**Јудита Цофман-Ерланген, Германија**

# ПРИМЕНА НА ПАРКЕТОТ ПРИ РЕШАВАЊЕ НА ЗАДАЧИ

Под паркетирање се подразбира покривање на рамнината, или определен нејзин дел со геометриски фигури, така што исполнети се следните услови:

- меѓу фигурите нема празнини, и
- фигурите немаат заеднички точки, освен точките на рабовите.

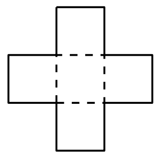
Сликата која се добива на овај начин се нарекува паркет. Паркетирањето се изучува во различни области на математиката, но и во други науки, како на пример кристалографијата. Во оваа статија паркетот ќе го користиме како помошно средство за решавање на задачи.

Јасно, секоја од разгледаните задачи може да се реши и без користење на паркетот, па затоа препорачуваме истото да го направите.

## 1. Претворањена “грчкиот крст” во квадрат

Фигурата составена од пет складни квадрати, како што е прикажано на цртеж 1, е таканаречениот “*грчки крст*”. Следната задача потекнува уште од древна Индија.

**Задача 1.** Да се подели грчкиот крст на делови од кои може да се состави квадрат.

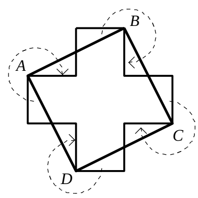


*Црт. 1*

Решението на задачата е дадено на цртеж 2. Иако цртежот зборува сам за себе, сепак постои можност очите да не излажат. Во математиката се неопходни строги докази. Затоа на читателите им оставаме да докажат дека:

$i$) четириаголникот $ABCD$ е квадрат, и

$ii$) квадратот $ABCD$ може да се состави од петте делови на кои грчкиот крст се распаѓа после повлекувањето на отсечките $AB, BC, CD, DA$.

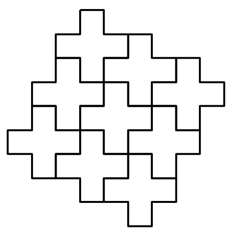



*Црт. 2*

Меѓутоа, работата на претворањето на грчкиот крст во квадрат не е завршена. Во математиката се тежнее кон изнаоѓање на подобро, поелегантно решение. Затоа следната задача се надоврзува на задача 1.

**Задача 2.** Да се подели грчкиот крст на помалку од 5 делови, така што од нив да може да се состави квадрат.

Решението на задача 2 ќе го дадеме со примена на паркет составен од складни копии на грчкиот крст (цртеж 3). При внимателно набљудување на цртеж 3 забележуваме дека центрите на грчките крстови се рамномерно распоредени на рамнината. На цртеж 4 тие центри се одбележани и низ нив се повлечени прави. На

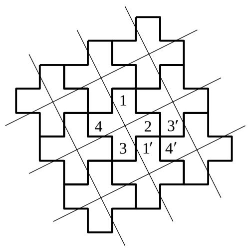


*Црт. 3*

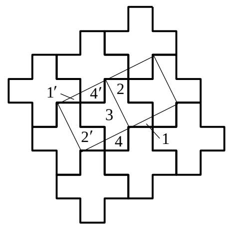
тој начин е добиена квадратна мрежа (докажете!). Со оваа мрежа секој од грчките крстови е поделен на четири делови: $1, 2, 3$ и $4$. Од друга страна, рабовите на грчките крстови го делат секој квадрат на мрежа од четири делови $1', 2', 3'$ и $4'$. Не е тешко да се докаже дека деловите: $1$ и $1'$; $2$ и $2'$; $3$ и $3'$; $4$ и $4'$ се складни.

Со тоа задачата е решена, т.е. грчкиот крст е поделен само на четири делови од кои е составен квадрат, наместо на пет делови, како во задача 1.

Интересно е да се забележи дека при оваа поделба на грчкиот крст сите четири делови се складни. Меѓутоа, паркетот наметнува повеќе можности за поделба на грчкиот крст на четири дела.



*Црт. 4*



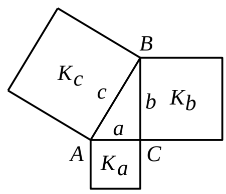
*Црт. 5*

Направете го следниот експеримент. Нацртајте ја квадратната мрежа од цртеж 4 на проѕирна фолија, ставете ја фолијата на паркетот од цртеж 3 и истата поместувајте ја. Така ќе добиете различни решенија на задача 2. Едно од нив е прикажано на цртеж 5.

***Забелешка.*** До сега не е познато дали може грчкиот крст да се подели на помалку од четири дела, така што од нив може да се состави квадрат.

## 2. Доказ на Питагоровата теорема со помош на паркет.

**Задача 3.** Триаголникот $ABC$ е правоаголен со катети $BC$ и $CA$, чии должини се $a$ и $b$, соодветно и хипотенуза $AB$ со дожина $c$. Квадратите $K_a$, $K_b$ и $K_c$, се конструирани над страните $BC, CA$ и $AB$, (цртеж 6) соодветно. Докажете дека збирот на плоштините на квадратите $K_a$ и $K_b$ е еднаков на плоштината на квадратот $K_c$.



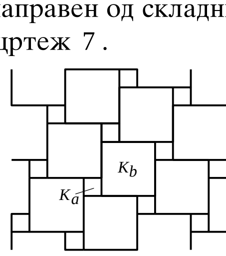
*Црт. 6*

Решението на задачата може да се изведе на повеќе добро познати начини. Еден од нив се сведува на користење на паркет направен од складни копии на квадратите $K_a$ и $K_b$, како што е прикажано на цртеж 7.

На цртеж 8 е конструирана решетка на овој паркет. Решетката се состои од прави паралелни на правите $AB$ и $BD$. На читателот за вежба му останува да докаже дека:

$i$) Решетката на цртеж 8 е квадратна, при што квадратите на решетката се складни со квадратот $K_c$.

$ii$) Квадратот $ABDE$ со линиите на решетката е



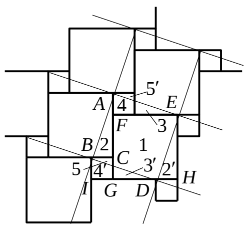
*Црт. 7*

поделен на пет делови $1, 2, 3, 4, 5$. Квадратот $EFGH$ е поделен на деловите $1, 2'$ и $3'$, а квадратот $CBIG$ на деловите $4'$ и $5$, така што деловите $2$ и $2'$; $3$ и $3'$; $4$ и $4'$; $5$ и $5'$ се складни.

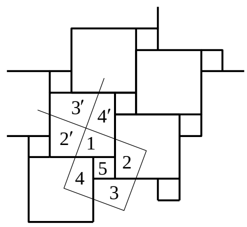
Според тоа, од $i$) и $ii$) следува дека од деловите на квадратите $K_a$ и $K_b$ може да се состави квадратот $K_c$. Значи:

*Збирот на плоштините на квадратите над катетите во правоаголен триаголник е еднаков на плоштината на квадратот над хипотенузата.*

Да забележиме дека, како и при решавањето на задача 1 и овде на фолија може да се нацрта квадратна мрежа од цртеж 8. Кога таа фолија ќе се стави на паркетот од цртеж 7 и ќе се придвижи по хартијата, се добиваат различни начини на поделби на квадратот $ABDE$ на делови од кои можат да се составаат квадратите $K_a$ и $K_b$. Еден таков начин е даден на цртеж 9. Притоа квадратот $ABDE$ е транслатиран од првобитната положба на цртеж 8 така што темето $A$ е поместено во центарот на квадратот $EFGH$. Ова поделба е интересна бидејќи квадратот $K_a$ не е поделен, а квадратот $K_b$ е поделен на четири складни делови.



*Црт. 8*



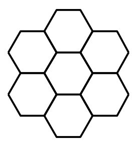
*Црт. 9*

Ќе наведеме неколку задачи за самостојно решавање кои можат да се решат со користење на паркет.

**1.** На цртеж 10 е даден ”цвет” составен од седум складни шестаголници.

$a$) Поделете го цветот на делови од кои може да се состави правилен шестаголник.

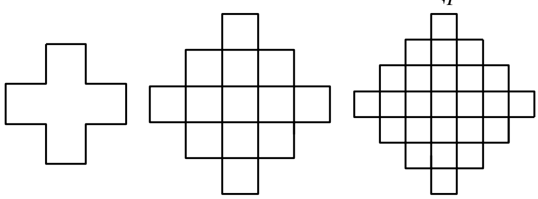
$b$) Направете паркет од складни копии на цветот и докажете дека цветот може да се подели на четири дела од кои може да се состави ромб.


*Црт. 10*

**2.** На цртеж 11 се дадени неколку воопштувања на грчкиот крст.

$a$) Нацртајте ги двата следни елементи на овие воопштувања на грчкиот крст.

$b$) Проверете дали за елементите на од цртеж 11 важи истото што и за грчкиот крст, т.е. дали можат да се поделат на делови од кои може да се состави квадрат.


*Црт. 11*

$c$) Проверете дали од соодветните копии на второто и третото воопштување на грчкиот крст можете да направите паркет. Ако тоа е можно, дали паркетот може да помогне да се намали бројот на деловите на кои е поделено соодветното воопштување на крстот, така што од деловите се состави квадрат?

**3.** Дадени се три квадрати $K_a$, $K_b$ и $K_c$, со должини $a, b$ и $c$, соодветно. Докажете дека квадратите $K_a$, $K_b$ и $K_c$ можат да се поделат на делови од кои може да се состави нов квадрат.

### 3. Уште некои примени на паркетирањето

Во продолжение ќе покажеме како паркетирањето може да ни послужи за откривање на некои врски меѓу различните математички дисциплини.

**Задача 1.** Претстави го бројот 11 како збит на два броја $x$ и $y$, така да производот $xy$ е максимален.

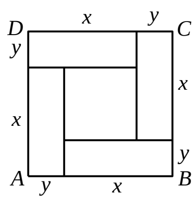
Решението на оваа задача може да се добие така што задачата ќе ја преведеме на "јазикот на геометријата". Имено, производот $xy$ на броевите $x$ и $y$
можеме да ги сметаме за плоштина на правоаголник со страни $x$ и $y$. Периметарот на правоаголникот е $2(x+y)=22$. Според тоа, задачата 1 може да се преформулира на следниот начин:

**Задача 1'.** Од сите правоаголници со периметар 22 да се најде оној чија плоштина е максимална.

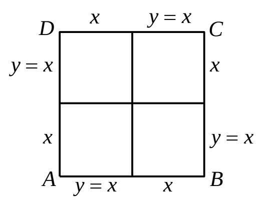
Задачата ќе ја решиме користејќи го паркетирањето. Паркетираме квадрат $ABCD$ во кој имаме четири копии на правоаголник со страни $x$ и $y$. На цртеж 12 е дадено паркетирање на квадратот $ABCD$ во случај кога $x \neq y$, на пример $x > y$, а на цртеж 13 кога $x = y$. Во првиот случај паркетот, покрај четирите правоаголници со страни $x$ и $y$ го содржи и квадратот со страна $x-y$. Според тоа, плоштината $xy$ е помала од четвртината плоштина на квадратот $ABCD$:

$$xy < \frac{11^2}{4}, \quad \text{за } x \neq y$$

Во вториот случај, правоаголниците со страни $x$ и $y$ се квадрати, т.е. четирите квадрати со страните $x = \frac{11}{2}$ го покриваат квадратот $ABCD$. Со други зборови $xy = \frac{11^2}{4}$, за $x = y$.



*Црт. 12*



*Црт. 13*

Од досега изнесеното следува: од сите правоаголници со даден периметар $22$, квадратот има најголема плоштина. Со тоа ја решивме задачата $1'$, со што е решена и задачата $1$. Имено, производот на броевите $x$ и $y$ чиј збир е $11$ е максимален кога собироците се еднакви, т.е. $x=y=\frac{11}{2}$.

Максималната вредност на производот $xy$ е еднаков на $\left(\frac{11}{2}\right)^2=\frac{121}{4}$.

**Задача 2.** Најди формула за пресметување на збирот

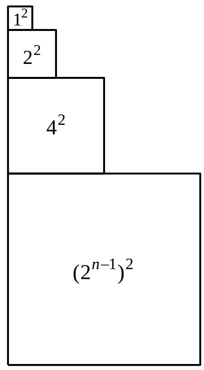
$$S_n=1^2+2^2+4^2+8^2+\ldots+(2^{n-1})^2$$

каде $n=1,2,\ldots$

*И оваа задача ќе ја решиме со паркетирање на пригодно избрана геометриска фигура. Квадратите*

$$1^2,2^2,4^2,\ldots,(2^{n-1})^2$$

можат да се толкуваат како плоштини на квадрати со страни $1,2,4,\ldots,2^{n-1}$, соодветно. Од овие квадрати може да се конструира фигурата прикажана на цртеж 14.




*Црт. 14*

Оваа фигура може да се дополни до правоаголен $\Delta ABC$ со катети со должини $2^n$. Притоа се искористени правоаголни триаголници со плоштини

$$\frac{1^2}{2},\frac{1^2}{2},\frac{2^2}{2},\frac{4^2}{2}\ldots,\frac{(2^{n-1})^2}{2}\quad.$$

Сега паркетирањето ни овозможува да ја пресметаме плоштината на $\Delta ABC$ на два начина. Од едната страна имаме

$$P_{\Delta ABC}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AB}}{2}=\frac{2^n\cdot 2^n}{2}=2^{2n-1}\tag{1}$$

и

$$P_{\Delta ABC}=\left[1^2+2^2+4^2+\ldots+(2^{n-1})^2\right]+\left[\frac{1^2}{2}+\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2}+\frac{4^2}{2}\ldots+\frac{(2^{n-1})^2}{2}\right]\tag{2}$$

т.е.

$$P_{\Delta ABC}=\frac{3}{2}\left[1^2+2^2+4^2+\ldots+(2^{n-1})^2\right]+\frac{1}{2}$$

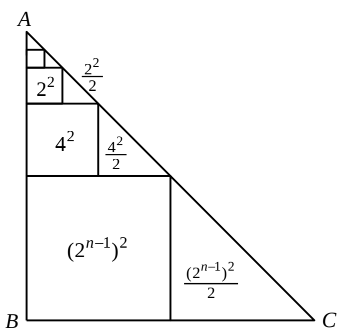
од што следува

$$S_n=1^2+2^2+4^2+8^2+\ldots+(2^{n-1})^2=\frac{2^{2n}-1}{3}.$$

***Забелешка.*** Цртежот 15 ни овозможува лесно да го определиме збирот

$$1+2+4+\ldots+2^{n-1}.$$

Имено, $\Delta ABC$ е рамнокрак. Страната $BC$ на $\Delta ABC$ е со должина $2^n$, а страната $AB$ е поделена на отсечки со должини $1,1,2,4,\ldots,2^{n-1}$.




*Црт. 15*

Бидејќи $\overline{AB} = \overline{BC}$ добиваме

$$1+(1+2+4+\ldots+2^{n-1}) = 2^{n}$$

т.е.

$$1+2+4+\ldots+2^{n-1} = 2^{n} - 1.$$

На крајот на оваа статија предлагаме да ја решите следната задача.

**Задача.** Најдете формули за пресметување на збировите:

$a)$ $1+3^2+9^2+\ldots+(3^{n-1})^2$.

$b)$ $1+3+9+\ldots+3^{n-1}$.