical Olympiad, United Kingdom, 2019
26. Xiong Bin, Lee Peng Yee: Mathematical Olympiad in China (Problem and Solutions), East China Normal University Press & World Scientific, 2007
27. Бойваленков, П., Димитров, С., Маринов, М., Тодоров, Т.: Национални олимпиади по математика 2015-2016, УНИМАТ СМБ, София, 2018
28. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
29. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
30. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
31. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
32. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
33. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
34. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
35. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
36. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015

37. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
38. Ђукић, Д., Радовановић, М.: Математичке олимпијаде средњошколаца од 2012 до 2019 године, ДМ Србије, Београд, 2012
39. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, Београд, 2012
40. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019
41. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019