

I и II година

Секоја од задачите со реден број од 1 до 10 се вреднува со 3 поени

1. Колку е количникот од делењето кога бројот 20102010 ќе го поделиме со 2010.

- (A) 11 (B) 101 (C) 1001 (D) 10001 (E) не е природен број

Решение. Со непосредно пресметување добиваме
 $20102010 : 2010 = 10001$

$$\begin{array}{r} 2010 \\ 02010 \\ 2010 \\ \hline 0 \end{array}$$

2. На едно тестирање Игор освоил 85% од поените на тестот. Давор, на истиот тест освоил 90% од поените. Давор освоил само еден поен повеќе од Игор.

Кој е максималниот број на поени на тестот?

- (A) 5 (B) 17 (C) 18 (D) 20 (E) 25

Решение. Од условот на задачата имаме дека еден поен од поените на тестот е 5% поените на тестот. Сега е јасно дека 20 поени се сто проценти од поените на тестот. Значи на тестот може да се освојат максимално 20 поени.

3. Двете редици во квадратната шема

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	*

имаат ист збир на броевите запишани во нивните единечните квадратчиња. Кој е бројот запишан на местото на *?

- (A) 1010 (B) 1020 (C) 1910 (D) 1990 (E) 2020

Решение. Збирот на броевите во првата редица е

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+2010 = \frac{10 \cdot 11}{2} + 2010 = 55 + 2010 = 2065.$$

Ако бројот што го бараме го означиме со x , тогаш

$$11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+x = 2065$$

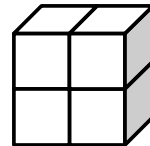
$$10 \cdot 10 + 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+x = 2065$$

$$100+55+x = 2065.$$

Сега е јасно дека $x = 2065 - 155 = 1910$.

4. Телото на цртежот е составено од четири идентични коцки. Површината на секоја коцка е 24 cm^2 . Колку е површината на телото?

- (A) 80 cm^2 (B) 64 cm^2 (C) 40 cm^2 (D) 32 cm^2 (E) 24 cm^2



Решение. Површината на една страна на коцката со површина 24 cm^2 е еднаква на $24 : 6 = 4 \text{ cm}^2$. Бидејќи телото е составено од 16 еднакви квадрати со површина 4 cm^2 , добиваме дека неговата плоштина е еднаква на

$$16 \cdot 4 \text{ cm}^2 = 64 \text{ cm}^2.$$

5. Јана за секој роденен добива онолку цвеќиња колку што полни години. Јана досега добила 120 цвеќиња. Колку години има Јана сега?

(A) 10

(B) 12

(C) 14

(D) 15

(E) 20

Решение. Ако Јана има n -години, тогаш од условот на задачата

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 120.$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 120$$

$$n(n+1) = 240.$$

Производот на два последователни броеви е 120 ако и само ако тие броеви се 15 и 16.

Значи, Јана има 15 години.

6. Една хартиена лента ја превиткуваме на половина три пати последователно, а потоа целосно ја одвиткуваме. При тоа гледаме дека се добиени седум прекршувања, некои се нагоре а некои надолу.

Кој од следните погледи, гледајќи ја одвитканата трака бочно не може да се добие на тој начин?

(A)

(B)

(C)

(D)

(E)

Решение. Со непосредна проверка, јасно е дека не може да се добие линијата под (D). Тоа може да се направи и со употреба на една хартиена трака, која на опишаниот начин ќе ја превиткаме трипати а потоа ќе ја одвиткаме. Потоа треба да направиме споредба.

7. Дадени се шест точки кои се темиња на единечни квадрати од една квадратна шема (види цртеж). Давид некои од нив ги поврзал со отсечки и добил една геометриска фигура. Добиената геометриска фигура сигурно не е:

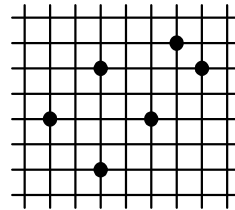
(A) квадрат

(B) паралелограм кој не е ромб

(C) трапез

(D) тапоаголен триаголник

(E) правоаголник кој не е квадрат



Решение. Точките ќе ги означиме со A, B, C, D, E и F како на цртежот. Сега $ABCD, ACED, CEFD$ и FDA се квадрат, паралелограм што не е ромб, трапез и тапоаголен триаголник соодветно. Значи, не постои правоаголник кој не е кватрат.

8. Од цртежот може да забележиме дека $1+3+5+7=4 \cdot 4$. Колку е вредноста на збирот $1+3+5+7+9+11+13+15+17$?

- (A) $14 \cdot 14$ (B) $9 \cdot 9$ (C) $4 \cdot 4 \cdot 4$ (D) $16 \cdot 16$ (E) $4 \cdot 9$

Решение. Од цртежот можеме да забележиме дека збирот $1+3+5+7$ е еднаков на бројот на темиња на единечни квадратчиња на кои е разделен кватрат со димензии 4×4 .

Аналогно, збирот $1+3+5+7+9+11+13+15+17$ е еднаков на бројот на темиња на единечни кватратчиња на кои е разделен кватрат со страна

$$\frac{17+1}{2} = 9.$$

Тој број е $9 \cdot 9 = 81$, па според тоа $1+3+5+7+9+11+13+15+17 = 9 \cdot 9 = 81$.

9. Јасмина за својот распуст ја посетила Верона, и планира да ги посети и петте фамозни стари мостови на реката Адига, сите да ги премине најмалку по еднаш при една прошетка. Прошетката ја почнала и завршила од автобуската станица, ги поминала сите пет мостови притоа минувајќи само по нив. Реката ја поминала n пати. Која вредност за n е можна?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

Решение. Автобуската станица се наоѓа на една страна од реката. При првото, третото, петтото, седмото и секое непарно преминување преку мост таа се наоѓа на спротивна страна на реката од страната на која се наоѓа автобуската станица.

Значи, единствено можности се 4 и 6. Со четири поминувања еден мост ќе остане непоминат. Значи, останува $n = 6$.

10. Нека $ABCE$ е квадрат и BCF и CDE се рамно-страни триаголници (види цртеж). Ако должината на AB е 1, колку е должината на FD ?

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{5} - 1$ (E) $\sqrt{6} - 1$

Решение. Од условот на задачата триаголниците $\triangle BCF$ и $\triangle ECD$ се рамнострани триаголници. Според тоа,

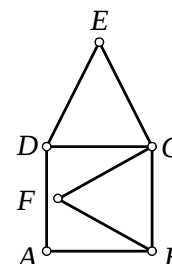
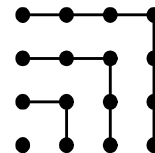
$$\angle BCF = 60^\circ \text{ и } \angle ECD = 60^\circ.$$

Сега,

$$\angle ECF = \angle ECD + \angle DCF = 60^\circ + 30^\circ.$$

Значи, триаголникот FCD е правоаголен. Бидејќи $\overline{CD} = \overline{CF} = 1$, добиваме

$$\overline{FD} = \sqrt{\overline{FC}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{2}.$$



Задачите под реден број од 11 до 20 се вреднуваат со 4 поени

11. Учителот на Давор вели дека производот на неговите години и годините на неговиот татко е бројот 2010. Кога е роден учителот на Давор?

- (A) 1943 (B) 1953 (C) 1980 (D) 1995 (E) 2005

Решение. Бројот 2010 можеме да го запишеме во облик

$$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67.$$

Ако x е бројот на годините на учителот, а y бројот на годините на неговиот татко, тогаш $x < y$ и $xy = 2010$. Сега јасно е дека, за да имаме години на татко и син, од кои синот е учител, дека $x = 30$, $y = 67$. Значи, синот е роден 1980-та година.

12. Колку е вредноста на аголот, означен на цртежот со знакот прашалник?

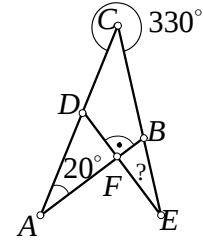
- (A) 10° (B) 20° (C) 30° (D) 40° (E) 50°

Решение. Ќе воведеме ознаки како на цртежот. Во триаголникот $\triangle ABC$ имаме $\angle A = 20^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, па според тоа

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ.$$

Сега, во триаголникот $\triangle BEF$ имаме, $\angle F = 90^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, од каде добиваме

$$\angle E = 180^\circ - (90^\circ + 50^\circ) = 40^\circ.$$



13. Колку има природни броеви, со збир на цифри е 2010, а производот на цифри 2?

- (A) 2010 (B) 2009 (C) 2008 (D) 1005 (E) 1004

Решение. За да производот на цифрите на еден природен број е 2, тој треба да е запишан само со цифрите 1 и 2, ја нема цифрата 0. Во неговиот декаден запис има само една цифра 2, а сите други се единици. За да збирот на цифрите на бројот $a_1 a_2 \dots a_{i-1} 2 a_{i+1} \dots a_{n-1} a_n$ е 2010, треба

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1} + 2 + a_{i+1} + \dots + a_{n-1} + a_n = 2010$$

$$(n-1) \cdot 1 + 2 = 2010,$$

$$n-1 = 2008,$$

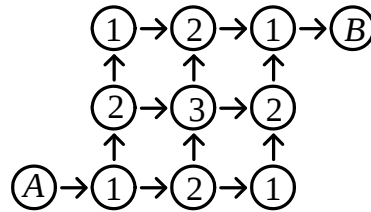
Значи бројот е 2009-цифрен, една е цифра 2, а другите се 1. Такви броеви се

$$2 \underbrace{11\dots11}_{2008\text{-пати } 1}, 12 \underbrace{11\dots11}_{2007\text{-пати } 1}, \dots, \underbrace{11\dots11}_{2008\text{-пати } 1} 2.$$

14. Во фигурата на цртежот дозволено е движење од кругче до кругче во насока на стрелките. При секое движење се пресметува збирот на броевите во кружниците низ кои се минува.

Колку различни зборови може да се добијат тргнувајќи од кругчето A и стасувајќи до кругчето B.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6



Решение. Во девет кругчиња се запишани по еден број. По сите можни оски на симетрија на квадратот запишаните броеви се симетрично распоредени, а исто така и централно симетрично. Зарди тоа има само два можни збира и тоа

$$1+2+3+2+1=9$$

$$1+2+1+2+1=7.$$

15. Во еден месец, три вторници се во парен датум. Кој ден во седмицата е 21-от ден од тој месец?

- (A) среда (B) четврток (C) петок (D) сабота (E) недела

Решение. Нека првиот вторник е $2k$ -тиот ден. Тогаш вториот е $2k+7$ -от ден, третиот $2k+14$ -от ден, четвртиот е $2k+21$ -от ден, а петтиот е $2k+28$ -от ден од месецот.

Бидејќи еден месец има најмногу 31 ден, а најмалку 28 дена, добиваме дека $k=1$. Значи, деновите во кои се вторниците се

$$2, 9, 16, 23, 30.$$

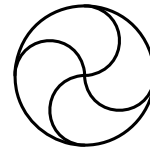
Значи, 21-от ден од тој месец е недела.

16. Круг со радиус 4 cm е разделен на 4 еднакви делови со кружни лаци со радиус 2 cm како што е прикажано на цртежот. Колку е периметарот на еден од делбените делови?

- (A) 2π (B) 4π (C) 6π (D) 8π (E) 12π

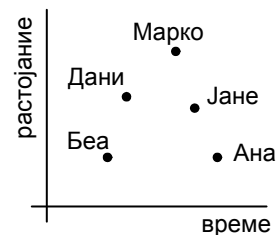
Решение. Секој од делбените делови има три кружни лаци од кои едниот е четвртина од кружница со радиус 4 cm , а два се делови од полукружници со радиус 2 cm . Сега јасно е дека

$$L = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \pi = 6\pi.$$



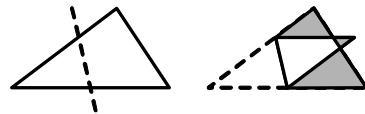
17. На една изборна трка се натпреварувале 5 студенти. На графиконот е дадено поминатото растојание за одредено време за секој студент одделно. Кој од нив е најбрз?

- (A) Ана (B) Беа (C) Марко
(D) Дани (E) Јане



Решение. Ако се гледа изминатиот пат за времето за кое е поминат, јасно е дека најбрз е Дани. Таа е сигуно побрза од Беа, Јане и Ана. Не е тешко да се провери со мерење дека е побрза и од Марко.

18. Еден триаголник е превиткан по испрекинатата линија и добиена е фигура како на цртежот. Површината на триаголникот 1,5 пати поголема од површината на добиената фигура.



Површината на затемнетиот дел од добиената фигура е 1. Колку е површината на почетниот триаголник?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) не е можно да се определи

Решение. Површината на превитканата фигура ќе ја означиме со Q , а површината на исенчениот дел на добиената фигура ќе ја означиме со S . Ако P е површината на целиот триаголник, тогаш

$$P = 1,5Q \text{ и } S = 1.$$

Ако T е површината на неисенчениот дел на добиената фигура, тогаш

$$P = T + T + S = 2T + 1$$

$$Q = T + S = T + 1,$$

од каде ја добиваме равенката

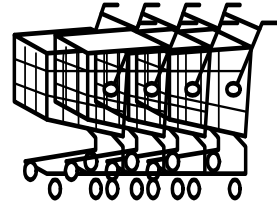
$$1,5(T + 1) = 2T + 1$$

$$\frac{3}{2}T + \frac{3}{2} = 2T + 1$$

Од последната равенка $T = 1$, и $P = 2T + 1 = 3$.

19. Во еден супермаркет има два реда колички-корпи за набавка на производи. Количките во секој од редовите се наредени со еден дел една во друга на идентичен начин.

Во првиот ред има 10 колички и тој има должина 2,9 метри. Вториот ред има 20 колички и должина 4,9 метри. Колку е долга една количка?



(A) 0,8 m

(B) 1 m

(C) 1,1 m

(D) 1,2 m

(E) 1,4 m

Решение. Нека една количка има должина x а делот од количката што не влегува во другата количка, таа пред неа, кога се ставени една во друга во ред, должина T . Од условот на задачата имаме

$$\begin{cases} x + 9T = 2,9 \\ x + 19T = 4,9 \end{cases}$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка, добиваме

$$10T = 2,$$

односно $T = 0,2 \text{ m}$. Сега јасно е дека

$$x = 2,9 - 9 \cdot 0,2 = 1,1 \text{ m}.$$

20. Рамностран триаголник е разделен на 36 рамнострани триаголници со плоштина 1 cm^2 . Колку е плоштината на триаголникот ABC (види цртеж).

(A) 11 cm^2

(B) 12 cm^2

(C) 13 cm^2

(D) 14 cm^2

(E) 15 cm^2

Решение. Ќе избереме точки O, M, P, Q како на цртежот. Тогаш

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle OAB} + P_{\triangle OBC} + P_{\triangle OCA}.$$

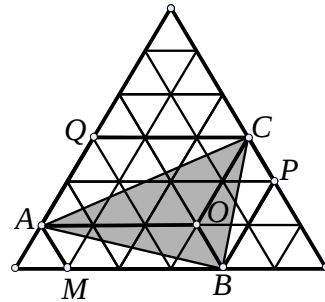
Од друга страна

$$P_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} P_{\triangle OAMB} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3,$$

$$P_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} P_{\triangle OBPC} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2,$$

$$P_{\triangle OCA} = \frac{1}{2} P_{\triangle OCQA} = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$$

Сега, $P_{\triangle ABC} = 6 + 3 + 2 = 11 \text{ cm}^2$.



Задачите под реден број од 21 до 30 се вреднуваат со 5 поени

21. Во рамнокрак трапез $ABCD$, X е средина на кракот AB , $\overline{BX} = 1$ и $\angle CXD = 90^\circ$. Колку е периметарот на трапезот?

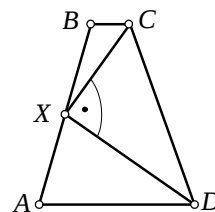
(A) 5

(B) 6

(C) 7

(D) 8

(E) не е можно да се определи



Решение. Нека M е средина на CD . Тогаш $\overline{MC} = \overline{MD} = 1$. Бидејќи $\angle CXD = 90^\circ$, точката X лежи на полукружницата со центар во M и радиус 1. Значи, $\overline{MX} = 1$, и според тоа $\overline{MX} \perp \overline{DC}$. Но тогаш $\overline{MX} = \overline{AD} = \overline{BC} = 1$ и

$$L_{ABCD} = 2 + 1 + 2 + 1 = 6$$

22. Со прави, паралелни на основата, секоја од другите две страни на триаголникот е разделена на 10 еднакви дела.

Кој процент од површината на триаголникот е сива?

(A) 41,75%

(B) 42,5%

(C) 45%

(D) 46%

(E) 47,5%

Решение. Триаголникот е разделен на девет трапези и еден триаголник. Нека основата на најголемиот бел трапез (основата на триаголникот) е a , а основите на сивите трапези се $a_1, a_2; a_3, a_4; a_5, a_6; a_7, a_8$, а основата на делбениот триаголник е a_9 . Тогаш збирот на белите делбени трапези е

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{h}{10} (a + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9),$$

а плоштината на сивиот дел е

$$P_2 = \frac{1}{2} \frac{h}{10} (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9).$$

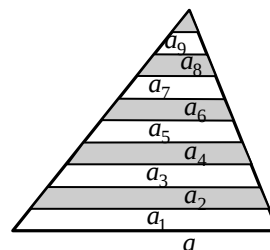
Бидејќи $P_1 + P_2 = P = \frac{1}{2} ah$, добиваме

$$\frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} a \frac{h}{10} + 2P_2$$

$$2P_2 = \frac{9}{20} ah = \frac{45}{100} ah,$$

$$P_2 = \frac{45}{100} \frac{ah}{2} = \frac{45}{100} P.$$

Значи, P_2 е 45% од плоштината на триаголникот.



23. Октоподи со по шест, седум и осум пипки го опслужуваат подвониот крал. Октоподите кои имаат по седум пипки секогаш лажат, а октоподите кои имаат по шест и по 8 пипки секогаш ја зборуваат вистината. Еден ден се сретнале четири октоподи. Синиот октопод рекол: "заедно имаме 28 пипки", зелениот октопод рекол: "заедно имаме 27 пипки", жолтиот октопод рекол: "заедно имаме 26 пипки", а црвениот октопод рекол: "заедно имаме 25 пипки". Колку пипки има црвениот октопод?

(A) 6

(B) 7

(C) 8

(D) 6 или 8

(E) не е можно да се определи

Решение. Бројот 25 може како збир на броевите 6, 7 и 8 да се запише на единствен начин: $25 = 6 + 6 + 6 + 7$.

Ако црвениот октопод има 6 пипки, тогаш тој ја зборува вистината. Но, тогаш тој ја зборува вистината, и четирите октоподи навистина заедно имаат 25 пипки. Но тогаш уште други два октоподи ја зборуваат вистината, па тие заедно имаат 26 или 27 или 28 пипки. Заради добиената спротивност, црвениот октопод лаже, односно тој има 7 пипки.

24. За колку природни броеви n , $1 \leq n \leq 1001$, бројот n^n е полн квадрат?

- (A) 5 (B) 50 (C) 55 (D) 54 (E) 15

Решение. Ако n е парен број, т.е. $n = 2k$ за некој $k \in \mathbb{N}$, тогаш

$$n^n = (2k)^{2k} = [(2k)^k]^2 = m^2,$$

т.е. n^n е полн квадрат.

Ако n е непарен број, тогаш n^n е полн квадрат само ако n е полн квадрат. Такви броеви се $3^2, 5^2, 7^2$ и 9^2 , т.е. 9, 25, 49, 81. Тогаш

$$9^9 = (3^2)^9 = (3^9)^2$$

$$25^{25} = (5^2)^{25} = (5^{25})^2$$

$$49^{49} = (7^2)^{49} = (7^{49})^2$$

$$81^{81} = (9^2)^{81} = (9^{81})^2.$$

Бидејќи има 50 парни броеви, добиваме дека за 54 броеви n , $1 \leq n \leq 1001$, n^n е полн квадрат.

25. Во фигурата на цртежот $\angle \alpha = 7^\circ$ и $\overline{OA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \dots$. Колку отсечки A_iA_{i+1} може да се нацртаат на тој начин?

- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) колку што сакаме

Решение. Триаголниците

$$OA_1A_2, A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, A_3A_4A_5, A_4A_5A_6, A_5A_6A_7, A_6A_7A_8,$$

$$A_7A_8A_9, A_8A_9A_{10}, A_9A_{10}A_{11}, A_{10}A_{11}A_{12}, A_{11}A_{12}A_{13}$$

се рамнокраки со основи

$$A_1A_2, A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, A_5A_7, A_6A_8,$$

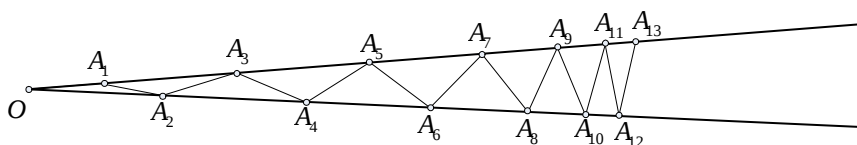
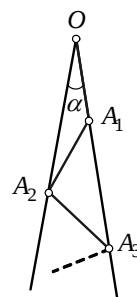
$$A_7A_9, A_8A_{10}, A_9A_{11}, A_{10}A_{12}, A_{11}A_{13}$$

соодветно, и имаат агли при основите од

$$7^\circ, 14^\circ, 21^\circ, 28^\circ, 35^\circ, 42^\circ, 49^\circ, 56^\circ, 63^\circ, 70^\circ, 77^\circ, 84^\circ.$$

Ако може да се доцрта уште една отсечка, тогаш би се добил триаголник $A_{12}A_{13}A_{14}$ и тој би имал агли при основата од 91° што не е можно.

Значи, може да се доцртаат 12 -отсечки A_iA_{i+1} .



26. Сите растојанија на цртежот се дадени во километри. Од A до B може да се стаса директно или преку точката C . Патот преку C е

двапати подолг од директниот пат. Колку е должината на патот од B до C ?

- (A) 9 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 28

Решение. Триаголникот со страни 12, 13 и 5 е правоаголен бидејќи

$$12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2.$$

Според тоа, и триаголникот со страни 12, x и y е исто така правоаголен, т.е.

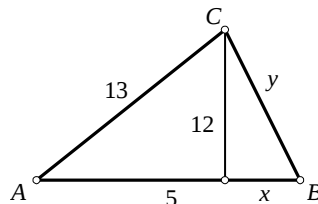
$$12^2 + x^2 = y^2. \quad (1)$$

Од друга страна, од условот на задачата, имаме $13 + y = 2(x + 5)$, односно $y = 2x - 3$. Ако сега замениме во (1), добиваме

$$12 + x^2 = 4x^2 - 12x + 9.$$

Позитивно решение на последната равенка е $x = 9$. Сега, јасно е дека

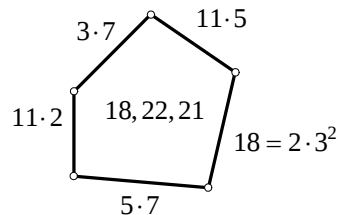
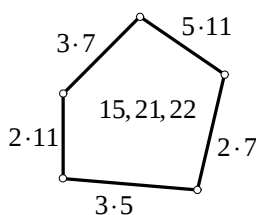
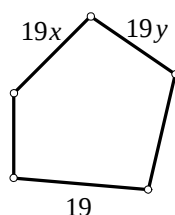
$$y = 2x - 3 = 18 - 3 = 15.$$



27. На секоја од страните од еден петаголник е запишан по еден природен број. Два броја се соседни ако се запишани на соседни страни на петаголникот. Соседните броеви се взаемно прости, а несоседните не се взаемно прости. Постојат повеќе вакви можности. Кој од броевите не може да биде запишан на некоја страна од петаголникот:

- (A) 15 (B) 18 (C) 19 (D) 21 (E) 22

Решение. Очигледно е дека тоа е бројот 19 како што е можно да се види од дадениот цртеж.



28. Колку има трицифрени броеви, на кои средната цифра им е средина од преостанатите две цифри?

- (A) 12 (B) 16 (C) 25 (D) 34 (E) 45

Решение. Од условот на задачата се бараат броевите од облик abc , $a \neq 0$, $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ и

$$\frac{a+c}{2} = b, \text{ т.е. } a+c = 2b.$$

Значи, треба да се најдат сите решенија на равенките

$$a+c=2, \quad a+c=4, \quad a+c=6,$$

$$a+c=8, \quad a+c=10, \quad a+c=12,$$

$$a+c=14, \quad a+c=16, \quad a+c=18.$$

во множеството цифри, и $a \neq 0$. Не е тешко да се провери дека бројот на решенија на овие равенки е 2, 4, 6, 8, 9, 7, 5, 3, 1 соодветно. Според тоа, такви броеви има $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$.

Решение. Доволно е да се определат сите решенија на равенките