Ристо Малчески
Алекса Малчески
Даниел Велинов
Самоил Малчески
Сања Костадинова

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ С7
(збирка задачи за IV година, прв дел)

Скопје, 2019

Рецензенти
Слаѓана Брсаковска
Зоран Мисајлески
Томи Димовски

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.3)(076)

МАТЕМАТИЧКИ талент С7 : (збирка задачи за IV година, прв дел) / Ристо Малчески ... [и др.]. - Скопје : Армаганка, 2019. - 249 стр. ; 25 см

Други автори: Алекса Малчески, Даниел Велинов, Самоил Малчески, Сања Костадинова. - Библиографија: стр. 243-249

ISBN 978-608-4904-81-6
1. Малчески, Ристо [автор] 2. Малчески, Алекса [автор] 3. Велинов, Даниел [автор] 4. Малчески, Самоил [автор] 5. Костадинова, Сања [автор]
а) Математика - Задачи за средно образование
COBISS.MK-ID 111919626

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* С7 е продолжение на книгите Математички талент С1 – С6 и истата е наменета за талентираните ученици по математика од четврта година од средното образование. Книгата, всушност, е првиот дел од збирката задачи за четврта година и во овој дел се содржани 443 решени задачи и во пет одделни делови се обработени комплексни броеви и Моавровата формула, низите реални броеви, функции и функционални равенки, неконкурентски и конкурентски игри и неравенства.

Како и во книгите *Математички талент* С1 – С6 и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите повторно не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области. Така, на пример, задачите од функциите се распределени во пет делови, при што посебно внимание е посветено на решавањето на функционални равенки.

Рецензентите, д-р Слаѓана Брсаковска, д-р Зоран Мисајлески и д-р Томи Димовски, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје Авторите
декември, 2019 г.

I КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ, МОАВРОВА ФОРМУЛА

1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Докажи дека за секои комплексни броеви a и b важи

$$2(|a|+|b|)=|a+b-2\sqrt{ab}|+|a+b+2\sqrt{ab}|,$$

каде со $\sqrt{ab}$ е означен еден од двата корени на $ab.$

Решение. Од равенството

$$2(|a|+|b|)=2(|\sqrt{a}|^2+|\sqrt{b}|^2)$$

добиваме

$$\begin{aligned}2(|a|+|b|)&=|\sqrt{a}+\sqrt{b}|^2+|\sqrt{a}-\sqrt{b}|^2\\&=|(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2|+|(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2|\\&=|a+b+2\sqrt{ab}|+|a+b-2\sqrt{ab}|,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

2. Докажи дека за секои комплексни броеви a и b важи

$$|a+b|+|a-b|=|a+\sqrt{a^2-b^2}|+|a-\sqrt{a^2-b^2}|,$$

каде со $\sqrt{a^2-b^2}$ е означен еден од двата корени на a^2-b^2.

Решение. Од пример 3.16 добиваме

$$\begin{aligned}&(|a+\sqrt{a^2-b^2}|+|a-\sqrt{a^2-b^2}|)^2=\\&=|a+\sqrt{a^2-b^2}|^2+|a-\sqrt{a^2-b^2}|^2+2|a+\sqrt{a^2-b^2}|\cdot|a-\sqrt{a^2-b^2}|\\&=|a+\sqrt{a^2-b^2}|^2+|a-\sqrt{a^2-b^2}|^2+2|a^2-(a^2-b^2)|\\&=2(|a^2|+|\sqrt{a^2-b^2}^2|)+2|b^2|=2(|a^2|+|b^2|)+2|a^2-b^2|\\&=|a-b|^2+|a+b|^2+2|a-b|\cdot|a+b|=(|a-b|+|a+b|)^2\end{aligned}$$

односно

$$|a+b|+|a-b|=|a+\sqrt{a^2-b^2}|+|a-\sqrt{a^2-b^2}|.$$

3. Без да преминуваш во тригонометриски облик најди го множеството на вторите корени на комплексниот број $z=a+ib.$ Посебно пресметај

$$\sqrt[4]{-7+24i}.$$

Решение. Од $(x+iy)^2=a+ib$ го добиваме системот равенки

$$x^2-y^2=a,\quad 2xy=b,$$

од што следува

$$x+iy=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right).$$

Четвртите корени од $-7+24i$ се $2+i, -2-i, 1-2i, -1+2i$.

4. Докажи дека сите комплексни броеви за кои важи $|z-1|=2|z+1|$ припаѓаат на иста кружница. Најди ги центарот и радиусот на таа кружница.

Решение. Бидејќи, $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, при што $z=x+iy$, од дадената равенка добиваме

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=2\sqrt{(x+1)^2+y^2},$$

односно после средувањето се добива

$$(x+\tfrac{5}{3})^2+y^2=(\tfrac{4}{3})^2,$$

а тоа е кружница со центар во $(-\frac{5}{3},0)$ и радиус $\frac{4}{3}$.

5. Определи го множеството точки z во комплексната рамнина за кои постои реален број c таков што $z=\frac{c-i}{2c-i}$.

Решение. Нека е $z=x+iy$. Од $z=\frac{c-i}{2c-i}$ имаме

$$c=\tfrac{zi-i}{2z-1}=\tfrac{-y+(x-1)i}{2x-1+2iy}\cdot\tfrac{2x-1-2iy}{2x-1-2iy}=\tfrac{(1-2x)y+2(x-1)y+((x-1)(2x-1)+2y^2)\,i}{(2x-1)^2+4y^2}$$

Сега $(2x-1)^2+4y^2\neq 0$, па $x\neq\frac{1}{2}$ и $y\neq 0$. Освен тоа, треба

$$(x-1)(2x-1)+2y^2=0,\text{ т.е. } (x-\tfrac{3}{4})^2+y^2=\tfrac{1}{16}$$

Значи, бараното множество точки е

$$S=\{z=x+iy\,|\,(x-\tfrac{3}{4})^2+y^2=\tfrac{1}{16},(x,y)\neq(\tfrac{1}{2},0)\}$$
$$=\{z\,|\,|z-a|=\tfrac{1}{4},a=\tfrac{3}{4},z\neq\tfrac{1}{2}\}.$$

6. Ако z и w се комплексни броеви такви што $\operatorname{Re} z>0$ и $\operatorname{Re} w>0$, тогаш $|\frac{z-w}{\bar{z}+w}|<1$. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Нека $z=x+iy$, $w=a+ib$. Тогаш:

$$|\tfrac{z-w}{\bar{z}+w}|=\tfrac{|z-w|}{|\bar{z}+w|}=\tfrac{|(x-a)+(y-b)i|}{|(x+a)+(-y+b)i|}=\tfrac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{\sqrt{(x+a)^2+(b-y)^2}}.$$

Ако $x>0$ и $a>0$, тогаш $(x-a)^2<(x+a)^2$, а $(y-b)^2=(b-y)^2$, па затоа подкоренова величина на броителот е секогаш помала од онаа на именителот, т.е. дропката е помала од 1, со што тврдењето е докажано.

Втор начин. Од $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Re} w>0$ и од својствата на комплексните броеви имаме

$$\begin{aligned}|z-w|^2-|\bar{z}+w|^2&=(z-w)(\bar{z}-\bar{w})-(\bar{z}+w)(z+\bar{w})\\&=z\bar{z}-\bar{z}w-z\bar{w}+w\bar{w}-\bar{z}z-\bar{z}\bar{w}-zw-w\bar{w}\\&=-[z(w+\bar{w})+\bar{z}(w+\bar{w})]\\&=-(w+\bar{w})(z+\bar{z})=-4\operatorname{Re} z\cdot\operatorname{Re} w<0,\end{aligned}$$

т.е. $|z-w|^2<|\overline{z}+w|^2$, од што следува $|\frac{z-w}{\overline{z}+w}|<1$.

7. Определи го и претстави го во комплексната рамнина множеството
$$\{z=\frac{3t+i}{t-i}:t\in\mathbb{R}\}.$$

Решение. Нека
$$z=\frac{3t+i}{t-i}=\frac{3t^2-1}{t^2+1}+i\frac{4t}{t^2+1}=x+iy.$$
Со елиминација на параметарот t од равенките
$$x=\frac{3t^2-1}{t^2+1},\quad y=\frac{4t}{t^2+1}$$
добиваме $t=\frac{y}{3-x}$, односно
$$(x-1)^2+y^2=4,\ x\neq 3.$$
Бараното множество е кружница со радиус 2 и центар во точката (1,0), без точката (3,0).

8. Реши ја равенката
$$2(1+i)z^2-4(2-i)z-5-3i=0\ .$$

Решение. Со решавање на квадратната равенка по z наоѓаме
$$z=\frac{4(2-i)\pm\sqrt{16(2-i)^2+8(1+i)(5+3i)}}{4(1+i)},$$
од каде добиваме $z_1=\frac{4-i}{1+i}=\frac{3-5i}{2}$ и $z_2=\frac{-i}{1+i}=-\frac{1+i}{2}$.

9. Во множеството комплексни броеви реши ја равенката
$$(x-3)^4+(x-4)^4=(2x-7)^4\ .$$

Решение. Воведуваме смена $y=x-\frac{7}{2}$ и дадената равенка ја запишуваме во видот
$$112y^4-24y^2-1=0\ ,$$
од каде $y^2=\frac{1}{4}$ и $y^2=-\frac{1}{28}$, односно
$$y\in\{\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},i\sqrt{\tfrac{1}{28}},-i\sqrt{\tfrac{1}{28}}\}\ ,$$
па затоа
$$x\in\{3,4,\tfrac{7}{2}+i\sqrt{\tfrac{1}{28}},\tfrac{7}{2}-i\sqrt{\tfrac{1}{28}}\}\ .$$

10. Даден е комплексен број u. Најди ги сите комплексни броеви z, такви да бројот $a=\frac{u-\overline{u}z}{1-z}$ е реален.

Решение. Бројот a е реален ако и само ако $a=\overline{a}$. Оттука следува дека $\frac{u-\overline{u}z}{1-z}$ е реален ако и само ако $\frac{u-\overline{u}z}{1-z}=\frac{\overline{u}-\overline{z}u}{1-\overline{z}}$, т.е. ако и само ако $(\overline{u}-u)(1-z\overline{z})=0$. Според тоа, ако u е реален број, тогаш решение е секој комплексен број $z\neq 1$, а ако u не е реален број, тогаш решение е секој комплексен број $z \neq 1$ за кој важи $z\bar{z} = 1$, т.е. решение е секој комплексен број z таков да $|z| = 1,\ z \neq 1$.

11. Нека $a_1, ..., a_n$ се дадени комплексни броеви, такви што

$$|a_1| = ... = |a_n| = 1 \text{ и } a_1 + a_2 + ... + a_n = 0 .$$

Докажи дека за секој комплексен број z важи

$$|a_1 - z| + |a_2 - z| + ... + |a_n - z| \geq n .$$

Решение. Бидејќи $|a_i| = |\overline{a_i}|$, за секој $i = 1, 2, ..., n$ и $\sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} = 0$, добиваме

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{a_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{a_i} - z\sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} = \sum_{i=1}^{n} (a_i \overline{a_i} - z\overline{a_i}) \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n} (a_i - z)\overline{a_i} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - z| \cdot |a_i| = \sum_{i=1}^{n} |a_i - z|. \end{aligned}$$

12. Дадени се комплексните броеви $z_1, z_2, ..., z_{2n+1}$ такви што $|z_i| = 1$ и $\operatorname{Im} z_i \geq 0$, за $i = 1, 2, ..., 2n+1$. Докажи дека

$$\left| \sum_{i=1}^{2n+1} z_i \right| \geq 1 .$$

Решение. Неравенството ќе го докажеме со помош на математичка индукција. Јасно, неравенството важи за $n = 0$. Нека претпоставиме дека тоа важи за секои $2n-1$ комплексни броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

Нека $z_1, z_2, ..., z_{2n+1}$ се комплексни броеви кои ги задоволуваат условите на задачата. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$\arg z_1 \leq \arg z_2 \leq ... \leq \arg z_{2n+1} .$$

Во комплексната рамнина поставуваме нов координатен систем така што имагинарната оска е симетрала на $\measuredangle z_1 O z_2$, а реалната оска да минува низ точката $O(0,0)$. Во новиот координатен систем точките да ги означиме со

$$z_k = x_k + iy_k ,\ k = 1, 2, ..., 2n+1 .$$

Имаме,

$$y_k \geq 0 \text{ и } x_1 = -x_{2n+1},\ y_1 = y_{2n+1} ,$$

па затоа од претходно изнесеното и од индуктивната претпоставка следува:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{2n+1} z_i \right| &= (x_1 + x_2 + ... + x_{2n} + x_{2n+1})^2 + (y_1 + y_2 + ... + y_{2n} + y_{2n+1})^2 \\ &= (x_2 + ... + x_{2n})^2 + (y_1 + y_2 + ... + y_{2n} + y_{2n+1})^2 \\ &\geq (x_2 + ... + x_{2n})^2 + (y_2 + ... + y_{2n})^2 \\ &= |z_2 + ... + z_{2n}|^2 \geq 1. \end{aligned}$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека секој непарен број комплексни броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.

13. Нека $a_0, a_1, ..., a_n$ се комплексни броеви такви што ако $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$, тогаш

$$|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0| \leq 1.$$

Докажи дека

$$|a_k| \leq 1 \text{ и } |a_0 + a_1 + ... + a_n - (n+1)a_k| \leq n,$$

за секој $k = 0,1,2,...,n$.

Решение. Нека

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

и w_i, $i = 0,1,...,n$ се ($n+1$)-те корени на единицата. Но, $\sum_{i=0}^{n} w_i^k = 0$, ако k не се дели со $n+1$ и $\sum_{i=0}^{n} w_i^k = n+1$ ако k се дели со $n+1$, од што следува

$$\sum_{i=0}^{n} w_i^k P(w_i) = (n+1)a_{n-k}, \text{ за секој } k \in \{0,1,...,n\}.$$

Според тоа,

$$(n+1)|a_{n-k}| = |\sum_{i=0}^{n} w_i^k P(w_i)| \leq \sum_{i=0}^{n} |w_i^k P(w_i)| = \sum_{i=0}^{n} |P(w_i)| \leq \underbrace{1+1+...+1}_{n+1 \text{ пати}} = n+1,$$

од што следува $|a_{n-k}| \leq 1$, за секој $k \in \{0,1,...,n\}$.

За вториот дел од тврдењето имаме

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^k P(w_i) = \sum_{i=0}^{n} w_i^k P(w_i) - P(1) = (n+1)a_{n-k} - \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{и}$$

$$|\sum_{i=1}^{n} w_i^k P(w_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |w_i^k P(w_i)| = \sum_{i=1}^{n} |P(w_i)| \leq n$$

па затоа

$$|(n+1)a_{n-k} - \sum_{i=1}^{n} a_i| \leq n, \text{ за секој } k \in \{0,1,...,n\}.$$

14. Нека се $z_1, z_2, ..., z_n$ произволни комплексни броеви. Докажи дека може да се изберат природни броеви $i_1, ..., i_k$ такви што $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$ и

$$|z_{i_1} + z_{i_2} + ... + z_{i_k}| \geq \frac{2}{4\sqrt{2}}(|z_1| + |z_2| + ... + |z_n|).$$

Решение. Нека $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,...,n$. Да означиме

$$S_1 = \{j \mid x_j \geq 0, y_j \geq 0\}, S_2 = \{j \mid x_j < 0, y_j \geq 0\},$$

$$S_3 = \{j \mid x_j < 0, y_j < 0\}, S_4 = \{j \mid x_j \geq 0, y_j < 0\}.$$

Тогаш,

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j| = \sum_{j=1}^{4} \sum_{j \in S_k} |z_j|$$

па од принципот на Дирихле следува дека за некој $k \in \{1,2,3,4\}$ важи неравенството

$$\sum_{j\in S_k}|z_j|\ge \tfrac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}|z_j|.$$

За тој број k добиваме

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4\sqrt{2}}\sum_{j=1}^{n}|z_j|\le \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j\in S_k}|z_j|=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j\in S_k}|x_j+iy_j|\le \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j\in S_k}(|x_j|+|y_j|)\\ =\tfrac{1}{\sqrt{2}}(|\sum_{j\in S_k}x_j|+|\sum_{j\in S_k}y_j|)\\ \le \tfrac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{\tfrac{1}{2}(|\sum_{j\in S_k}x_j|^2+|\sum_{j\in S_k}y_j|^2)}=|\sum_{j\in S_k}z_j|.\end{aligned}$$

15. Нека $z_1,z_2,...,z_n$ се комплексни броеви такви да

$$|z_1|+|z_2|+...+|z_n|=1.$$

Докажи дека постои множество $S\subseteq\{z_1,z_2,...,z_n\}$ такво што

$$|\sum_{z_i\in S}z_i|\ge\tfrac{1}{6}.$$

Решение. Нека $z_k=x_k+y_k$, $k=1,2,...,n$. Тогаш

$$\begin{aligned}1=\sum_{k=1}^{n}|z_k|=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k^2+y_k^2}\le\sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)\\ =\sum_{x_k\ge0}|x_k|+\sum_{x_k<0}|x_k|+\sum_{y_k\ge0}|y_k|+\sum_{y_k<0}|y_k|.\end{aligned}$$

Од принципот на Дирихле следува дека најмалку една од четирите суми на десната страна е поголема или еднаква на $\frac{1}{4}$. Нека претпоставиме дека $\sum_{x_k<0}|x_k|\ge\frac{1}{4}$.

Добиваме

$$|\sum_{x_k<0}z_i|\ge|\sum_{x_k<0}x_k|=\sum_{x_k<0}|x_k|\ge\tfrac{1}{4}>\tfrac{1}{6}.$$

16. Нека a,b,c се произволни комплексни броеви и $w=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Докажи дека

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+bw+cw^2)(a+bw^2+cw).$$

Решение. Непосредно се проверува дека

$$w^3=1,\ w^4=w,\ w+w^2=-1,$$

па затоа

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a+bw+cw^2)(a+bw^2+cw)=\\ =(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+w(ab+bc+ca)+w^2(ab+bc+ca))\\ =(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+(w+w^2)(ab+bc+ca))\\ =(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca))=a^3+b^3+c^3-3abc,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

17. Нека се a и b позитивни реални броеви. Одреди го минимумот на изразот $|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}|$, ако се x и y комплексни броеви такви што $|x|=a,\quad |y|=b$.

Решение. Имаме

$$|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}|^2=\frac{x+y}{1+x\overline{y}}\cdot\frac{\overline{x}+\overline{y}}{1+\overline{x}y}=\frac{|x|^2+|y|^2+2\operatorname{Re}x\overline{y}}{1+|x\overline{y}|^2+2\operatorname{Re}x\overline{y}}$$

$$=1+\frac{|x|^2+|y|^2-1-|x\overline{y}|^2}{1+|x\overline{y}|^2+2\operatorname{Re}x\overline{y}}=1-\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{1+|x\overline{y}|^2+2\operatorname{Re}x\overline{y}},$$

при што

$$\min\{\operatorname{Re}x\overline{y}:|x|=a,|y|=b\}=-ab,$$

$$\max\{\operatorname{Re}x\overline{y}:|x|=a,|y|=b\}=ab.$$

Ако е барем еден од броевите a и b еднаков на 1, тогаш

$$\min_{|x|=a,|y|=b}|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}|=1$$

Ако броевите a и b се и двата помали или и двата поголеми од 1, тогаш

$$\min_{|x|=a,|y|=b}|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}|=\sqrt{1-\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{1+a^2b^2-2ab}}=|\frac{a-b}{1-ab}|$$

Ако еден од броевите a и b е помал од 1, а другиот е поголем од 1, тогаш

$$\min_{|x|=a,|y|=b}|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}|=\sqrt{1-\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{1+a^2b^2+2ab}}=|\frac{a+b}{1+ab}|.$$

18. Во множеството комплексни броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}x^4+6x^2y^2+y^4=5\\x^3y+xy^3=1\end{cases}$$

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот кај кој втората равенка е помножена со 4, односно со системот

$$\begin{cases}x^4+6x^2y^2+y^4=5\\4x^3y+4xy^3=4\end{cases}$$

па и со системот кој се состои од збирот на овие две равенки и разликата на овие две равенки, односно со

$$\begin{cases}(x+y)^4=9\\(x-y)^4=1\end{cases}$$

Од овие равенки добиваме

$$x=\frac{\alpha\cdot\sqrt{3}+\beta}{2},\ y=\frac{\alpha\cdot\sqrt{3}-\beta}{2},\ \alpha,\beta\in\{1,-1,i,-i\},$$

односно 16 решенија. Потребно е да се согледа уште дека ова се различни решенија. Имено, ако

$$\frac{\alpha_1\cdot\sqrt{3}+\beta_1}{2}=\frac{\alpha_2\cdot\sqrt{3}+\beta_2}{2},$$

тогаш

$$(\alpha_1-\alpha_2)\sqrt{3}=(\beta_2-\beta_1),$$

па $\alpha_1=\alpha_2$, што значи дека $\beta_1=\beta_2$, т.е. тоа е исто решение, бидејќи во спротивно $\sqrt{3}$ не може да се запише во облик $r+is$, каде $r,s\in\mathbb{Q}$, затоа што $\sqrt{3}$ е ирационален број.

2. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ЗАПИС НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ , МОАВРОВА И ОЈЛЕРОВИ ФОРМУЛИ

1. Пресметај ја разликата

$$(-1+i\sqrt{3})^9-(1+i\sqrt{3})^9 .$$

Решение. Од

$$|-1+i\sqrt{3}|=2 \text{ и } \arg(-1+i\sqrt{3})=\tfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,...$$

добиваме

$$-1+i\sqrt{3}=2(\cos\tfrac{2\pi}{3}+i\sin\tfrac{2\pi}{3}) .$$

Согласно Моавровата формула имаме:

$$(-1+i\sqrt{3})^9=2^9(\cos\tfrac{2\pi}{3}\cdot 9+i\sin\tfrac{2\pi}{3}\cdot 9)=2^9$$

Аналогно добиваме

$$(1+i\sqrt{3})^9=2^9(\cos\tfrac{9\pi}{3}+i\sin\tfrac{9\pi}{3})=-2^9 .$$

Според тоа,

$$(-1+i\sqrt{3})^9-(1+i\sqrt{3})^9=2^9-(-2^9)=2^{10} .$$

2. а) Пресметај: $(1-i\sqrt{3})^3(1+i)^{10}$.

б) Нека $f(n)=(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^n+(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^n$. Пресметај $f(1990)+f(1994)$.

Решение. а) Имаме

$$1-i\sqrt{3}=2(\cos\tfrac{\pi}{3}-i\sin\tfrac{\pi}{3}) \text{ и } 1+i=\sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{4}+i\sin\tfrac{\pi}{4}) .$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}(1-i\sqrt{3})^3(1+i)^{10}&=2^3(\cos\pi-i\sin\pi)\cdot 2^5(\cos\tfrac{5\pi}{2}+i\sin\tfrac{5\pi}{2})\\ &=2^8(-1-i\cdot 0)(0+i)=-256i.\end{aligned}$$

б) Од

$$\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\tfrac{\pi}{4}+i\sin\tfrac{\pi}{4} \text{ и } \tfrac{1-i}{\sqrt{2}}=\cos\tfrac{\pi}{4}-i\sin\tfrac{\pi}{4}$$

добиваме

$$f(n)=2\cos\tfrac{n\pi}{4} .$$

Значи,

$$f(1990)+f(1994)=2\cos\tfrac{1990\pi}{4}+2\cos\tfrac{1994\pi}{4}=2\cos\tfrac{995\pi}{2}+2\cos\tfrac{997\pi}{2}=0 .$$

3. Ако $z+\frac{1}{z}=1$, пресметај $z^{158}+z^{152}+\frac{2}{z^{122}}$.

Решение. Од $z+\frac{1}{z}=1$ следува $z^2-z+1=0$, т.е.

$$z=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos(\pm\frac{\pi}{3})+i\sin(\pm\frac{\pi}{3}).$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}z^{158}+z^{152}+\frac{2}{z^{122}}&=\cos\frac{158\pi}{3}\pm i\sin\frac{158\pi}{3}+\cos\frac{152\pi}{3}\pm i\sin\frac{158\pi}{3}-2(-\cos\frac{122\pi}{3}\pm i\sin\frac{122\pi}{3})\\&=\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}-2(-\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3})\\&=4\cos\frac{2\pi}{3}=-2.\end{aligned}$$

4. Пресметај $\sqrt[3]{27i^5}$.

Решение. Од $i^5=i^4\cdot i=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ добиваме

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{27i^5}&=\sqrt[3]{27i}=\sqrt[3]{27(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})}=3(\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3})\\&=3(\cos\frac{(4k+1)\pi}{6}+i\sin\frac{(4k+1)\pi}{6}),\end{aligned}$$

за $k=0,1,2.$

5. Докажи, дека од $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ следува $z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos m\theta$.

Решение. Од равенката $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$ следува

$$z^2-2z\cos\theta+1=0.$$

Решавајќи ја последната квадратна равенка, добиваме $z=\cos\theta\pm i\sin\theta$. Сега, $\frac{1}{z}=\cos\theta\mp i\sin\theta$. Според тоа,

$$z^m=\cos m\theta\pm i\sin m\theta \text{ и } \frac{1}{z^m}=\cos\theta\mp i\sin m\theta.$$

Ако ги собереме последните две равенства добиваме

$$z^m+\frac{1}{z^m}=2\cos m\theta.$$

6. Нека $t\in\mathbb{R}$ и $z=\frac{1+it}{1-it}$. Докажи дека

$$z^n+\overline{z^n}=2\cos(2n\operatorname{arctg}t).$$

Решение. Имаме $z=\frac{1+it}{1-it}=\frac{1-t^2}{1+t^2}-i\frac{2t}{1+t^2}$. Ако $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, т.е. $x=2\operatorname{arctg}t$, тогаш $\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ и $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$, па затоа

$$\begin{aligned}z^n+\overline{z^n}&=(\cos x+i\sin x)^n+(\cos x-i\sin x)^n\\&=\cos nx-i\sin nx+con x-i\sin nx\\&=2\cos nx=2\cos(2n\operatorname{arctg}t).\end{aligned}$$

7. Докажи дека $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Решение. БидејЌи $\sin(90^\circ - x) = \cos x$, добиваме

$$P = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \cos 70^\circ \cos 50^\circ \cos 10^\circ = \frac{\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 80^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}}. \quad (1)$$

Нека $z = \cos 10^\circ + i \sin 10^\circ$. Имаме:

$$\cos n\varphi = \frac{z^{2n}+1}{2z^n}, \; z = \cos\varphi + i\sin\varphi \text{ и } z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

$$\bar{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \; \bar{z} = \frac{1}{z}, \; \bar{z}^n = \frac{1}{z^n} = \cos n\varphi - i\sin n\varphi$$

па затоа,

$$\cos 10^\circ = \frac{z^2+1}{2z}, \; \cos 30^\circ = \frac{z^6+1}{2z^3}, \cos 50^\circ = \frac{z^{10}+1}{2z^5}, \cos 70^\circ = \frac{z^{14}+1}{2z^7}.$$

Сега (1) го добива обликот

$$P = \cos 70^\circ \cos 50^\circ \cos 10^\circ = \frac{\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 80^\circ}{\cos 30^\circ}$$

$$= \frac{\frac{z^2+1}{2z} \cdot \frac{z^6+1}{2z^3} \cdot \frac{z^{10}+1}{2z^5} \cdot \frac{z^{14}+1}{2z^7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{16z^{16}} (z^2+1)(z^6+1)(z^{10}+1)(z^{14}+1)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{16z^{16}} (z^{32} + z^{30} + z^{26} + z^{24} + z^{22} + z^{20} + z^{18} + 2z^{16} + z^{14} + z^{12} +$$

$$+ z^{10} + z^8 + z^6 + z^2 + 1)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{16z^{16}} [(z^{32} + z^{30} + z^{28} + z^{26} + z^{24} + z^{22} + z^{20} + z^{18} + 2z^{16} + z^{14} + z^{12} + z^{10} +$$

$$+ z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1) + z^{16} - z^{28} - z^4]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{16z^{16}} (\frac{z^{34}-1}{z^2-1} + z^{16} - z^{28} - z^4) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{16z^{16}} (\frac{z^{36}-z^2}{z^2-1} + z^{18} - z^{30} - z^6)$$

Да забележиме дека

$$z^{18} = \cos 180^\circ + i\sin 180^\circ = -1, z^{36} = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1,$$

$$z^{36} = (z^{18})^2 = (-1)^2 = 1, \; z^6 = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z^{30} = \cos 300^\circ + i \sin 300^\circ = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

па според тоа

$$P = \frac{\sqrt{3}}{24(-1)} [\frac{1-z^2}{-(1-z^2)} - 1 - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})]$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{24} (-1 - 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

т.е. $P = -\frac{\sqrt{3}}{24}(-1-1-1) = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

8. Нека z_1, z_2, z_3 се различни комплексни броеви со еднакви модули. Ако броевите $z_1 + z_2 z_3$, $z_2 + z_3 z_1$ и $z_3 + z_1 z_2$ се реални, тогаш важи равенството $z_1 z_2 z_3 = 1$. Докажи!

Решение. Да ставиме $z_k = r(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k),\ \ k = 1,2,3.$ Со непосредни пресметувања добиваме

$$\begin{aligned} z_1 z_2 z_3 &= r^3(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3) \\ &= r^3(\cos\varphi + i\sin\varphi), \end{aligned}$$

каде $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$. Од условот на задачата имаме

$$\sin\varphi_k + r\sin(\varphi - \varphi_k) = 0,\ \ k = 1,2,3,$$

односно

$$\sin\varphi_k(1 - r\cos\varphi) + \cos\varphi_k \cdot r\sin\varphi = 0,\ \ k = 1,2,3.$$

Да претпоставиме дека $1 - r\cos\varphi \neq 0$. Тогаш

$$\operatorname{tg}\varphi_k = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi - 1},\ k = 1,2,3,$$

што не е можно бидејќи $\varphi_k \in [0, 2\pi)$ и меѓусебно се различни.

Затоа $1 - r\cos\varphi = 0$ и $\sin\varphi = 0$, па е $\cos\varphi = 1,\ \ r = 1.$ Конечно,

$$z_1 z_2 z_3 = r^3(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 1.$$

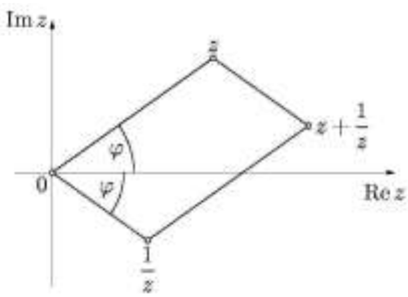
9. Четириаголникот со темиња $0, z, \frac{1}{z}$ и $z + \frac{1}{z}$ во комплексната рамнина има плоштина еднаква на $\frac{35}{37}$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот $|z + \frac{1}{z}|^2$.

Решение. Разгледуваниот четириаголник е паралелограм бидејќи комплексниот број $z + \frac{1}{z}$ е збир на броевите z и $\frac{1}{z}$. Нека

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

Тогаш

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$



Според тоа, аголот меѓу двете страни на паралелограмот еднаков на 2φ, па затоа неговата плоштина е еднаква на

$$|z| \cdot |\tfrac{1}{z}| \sin 2\varphi = \tfrac{35}{37},\ \text{т.е.}\ \sin 2\varphi = \tfrac{35}{37}.$$

За дадениот израз имаме

$$|z + \tfrac{1}{z}|^2 = (z + \tfrac{1}{z})(\bar{z} + \tfrac{1}{\bar{z}}) = z\bar{z} + \tfrac{z}{\bar{z}} + \tfrac{\bar{z}}{z} + \tfrac{1}{z\bar{z}} = r^2 + \tfrac{1}{r^2} + \tfrac{z^2 + \bar{z}^2}{r^2} = r^2 + \tfrac{1}{r^2} + 2\cos 2\varphi.$$

Од $\sin 2\varphi = \frac{35}{37}$ следува $\cos 2\varphi = \pm\sqrt{1 - (\frac{35}{37})^2} = \pm\frac{12}{37}$ и како $r^2 + \frac{1}{r^2} \geq 2$, добиваме дека бараниот миниму е $2 - 2 \cdot \frac{12}{37} = \frac{50}{37}$.

10. Реши ја равенката:

$$\frac{iz^6 + 8}{8i - z^6} = \sqrt{3}.$$

Решение. Ако $8i-z^6=0$, тогаш дропката на левата страна од равенката не е дефинирана. Ако $8i-z^6\neq 0$, т.е. $z^6\neq 8i$, тогаш двете страни на равенката ги множиме со $8i-z^6$ и после групирањето на членовите пред z на левата страна, а останатие членови на десната страна ја добиваме равенката

$$z^6(\sqrt{3}+i)=-8+8\sqrt{3}i\,.$$

Според тоа,

$$z^6=\frac{-8+8\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(-8+8\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{8(-1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{4}=8i\,.$$

Но, претходно видовме дека $z^6\neq 8i$, па затоа добиваме дека дадената равенка нема решенија.

11. Реши ја равенката

$$(x+i)^n+(x-i)^n=0\,,\ n\in\mathbf{N}, n>1\,.$$

Решение. Бидејќи $x\neq i$, дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(\tfrac{x+i}{x-i})^n=-1\,.$$

Според тоа,

$$\tfrac{x+i}{x-i}=\sqrt[n]{-1}=\sqrt[n]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\tfrac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\tfrac{\pi+2k\pi}{n},\ k=0,1,...,n-1\,.$$

Од последното равенка добиваме

$$\tfrac{x+i}{x-i}-1=\cos\tfrac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\tfrac{\pi+2k\pi}{n}-1,$$

$$\tfrac{2i}{x-i}=2i\sin\tfrac{\pi+2k\pi}{2n}(\cos\tfrac{\pi+2k\pi}{2n}-\tfrac{1}{i}\sin\tfrac{\pi+2k\pi}{n}),$$

$$x-i=\frac{1}{\sin\frac{\pi+2k\pi}{2n}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n})},$$

$$x-i=\frac{\cos\frac{\pi+2k\pi}{2n}-i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}}{\sin\frac{\pi+2k\pi}{2n}},$$

$$x-i=\operatorname{ctg}\tfrac{\pi+2k\pi}{2n}-i\,,$$

што значи

$$x=\operatorname{ctg}\tfrac{\pi+2k\pi}{2n}\,,\ k=0,1,...,n-1.$$

12. Реши ја равенката:

$$x^3-3x+1=0\,.$$

Решение. Со смена $x=u+v$ каде $uv=1$, ја добиваме равенката $u^6+u^3+1=0$. Оттука, $u^3=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, па затоа $u=A$, $v=B$, каде

$$A=\cos\tfrac{2\pi}{9}+i\sin\tfrac{2\pi}{9}\ \text{ и }\ B=\cos\tfrac{2\pi}{9}-i\sin\tfrac{2\pi}{9}\,.$$

Следува дека $x=A+B=2\cos\frac{2\pi}{9}$ е едно решение на равенката

$$x^3-3x+1=0\,.$$

Запишувајќи ги $x_2=\varepsilon A+\varepsilon^2 B$ и $x_3=\varepsilon^2 A+\varepsilon B$ во тригонометриска форма, добиваме дека останатите две решенија се $x_2=2\cos\frac{4\pi}{9}$ и $x_3=2\cos\frac{8\pi}{9}$.

13. Пресметај ги збировите:

а) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cos\frac{2k\pi}{n}$ б) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\sin\frac{2k\pi}{n}$

Упатство. Стави

$$A=\sum_{k=1}^{n} k\cos\frac{2k\pi}{n},\ B=\sum_{k=1}^{n} k\sin\frac{2k\pi}{n}$$

и пресметај $S=1+A+iB$.

14. Докажи, дека

а) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k+1)\alpha=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n+2}{2}\alpha$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin(k+1)\alpha=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\sin\frac{n+2}{2}\alpha$.

Упатство. Стави $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ и искористи ја биномната формула за $(1+z)^n$.

15. Нека $S_p=\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k^p$ е збирот на $p-$тите степени на $n-$ те корени на единицата, $n\in\mathbf{N}$. Докажете дека

$$S_p=\begin{cases} n, & \text{ако } n\mid p\\ 0, & \text{ако } n\nmid p.\end{cases}$$

Решение. Од

$$u_k=u^k,\quad k=0,1,\ldots,n-1$$

и

$$u=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

добиваме

$$S_p=1+u^p+u^{2p}+\ldots+u^{(n-1)p}. \qquad (5)$$

Ако $n\mid p$ и $\frac{p}{n}=m,$ тогаш

$$u^p=u^{mn}=(u^n)^m=1^m=1$$

и од (5) следува $S_p=n.$

Нека $n\nmid p.$ Притоа важи

$$u^{np}=(u^n)^p=1^p=1.$$

Од $n\nmid p$ следува

$$u^p-1\neq 0,$$

па затоа

$$S_p = 1 + u^p + u^{2p} + ... + u^{(n-1)p} = \frac{u^{np}-1}{u^p-1} = 0.$$

16. Ако $w_0, w_1, ..., w_{n-1}$ се $n-$тите корени на единицата, пресметај ги збировите:

а) $\sum_{k=1}^{n} kw_{k-1}$ б) $\sum_{k=1}^{n} k^2 w_{k-1}$ в) $\sum_{k=1}^{n} k^3 w_{k-1}$

Упатство. а) $n-$те корени на единицата ќе ги запишеме во облик $w_k = w^{k-1}$, каде $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Бараниот збир го запишуваме во обликот

$$S = \sum_{k=1}^{n} kw_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kw^{k-1}$$

Бидејќи $1 - w \neq 0$, точни се равенствата

$$S = \frac{S-Sw}{1-w} = \frac{1+2w+3w^2+...+nw^{n-1}-w-2w^2-3w^3-...-nw^n}{1-w}$$

$$= \frac{1+w+...+w^{n-1}-nw^n}{1-w} = \frac{\frac{1-w^n}{1-w}-nw^n}{1-w} = \frac{1-(n+1)w^n+nw^{n+1}}{(1-w)^2}.$$

Конечно, бараниот збир може да се пресмета ако замениме за

$$w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

и ја искористиме Моавровата формула.

Во задачите под б) и в) постапи аналогно како во задачата под а).

17. Ако $n = 2, 3, ...$ докажи дека

а) $\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + ... + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$, и

б) $\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + ... + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$.

Решение. Равенката $z^n - 1 = 0$ има n решенија и тоа се $n-$те корени на единицата

$$u_k = u^k, \quad k = 0, 1, ..., n-1 \text{ и } u = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Од задача 15 следува дека нивниот збир е еднаков на нула. Според тоа,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = 0,$$

т.е.

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + ... + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i(\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + ... + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n}) = -1.$$

Последното равенство е еквивалентно на равенствата а) и б) кои требаше да ги докажеме.

18. Докажи, дека

$$s = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Решение. Прво да забележиме, дека од $z = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$ следува

$$z^n = -1,\ \ z^{2n} = 1. \tag{1}$$

Нека $w = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Тогаш $\overline{w} = \cos\varphi - i\sin\varphi = \frac{1}{w}$, па затоа

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(w + \frac{1}{w}) = \frac{w^2+1}{2w},\ \ \sin\varphi = \frac{1}{2i}(w - \frac{1}{w}) = \frac{w^2-1}{2iw}.$$

Понатаму, од Моавровата формула следува

$$w^k = \cos k\varphi + i\sin k\varphi \text{ и } \overline{w}^k = \cos k\varphi - i\sin k\varphi = \frac{1}{w^k},$$

па затоа

$$\cos k\varphi = \frac{w^{2k}+1}{2w^k},\ \ \sin k\varphi = \frac{w^{2k}-1}{2iw^k}. \tag{2}$$

Нека $z = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$. Во (2) ставаме $k = 1,2,3$ и ако го искористиме (1) добиваме дека

$$s = \frac{z^2+1}{2z} - \frac{z^4+1}{2z^2} + \frac{z^6+1}{2z^3} = \frac{(z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1)+z^3}{2z^3} = \frac{\frac{z^7+1}{z+1}+z^3}{2z^3} = \frac{z^3}{2z^3} = \frac{1}{2}.$$

19. Пресметај

$$p = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}.$$

Решение. Нека е $z = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$. Тогаш од формулите (2) и (1) во задача 18 следува

$$\cos\frac{\pi}{7} = \frac{z^2+1}{2z}, \cos\frac{2\pi}{7} = \frac{z^4+1}{2z^2}, \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{z^6+1}{2z^3},$$

па затоа

$$\begin{aligned} p &= \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{(z^2+1)(z^4+1)(z^6+1)}{8z^6} \\ &= \frac{z^{12}+z^{10}+z^8+2z^6+z^4+z^2+1}{8z^6} = \frac{-z^5-z^3-z+z^6+z^4+z^2+1+z^6}{8z^6} \\ &= \frac{z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1+z^6}{8z^6} = \frac{\frac{z^7+1}{z+1}+z^6}{8z^6} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

20. Нека се α, β и γ аглите на произволен триаголник. Докажи, дека

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

Решение. Со S да ја означиме левата страна на идентитетот и нека

$$z = \cos\alpha + i\sin\alpha,\ w = \cos\beta + i\sin\beta.$$

Тогаш од тригонометрискиот запис на комплексен број следува

$$zw = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta),$$

па од равенствата (2) во задача 18 добиваме

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\pi - (\alpha+\beta)) \\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) \\ &= (\frac{z^2+1}{2z})^2 + (\frac{w^2+1}{2w})^2 + (\frac{z^2w^2+1}{2zw})^2 \\ &= \frac{w^2z^4+z^2w^4+6z^2w^2+z^2+w^2+z^4w^4+1}{4z^2w^2}, \end{aligned}$$

и

$$2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=-2\frac{z^2+1}{2z}\frac{w^2+1}{2w}\frac{z^2w^2+1}{2zw}$$
$$=\frac{-w^2z^4-z^2w^4-2z^2w^2-z^2-w^2-z^4w^4}{4z^2w^2}.$$

Конечно, добиваме $S=\frac{4z^2w^2}{4z^2w^2}=1$.

21. Реши ја равенката

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1.$$

Решение. Ако искористиме дека

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2},$$

дадената равенка ја трансформираме во видот

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)=1,$$

т.е. во видот

$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=-1.$$

Земаме $z=\cos x+i\sin x$ и ако го искористиме равенството (2) во задача 18 добиваме

$$\frac{z^4+1}{2z^2}+\frac{z^8+1}{2z^4}+\frac{z^{12}+1}{2z^6}=-1,$$

од каде последователно наоѓаме

$$(1+z^2+z^4+^6+z^8+z^{10}+z^{12})+z^6=0,$$
$$\frac{z^{14}-1}{z^2-1}+z^6=0,$$
$$(z^8-1)(z^6+1)=0.$$

Притоа го искористивме фактот дека $z^2\neq 1$, бидејќи $x=0$ и $x=\pi$ не се решенија на дадената равенка. Од

$$(z^8-1)(z^6-1)=0$$

следува $z^6+1=0$ или $z^2+1=0$ или $z^4+1=0$. Понатаму, од $z^6+1=0$ следува дека $\cos 6x=-1$, т.е $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}$.

Слично се добиваат и останатите решенија

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \text{ и } x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

22. Докажи го идентитетот

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+...+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x,$$

за $n\in\mathbb{N},\ x\neq\frac{\lambda\pi}{2^k},\ k=0,1,2,...,n,\lambda\in\mathbb{Z}$

Решение. Нека $z=\cos x+i\sin x$. Од равенството (2) во задача 31 следува

$$\operatorname{tg} k\varphi=\frac{w^{2k}-1}{i(w^{2k}+1)},\ \operatorname{ctg} k\varphi=\frac{i(w^{2k}-1)}{w^{2k}-1}. \qquad (1)$$

Понатаму, од (1) за $n=2^s$ имаме

$$\frac{1}{\sin 2^s x}=\frac{2iz^{2^s}}{z^{2^{s+1}}-1}=i\frac{z^{2^{s+1}}+2z^{2^s}+1-z^{2^{s+1}}-1}{z^{2^{s+1}}-1}=i\frac{(z^{2^s}+1)^2-(z^{2^{s+1}}+1)}{z^{2^{s+1}}-1}$$
$$=i\frac{z^{2^s}+1}{z^{2^s}-1}-i\frac{z^{2^{s+1}}+1}{z^{2^{s+1}}-1}=\operatorname{ctg} 2^{s-1}x-\operatorname{ctg} 2^s x. \qquad (2)$$

Конечно, ако во (2) последователно ставиме $s=1,2,4,...,2^n$ и ги собереме добиените равенства наоѓаме

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+...+\frac{1}{\sin 2^n x}=(\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2x)+(\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{ctg} 4x)+...+(\operatorname{ctg} 2^{n-1}x-\operatorname{ctg} 2^n x)$$
$$=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x,$$

што и требаше да се докаже.

23. Нека се α,β и γ аглите на произволен триаголник. Докажи, дека триаголникот е правоаголен ако и само ако

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-1.$$

Упатство. Претходно докажи дека за произволен триаголник важи

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

24. Пресметај го збирот:

$$S_n=1+2\cos x+2^2\cos 2x+...+2^n\cos nx.$$

Решение. Нека

$$T_n=i(\sin x+2^2\sin 2x+...+2^n\sin nx) \text{ и } z=2(\cos x+i\sin x).$$

Тогаш

$$S_n+T_n=1+2(\cos x+i\sin x)+2^2(\cos 2x+i\sin 2x)+...+2^n(\cos nx+i\sin nx)$$
$$=1+z+z^2+...+z^n=\frac{z^{n+1}-1}{z-1}=\frac{2^{n+1}[\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x]-1}{2(\cos x-i\sin x)}$$

па затоа

$$S_n=\operatorname{Re}\left[\frac{2^{n+1}[\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x]-1}{2(\cos x-i\sin x)}\right]=\frac{2^{n+2}\cos nx-2^{n+1}\cos(n+1)x-2\cos x+1}{5-4\cos x}.$$

25. Нека се $a_1,a_2,...,a_n$ реални броеви такви што за секој реален број x важи

$$1+a_1\cos x+a_2\cos 2x+...+a_n\cos nx\geq 0. \qquad (1)$$

Докажи, дека

$$a_1+a_2+...+a_n\leq n. \qquad (2)$$

Решение. Нека земеме $\varphi=\frac{2\pi}{n+1}$. Тогаш за $z=e^{i\varphi}$ добиваме

$$1+z^k+z^{2k}+...+z^{nk}=\frac{1-z^{(n+1)k}}{1-z^k}=\frac{1-\cos\frac{2(n+1)k\pi}{n+1}-i\sin\frac{2(n+1)k\pi}{n+1}}{1-\cos\frac{2k\pi}{n+1}-i\sin\frac{2k\pi}{n+1}}=0,$$

за $k=1,2,...,n$, од што следува

$$1+\cos k\varphi+\cos 2k\varphi+...+\cos nk\varphi=0, \qquad (3)$$

за $k=1,2,...,n$. Ако во неравенството (1) последователно ставиме

$$x=\varphi,\ x=2\varphi,\ ...,\ x=n\varphi,$$

добиваме n неравенства, од кои после собирањето со помош на равенствата (3) го добиваме неравенството $n-a_1-a_2-...-a_n \geq 0$, кое е еквивалентно со неравенството (2).

26. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=0}^{1005}(-3)^k\binom{2010}{2k}.$$

Решение. Од Њутновата биномна формула следува

$$z=(1+i\sqrt{3})^{2010}=\sum_{k=0}^{2010}(i\sqrt{3})^k\binom{2010}{k}=\sum_{k=0}^{1005}(-3)^k\binom{2010}{2k}+i\sqrt{3}\sum_{k=0}^{1004}(-3)^k\binom{2010}{2k+1}.$$

Според тоа, бараниот збир е еднаков на реалниот дел на бројот $z=(1+i\sqrt{3})^{2010}$. Но, $1+i\sqrt{3}=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$, па од Моавровата формула следува дека

$$z=2^{2010}(\cos\tfrac{2010\pi}{3}+i\sin\tfrac{2010\pi}{3})=2^{2010}(1+i\cdot 0)=2^{2010}.$$

Според тоа, z е реален број, т.е. е еднаков на бараниот збир, што значи дека

$$\sum_{k=0}^{1005}(-3)^k\binom{2010}{2k}=2^{2010}.$$

27. Докажи дека

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}.$$

Решение. Нека $z=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$. Тогаш

$$z^5=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

односно $z^5+1=0$ или

$$(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)=0.$$

Бидејќи $z+1\neq 0$ следува

$$z^4-z^3+z^2-z+1=0. \qquad (1)$$

Притоа

$$z^6=-z \qquad (2)$$

Од друга страна

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{2}(z+\overline{z})=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})=\frac{z^2+1}{2z} \text{ и } \cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}(z^3+\frac{1}{z^3})=\frac{z^6+1}{2z^3},$$

од каде

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{z^2+1}{2z}+\frac{z^6+1}{2z^3}\overset{2}{=}\frac{z^4+z^2-z+1}{2z^3}\overset{1}{=}\frac{z^3}{2z^3}=\frac{1}{2}.$$

28. Нека

$$u_k=u^k,\ k=0,1,...,n-1$$

се n-те корени на единицата. Докажи дека u_k е примитивен n-ти корен на единицата ако и само ако n и k се заемно прости броеви.

Решение. Нека n и k се заемно прости броеви и да допуштиме дека за некој $r<n$ важи $u_k^r=1.$ Од Моавровата формула имаме

$$1=u_k^r=\cos\frac{2kr\pi}{n}+i\sin\frac{2kr\pi}{n}.$$

Од последното равенство имаме

$$\cos\frac{2kr\pi}{n}=1,\quad \sin\frac{2kr\pi}{n}=0.$$

Според тоа, $\frac{kr}{n}\in\mathbf{Z}$ и како n и k се заемно прости добиваме $n\,|\,r,$ што не е можно бидејќи $r<n$. Значи, u_k е примитивен n-ти корен на единицата.

Обратно, нека u_k е примитивен n-ти корен на единицата. Да претпоставиме дека најголемиот заеднички делител на n и k е $d,\;\; d>1.$ Нека $k=k_1d,\;\; n=n_1d.$ Тогаш

$$u_k^{n_1}=(u_1^k)^{n_1}=u_1^{n_1k}=u_1^{k_1dn_1}=u_1^{k_1n}=(u_1^n)^{k_1}=1^{k_1}=1,$$

што противречи на примитивноста на u_k, бидејќи $n_1<n.$ ■

29. Пресметај ги збировите:

a) $A=\cos x+\cos(x+\alpha)+\cos(x+2\alpha)+...+\cos(x+n\alpha)$, и

b) $B=\sin x+\sin(x+\alpha)+\sin(x+2\alpha)+...+\sin(x+n\alpha)$.

Решение. Земаме $S=A+iB$. Притоа имаме:

$$\begin{aligned}S&=e^{ix}+e^{i(x+\alpha)}+e^{i(x+2\alpha)}+...+e^{i(x+n\alpha)}\\&=e^{ix}(1+e^{i\alpha}+e^{i2\alpha}+...+e^{in\alpha})\\&=\frac{e^{ix}(e^{i(n+1)\alpha}-1)}{e^{i\alpha}-1}.\end{aligned}$$

Бидејќи $A=\operatorname{Re}S$ и $B=\operatorname{Im}S$, од последната формула можеме да ги пресметаме A и B. Ако ги поделиме броителот и именителот со $e^{i\frac{\alpha}{2}}$, тогаш според Ојлеровите формули именителот ќе биде еднаков на $2i\sin\frac{\alpha}{2}$, а броителот ќе биде еднаков на на

$$\cos(x+(n+\tfrac{1}{2})\alpha)-\cos(x-\tfrac{\alpha}{2})+i(\sin(x+(n+\tfrac{1}{2})\alpha)-\sin(x-\tfrac{\alpha}{2}))=$$
$$=2\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}(-\sin(x+\tfrac{n\alpha}{2})+i\cos(x+\tfrac{n\alpha}{2})).$$

Според тоа,

$$A=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos(x+\frac{n\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}\;\text{ и }\;B=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin(x+\frac{n\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}\;.\;■$$

Забелешка. Ако во пример 8.5 ставиме $x=0$, добиваме

$$1+\cos\alpha+\cos2\alpha+...+\cos n\alpha=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\frac{n+\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},\;\text{ и}$$

$$\sin\alpha+\sin2\alpha+...+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n+\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

30. Нека n е природен број. Докажи дека полиномот

$$P(z)=z^{n+1}-z^n-1$$

има корен w таков што $|w|=1$ ако и само ако $6\,|\,(n+2)$.

Решение. Нека $|w|=1$ и $w^{n+1}-w^n-1=0$. Тогаш $w^n(w-1)=1$ и како $|w|=1$ добиваме дека $|w-1|=1$. Според тоа, w е еден од пресеците на кружниците $|z|=1$ и $|z-1|=1$, па значи $w=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$. Освен тоа, $w-1=\cos\frac{2\pi}{3}\pm i\sin\frac{2\pi}{3}=w^2$. Конечно,

$$1=w^n(w-1)=w^{n+2}=\cos\tfrac{(n+2)\pi}{3}\pm i\sin\tfrac{(n+2)\pi}{3},$$

што значи $\frac{(n+2)\pi}{3}=2k\pi,$ за некој $k\in\mathbf{N}$, па затоа $n+2=6k,$ за некој $k\in\mathbf{N}$, т.е. $6\,|\,(n+2)$.

Обратно, ако $6\,|\,(n+2)$, т.е. $n+2=6k,$ за некој $k\in\mathbb{N}$, тогаш за

$$w=\cos\tfrac{\pi}{3}\pm i\sin\tfrac{\pi}{3}$$

важи

$$|w|=1,\ w^2=w-1 \text{ и } w^{n+2}=1,$$

па затоа

$$w^{n+1}-w^n-1=w^n(w-1)-1=w^nw^2-1=w^{n+2}-1=0.$$

31. Дадена е низа точки $T_i(x_i,y_i)$ во xOy рамнината такви што $x_0=1$, $y_0=0$ и $x_{n+1}=\sqrt{3}x_n-y_n$, $y_{n+1}=x_n+\sqrt{3}y_n$, за $n\geq 0$. Во кој квадрант се наоѓа точката T_{2003}?

Решение. Да означиме $z_k=x_k+iy_k$, за $k\geq 0$. Тогаш важи

$$\begin{aligned}z_{n+1}&=\sqrt{3}x_n+i^2y_n+i(x_n+\sqrt{3}y_n)=(\sqrt{3}+i)(x_n+iy_n)\\&=2\tfrac{\sqrt{3}+i}{2}z_n=2(\cos\tfrac{\pi}{6}+i\sin\tfrac{\pi}{6})z_n\end{aligned}$$

за $n\geq 0$. Бидејќи $z_0=1$, добиваме

$$z_{n+1}=2^{2003}(\cos\tfrac{2003\pi}{6}+i\sin\tfrac{2003\pi}{6})=2^{2003}(\cos\tfrac{11\pi}{6}+i\sin\tfrac{11\pi}{6})$$

од што следува дека бараната точка се наоѓа во четвртиот квадрант. ♦

32. Пресметај $z=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^8}$.

Решение. Броевите

$$z_1=\sqrt{3}+1 \text{ и } z_2=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

ќе ги претставиме со помош на Ојлеровите формули. Имаме

$$r_1=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2,\ r_1=\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}=2,$$

$$\varphi_1=\operatorname{arctg}\tfrac{1}{\sqrt{3}}=\tfrac{\pi}{6},\ \varphi_2=\operatorname{arctg}1=\tfrac{\pi}{4},$$

па затоа $z_1=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ и $z_2=2e^{i\frac{\pi}{4}}$. Според тоа,

$$z=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^{10}}{(\sqrt{3}+i)^8}=\frac{(2e^{i\frac{\pi}{4}})^{10}}{(2e^{i\frac{\pi}{6}})^8}=\frac{2^{10}e^{i\frac{10\pi}{4}}}{2^8e^{i\frac{8\pi}{6}}}=\frac{2^2e^{i\frac{5\pi}{2}}}{e^{i\frac{4\pi}{3}}}$$
$$=4e^{i(\frac{5\pi}{2}-\frac{4\pi}{3})}=4e^{i\frac{7\pi}{6}}=4(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6})$$
$$=4(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})=-2\sqrt{3}-2i.$$

33. Која е најголемата вредност на $|z|$ ако се знае дека комплексниот број z го задоволува условот $|z+\frac{1}{z}|=1$?

Решение. Нека $z=re^{i\varphi}$, каде $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Имаме

$$|z+\frac{1}{z}|^2=(re^{i\varphi}+\frac{1}{r}e^{-i\varphi})(re^{-i\varphi}+\frac{1}{r}e^{i\varphi})$$
$$=r^2+\frac{1}{r^2}+e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}=r^2+\frac{1}{r^2}+2\cos 2\varphi.$$

Од равенката

$$r^2+\frac{1}{r^2}+2\cos 2\varphi=1$$

следува

$$r^2=\frac{-2\cos 2\varphi+1\pm\sqrt{(2\cos 2\varphi-1)^2-4}}{2}.$$

Од овде следува дека r^2, што значи и r ќе биде максимален ако $\cos 2\varphi=-1.$ Тогаш

$$r_{\max}=\sqrt{\frac{-2(-1)+1+\sqrt{(2(-1)-1)^2-4}}{2}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

II НИЗИ РЕАЛНИ БРОЕВИ

1. ВОВЕДНИ ЗАДАЧИ

1. Одреди го 2015-от член во низата $1,2,-2,3,-3,3,4,-4,4,-4,5,-5,5,-5,5,...$

Решение. Нека 2015-от член во низата е бројот k. Да забележиме дека последното појавување во низата на број со апсолутна вредност 2 има реден број 3; на број со апсолутна вредност 3 има реден број 6; на број со апсолутна вредност 4 има реден број 10 итн. Лесно се докажува дека последното појавување на број чија апсолутна вредност е k има реден број $\frac{k(k+1)}{2}$. Бидејќи $\frac{62\cdot 63}{2}=1953$ и $\frac{63\cdot 64}{2}=2016$, следува дека на 2015-та позиција во низата е бројот

$$(-1)^{2015-1953+1}63=-63.$$

2. Да се најде 1981-от член на низата

$$1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,5,5,5,.... .$$

Решение. Нека 1981-от член на низата е бројот k. Да забележиме дека последното појавување на бројот: 2 има редден број 3, 3 има реден број 6, 4 има редден број 10 итн.; последното појавување на бројот k во низата има реден број

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Според тоа, $\frac{k(k+1)}{2}\geq 1981$, од каде што добиваме дека

$$k^2+k-3962\geq 0,$$

т.е. $k\in(-\infty,\frac{-1-\sqrt{15849}}{2}]\cup[\frac{-1+\sqrt{15849}}{2},+\infty)$.

Бидејќи $k>0$, следува дека k е најмалиот број што му припаѓа на интервалот $[\frac{-1+\sqrt{15849}}{2},+\infty)$. Имаме: $[\frac{-1+\sqrt{15849}}{2},+\infty)\approx 62,4$, па според тоа, $k=63$.

Следствено, 1981-от член во дадената низа е бројот 63.

3. Низата реални броеви $a_0,a_1,a_2,...$ ја задоволува релацијата

$$a_{m+n}+a_{m-n}-m+n-1=\frac{a_{2m}+a_{2n}}{2}, \text{ за секои } m,n\in\mathbb{N}, m\geq n.$$

Ако $a_1=3$, пресметај го a_{2004}.

Решение. За $m=n$ добиваме $a_0=1$. Понатаму, за $n=0$ добиваме $a_{2m}=4a_m-2m-3$. Сега релацијата од условот на задачата го добива видот $a_{m+n}+a_{m-n}=2(a_m+a_n-n-1)$. Оттука за $n-1$ добиваме $a_{m+1}-2a_m+a_{m-1}=2$, односно $b_m=b_{m-1}+2$, за секој m, каде $b_m=a_{m+1}-a_m$. Од $b_0=2$, следува $b_m=2m+2$, па затоа

$$a_m=a_0+b_0+b_1+...+b_{m-1}=1+(2+4+...+2m)=m^2+m+1,$$

т.е. $a_{2004}=2004\cdot 2005+1$.

4. Низата $\{a_n\}$ е зададена со $a_1=\frac{1}{2}$, $a_n=\frac{a_{n-1}}{2na_{n-1}+1}$ за $n>1$. Определи го збирот $a_1+...+a_k$, за секој природен број k.

Решение. *Прв начин.* Заради $a_1=\frac{1}{2}>0$ следува дека $a_n>0$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Натаму, за $n>1$ имаме $a_n=\frac{a_{n-1}}{2na_{n-1}+1}=\frac{1}{2n+\frac{1}{a_{n-1}}}$. Оттука

$$\frac{1}{a_n}=2n+\frac{1}{a_{n-1}}=2n+2(n-1)+\frac{1}{a_{n-2}}=...=2n+2(n-1)+...+2\cdot 2+\frac{1}{a_1}$$
$$=2n+2(n-1)+...+2\cdot 2+2\cdot 1=2\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1).$$

Според тоа $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Значи за произволен $k\in\mathbb{N}$ имаме

$$a_1+...+a_k=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{k-}-\frac{1}{k})+(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=1-\frac{1}{k+1}=\frac{k}{k+1}$$

Втор начин. Со помош на математичка индукција ќе докажеме дека $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$, за секој $n\in\mathbb{N}$. За $n=1$ важи $a_1=\frac{1}{1\cdot 2}$. Да претпоставиме дека тврдењето важи за природниот број n. Тогаш за $n+1$ имаме

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2na_n+1}=\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{2(n+1)\frac{1}{n(n+1)}+1}=\frac{1}{2n+2+n^2+n}=\frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

па $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Како при првиот начин на решавање добиваме дека $a_1+...+a_k=\frac{k}{k+1}$.

5. Зададена е низа реални броеви со

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n+1, \tag{1}$$

за секој природен број $n\in\mathbb{N}$ и $a_{2009}=2009$. Определи го збирот

$$a_1+a_2+a_3+...+a_{2008}.$$

Решение. Рекурентната формула (1) можеме да ја запишема во облик

$$na_{n+1}-(n+1)a_n=n$$

За $n=1,2,3,...,2008$ имаме

$$1a_2-2a_1=1$$
$$2a_3-3a_2=2$$
$$3a_4-4a_3=3$$
$$....................$$
$$2008a_{2009}-2009a_{2008}=2008$$

Ако овие 2008 равенства ги собереме, добиваме

$$-2(a_1+a_2+...+a_{2008})+2008\cdot a_{2009}=1+2+3+...+2008=\frac{2008\cdot 2009}{2}.$$

Сега, јасно е дека

$$a_1+a_2+a_3+...+a_{2008}=\frac{2008\cdot 2009}{4}.$$

6. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е определена со $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n - a_n^2$. Дали $a_{999} < \frac{1}{1000}$?

Решение. *Прв начин.* Од $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ се добива дека

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n(1-a_n)} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{1-a_n}.$$

Оттука,

$$\frac{1}{a_{999}} = \frac{1}{a_{998}} + \frac{1}{1-a_{998}} = \frac{1}{a_{997}} + \frac{1}{1-a_{997}} + \frac{1}{1-a_{998}} = \ldots = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{1-a_1} + \frac{1}{1-a_2} + \ldots + \frac{1}{1-a_{998}}$$

Имајќи во предвид дека $0 < a_n < 1$, добиваме $\frac{1}{1-a_n} > 1$. Следува

$$\frac{1}{a_{999}} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{1-a_1} + \frac{1}{1-a_2} + \ldots + \frac{1}{1-a_{998}} > 2 + 998 = 1000.$$

Од овде $a_{999} < \frac{1}{1000}$.

Втор начин. Ја формираме низата $b_n = \frac{1}{a_n}$. Тогаш,

$$b_1 = 2,\ b_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_n^2}} = b_n + 1 + \frac{1}{b_n - 1} > b_n + 1.$$

Оттука, $b_n > b_1 + (n-1) = n+1$, па $b_{999} > 1000$, од каде $a_{999} < \frac{1}{1000}$.

7. Низата $\{a_n\}$ е зададена рекурзивно: $a_1 = 2, a_n = 2(n + a_{n-1})$, за $n \geq 2$. Докажи, дека $a_n = 2^{n+2} - 2(n+2)$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Првите неколку членови на низата се

$$a_1 = 2, a_2 = 2(2+2) = 8, a_3 = 2(3+8) = 22, a_4 = 2(4+22) = 52.$$

Да ги разгледаме разликите $2^{n+2} - a_n$:

$$2^3 - a_1 = 8 - 2 = 6 = 2 \cdot 3,$$
$$2^4 - a_2 = 18 - 8 = 8 = 2 \cdot 4,$$
$$2^5 - a_3 = 32 - 22 = 10 = 2 \cdot 5,$$
$$2^6 - a_4 = 64 - 52 = 12 = 2 \cdot 6,$$

и за нив важи $2^{n+2} - a_n = 2(n+2)$, односно важи $a_n = 2^{n+2} - 2(n+2)$. Последното равенство ќе го докажеме со индукција по n.

За $n = 1$ веќе проверивме дека равенството важи. Нека претпоставиме дека равенството важи за n, т.е. дека $a_n = 2^{n+2} - 2(n+2)$. За $n+1$ имаме

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2(n+1+a_n) = 2(n+1+2^{n+2} - 2(n+2)) \\ &= 2 \cdot 2^{n+2} - 2(n+3) = 2^{n+3} - 2(n+3). \end{aligned}$$

Значи, равенството важи и за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n.

8. а) Дали постои неконстантна низа природни броеви $a_1, a_2, \ldots$, таква што за секој $k \geq 2$ важи $a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1}+a_{k+1}}$?

б) Дали постои неконстантна низа природни броеви $a_1, a_2, \ldots, a_{2003}$, таква што за секој $2 \le k \le 2002$ важи $a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1}+a_{k+1}}$?

Решение. Претпоставуваме дека постои низа a_n, $n \ge 1$ со даденото својство. Тогаш, низата $b_n = \frac{1}{a_n}$, врз основа на условот на задачата, е аротметичка прогресија, па за некое $d \ne 0$ важи $b_n = b_1 + (n-1)d$, за секој природен број n, па за доволно големо n, b_n е или поголемо од 1 или е помало од 0. Од друга страна, бидејќи броевите a_n се природни, мора $0 < b_n \le 1$, што претставува контрадикција. Конечна низа на вакви броеви постои. Така да 2003-те броја можеме да ги земеме, на пример $a_n = \frac{2003!}{n}$, за $1 \le n \le 2003$. Лесно се проверува дека оваа низа ги задоволува условите на задачата.

9. Дадени се реалните броеви $x_1, x_2, ..., x_{2002}$ такви што $x_1 = x_{2002}$ и $x_n = \frac{x_{n+1}+2x_{n-1}}{3}$ за $n = 2,3,...,2001$. Докажи дека сите броеви се меѓусебно еднакви.

Решение. *Прв начин.* Од $x_n = \frac{x_{n+1}+2x_{n-1}}{3}$, добиваме $x_{n+1} - x_n = 2(x_n - x_{n-1})$. Оттука

$$x_n - x_{n-1} = 2(x_{n-1} - x_{n-2}) = 2 \cdot 2(x_{n-2} - x_{n-3}) = \ldots = 2^{n-2}(x_2 - x_1) .$$

Според тоа имаме:

$$x_2 - x_1 = x_2 - x_1 \qquad (1)$$

$$x_3 - x_2 = 2(x_2 - x_1) \qquad (2)$$

$$x_4 - x_3 = 2^2(x_2 - x_1) \qquad (3)$$

$$x_5 - x_4 = 2^3(x_2 - x_1) \qquad (4)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{2002} - x_{2001} = 2^{2000}(x_2 - x_1) \qquad (2001)$$

Собирајќи ги овие равенства добиваме

$$x_{2002} - x_1 = (x_2 - x_1)(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2000}),$$

односно

$$x_{2002} - x_1 = (x_2 - x_1)(2^{2001} - 1) .$$

Но $x_{2002} = x_1$ и $2^{2001} - 1 \ne 0$ па следува $x_2 = x_1$. Натаму од (2) следува $x_3 = x_2$, од (3) $x_4 = x_3$, . . ., од (2001) следува $x_{2002} = x_{2001}$. Со тоа тврдењето е докажано.

Втор начин. Од $x_n = \frac{x_{n+1}+2x_{n-1}}{3}$ следува $x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$, па

$$x_3 = 3x_2 - 2x_1,$$

$$x_4 = 3x_3 - 2x_2 = 3(3x_2 - 2x_1) - 2x_2 = 7x_2 - 6x_1 = (2^3 - 1)x_2 - (2^3 - 2)x_1,$$

$$x_5 = 3x_4 - 2x_3 = 15x_2 - 14x_1 = (2^4 - 1)x_2 - (2^4 - 2)x_1 .$$

Ќе докажеме со математичка индукција дека за секој $n = 2,3,...,2001$ важи

$$x_{n+2}=(2^{n+1}-1)x_2-(2^{n+1}-2)x_1.$$

Да претпоставиме дека

$$x_n=(2^{n-1}-1)x_2-(2^{n-1}-2)x_1 \text{ и } x_{n+1}=(2^n-1)x_2-(2^n-2)x_1.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}x_{n+2}=3x_{n+1}-2x_n&=3((2^n-1)x_2-(2^n-2)x_1)-2((2^{n-1}-1)x_2-(2^{n-1}-2)x_1)\\&=(3\cdot 2^n-3-2\cdot 2^{n-1}+2)x_2-(3\cdot 2^n-6-2^n+4)x_1\\&=(2\cdot 2^n-1)x_2-(2\cdot 2^n-2)x_1=(2^{n+1}-1)x_2-(2^{n+1}-2)x_1\end{aligned}$$

па равенството важи и за $n+2$.

Сега од $x_1=x_{2002}$ и $x_{2002}=(2^{2001}-1)x_2-(2^{2001}-2)x_1$ добиваме

$$x_1=(2^{2001}-1)x_2-(2^{2001}-2)x_1,$$

односно

$$(2^{2001}-1)x_1=(2^{2001}-1)x_2.$$

Оттука следува $x_1=x_2$. Користејќи го ова имаме $x_{n+1}=(2^n-1)x_1-(2^n-2)x_1=x_1$ за секој $n=2,3,...,2001$. Со тоа тврдењето е докажано.

10. Дадена е низата од позитивни членови

$$a_1=1,\quad a_n=\frac{a_n^2+a_{n+1}^2}{(n-1)^2a_n+2a_{n+1}} \tag{1}$$

Докажи дека

$$a_n\le(\tfrac{n}{2})^{n-1} \tag{2}$$

Решение. Равенството (1) се доведува во обликот

$$(a_{n+1}-na_n)((2-n)a_n-a_{n+1})=0.$$

Неравенството (2) ќе го докажеме со принципот на математичка индукција.

За $n=1$ неравенството (2) е задоволено.

Нека (2) важи за $k\le n$. За $k=n+1$ можни се два случаја:

1) $a_{n+1}=na_n$. Со помош на неравенството на Бернули добиваме

$$(1-\tfrac{1}{n^2})^n>1-\tfrac{1}{n^2}n=1-\tfrac{1}{n} \quad \text{т.е.} \quad (1+\tfrac{1}{n})^n(1-\tfrac{1}{n})^n>1-\tfrac{1}{n},$$

што е пак еквивалентно со

$$(1+\tfrac{1}{n})^n>(1-\tfrac{1}{n})^{1-n}=(1+\tfrac{1}{n-1})^{n-1}.$$

Добиваме дека низата $(1+\frac{1}{n})^n$ е растечка и за сите $n\ge 2$ важи $(1+\frac{1}{n})^n\ge 2$ што е пак еквивалентно со неравенството $(\frac{n+1}{2})^n\ge 2(\frac{n}{2})^n$, односно со $(\frac{n+1}{2})^n\ge n(\frac{n}{2})^{n-1}$, од каде поради индуктивната претпоставка следува дека

$$(\tfrac{n+1}{2})^n\ge n(\tfrac{n}{2})^{n-1}\ge na_n\ge a_{n+1}.$$

2) $a_{n+1}=(2-n)a_n$. Во овој случај, за $n\ge 2$ добиваме дека $a_{n+1}\le 0$ што не е можно бидејќи низата се состои од позитивни членови ($a_n>0$). Значи a_{n+1} мора да е од обликот разгледан претходно во случајот 1), за кој веќе го докажавме неравенството (2).

11. За низата реални броеви $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е исполнето $|a_{n+1}-a_n|<1$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

а) Докажи дека за секои $m,n\in\mathbb{N}$ е исполнето $|a_m-a_n|\le|m-n|$.

б) Ако $b_n=\frac{1}{n}(a_1+a_2+...+a_n)$, $n\in\mathbb{N}$, докажи дека $|b_{n+1}-b_n|\le\frac{1}{2}$.

Решение. а) Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $m>n$. Тогаш, од својствата на апсолутна вредност следува

$$\begin{aligned}|a_m-a_n|&=|a_m-a_{m-1}+a_{m-1}-a_{m-2}+a_{m-2}-...+a_{n+1}-a_n|\\&\le|a_m-a_{m-1}|+|a_{m-1}-a_{m-2}|+...+|a_{n+1}-a_n|\\&\le\underbrace{1+1+1+..+1}_{m-n}=m-n=|m-n|\end{aligned}.$$

б) Од дефинцијата на низата $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ имаме

$$\begin{aligned}|b_{n+1}-b_n|&=\left|\frac{a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right|=\left|\frac{na_{n+1}-a_1-a_2-...-a_n}{n(n+1)}\right|\\&=\left|\frac{a_{n+1}-a_1+a_{n+1}-a_2+...+a_{n+1}-a_n}{n(n+1)}\right|\\&\le\frac{|a_{n+1}-a_1|+|a_{n+1}-a_2|+...+|a_{n+1}-a_n|}{n(n+1)}\\&\le\frac{n+(n-1)+....+3+2+1}{n(n+1)}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(n+1)}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

12. Нека $a_1=1$ и $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2a_n}$, за $n\ge1$. Докажи, дека $n\le a_n^2<n+\sqrt[3]{n}$.

Решение. Со квадрирање на $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2a_n}$ добиваме дека важи

$$a_{n+1}^2=a_n^2+1+\frac{1}{4a_n^2}>a_n^2+1.$$

Користејќи го последното неравенство и фактот дека $a_1=1$ со математичка индукција лесно се докажува дека $a_n^2\ge n$.

Десното неравенство исто така ќе го докажеме со математичка индукција. Очигледно е дека $a_1^2=1<2=1+\sqrt[3]{1}$. Нека претпоставиме дека неравенството важи за некој $n\ge1$. Ако искористиме дека $a_n^2\ge n$, т.е. $\frac{1}{n}\ge\frac{1}{a_n^2}$ и индуктивната претпоставка, тогаш за $n+1$ добиваме

$$a_{n+1}^2=a_n^2+1+\frac{1}{4a_n^2}<n+\sqrt[3]{n}+1+\frac{1}{4n},$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$\sqrt[3]{n}+\frac{1}{4n}<\sqrt[3]{n+1}. \tag{1}$$

За да го докажеме последното неравенство прво да зебележиме дека за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2}<1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}<4\le4\sqrt[3]{n}\text{ , т.е.}$$

$$1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2}<4\sqrt[3]{n}.$$

Ако посаледното неравенство го помножиме со $\sqrt[3]{n^2}$, последователно добиваме

$$\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{(n+1)^2}<4n$$

$$\frac{\sqrt[3]{n+1}^3-\sqrt[3]{n}^3}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}<4n$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}<4n$$

$$\frac{1}{4n}<\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$$

$$\sqrt[3]{n}+\frac{1}{4n}<\sqrt[3]{n+1}$$

т.е. го добивме неравенството (1).

13. Дадена е низа позитивни реални броеви $a_0, a_1, a_2, ...$ такви што важи

$$a_1 = 1-a_0, \quad a_{n+1} = 1-a_n(1-a_n) \text{, за } n \geq 1.$$

Докажи, дека за секој природен број n важи

$$a_0a_1...a_n(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n})=1. \tag{1}$$

Решение. За $n=0$ имаме $a_0 \cdot \frac{1}{a_0}=1$, т.е. точно е равенството (1). Нека претпоставиме дека равенството (1) е точно за некој природен број $n \geq 0$. Тогаш

$$\begin{aligned} a_0a_1...a_na_{n+1}(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}) &= a_{n+1}\cdot a_0a_1...a_n(\frac{1}{a_0}+\frac{1}{a_1}+...+\frac{1}{a_n})+a_0a_1...a_n \\ &= a_{n+1}+a_0a_1...a_n, \end{aligned}$$

што значи дека за да докажеме дека (1) важи и за $n+1$ доволно е да го докажеме равенството

$$a_n = 1-a_0a_1...a_{n-1}. \tag{2}$$

Равенството (2) ќе го докажеме со индукција по n . За $n=1$ имаме $a_1 = 1-a_0$, што значи дека равенството (2) е точно. Нека претпоставиме дека равенството (2) е точно за некој природен број $n \geq 1$. Тогаш

$$a_{n+1} = 1-a_n(1-a_n) = 1-a_n \cdot a_0a_1...a_{n-1} = 1-a_0a_1...a_{n-1}a_n,$$

па од принципот на математичка индукција следува дека (2) важи за секој природен број $n \geq 1$.

Од претходно изнесеното следува дека (1) важи за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека (1) важи за секој природен број n .

14. Нека a_0 е произволен реален број и нека $a_{n+1} = a_n^2+(a_n-1)^2$, за $n \geq 0$. Определи го a_n .

Решение. Имаме

$$a_{n+1} = a_n{}^2+(a_n-1)^2$$

$$2a_{n+1} = 2a_n{}^2+2(a_n-1)^2$$

$$2a_{n+1} = 4a_n{}^2-4a_n+2$$

$$2a_{n+1} = (2a_n-1)^2+1$$

$$a_{n+1}=\tfrac{1}{2}(2a_n-1)^2+\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}((2a_{n-1}-1)^2+1-1)^2+\tfrac{1}{2}$$
$$=\tfrac{1}{2}(2a_{n-1}-1)^{2^2}+\tfrac{1}{2}=\ldots=\tfrac{1}{2}(2a_0-1)^{2^n}+\tfrac{1}{2}.$$

15. Нека $a_1=\frac{1}{2}$ и $a_n=\frac{2n-3}{2n}a_{n-1}$ за секој $n\geq 2$. Докажи дека
$$s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n<1,$$
за секој природен број n.

Решение. Имаме
$$a_n=\tfrac{2n-3}{2n}a_{n-1}$$
$$2na_n=2na_{n-1}-3a_{n-1}$$
$$3a_{n-1}=2n(a_{n-1}-a_n)$$
Оттука
$$\begin{aligned}3a_{n-1}&=2n(a_{n-1}-a_n),\\3a_{n-2}&=2(n-1)(a_{n-2}-a_{n-1}),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\3a_1&=2\cdot 2\cdot(a_1-a_2).\end{aligned}$$
Ако ги собереме последниве равенства добиваме
$$3s_n-3a_n=-2na_n+2(a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_1)+2a_1$$
$$3s_n-3a_n=-2na_n+2s_n+2a_1$$
$$s_n=2a_1-(2n-1)a_n$$
$$s_n=1-(2n-1)a_n.$$
Бидејќи $a_1=\frac{1}{2}$ и $a_n=\frac{2n-3}{2n}a_{n-1}$ следува дека $a_n>0$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Затоа,
$$s_n=1-(2n-1)a_n<1 \text{ за секој } n\in\mathbb{N}.$$

16. Нека n е природен и нека $x_0=\frac{1}{n}$, $x_k=\frac{1}{n-k}(x_0+x_1+\cdots+x_{k-1})$. Пресметај го збирот $x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}$.

Решение. Со примена на горната формула за x_k се добива дека $x_1=\frac{1}{n(n-1)}$, $x_2=\frac{1}{(n-1)(n-2)}$. Ќе докажеме дека $x_k=\frac{1}{(n-k)(n-k+1)}$. Ќе користиме математичка индукција . Нека тврдењето важи за $i<k$. Тогаш
$$\begin{aligned}x_k&=\tfrac{1}{n-k}\left(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n(n-1)}+\tfrac{1}{(n-1)(n-2)}+\cdots+\tfrac{1}{(n-k+2)(n-k+1)}\right)\\&=\tfrac{1}{n-k}\left(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n-1}-\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n-2}-\tfrac{1}{n-1}+\cdots+\tfrac{1}{n-k+1}-\tfrac{1}{n-k+2}\right)\\&=\tfrac{1}{n-k}\cdot\tfrac{1}{n-k+1}=\tfrac{1}{(n-k)(n-k+1)}.\end{aligned}$$
Според тоа,
$$x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}=\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n-1}-\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n-2}-\tfrac{1}{n-1}+\cdots+\tfrac{1}{n-k+1}-\tfrac{1}{n-k+2}+\cdots+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+1-\tfrac{1}{2}=1.$$

17. Низата реални броеви $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е зададена со рекурентната зависност

$$a_{n+1}=\tfrac{(n+1)^2}{n^2}a_n+1$$

и $a_{2011}=2011^2$. Пресметај го збирот $a_1+2a_2+3a_3+...+2010a_{2010}$.

Решение. Рекурентната зависност ќе ја запишеме во облик

$$k^2a_{k+1}-(k+1)^2a_k=k^2.$$

Тогаш за $k=1,2,3,...,n$, добиваме

$$\begin{aligned}&1^2a_{k+1}-2^2a_k=1^2\\&2^2a_{k+1}-3^2a_k=2^2\\&3^2a_{k+1}-4^2a_k=3^2\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&(n-1)^2a_{k+1}-n^2a_k=(n-1)^2\\&n^2a_{k+1}-(n+1)^2a_k=n^2.\end{aligned}$$

Ако овие равенства ги собереме добиваме

$$-4(a_1+2a_2+3a_3+...+na_n)=1^2+2^2+3^2+...+n^2-n^2a_{n+1}$$

$$-4(a_1+2a_2+3a_3+...+na_n)=\tfrac{n^2(n^2+1)}{4}-n^2a_{n+1}$$

Ако избереме $n=2010$, тогаш

$$a_1+2a_2+3a_3+...+na_n=\tfrac{2010^2\cdot 2011^2}{4}+\tfrac{2010^2\cdot 2011^2}{4}$$

Според тоа

$$a_1+2a_2+3a_3+...+na_n=2010^2\cdot 2011^2(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{16})=\tfrac{3}{16}\cdot 2010^2\cdot 2011^2.$$

18. Низата реални броеви $\{a_n\}$ е дефинирана со $a_1=1$ и $a_n=\frac{4n-2}{n}a_{n-1}$ за $n\geq 2$. Докажи дека сите членови на оваа низа се природни броеви.

Решение. Јасно е дека $a_1\in\mathbb{N}$. Нека $n\geq 2$. Тогаш имаме

$$a_n=\tfrac{2(2n-1)}{n}a_{n-1}=\tfrac{2(2n-1)}{n}\cdot\tfrac{2(2n-3)}{n-1}a_{n-2}=\tfrac{2(2n-1)}{n}\cdot\tfrac{2(2n-3)}{n-1}\cdot\tfrac{2(2n-5)}{n-2}a_{n-3}=...=$$
$$=\tfrac{2^{n-1}\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot...\cdot 5\cdot 3}{n(n-1)\cdot...\cdot 3\cdot 2}a_1=\tfrac{2^{n-1}\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot...\cdot 5\cdot 3}{n!}=\tfrac{2^{n-1}\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot...\cdot 5\cdot 3\cdot(n-1)!}{n!\cdot(n-1)!}.$$

Натаму,

$$2^{n-1}\cdot(n-1)!=2^{n-1}\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot 2\cdot 1=(2n-2)\cdot(2n-4)\cdot...\cdot 4\cdot 2,$$

и

$$n!\cdot(n-1)!=n!\cdot((2n-1)-n)!,$$

па за a_n добиваме

$$a_n=\tfrac{2^{n-1}\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot...\cdot 5\cdot 3\cdot(n-1)!}{n!\cdot(n-1)!}=$$
$$=\tfrac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot...\cdot 5\cdot 3\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdot...\cdot 4\cdot 2}{n!\cdot((2n-1)-n)!}=\tfrac{(2n-1)!}{n!\cdot((2n-1)-n)!}=\binom{2n-1}{n}.$$

Бидејќи сите биномни коефициенти се природни броеви, добиваме дека $a_n\in\mathbb{N}$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

19. Низата $\{a_n\}$ е одредена со $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 3a_n + \sqrt{8a_n^2 + 1}$, за $n \geq 1$. Докажи дека сите членови на низата се природни броеви.

Решение. Дадената низа е строго растечка низа. Од рекурентната зависност со која е зададена низата добиваме

$$(a_{n+1} - 3a_n)^2 = 8a_n^2 + 1$$

$$a_{n+1}^2 - 6a_n a_{n+1} + a_n^2 = 1 \tag{1}$$

Аналогно,

$$a_{n+2}^2 - 6a_{n+1}a_{n+2} + a_{n+1}^2 = 1 \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 - 6a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) = 0 \;\Rightarrow\; (a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n) = 0$$

Бидејќи низата е строго монотоно растечка, $a_{n+2} - a_n \neq 0$, па според тоа $a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0$, т.е.

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n \tag{3}$$

Бидејќи $a_1 = 1$, $a_2 = 6$ од (3) добиваме дека $a_n \in \mathbb{N}$ за било кој $n \in \mathbb{N}$.

20. Низата броеви $a_1, a_2, \ldots$ е зададена со

$$a_1 = 1,\; a_2 = 143 \text{ и } a_{n+1} = 5\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}, \text{ за } n \geq 2.$$

Докажи дека сите членови на низата се цели броеви.

Решение. *Прв начин.* Да забележиме дека $a_3 = 5\frac{a_1 + a_2}{2} = 5 \cdot \frac{144}{2} = 5 \cdot 72 = 360$. За $n \geq 4$ имаме

$$a_n = 5\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \quad \text{и} \quad a_{n-1} = 5\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2}}{n-2}.$$

Со идентични трансформации добиваме

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} = \frac{n-2}{5} a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{5}{n-1}\left(\frac{n-2}{5} a_{n-1} + a_{n-1}\right)$$

$$a_n = \frac{5}{n-1} \frac{n+3}{5} a_{n-1} = \frac{n+3}{n-1} a_{n-1}.$$

Според тоа,

$$a_n = \frac{(n+3)(n+2)\cdot \ldots \cdot 7}{(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3} a_3 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} \cdot 360 = (n+3)(n+2)(n+1)n,$$

што требаше да се докаже.

Втор начин. Ако воведеме ознака $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, тогаш $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$. Значи, доволно е да докажеме дека S_n е цел број. Од дефиницијата на низата е јасно дека $S_1 = 1$, $S_2 = 144$, а од равенството

$$a_{n+1} = 5\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$$

добиваме

$$S_{n+1} - S_n = \frac{5}{n} S_n$$

$$S_{n+1} = \frac{n+5}{n} S_n.$$

Значи, при $n\geq 2$ добиваме

$$S_{n+1}=\frac{(n+5)(n+4)(n+3)\cdot\ldots\cdot 7}{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2}S_2=\frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}144=\frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5}$$

Но, броевите $n+5,\ n+4,\ n+3,\ n+2,\ n+1$ се пет последователни природни броеви па еден од нив е делив со 5. Значи, $S_n\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, што требаше и да се докаже.

21. Нека $a_1,a_2,...$ е низа цели броеви, која содржи бесконечно многу и позитивни и негативни броеви. Познато е дека за секој природен број n броевите $a_1,a_2,...,a_n$ даваат различни остатоци при делење со n. Докажи, дека во оваа низа секој цел број се појавува точно по еднаш.

Решение. Од условот на задачата следува дека сите членови на низата се различни. Исто така, ако $d=|a_i-a_j|\geq n$ за некои $i,j\leq n$, тогаш меѓу членовите $a_1,a_2,...,a_d$ се наоѓаат два кои даваат ист остаток по модул d, што не е можно. Според тоа, $|a_i-a_j|\leq n-1$, за секои $i,j\leq n$, т.е. множеството $\{a_1,a_2,...,a_n\}$ се состои од n последователни цели броеви.

Ако целиот број k не се појавува во низата, тогаш сите членови на низата се поголеми од k или сите се помали од k, што противречи на условот дека низата содржи бесконечно многу и позитивни и негативни броеви. Според тоа, низата ги содржи сите цели броеви и притоа секој број се содржи точно по еднаш.

22. Низата $\{a_n\}$ е определена со условите:

(1) $a_1=0$;

(2) $(n+1)^3a_{n+1}=2n^2(2n+1)a_n+2(3n+1)$, за $n\geq 1$

Докажи дека бесконечно многу членови на низата се природни броеви.

Решение. Нека $b_n=n^2a_n, n\geq 1$. Тогаш

$$(n+1)b_{n+1}=2(2n+1)b_n+2(3n+1)\,.$$

Нека $c_n=b_n+\alpha, n\geq 1$. Тогаш

$$(n+1)(c_{n+1}-\alpha)=2n^2(2n+1)(c_n-\alpha)+2(3n+1)\,,$$

односно:

$$c_{n+1}=\frac{2(2n+1)}{n+1}c_n+\frac{3n+1}{n+1}(2-\alpha)$$

За $\alpha=2$ добиваме: $c_1=1^2\cdot 0+2=2,$

$$c_{n+1}=\frac{2(2n+1)}{n+1}c_n=\frac{2^2(2n+1)(2n-1)}{(n+1)n}c_{n-1}=...=\frac{2^n\cdot(2n+1)!!}{(n+1)!}c_1$$
$$=\frac{2^{n+1}\cdot(2n+1)!!}{(n+1)!}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}=\binom{2n+2}{n+1}.$$

Затоа

$$a_n=\frac{c_n-\alpha}{n^2}=\frac{\binom{2n}{n}-2}{n^2}\,.$$

Од равенството

$$\binom{2n}{n}-2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2-2=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}^2$$

и бидејќи за секој прост број $n, 0<k<n$ важи $n\,|\,\binom{n}{k}$, следува дека за секој прост број n важи $a_n\in\mathbb{N}$. Конечно, од бесконечноста на множеството прости броеви, следува почетното тврдење.

23. Нека (a_n) е низа реални броеви дефинирана на следниов начин $a_1=a_2=1$ и $a_n=\frac{a_{n-1}^2+2}{a_{n-2}}$ за $n>2$. Докажи дека a_n е цел број за секој $n\in N$.

Решение. *Прв начин.* Прво со индукција ќе докажеме дека $a_n\,|\,(a_{n+1}+a_{n-1})$ за $n>1$. За $n=2$ имаме $a_3=\frac{1^2+2}{1}=3$, па $a_2=1$ е делител на 3. Да претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k$, т.е. $a_k\,|\,(a_{k+1}+a_{k-1})$. Тогаш за $n=k+1$ имаме

$$\frac{a_{k+2}+a_k}{a_{k+1}}=\frac{\frac{a_{k+1}^2+2}{a_k}+a_k}{a_{k+1}}=\frac{a_{k+1}^2+a_k^2+2}{a_k\,a_{k+1}}=\frac{a_{k+1}^2+a_{k+1}\,a_{k-1}}{a_k\,a_{k+1}}=\frac{a_{k+1}+a_{k-1}}{a_k}\in\mathbb{Z},$$

па тврдењето е точно.

Сега да ги одземеме равенствата

$$a_na_{n+2}=a_{n+1}^2+2 \text{ и } a_{n-2}a_n=a_{n-1}^2+2.$$

Добиваме

$$a_n(a_{n+2}-a_{n-2})=(a_{n+1}-a_{n-1})(a_{n+1}+a_{n-1}),$$

односно

$$a_{n+2}=a_{n-2}+(a_{n+1}-a_{n-1})\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}.$$

Според тоа, ако a_{n-2}, a_{n-1}, a_{n+1} се цели броеви тогаш и a_{n+2} е цел број. Имајќи предвид дека $a_1=a_2=1$, $a_3=3$ и $a_4=11$ добиваме дека a_n е цел број за секој природен број n.

Втор начин. Јасно е дека секој член на низата е различен од нула. Дефинираме $b_n=\frac{a_n^2+a_{n+1}^2+2}{a_na_{n+1}}$, за $n=1,2,3,...$ Тогаш

$$b_n=\frac{a_n^2+(\frac{a_n^2+2}{a_{n-1}})^2+2}{a_n\cdot\frac{a_n^2+2}{a_{n-1}}}=\frac{\frac{a_n^2a_{n-1}^2+(a_n^2+2)^2+2a_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}}{a_n\cdot\frac{a_n^2+2}{a_{n-1}}}=\frac{a_n^2a_{n-1}^2+(a_n^2+2)^2+2a_{n-1}^2}{a_na_{n-1}(a_n^2+2)}$$

$$=\frac{(a_n^2+2)(a_n^2+2+a_{n-1}^2)}{a_na_{n-1}(a_n^2+2)}=\frac{a_n^2+2+a_{n-1}^2}{a_na_{n-1}}=b_{n-1}.$$

Значи (b_n) е константна низа, и $b_n=\frac{a_1^2+a_2^2+2}{a_1a_2}=4$. Значи $a_n^2+a_{n+1}^2+2=4a_na_{n+1}$, односно

$$a_{n+1}^2+2=a_n(4a_{n+1}-a_n).$$

Сега го докажуваме тврдењето на задачата со математичка индукција. Броевите a_1,a_2 и a_3 се цели. Да претпоставиме дека a_n и a_{n+1} се цели. Тогаш

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2+2}{a_n}=\frac{a_n(4a_{n+1}-a_n)}{a_n}=4a_{n+1}-a_n$$

е цел број заради индуктивната претпоставка.

24. Низата $a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$ е определена со равенствата $a_1=a, a_2=b$ и $a_{n+1}=\frac{a_n^2+c}{a_{n-1}}$, за $n\geq 2$, каде a,b,c се реални броеви, $ab\neq 0$ и $c>0$. Докажи дека сите членови на низата се цели броеви ако и само ако a,b и $\frac{a^2+b^2+c}{ab}$ се цели броеви.

Решение. Од условот на задачата следува

$$a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2=c=a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2,\ n\geq 2$$

т.е.

$$\frac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n}=\text{const}=t\ ,$$

па затоа $a_{n+1}=ta_n-a_{n-1}$. Од друга страна

$$t=\frac{a_1+a_3}{a_2}=\frac{a_1+\frac{a_2^2+c}{a_1}}{a_2}=\frac{a^2+b^2+c}{ab}\ .$$

Ако a,b и t се цели броеви, тогаш по индукција ќе следува дека $a_{n+1}=ta_n-a_{n-1}$ исто така е цел број.

Обратно, нека претпоставиме дека a_n е цел број за секој $n=1,2,...$. Тогаш $a_1=a$ и $a_2=b$ се цели броеви и $t=\frac{a_1+a_3}{a_2}$ е рационален број. Нека претпоставиме дека t не е цел број. Тогаш $t=\frac{p}{q}$, каде p и $q>1$ се заемно прости броеви. Од $pa_2=q(a_1+a_3)$ следува дека $q\,|\,a_2$. Понатаму, од $pa_n=q(a_{n-1}+a_{n+1})$ по индукција следува дека $q\,|\,a_n$ за секој $n\geq 2$. Одново од $pa_n=q(a_{n-1}+a_{n+1})$ следува дека за $n\geq l+1$ важи дека $q^l\,|\,a_n$. Сега, од $c=a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2$ следува дека $q^{2l}\,|\,c$ за секој природен број l, што не е можно. Според тоа $q=1$ и t е цел број.

25. Нека a е природен број и нека низата (x_n) е дефинирана на следниов начин:

$$x_1=a,\ x_{n+1}=\begin{cases}\frac{x_n}{2}, & \text{ако } x_n \text{ е парен број}\\ \frac{3x_n+1}{2}, & \text{ако } x_n \text{ е непарен број}\end{cases}.$$

Докажи дека барем еден член од низата е парен број.

Решение. Ако a е парен број, тогаш тврдењето е очигледно (бараниот член е x_1). Да претпоставиме дека a е непарен, и $a+1=2^kR$ каде $R=2R_1+1$ е непарен и k е природен број. Тогаш $x_1=2^{k+1}R_1+2^k-1$ е непарен, па

$$x_2=\frac{3x_1+1}{2}=\frac{3(2^{k+1}R_1+2^k-1)+1}{2}=3R_12^k+3\cdot 2^{k-1}-1=R_22^k+3\cdot 2^{k-1}-1\,.$$

Ако $k=1$, тогаш бараниот член е x_2. Во спротивно x_2 е непарен, па

$$x_3=\tfrac{3x_2+1}{2}=R_3 2^{k-1}+3^2\cdot 2^{k-2}-1.$$

Ќе докажеме дека $x_s=R_s 2^{k-s+2}+3^{s-1}2^{k-s+1}-1$ за $1\le s\le k$ (при претпоставка дека сите броеви се непарни). За $s=1$ тврдењето е точно. Нека тврдењето е точно за s. Тогаш за $s+1$ имаме

$$x_{s+1}=\tfrac{3(R_s 2^{k-s+2}+3^{s-1}2^{k-s+1}-1)+1}{2}=R_{s+1}2^{k-(s+1)+2}+3^{(s+1)-1}2^{k-(s+1)+1}-1.$$

Сега за $s=k$ добиваме $x_k=R_k 2^2+3^{k-1}\cdot 2-1$ е непарен. Според тоа

$$x_{k+1}=\tfrac{3(4R_k+2\cdot 3^{k-1}-1)+1}{2}=6R_k+3^k-1.$$

Броевите 3^k-1 и $6R_k$ се парни па и x_k е парен.

26. Низата од реални броеви (a_n) е зададена со $a_1=5; a_2=19$ и за $n\ge 3$, $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$. Најди го a_{2007}.

Решение. Со принципот на математичка индукција, ќе докажеме дека

$$a_n=3^{n+1}-2^{n+1},\ n\ge 1$$

Имено, $a_1=3^2-2^2$; $a_2=3^3-2^3$. Нека за $k\le n-1$ важи $a_k=3^{k+1}-2^{k+1}$. Тогаш

$$\begin{aligned}a_n&=5a_{n-1}-6a_{n-2}=(3+2)(3^n-2^n)-3\cdot 2(3^{n-1}-2^{n-1})\\&=3^{n+1}+2\cdot 3^n-3\cdot 2^n-2^{n+1}-2\cdot 3^n+3\cdot 2^n=3^{n+1}-2^{n+1}.\end{aligned}$$

Оттука следува дека $a_{2007}=3^{2008}-2^{2008}$.

27. Броевите $a_n, n\in\mathbb{N}$ и $b_n, n\in\mathbb{N}$ се зададени со $a_0=b_0=1$ и за секој природен број

$$a_{k+1}=b_0+b_1+...+b_k,$$
$$b_{k+1}=(0^2+0+1)a_0+(1^2+1+1)a_1+...+(k^2+k+1)a_k.$$

Докажи дека

$$\tfrac{b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot ...\cdot b_n}{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot ...\cdot a_n}=a_n.$$

Решение. Ќе покажеме дека $a_n=n!$ и $b_n=n\cdot n!$. Од дефинцијата на $a_n, n\in\mathbb{N}$ и $b_n, n\in\mathbb{N}$, имаме

$a_1=b_0=1$, $a_2=b_0+b_1=1+1=2!$, $a_3=b_0+b_1+b_2=1+1+2\cdot 2!=6=3!$

$b_1=a_0=1$, $b_2=a_0+3a_1=4=2\cdot 2=2\cdot 2!$, $b_3=a_0+3a_1+7a_2=18=3\cdot 6=3\cdot 3!$.

Нека претпоставиме дека за $p\le k$ се точни равенствата $a_p=p!$ и $b_p=p\cdot p!$. Тогаш

$$\begin{aligned}b_{k+1}&=(0^2+0+1)a_0+(1^2+1+1)a_1+...+[(k-1)^2+(k-1)+1]a_k+(k^2+k+1)a_k\\&=b_k+(k^2+k+1)a_k=k\cdot k!+(k^2+k+1)\cdot k!=k!(k^2+2k+1)=k!(k+1)^2\\&=[(k+1)\cdot k!](k+1)=(k+1)\cdot(k+1)!\end{aligned}$$

и

$$a_{k+1}=b_0+b_1+...+b_{k-1}+b_k=k!+k\cdot k!=(k+1)\cdot k!=(k+1)!\,.$$

Според принципот на математичка индукција, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=n!$, $b_n=n\cdot n!$.

Конечно,

$$\frac{b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot...\cdot b_n}{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot...\cdot a_n}=\frac{(1\cdot 1!)\cdot(2\cdot 2!)\cdot(3\cdot 3!)\cdot...\cdot(n\cdot n!)}{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot...\cdot n!}=1\cdot 2\cdot 3\cdot....\cdot n=n!=a_n\,.$$

28. Дадена е низата $a_1,a_2,...,a_n,...$ за која важи $a_1=0$ и $a_{n+1}=a_n+4n+3$. Определи го општиот член на низата во функција од n.

Решение. Ако ја искористиме формулата $a_{n+1}=a_n+4n+3$, за $n\geq 2$ последователно добиваме

$$\begin{aligned}a_n&=a_{n-1}+4(n-1)+3=a_{n-2}+4(n-2)+4(n-1)+2\cdot 3\\&=a_{n-3}+4(n-3)+4(n-2)+4(n-1)+3\cdot 3=...\\&=a_1+4[1+2+...+(n-1)]+3(n-1)\\&=2n(n-1)+3(n-1)\\&=(2n+3)(n-1).\end{aligned}$$

Јасно, $(2\cdot 1+1)(1-1)=0=a_1$, па затоа $a_n=(2n+3)(n-1)$, за секој $n\geq 1$.

29. Дадена е низата од реални броеви (a_n) дефинирана со $a_{n+1}=\frac{3a_n-1}{3-a_n}$, $a_1=a<0$. Изрази го општиот член на низата како функција од a.

Решение. Со помош на математичка индукција докажуваме дека $a_n<0$, за секој природен број n, па $3-a_n\neq 0$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Ако ги одредиме a_2,a_3,a_4, повторно со индукција докажуваме дека

$$a_n=\frac{(2^{n-1}-1)-(2^{n-1}+1)a_1}{(2^{n-1}-1)a_1-(2^{n-1}+1)}\,.$$

Оваа формула важи за $n=1$, па како

$$a_{n+1}=\frac{3a_n-1}{3-a_n}=\frac{3\frac{(2^{n-1}-1)-(2^{n-1}+1)a_1}{(2^{n-1}-1)a_1-(2^{n-1}+1)}-1}{3-\frac{(2^{n-1}-1)-(2^{n-1}+1)a_1}{(2^{n-1}-1)a_1-(2^{n-1}+1)}}=\frac{(2^{n+1}-2)-(2^{n+1}+2)a_1}{(2^{n+1}-2)a_1-(2^{n+1}+2)}=\frac{(2^n-1)-(2^n+1)a_1}{(2^n-1)a_1-(2^n+1)}$$

од принципот на математичка индукција следува дека таа важи за секој природен број n.

30. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е зададена со рекурзивната формула $a_0=-1$, $a_n=\frac{2a_{n-1}-3}{3a_{n-1}-4}$, $n\in\mathbb{N}$. Определи го општиот член a_n на низата.

Решение. Ако замениме во рекурзивната формула се добива дека

$$a_1=\frac{5}{7}\,,\ a_2=\frac{11}{13}\,,\ a_3=\frac{17}{19}\,,\ a_4=\frac{23}{25}\,,\ a_5=\frac{29}{31}\,,$$

односно

$$a_1=\frac{6\cdot 1-1}{6\cdot 1+1}\,,\ a_2=\frac{6\cdot 2-1}{6\cdot 2+1}\,,\ a_3=\frac{6\cdot 3-1}{6\cdot 3+1}\,,\ a_4=\frac{6\cdot 4-1}{6\cdot 4+1}\,,\ a_5=\frac{6\cdot 5-1}{6\cdot 5+1}\,.$$

Со математичка индукција ќе докажеме дека $a_n=\frac{6n-1}{6n+1}$. Претпоставуваме дека тврдењето важи за $n=k$, односно $a_k=\frac{6k-1}{6k+1}$. Тогаш за $n=k+1$ имаме дека

$$a_{k+1}=\frac{2a_k-3}{3a_k-4}=\frac{2\frac{6k-1}{6k+1}-3}{3\frac{6k-1}{6k+1}-4}=\frac{\frac{12k-2-18k-2}{6k+1}}{\frac{18k-3-24k-4}{6k+1}}=\frac{-6k-5}{-6k-7}=\frac{6(k+1)-1}{6(k+1)+1}.$$

Согласно принципот на математичка индукција имаме дека $a_n=\frac{6n-1}{6n+1}$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

31. Низата $1,2,4,5,7,9,10,12,14,16,...$ е добиена од наизменични групи парни и непарни броеви, при што во n-тата група има n членови. Најди го општиот член на низата.

Решение. Со математичка индукција ќе докажеме дека $a_m=2m-[\frac{1+\sqrt{8m-7}}{2}]$. За $m=1$ добиваме $a_1=2-[1]=1$, па тврдењето важи. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за секој природен број кој не е поголем од m. Значи важи $a_m=2m-[\frac{1+\sqrt{8m-7}}{2}]$. Лесно се проверува дека парноста се менува од $(1+2+...+k)$ -тиот член на низата во $(1+2+...+k)+1$-от член на низата, за секој $k\in\mathbb{N}$. Според тоа можни се два случаи

i) $m=\frac{k(k+1)}{2}$, за некој $k\in\mathbb{N}$, и

ii) m не е од облик $\frac{k(k+1)}{2}$, за ниту еден природен број k.

Во случајот i) имаме

$$a_{m+1}=a_m+1=k(k+1)-[\frac{1+\sqrt{4k(k+1)-7}}{2}]+1=k(k+1)-k+1=k^2+k+2-(k+1)$$

$$=2(\frac{k(k+1)}{2}+1)-\frac{1+\sqrt{8(\frac{k(k+1)}{2}+1)-7}}{2}=2(m+1)-[\frac{1+\sqrt{8(m+1)-7}}{2}].$$

Притоа искористивме дека $2k<\sqrt{4k(k+1)-7}<2k+1$, за $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, од каде се добива $k+\frac{1}{2}<\frac{1+\sqrt{4k(k+1)-7}}{2}<k+1$.

Случајот *ii*) се разгледува аналогно.

32. Броевите $a_n, n=0,1,...$ се зададени со формулите $a_0=2, a_1=\frac{5}{2}$ и

$$a_n=\frac{5}{2}a_{n-1}-a_{n-2}\text{, за } n>1. \quad (1)$$

Докажи дека за секој $n=0,1,2,3,...$ важи

$$a_n=2^n+2^{-n}. \quad (3)$$

Решение. За $n=0$ и $n=1$ имаме

$$a_0=2=1+1=2^0+2^{-0} \text{ и } a_1=\frac{5}{2}=2+\frac{1}{2}=2^1+2^{-1}$$

што значи дека формулата (2) важи за $n=0$ и $n=1$.

Нека претпоставиме дека формулата (2) важи за $n=k$ и $n=k+1$, т.е. дека важи $a_k=2^k+2^{-k}$ и $a_{k+1}=2^{k+1}+2^{-(k+1)}$.

Ако ја искористиме релацијата (1) и индуктивната претпоставка, тогаш за $n=k+2$ добиваме

$$\begin{aligned}a_{k+2}&=\tfrac{5}{2}a_{k+2-1}-a_{k+2-2}=\tfrac{5}{2}a_{k+1}-a_k=\tfrac{5}{2}(2^{k+1}+2^{-(k+1)})-(2^k+2^{-k})\\&=5\cdot 2^k+5\cdot 2^{-k-2}-2^k-2^{-k}=4\cdot 2^k+2^{-k-2}+4\cdot 2^{-k-2}-2^{-k}\\&=2^2 2^k+2^{-(k+2)}+2^2 2^{-k-2}-2^{-k}=2^{k+2}+2^{-(k+2)}+2^{-k}-2^{-k}\\&=2^{k+2}+2^{-(k+2)},\end{aligned}$$

т.е. формулата (2) важи за $n=k+2$, па затоа формулата (2) важи за секој $n=0,1,2,3,...$.

33. Дадена е низата $a_1,a_2,...,a_n$ ... од природни броеви, дефинирана со: $a_1=2$ и $a_{n+1}=1+a_1a_2...a_n$ за секој природен број, $n\geq 2$. Да се пресмета $S_{2009}+P_{2009}$, каде $S_k=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}$ и $P_k=\frac{1}{a_1a_2...a_k}$, за секој $k\geq 1$.

Решение. Нека $t_n=S_n+P_n$ тогаш

$$t_1=S_1+P_1=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=1,\ t_2=S_2+P_2=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{6}=1.$$

Со математичка индукција ќе покажеме дека $t_n=1$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Да забележиме дека

$$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{a_{n+1}}\ \text{ и }\ P_{n+1}=\frac{P_n}{a_{n+1}}.$$

За $n=1$, јасно тврдењето важи.

Нека за $n=k$ тврдењето важи, т.е. $t_k=1$. За $n=k+1$ имаме

$$\begin{aligned}t_{k+1}&=S_{k+1}+P_{k+1}=S_k+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{P_k}{a_{k+1}}=S_k+P_k+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{P_k}{a_{k+1}}-P_k\\&=1+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{P_k}{a_{k+1}}(1-a_{k+1})=1+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{P_k}{a_{k+1}}(-a_1a_2...a_k)\\&=1+\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{P_k}{a_{k+1}}\cdot\frac{-1}{P_k}=1+\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+1}}=1.\end{aligned}$$

Според принципот на математичка индукција следува дека $t_n=1$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Значи $S_{2009}+P_{2009}=1$.

34. За секој ненегативен цел број n дефинирана е низа $S(n)=n-m^2$, при што m е најголемиот цел број за кој $m^2\leq n$. Најди ги сите ненегативни цели броеви A за кои низата зададена со рекурентната формула

$$a_0=A, a_k=a_{k-1}+S(a_{k-1}),\ \text{за}\ k\in\mathbb{N},$$

е константна.

Решение. Од условот имаме дека $S(n)=n=[\sqrt{n}]^2$. Ако $n=m^2$, за некој $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, тогаш $S(n)=0$. Од друга страна, ако n не квадрат на цел број и $m=[\sqrt{n}]$ добиваме $S(n)=n-m^2\geq m^2+1-m^2=1>0$. Значи, $S(n)=0$ ако и само ако n е квадрат на природен број. За да низата $\{a_n\}$ е константна потребно е и доволно за важи $S(a_n)=0$ за секој $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, односно сите членови на низата да се полни квадрати. Бараните броеви се квадратите на ненегативните цели броеви. Значи $a_n = A$, за секој $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ако и само ако $A = l^2$, за некој $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

35. Низата $\{a_n\}_{n\geq 1}$ е дефинирана со $a_1 = 20, a_2 = 30, a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n, n \geq 1$. Определи ги сите природни броеви n за кои $1 + 5a_n a_{n+1}$ е точен квадрат.

Решение. Од рекуреантната релација следува

$$\begin{aligned}5a_n a_{n+1} - 5a_{n-1}a_n &= 5a_n(3a_n - 2a_{n-1}) = (4a_n - a_{n-1})^2 - (a_{n-1} + a_n)^2 \\ &= (a_n + a_{n+1})^2 - (a_{n-1} + a_n)^2.\end{aligned}$$

Оттука следува

$$5a_n a_{n+1} - (a_n + a_{n+1})^2 = 5a_{n-1}a_n - (a_{n-1} + a_n)^2 = \ldots = 5a_1 a_2 - (a_1 + a_2)^2 = 500.$$

Според тоа, $1 + 5a_n a_{n+1} = (a_n + a_{n+1})^2 + 500$ е меѓу $(a_n + a_{n+1})^2$ и $(a_n + a_{n+1} + 1)^2$ ако $a_n + a_{n+1} > 250$, т.е. за $n \geq 4$, бидејќи $a_3 = 70, a_4 = 180, a_5 = 470$, па тогаш не е точен квадрат. Со проверка за $n = 1,2,3$ добиваме дека $1 + 5a_n a_{n+1}$ е точен квадрат само за $n = 3$ и тогаш $1 + 5a_3 a_4 = 1 + 5 \cdot 70 \cdot 180 = 250^2 + 501 = 251^2$.

36. Низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$x_0 = a,\ x_1 = 2 \text{ и } x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1, \text{ за } n > 1.$$

Определи ги сите цели броеви a такви што $2x_{3n} - 1$ е полн квадрат за сите $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Ќе ја разгледаме низата $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ определена со $y_n = 2x_n - 1,\ n \in \mathbb{N}$. Тогаш

$$\begin{aligned}y_n &= 2x_n - 1 = 2(2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1) - 1 = 4x_{n-1}x_{n-2} - 2x_{n-1} - 2x_{n-2} + 1 \\ &= 2x_{n-1}(2x_{n-2} - 1) - (2x_{n-2} - 1) = (2x_{n-1} - 1)(2x_{n-2} - 1) = y_{n-1}y_{n-2}.\end{aligned}$$

Да забележиме, дека $y_{n+3} = y_{n+2}y_{n+1} = y_{n+1}^2 y_n$, па y_{n+3} е полн квадрат ако и само ако y_n е полн квадрат. Според тоа, y_{3n} е полн квадрат за секој $n \in \mathbb{N}$ ако и само ако y_0 е полн квадрат. Бидејќи $y_\circ = 2a - 1$, добиваме $a = \frac{(2m-1)^2+1}{2}$, за секој $m \in \mathbb{N}$

37. Даден е природен број $n \geq 2$. Најди го најмалиот природен број m за кој постои низа природни броеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$, која ги задоволува условите:

1) $a_1 < a_2 < \ldots < a_n = m$;

2) Сите $n-1$ броеви $\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}, \ldots, \frac{a_{n-1}^2 + a_n^2}{2}$ се точни квадрати.

Решение. Ќе докажеме дека бараната најмала вредност на m е $2n^2 - 1$. За $a_k = 2k^2 - 1, k = 1,2,\ldots,n$ имаме

$$\frac{a_k^2 + a_{k+1}^2}{2} = \frac{(2k^2-1)^2 + (2(k+1)^2 - 1)^2}{2} = (2k^2 + 2k + 1)^2,$$

па затоа $m \leq 2n^2 - 1$. Останува да докажеме, дека за секоја низа која ги задоволува условите важи $m \geq 2n^2 - 1$.

За таа цел ќе докажеме дека $a_k \geq 2k^2-1$, за секој $k=1,2,...,n$.

Лема. Ако x, y, k се природни броеви такви што

$$2k^2-1 \leq x < y < 2(k+1)^2-1$$

тогаш $\frac{x^2+y^2}{2}$ не е точен квадрат на природен број.

Доказ. Ако $\frac{x^2+y^2}{2}$ е точен квадрат на природен број, тогаш x и y се со иста парност. Имаме

$$\frac{x^2+y^2}{2}-(\frac{x+y}{2})^2=(\frac{y-x}{2})^2>0.$$

Освен тоа, $y-x \leq (2(k+1)^2-2)-(2k^2-1)=4k+1$ и $y \geq x+2 \geq 2k^2+1$. Бидејќи $y-x$ е парен број, од првото неравенство следува $y-x \leq 4k$. Пресметуваме

$$\begin{aligned}(\tfrac{x+y}{2}+1)^2-\tfrac{x^2+y^2}{2} &= x+y+1-(\tfrac{y-x}{2})^2\\ &\geq (2k^2-1)+(2k^2+1)+1-(2k)^2\\ &=1>0.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$(\frac{x+y}{2})^2<\frac{x^2+y^2}{2}<(\frac{x+y}{2}+1)^2,$$

од каде следува дека $\frac{x^2+y^2}{2}$ не е точен квадрат на природен број. ■

Со индукција по k ќе докажеме дека $a_k \geq 2k^2-1$, за секој $k=1,2,...,n$. За $k=1$ тврдењето е очигледно. Ако $a_s \geq 2s^2-1$ и $a_{s+1}<2(s+1)^2-1$, тогаш за $x=a_s$ и $y=a_{s+1}$ добиваме противречност на лемата, па затоа $a_{s+1} \geq 2(s+1)^2-1$, со што доказот е завршен.

38. Низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е определена со $x_1=2008$, $x_1+x_2+...+x_{n-1}=(n^2-1)x_n$, $n \geq 2$. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е определена со $a_n=x_n+\frac{1}{n}S_n$, каде $S_n=x_1+x_2+...+x_n$. Определи за кои природни броеви n, вредностите на a_n се полни квадрати.

Решение. Од равенството $x_1+x_2+...+x_{n-1}=(n^2-1)x_n$, добиваме

$$x_1+x_2+...+x_{n-1}+x_n=(n^2-1)x_n+x_n=(n^2-1+1)x_n=n^2x_n,\ n=2,3,.... \quad (1)$$

Според тоа

$$x_1+x_2+...+x_{n-1}=(n-1)^2x_{n-1},\ n=3,4,...$$

и ако замениме во

$$x_1+x_2+...+x_{n-1}+x_n=n^2x_n$$

имаме

$$(n-1)^2x_{n-1}+x_n=n^2x_n \text{, т.е. } (n-1)^2x_{n-1}=(n^2-1)x_n \text{ или}$$

$$(n-1)x_{n-1}=(n+1)x_n. \quad (2)$$

Од равенството (2) за $n=2,3,...$, добиваме

$$\begin{cases} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}, \\ \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} = \frac{n-2}{n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{x_3}{x_2} = \frac{2}{4}, \\ \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ако ги измножиме претходните равенства добиваме

$$x_n = \frac{2x_1}{n(n+1)},\ n = 2,3,\dots. \qquad (3)$$

Бидејќи

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n = n^2 x_n,$$

добиваме

$$S_{n+1} = (n+1)^2 x_{n+1} = (n+1)^2 (S_{n+1} - S_n),\ \text{т.е.}\ \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)},\ n = 1,2,3,\dots.$$

Слично како и претходно со множење на првите n равенства добиваме

$$S_n = \frac{2S_1 n}{n+1} = \frac{2x_1 n}{n+1},\ n = 1,2,3,\dots. \qquad (4)$$

Сега од (3) и (4) имаме

$$a_n = x_n + \frac{1}{n} S_n = \frac{2x_1}{n(n+1)} + \frac{2x_1 n}{n(n+1)} = \frac{2x_1(n+1)}{n(n+1)} = \frac{2x_1}{n} = \frac{2^4 251}{n}.$$

Бараните вредности за n се: $n = 251, 2^2 \cdot 251, 2^4 \cdot 251$

39. Нека c е природен број. Низата $a_1, a_2, \dots$ е дефинирана со

$$a_1 = c, a_{n+1} = a_n^2 + a_n + c^3,$$

за секој природен број n. Определи ги сите вредности на c за кои постојат природни броеви $k \geq 1$ и $m \geq 2$ такви што бројот $a_k^2 + c^3$ е еднаков на $m-$тиот степен на некој природен број.

Решение. За $k > 1$ од рекурентната врска добиваме

$$a_k^2 + c^3 = a_{k+1} - a_k = a_k^2 + a_k - a_{k-1}^2 - a_{k-1} = (a_k - a_{k-1})(a_k + a_{k-1} + 1). \qquad (1)$$

Нека претпоставиме дека $d \mid a_k - a_{k-1}$ и $d \mid a_k + a_{k-1} + 1$. Тогаш $d \mid 2a_k + 1$ и $d \mid 2a_{k-1} + 1$. Но, од рекурентната релација следува

$$2(2a_k + 1) = (2a_{k-1} + 1)^2 + 4c^3 + 1,$$

па затоа $d \mid 4c^3 + 1$, а оттука следува дека $d \mid 2a_n + 1$, за секој $n < k$. Според тоа, $d \mid 2a_1 + 1 = 2c + 1$. Меѓутоа, тогаш $d \mid 2(4c^3 + 1) - (2c+1)(4c^2 - 2c + 1) = 1$, т.е. $d = 1$.

Сега ако $a_{k+1} - a_k$ е $m-$ти степен, од (1) следува дека и $a_k - a_{k-1}$ е $m-$ти степен. Постапката ја продолжуваме е заклучуваме дека $a_2 - a_1 = c^2(c+1)$ е $m-$ти степен, па од $\text{NZD}(c^2, c+1) = 1$ следува дека c^2 и $c+1$ се $m-$ти степени.

Меѓутоа, c не може да биде $m-$ти степен, па затоа m мора да биде парен број и уште повеќе $m=2$. Значи, $c+1$ е точен квадрат. Конечно, ако $c+1$ е точен квадрат, тогаш и $c^2(c+1)=a_1^2+c^3$ е точен квадрат.

40. Нека $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е низа од природни броеви за кои што $a_n > a_{n-1}+1$, $n\geq 2$. Низата природни броеви $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $b_n = a_1+a_2+...+a_n$. Докажи дека барем еден од броевите $b_n, b_n+1, b_n+2,..., b_{n+1}-1$ е полн квадрат.

Решение. Доволно е да докажеме дека $\sqrt{b_{n+1}}-\sqrt{b_n}\geq 1$. Ако последното равенство е точно, тогаш $\sqrt{b_{n+1}}\geq 1+\sqrt{b_n}>\sqrt{b_n}$. Значи, постои природен број p таков што $\sqrt{b_n}\leq p<\sqrt{b_n}+1\leq\sqrt{b_{n+1}}$, односно $b_n\leq p^2<b_{n+1}$. Според тоа постои $k\in\mathbb{N}$ таков што $b_n+k=p^2\leq b_{n+1}-1$ односно $b_n\leq b_n+k=p^2\leq b_{n+1}-1$.

Значи, навистина доволно е да се докаже дека $\sqrt{b_{n+1}}-\sqrt{b_n}\geq 1$. Последното неравенство ќе го запишеме во еквивалентен вид $b_{n+1}\geq 1+b_n+2\sqrt{b_n}$ односно тоа последователно е еквивалентно со неравенствата:

$$a_{n+1}\geq 1+2\sqrt{b_n}\text{, т.е. } \tfrac{a_{n+1}-1}{2}\geq\sqrt{b_n}\text{, т.е. } (\tfrac{a_{n+1}-1}{2})^2\geq b_n=a_1+a_2+...+a_n .$$

Последното неравенство $(\frac{a_{n+1}-1}{2})^2\geq a_1+a_2+...+a_n$ ќе го докажеме со помош на принципот на математичка индукција.

За $k=1$, од неравенството $a_2>a_1+1$, последователно добиваме

$$a_2\geq a_1+2,\quad a_2-1\geq a_1+1,\quad \tfrac{a_2-1}{2}\geq\tfrac{a_1+1}{2},$$
$$(\tfrac{a_2-1}{2})^2\geq(\tfrac{a_1+1}{2})^2\geq(\tfrac{1}{2}2\sqrt{a_1\cdot 1})^2=a_1 .$$

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $k=n$, т.е. дека

$$(\tfrac{a_{n+1}-1}{2})^2\geq b_n=a_1+a_2+...+a_n .$$

За $k=n+1$, од равенството $(\frac{a_{n+1}+1}{2})^2=(\frac{a_{n+1}-1}{2})^2+a_{n+1}$, како и од неравенствата

$$a_{n+2}>a_{n+1}+1,\quad a_{n+2}\geq a_{n+1}+2,\quad a_{n+2}-1\geq a_{n+1}+1,\quad \tfrac{a_{n+2}-1}{2}\geq\tfrac{a_{n+1}+1}{2},$$
$$(\tfrac{a_{n+2}-1}{2})^2\geq(\tfrac{a_{n+1}+1}{2})^2\geq(\tfrac{a_{n+1}-1}{2})^2+a_{n+1} .$$

Од последното неравенство, заради индуктивната претпоставка имаме

$$(\tfrac{a_{n+2}-1}{2})^2\geq(\tfrac{a_{n+1}-1}{2})^2+a_{n+1}\geq a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1} .$$

Значи, неравенството е точно и за $k=n+1$.

Според принципот на математичка индукција неравенството е точно за секое $n\in\mathbb{N}$, т.е. $(\frac{a_{n+1}-1}{2})^2\geq a_1+a_2+...+a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

41. Докажи дека за низата определена со $x_1=19$, $x_2=27$, $x_{n+2}=x_n-\frac{1}{x_{n+1}}$, постои природен број k, таков што $x_k=0$. Определи ја вредноста на k.

Решение. Ако членовите на низата го исполнуваат равенството

$$x_{n+2}=x_n-\frac{1}{x_{n+1}},$$

тогаш тие го задоволуваат и равенството

$$x_{n+1}x_{n+2}=x_nx_{n+1}-1.$$

Според тоа, ако определиме низа $y_k=x_{k+1}x_k$, за $k\geq 1$, тогаш таа го задоволува условот

$$y_{n+1}=y_n-1 \text{ и } y_1=x_2x_1=19\cdot 97=1843.$$

Сега е јасно дека $y_k=0$ за $k=1844$. Притоа $x_n\neq 0$, за $1\leq n\leq 1844$. Но, $x_{1844}\cdot x_{1845}=y_{1844}=0$, а од $x_{1844}\neq 0$, добиваме дека $x_{1845}=0$. Значи, низата е конечна, и нејзини членови се $x_1,x_2,\ldots,x_{1844},x_{1845}=0$. Бараната вредност за k е $k=1845$.

42. Колку членови од низата, со општ член $a_n=[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$ се деливи со 7?

Решение. Имаме

$$a_n=[\sqrt{(n^2+6n)(n^2+6n+8)}]=[\sqrt{k^2+8k}]$$

каде што $k=n^2+6n$. Бидејќи $(k+3)^2<k^2+8k<(k+4)^2$ заклучуваме дека $[\sqrt{k^2+8k}]=k+3$, па тогаш $a_n=k+3=n^2+6n+3=(n+3)^2-6$.

Оттука следува дека a_n ќе биде делив со 7, тогаш и само тогаш, кога $(n+3)^2$ при делење со 7 дава остаток 6. Но, квадратот на секој број што не е делив со 7, при делење со 7 дава остаток 1,4 или 2, т.е. никогаш не дава остаток 6.

Следствено за секој природен број n, a_n не е делив со 7.

43. Низата $\{a_n\}$ е дефинирана со

$$a_1=1, a_2=3 \text{ и } a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+1)a_n, \text{ за секој } n\in\mathbb{N}.$$

Најди ги сите членови на низата деливи со 11.

Решение. Со индукција лесно се докажува дека општиот член на низата е

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!}=n!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Со проверка добиваме дека броевите a_n за $n\in\{1,2,\ldots,10\}$ не се деливи со 11. За $n\geq 11$ имаме $11\,|\,a_n$ ако и само ако $11\,|\,n!\sum\limits_{k=11[\frac{n}{11}]}^{n}\frac{1}{k!}$, бидејќи за $k<11[\frac{n}{11}]$, т.е. $k\in\{11[\frac{n}{11}]-m\,|\,m\in\{1,2,\ldots,11[\frac{n}{11}]-1\}\}$ бројот $\frac{n!}{(11[\frac{n}{11}]-m)!}=\frac{(11[\frac{n}{11}]-1)!}{(11[\frac{n}{11}]-m)!}(11[\frac{n}{11}])\cdot\ldots\cdot n$ е делив со 11. На пример за $n=11m$, имаме $11\nmid 1=\frac{n!}{n!}=n!\sum\limits_{k=11[\frac{n}{11}]}^{n}\frac{1}{k!}$, од што следува $11\nmid a_{11m}$. Натамошната проверка е во зависност од остатокот на n при делење со 11.

44. Дадена е низата броеви 49, 4489, 444889, ... (секој нареден член на низата се добива од претходниот со допишување на бројот 48 во неговата средина). Да се докаже дека секој член на низата е полн квадрат.

Решение. Нека претпоставиме дека бројот $A=444...488...89$, има n-четворки и $(n-1)$-на осумки, т. е. $A=\underbrace{444...4}_{n}\underbrace{88...8}_{n-1}9$. Според тоа, бројот A можеме да го запишеме во вид

$$A=4\cdot\underbrace{111...1}_{n}\cdot10^{n}+8\cdot\underbrace{111...1}_{n}+1. \qquad (1)$$

Бројот $\underbrace{111...1}_{n}$ можеме да го запишеме во вид

$$\underbrace{111...1}_{n}=10^{n-1}+10^{n-1}+...+10^{2}+10+1=\frac{10^{n}-1}{10-1}=\frac{10^{n}-1}{9},$$

па според тоа, бројот A можеме да го запишеме во вид

$$A=\frac{4}{9}(10^{n}-1)10^{n}+\frac{8}{9}(10^{n}-1)+1=\frac{4}{9}10^{2n}+\frac{4}{9}10^{n}+\frac{1}{9}=(\frac{2\cdot10^{n}+1}{3})^{2}.$$

Јасно е дека бројот $2\cdot10^{n}+1$ е делив со 3, бидејќи збирот на неговите цифри е еднаков на 3.

45. Низата броеви $a_1,a_2,...$ е зададена со $a_1=1$, $a_2=143$ и $a_{n+1}=5\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{n}$, за $n\geq 2$. Докажи дека сите членови на низата се цели броеви.

Решение. *Прв начин.* Да забележиме дека $a_3=5\frac{a_1+a_2}{2}=5\cdot\frac{144}{2}=5\cdot72=360$. За $n\geq4$ имаме $a_n=5\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}}{n-1}$ и $a_{n-1}=5\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_{n-2}}{n-2}$. Со алгебарски трансформации добиваме $a_1+a_2+a_3+...+a_{n-2}=\frac{n-2}{5}a_{n-1}$, т.е. $a_n=\frac{5}{n-1}(\frac{n-2}{5}a_{n-1}+a_{n-1})$, па затоа $a_n=\frac{5}{n-1}\frac{n+3}{5}a_{n-1}=\frac{n+3}{n-1}a_{n-1}$. Според тоа,

$$a_n=\frac{(n+3)(n+2)\cdot...\cdot7}{(n-1)(n-2)\cdot...\cdot3}a_3=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{6\cdot5\cdot4\cdot3}\cdot360=(n+3)(n+2)(n+1)n\in\mathbb{N}.$$

Втор начин. Ако воведеме ознака $S_n=a_1+a_2+...+a_n$, тогаш $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$. Значи, доволно е да докажеме дека S_n е цел број. Од самата дефиниција е јасно дека $S_1=1$, $S_2=144$, а од $a_n=5\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}}{n-1}$ добиваме $S_{n+1}-S_n=\frac{5}{n}S_n$, т.е. $S_{n+1}=\frac{n+5}{n}S_n$. Значи, за $n\geq2$ добиваме

$$S_{n+1}=\frac{(n+5)(n+4)(n+3)\cdot....\cdot7}{n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot2}S_2=\frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot144=\frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5}.$$

Но, броевите $n+5, n+4, n+3, n+2, n+1$ се пет последователни природни броеви па еден од нив е делив со 5. Значи, $S_n\in\mathbb{N}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, што требаше и да се докаже.

46. Најди ги сите членови на низата со општ член

$$a_n=\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}$$

кои се рационални.

Решение. Според решението на претходната задача, треба да ги најдеме оние вредности на k, за кои k^2+8k е квадрат на рационален број или поточно на цел број, бидејќи корен на природен број не може да биде дропка. Ако $k^2+8k=m^2$, тогаш $(k+4)^2-m^2=16$. Но $k=n^2+6n\geq 7$, $k+4\geq 11$ и најмалата можна разлика $(k+4)^2-m^2\geq 121-100=21$, па затоа ниту еден член од низата не е рационален број.

47. Низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е определена со $x_1=\frac{1}{2}$ и $x_{k+1}=\frac{x_k}{x_1^2+x_2^2+...+x_k^2}$, за $k\geq 1$. Докажи дека $\sqrt{x_k^2+4\frac{x_{k-1}}{x_{k+1}}}$ е рационален број.

Решение. Бидејќи $x_1=\frac{1}{2}$ од дефинцијата на низата имаме $x_2=\frac{x_1}{x_1^2}=\frac{1}{x_1}=2$. Не е тешко да се докаже со принципот на математичка индукција дека $x_n\in\mathbb{Q}$ за секое $n\in\mathbb{N}$.

Од дефинцијата на низата се добива точноста на равенствата

$$x_1^2+x_2^2+...+x_k^2=\frac{x_k}{x_{k+1}} \text{ и } x_1^2+x_2^2+...+x_{k-1}^2=\frac{x_{k-1}}{x_k}.$$

Ако од првото го одземеме второто, добиваме

$$x_k^2=\frac{x_k}{x_{k+1}}-\frac{x_{k-1}}{x_k}.$$

Сега,

$$x_k^4+4\frac{x_{k-1}}{x_{k+1}}=(\frac{x_k}{x_{k+1}}-\frac{x_{k-1}}{x_k})^2+4\frac{x_{k-1}}{x_{k+1}}=(\frac{x_k}{x_{k+1}})^2+2\frac{x_{k-1}}{x_{k+1}}+(\frac{x_{k-1}}{x_k})^2=(\frac{x_k}{x_{k+1}}+\frac{x_{k-1}}{x_k})^2,$$

од каде што следува

$$\sqrt{x_k^4+4\frac{x_{k-1}}{x_{k+1}}}=\sqrt{(\frac{x_k}{x_{k+1}}+\frac{x_{k-1}}{x_k})^2}=|\frac{x_k}{x_{k+1}}+\frac{x_{k-1}}{x_k}|.$$

Бидејќи $x_{k-1},x_k,x_{k+1}\in\mathbb{Q}$ и $|\frac{x_k}{x_{k+1}}+\frac{x_{k-1}}{x_k}|\in\mathbb{Q}$, односно $\sqrt{x_k^4+4\frac{x_{k-1}}{x_{k+1}}}\in\mathbb{Q}$, што и требаше да се докаже.

48. Низата природни броеви $\{a_n\}$ е определена со $a_0=9$ и $a_{k+1}=3a_k^4+4a_k^3$, за $k\geq 0$. Докажи, дека декадниот запис на бројот a_{11} завршува со најмалку 2018 деветки.

Решение. Нека претпоставиме дека бројот a_k завршува на m деветки, т.е. дека $a_k=A\cdot 10^m-1$, за некој $A\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=3(A\cdot 10^m-1)^4+4(A\cdot 10^m-1)^3=(A\cdot 10^m-1)^3(3A\cdot 10^m-3+4)\\&=(A^3\cdot 10^{3m}-3A^2\cdot 10^{2m}+3A\cdot 10^m-1)(3A\cdot 10^m+1)\\&=(3A\cdot 10^m+1)(A^3\cdot 10^{3m}-3A^2\cdot 10^{2m})+(3A\cdot 10^m-1)(3A\cdot 10^m+1)\\&=[(3A\cdot 10^m+1)(A^3\cdot 10^m-3A^2)+9A^2]\cdot 10^{2m}-1,\end{aligned}$$

што значи дека бројот a_{k+1} завршува на $2m$ деветки.

Бидејќи a_0 завршува на една деветка, a_1 завршува на две деветки, ..., a_{11} завршува на $2^{11} = 2048$ деветки, со то тврдењето е докажано.

49. Докажи дека постои единствена низа $\{u_n\}$ од природни броеви така што

$$u_1 = 1,\ u_1 < u_2,\ u_n^3 + 1 = u_{n-1}u_{n+1} \text{ за секој } n > 1.$$

Решение. Да ставиме $u_2 = a > u_1 = 1$ и $a \in \mathbb{N}$. Тогаш $u_3 = a^3 + 1$;

$$u_4 = \frac{(a^3+1)^3+1}{a} = \frac{(a^3+2)((a^3+1)^2-(a^3+1)+1)}{a} = \frac{(a^3+2)(a^6+a^3+1)}{a},$$

$a \mid (a^6 + a^3)$ па a и $a^6 + a^3 + 1$ се заемно прости, од каде следува $a \mid (a^3 + 2)$ и како $a \mid a^3$, добиваме дека $a = 1$ или $a = 2$. Понатаму, од $a > 1$ следува $a = 2$.

Сега, $u_{n+1} = \frac{u_n^3+1}{u_{n-1}}$ и првите два члена на низата се фиксирани броеви, па затоа ако постои низа $\{u_n\}$ од природни броеви која што ги исполнува условите на задачата, тогаш таа е единствена. Останува да докажеме дека со формулата $u_{n+1} = \frac{u_n^3+1}{u_{n-1}}$ се зададени само природни броеви. Имаме, $u_1 = 1 \in \mathbb{N}$, $u_2 = 2 \in \mathbb{N}$, $u_3 = 9 \in \mathbb{N}$ и нека претпоставиме дека за $k < n$ важи $u_k \in \mathbb{N}$. Тогаш за n имаме:

$$u_n^3 + 1 = \frac{(u_{n-1}^3+1)^3}{u_{n-2}^3} + 1 = \frac{(u_{n-1}^3+1)^3}{u_{n-1}u_{n-3}-1} + 1 = \frac{(u_{n-1}^3+1)^3 + u_{n-1}u_{n-3} - 1}{u_{n-1}u_{n-3}-1}$$

$$(u_n^3 + 1)(u_{n-1}u_{n-3} - 1) = (u_{n-1}^3 + 1)^3 + u_{n-1}u_{n-3} - 1$$

$$(u_n^3 + 1)(u_{n-1}u_{n-3} - 1) = u_{n-1}^9 + 3u_{n-1}^6 + 3u_{n-1}^3 + u_{n-1}u_{n-3}$$

Според индуктивната претпоставка u_{n-1} е природен број, па како u_{n-1} е делител на десната страна, тој па мора да е делител и на левата страна. Но, $u_{n-1} \mid u_{n-1}u_{n-3}$, па затоа u_{n-1} е заемно прост со $u_{n-1}u_{n-3} - 1$. Последното значи дека $u_{n-1} \mid u_n^3 + 1$ односно $u_{n+1} = \frac{u_n^3+1}{u_{n-1}} \in \mathbb{N}$.

Конечно, од досега изнесеното следува дека постои низа $\{u_n\}$ од природни броеви која што ги исполнува условите на задачата.

50. Нека $a_1 = a_2 = 1$ и $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $\forall n \in N$. Докажи дека за секои $k, n \in \mathbb{N}$ броевите $ka_{n+2} + a_n$ и $ka_{n+3} + a_{n+1}$ се заемно прости.

Решение. Нека $b_n = ka_n + a_{n-2}$, за $n \geq 3$ и нека $\text{НЗД}(b_{n+1}, b_{n+2}) = d$. Тогаш и $b_{n+2} - b_{n+1} = b_n$ е делив со d, па и $b_{n+1} - b_n = b_{n-1}$ е делив со d. Со продолжување на оваа постапка, добиваме дека броевите $b_4 = 3k + 1$ и $b_3 = 2k + 1$ се деливи со d. Бидејќи, $3b_3 - 2b_4 = 1$, следи дека $\text{НЗД}(b_3, b_4) = 1$, па $d = 1$. ♦

51. Дадена е низата реални броеви $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, таква што за секои $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \geq n \geq 0$ е исполнето равенството

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}) . \qquad (1)$$

Определи го a_{2015}, ако $a_1 = 1$.

Решение. За $m = n$ имаме $a_{2m} + a_0 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2m}) = a_{2m}$, па според тоа $a_0 = 0$.

Ако во (1) замениме $n = 0$, добиваме $a_m + a_m = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_0)$, односно $a_{2m} = 4a_m$.

Ако во (1) замениме $m = n + 2$, добивме

$$a_{2n+2} + a_2 = \frac{1}{2}(a_{2n+4} + a_{2n}) = \frac{1}{2}(4a_{n+2} + 4a_n) = 2a_{n+2} + 2a_n . \qquad (2)$$

Но бидејќи $a_{2n+2} = a_{2(n+1)}$, имаме $a_{2n+2} = 4a_{n+1}$. Бидејќи $a_2 = 4a_1 = 4$, добиваме

$$a_{2n+2} + a_2 = 4a_{n+1} + 4a_1 = 4(a_{n+1} + 1) . \qquad (3)$$

Сега, од (2) и (3) добиваме дека

$$2a_{n+2} + 2a_n = 4(a_{n+1} + 1) ,$$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2 . \qquad (4)$$

Притоа исполнети се равенствата $a_0 = 0$ и $a_1 = 1$. Не е тешко да се провери дека $a_2 = 4, a_3 = 9$. Тоа ни дава повод да провериме дали $a_n = n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Тврдењето е точно за $n = 0,1,2,3$. Понатаму ќе продолжиме со помош на принципот на математичка индукција. Нека тврдењето е точно за сите природни броеви помали од $n + 2$, т.е. $a_n = n^2$ и $a_{n+1} = (n+1)^2$. Тогаш од (4) добиваме

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2 = 2(n+1)^2 - n^2 + 2 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 .$$

Сега тврдењето следува од принципот на математичка индукција.

Не е тешко да се провери дека низата го задоволува равенството (1). Притоа

$$a_{2015} = 2015^2 .$$

52. Низата $a_1, a_2, ...$ е определена со

$$a_1 = 2, a_2 = 5 \text{ и } a_{n+2} = (2 - n^2)a_{n+1} + (2 + n^2)a_n \text{ за секој } n \geq 1.$$

Дали постојат природни броеви p, q и r такви што $a_p a_q = a_r$?

Решение. Членови на дадената низа се $2,5,11,8,65,-766,...$ редоследно. Да забележиме дека разликата меѓу било кои два соседни членови на низата е делива со 3. Ќе докажеме повеќе, т.е. доволно е да се докаже дека $a_n \equiv 2 \pmod 3$. Јасно е дека $a_1, a_2 \equiv 2 \pmod 3$ (непосредна проверка). Тврдењето ќе го докажеме со помош на принципот на математичка индукција. Нека тврдењето е точно за секој природен број помал од $n + 2$, т.е. $a_{n+1}, a_n \equiv 2 \pmod 3$. Тогаш, од особините на конгруенции, имаме

$$a_{n+2} \equiv (2 - n^2) \cdot 2 + (2 + n^2) \cdot 2 = 8 \equiv 2 \pmod 3 .$$

Според принципот на математичка индукција $a_n \equiv 2 \pmod 2$.

Тогаш, за произволни природни броеви p, q, r имаме $a_p a_q \equiv 2 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 3$ и $a_r \equiv 2 \pmod 3$. Според тоа, за произволни $p, q, r \in \mathbb{N}$ имаме $a_p \cdot a_q \neq a_r$.

Значи, одговорот е не постојат такви природни броеви.

53. Низата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ е определена со

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1, \text{ и } a_{n+3}a_n - a_{n+2}a_{n+1} = n! \text{ за } n \geq 0.$$

Докажи дека $a_n \in \mathbb{Z}$ за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

Решение. Ќе ја разгледаме низата $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ зададена со $v_0 = 1$, $v_1 = 1$ и $v_n = (n-1)v_{n-2}$ за секој $n \geq 2$. Од самата дефинција на v_n е јасно дека сите членови на низата $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ се цели броеви. Со помош на математичка индукција ќе покажеме дека $v_n v_{n+1} = n!$ за секој $n \geq 0$.

За $n = 0$ имаме $v_0 v_1 = 1 \cdot 1 = 1 = 0!$, т.е. тврдењето е точно. Нека $v_{n-1}v_n = (n-1)!$. Бидејќи $v_{n+1} = nv_{n-1}$, добиваме

$$v_n v_{n+1} = nv_{n-1}v_n = n(n-1)! = n!.$$

Со тоа е докажано дека тврдењето е точно за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

Повторно со индукција ќе покажеме дека $a_n = v_n$. Јасно е дека за $n \in \{0,1,2,\}$ е исполнето равенството $v_n = a_n$. Нека за $n \geq 3$ е исполнето $a_{n-3} = v_{n-3}$, $a_{n-2} = v_{n-2}$, $a_{n-1} = v_{n-1}$. Тогаш

$$(n-3)! = a_n a_{n-3} - a_{n-1}a_{n-2},$$

па според тоа

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{(n-3)! + a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-3}} = \tfrac{(n-3)! + v_{n-1}v_{n-2}}{v_{n-3}} \\ &= \tfrac{v_{n-3}v_{n-2} + (n-2)v_{n-3}v_{n-2}}{v_{n-3}} = v_{n-2} + (n-2)v_{n-2} \\ &= (n-1)v_{n-2} = v_n \end{aligned}$$

Според принципот на математичка индукција, $a_n = v_n$ за секој $n \geq 0$, па според тоа сите членови на низата $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ се цели броеви.

54. Дадена е низа природни броеви $1 = x_1 < x_2 < .... < x_n < ...$ за која $x_{n+1} \leq 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Дали постојат два члена на низата x_i и x_j такви што $x_i - x_j = 2008$?

Решение. Ќе докажеме малку поопшто тврдење. За секој природен број k постојат членови на низата x_i и x_j такви што $x_i - x_j = k$.

Навистина, нека $k \in \mathbb{N}$ е зададен фиксен природен број. Ќе претпоставиме дека такви членови на низата не постојат, т.е. $x_i - x_j \neq k$, $i, j \in \mathbb{N}$. За множеството $A_k = \{1, 2, 3, ..., 2k-1, 2k\}$ и ќе го формираме множеството од сите подредени парови $(i, k+i)$, $i = 1, 2, ..., k$, односно множеството $\{(1, k+1), (2, k+2), ..., (k, 2k)\}$. Во секој од паровите на множеството се наоѓа најмногу еден член на низата. Ако претпоставиме дека двата члена на еден пар се и членови на низата, на пример $x_i = t$, $x_j = k+t$ би добиле $x_j - x_i = (k+i) - i = k$, што противречи на претпоставката. Значи, во множеството $\{1, 2, 3, ..., 2k-1, 2k\}$ се содржат не повеќе од k членови на низата. Бидејќи $x_1 = 1, x_2 \leq 2, x_3 \leq 4, ..., x_k \leq 2(k-1) < 2k$, добиваме дека $x_{k+1} \notin A_k$, што е во спротивност со претпоставката од задачата. Значи ќе постојат членови на низата x_i и x_j за кои $x_i - x_j = k$.

Ако тоа важи за произволен фиксен природен број k, важи и за $k = 2008$.

55. Нека k е фиксен природен број и $m=4k^2-5$. Докажи дека постојат природни броеви a и b такви што сите членови на низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, каде $x_0=a$, $x_1=b$ и $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$, $n=0,1,2,....$ се заемно прости со m.

Решение. Нека k е фиксен природен број и $m=4k^2-5$. Нека b е рироден број, таков што
$$b\equiv 2k^2+k-2 \text{ (mod } m). \qquad (1)$$
Тогаш
$$2b\equiv 4k^2+2k-4 \text{ (mod } m)\text{, т.е. } 2b-1\equiv 4k^2+2k-5\equiv 4k^2-5+2k\equiv 2k \text{ (mod } m).$$
Бидејќи $2b-1\equiv 2k \text{ (mod } m)$, добиваме
$$(2b-1)^2\equiv 4k^2 \text{ (mod } m),$$
$$(2b-1)^2-5\equiv 4k^2-5\equiv 0 \text{ (mod } m)$$
$$(2b-1)^2\equiv 5 \text{ (mod } m),$$
$$4b^2-4b\equiv 4 \text{ (mod } m),$$
$$b^2\equiv b+1 \text{ (mod } m). \qquad (2)$$
Значи, постои $b\in\mathbb{N}$ таков што $b^2\equiv b+1 \text{ (mod } m)$. На пример, доволно е да избереме $b=2k^2+k-2+p(4k^2-5)$, каде $p\in\mathbb{N}$ е произволен природен број.

Ќе избереме $a=1$ и $b\in\mathbb{N}$, кој го задволува условот (1), односно кој е од облик (2). Ќе покажеме дека $b^n\equiv x_n$ (mod m). Навистина, за $n=1$ тврдењето е тривијално. Но, $x_2=x_0+x+1=1+b\equiv b^2 \text{ (mod } m)$. Значи, тврдењето е точно и за $n=2$. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за било кој природен број помал од $n+1$. Според тоа $x_n\equiv b^n \text{ (mod } m)$ и $x_{n-1}\equiv b^{n-1} \text{ (mod } m)$. Тогаш
$$x_{n+1}=x_n+x_{n-1}\equiv b^n+b^{n-1}\equiv b^{n-1}(b+1)\equiv b^{n-1}b^2\equiv b^{n+1} \text{ (mod } m),$$
Според принципот на математичка индукција $b^n\equiv x_n$ (mod m).

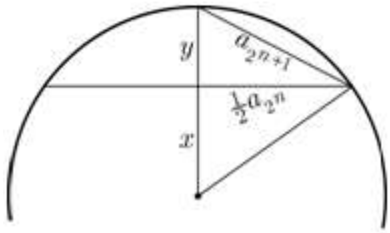
Јасно е дека ако b е природен број кој го задоволува условот (1), тогаш $\text{NZD}(b,m)=1$. Навистина, ако $\text{NZD}(b,m)=d$, тогаш $d\mid b$ и $d\mid m$. Но тогаш, заради (2)
$$b^2-b\equiv 1 \text{ (mod } d). \qquad (3)$$
Од $d\mid b$, добиваме дека $d\mid b^2$, па според тоа $d\mid b^2-b$, т.е.
$$b^2-b\equiv 0 \text{ (mod } d). \qquad (4)$$
Заради (3) и (4) добиваме дека $1\equiv 0 \text{ (mod } d)$ кое е точно само ако $d=1$.

Со тоа е комплетиран доказот на тврдењето од задачата.

56. Пресметај ја страната a_{2^n} на правилен 2^n – аголник, впишан во кружница со радиус R.

Решение. За $n=2$ правилниот 2^n-аголник е квадрат, па затоа неговата страна е $a_4=R\sqrt{2}$. Понатаму, ако го искористиме цртеж 1) наоѓаме:

$$\begin{aligned} a_{2^{n+1}} &= \sqrt{\frac{a_{2^n}^2}{4}+y^2} = \sqrt{\frac{a_{2^n}^2}{4}+(R-x)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a_{2^n}^2}{4}+(R-\sqrt{R^2-\frac{a_{2^n}^2}{4}})^2} \qquad (1) \\ &= \sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_{2^n}^2}{4}}}. \end{aligned}$$



Од претходно изнесеното следува дека страната на правилниот осумаголник впишан во кружница со радиус R е

$$\begin{aligned} a_8 &= \sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{(R\sqrt{2})^2}{4}}} = \sqrt{2R^2-2R\sqrt{\frac{2R^2}{4}}}. \\ &= \sqrt{2R^2-R^2\sqrt{2}} = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Аналогно се покажува дека страните на правилниот шеснаесетаголник и правилниот 32-аголник впишан во кружница со радиус R се:

$$a_{16}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \text{ и } a_{32}=R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

соодветно. Затоа природно е да претпоставиме, дека за секој $n\geq 2$ страната a_{2^n} на правилниот 2^n-аголник, впишан во кружница со радиус R е дадена со формулата

$$a_{2^n} = R\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ корен}}. \qquad (2)$$

Користејќи го принципот на математичка индукција ќе докажеме дека формулата (2) е точна за секој $n\geq 2$.

а) Јасно, формулата (2) важи за $n=2$.

б) Нека претпоставиме дека (2) важи за некој природен број $n\geq 2$. Сега, од (1) следува

$$\begin{aligned} a_{2^{n+1}} &= \sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_{2^n}^2}{4}}} = \sqrt{2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{1}{4}(R\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ корен}})^2}} \\ &= R\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{1}{4}(2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ корени}})}} = R\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ корени}}, \end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека формулата (2) важи за секој природен број $n\geq 2$.

57. Најди правило за пресметување на радиусите r_n и R_n на впишаната и опишаната кружница околу правилен 2^n-аголник со даден периметар p.

Решение. а) Лесно се пресметува дека $r_2=\frac{p}{8}$ и $R_2=\frac{p\sqrt{2}}{8}$.

б) Нека се дадени радиусите r_n и R_n на впишаната и опишаната кружница околу правилен 2^n – аголник со даден периметар p. Ќе ги пресметаме радиусите r_{n+1} и R_{n+1} на впишаната и опишаната кружница околу правилен 2^{n+1} – аголник со истиот периметар. Нека AB е страната на правилниот 2^n – аголник со периметар p, O е неговиот центар, C е средината на лакот AB и D е средината на тетивата AB (направи цртеж). Понатаму, нека EF е средната линија на триаголникот ABC паралелна на страната AB и G е средината на отсечката EF. Од

$$\measuredangle EOF = \measuredangle EOC + \measuredangle FOC = \tfrac{1}{2}\measuredangle AOC + \tfrac{1}{2}\measuredangle BOC = \tfrac{1}{2}\measuredangle AOB$$

следува дека отсечката EF е еднаква на страната на правилниот 2^{n+1} – аголник впишан во кружница со радиус OE, при што периметарот на овој 2^{n+1} – аголник е еднаков на

$$2^{n+1}\overline{EF} = 2^{n+1}\tfrac{\overline{AB}}{2} = 2^n\overline{AB} = p .$$

Според тоа,

$$r_{n+1} = \overline{OG} \text{ и } R_{n+1} = \overline{OE} .$$

Понатаму е јасно дека

$$\overline{OC} - \overline{OG} = \overline{OG} - \overline{OD}, \text{ т.е. } R_n - r_{n+1} = r_{n+1} - r_n ,$$

од каде наоѓаме $r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}$. Конечно, од правоаголниот триаголник OEC имаме

$$\overline{OE}^2 = \overline{OC}\bullet\overline{OG}, \text{ т.е. } R_{n+1}^2 = R_n r_{n+1}$$

па затоа

$$R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}} .$$

Конечно

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2} \text{ и } R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}} .$$

58. Низата $a_0, a_1, ..., a_{1389}$ од ненегативни броеви ќе ја нарекуваме *испакната*, ако $a_i \geq \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}$, за секој $i = 1, 2, ..., 1388$. Определи го најголемиот број c таков што за секоја испакната низа важи

$$\sum_{i=0}^{1389} i a_i^2 \geq c \sum_{i=0}^{1389} a_i^2 .$$

Решение. За испакнатата низа $a_i, i = 0, 1, 2, ..., 1389$ бараната најголема можна вредност на c е

$$c_0 = \frac{1389^2 - 5 \cdot 1389}{4 \cdot 1389 - 2} .$$

Ќе докажеме дека c_0 е бараниот број. Всушност, треба да докажеме дека

$$\sum_{i=[c_0[+1}^{1389} (i - c_0) a_i^2 \geq \sum_{i=0}^{[c_0]} (c_0 - i) a_i^2 .$$

Да ставиме

$$b_i = (1389 - i)\tfrac{a_{[c_0]}}{1389-[c_0]}.$$

Ако ја земеме предвид линеарноста на $\{b_i\}$, тогаш од

$$a_{[c_0]} = b_{[c_0]} \text{ и } a_{1389} \geq b_{1389} = 0$$

следува, дека $a_i \geq b_i$ за $i \geq [c_0]$ и $a_i \leq b_i$ за $i \leq [c_0]$. Тогаш

$$\sum_{i=[c_0[+1}^{1389}(i-c_0)a_i^2 \geq \sum_{i=[c_0[+1}^{1389}(i-c_0)b_i^2 = \sum_{i=0}^{[c_0]}(c_0-i)b_i^2 \geq \sum_{i=0}^{[c_0]}(c_0-i)a_i^2 .$$

59. Дадени се 2010 позитивни броеви $a_1, a_2, ..., a_{2010}$ такви што $a_i a_j \leq i + j$ за $i \neq j$. Определи ја најголемата можна вредност на производот $a_1 a_2 ... a_{2010}$.

Решение. Ако ги помножиме неравенствата $a_{2i-1}a_{2i} \leq 4i - 1$, за $i = 1, 2, ..., 1005$ добиваме

$$a_1 a_2 ... a_{2010} \leq 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot ... \cdot 4019 .$$

Ќе докажеме дека оваа горна граница се достигнува. Нека

$$a_{2008} = \sqrt{\tfrac{4017 \cdot 4018}{4019}},\; a_{2009} = \sqrt{\tfrac{4017 \cdot 4019}{4018}},\; a_{2010} = \sqrt{\tfrac{4018 \cdot 4019}{4017}}$$

и за $i < 2008$ броевите a_i рекурзивно да ги дефинираме со $a_i = \frac{2i+1}{a_{i+1}}$. Тогаш имаме

$$a_i a_j = i + j \text{, кога } j = i+1 \text{ или } i = 2008,\ j = 2010 . \qquad (1)$$

Со индукција по $i + j$ ќе докажеме дека од горните два услови следува $a_i a_j \leq i + j$, кога $i < j$, т.е. дека оваа низа ги задоволува условите на задачата.

Ги разгледуваме следниве случаи:

- Ако $j = i+1$ или $i = 2008,\ j = 2010$, тогаш од (1) следува дека $a_i a_j = i + j$.
- Ако $i = 2007$ и $j = 2009$, тогаш

  $$a_i a_{i+2} = \tfrac{(a_i a_{i+1})(a_{i+2}a_{i+3})}{a_{i+1}a_{i+3}} = \tfrac{(2i+1)(2i+5)}{2i+4} < 2i + 2 .$$

  Првото равенство следува од (1), а неравенството следува од

  $$(2i+1)(2i+5) = 4i^2 + 12i + 5 < 4i^2 + 12i + 8 = (2i+2)(2i+4) .$$

- Ако $i < 2007$ и $j = i + 2$, тогаш

  $$a_i a_{i+2} = \tfrac{(a_i a_{i+1})(a_{i+2}a_{i+3})(a_{i+2}a_{i+4})}{(a_{i+1}a_{i+2})(a_{i+3}a_{i+4})} \leq \tfrac{(2i+1)(2i+5)(2i+6)}{(2i+3)(2i+7)} < 2i + 2 .$$

  Првото неравенство следува од индуктивната претпоставка за $(i+2, i+4)$ и од (1) за другите парови. Второто неравенство се проверува непосредно со ослободување од заградите.

- Ако $j - i > 2$, тогаш

  $$a_i a_j = \tfrac{(a_i a_{i+1})(a_{i+2}a_j)}{a_{i+1}a_{i+2}} \leq \tfrac{(2i+1)(i+2+j)}{2i+3} < i + j ,$$

  при што првото неравенство следува од индуктивната претпоставка за $(i+2, j)$, а второто неравенство се проверува непосредно со ослободување од заградите

Конечно, од досега изнесеното следува дека бараната најголема вредност е

$$a_1 a_2 ... a_{2010} = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot ... \cdot 4019 .$$

60. Дадена е низата $0 \le x_0 \le x_1 \le x_2 \le ...$ цели броеви таква што за секој $k \ge 0$ бројот на членовите кои не се поголеми од k е конечен (тој број да го означиме со y_k). Докажи дека за секои природни броеви m и n важи

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \ge (n+1)(m+1) .$$

Решение. Да ги обележиме сите точки (i, j), $i, j \ge 0$ на целобројната решетка во рамнината за кои важи $j < x_i$. За дадено i, бројот на обележените точки (i, j) е еднаков на x_i, па така во множеството $S = \{(i, j) \mid 0 \le i \le n, 0 \le j \le m\}$ има $\sum_{i=0}^{n} x_i$ обележени точки. Од друга страна, за дадено j, необележени точки (i, j) за кои $i \ge 0$ има точно y_j, па така во множеството S има $\sum_{j=0}^{m} y_j$ необележени точки. Но, сите точки од множеството S се обележени или не се обележени, па затоа $\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j$ не е помал од бројот на точките на множеството S, т.е. од $(n+1)(m+1)$.

61. Ако $a_1, a_2, ..., a_n$ е конечна низа, тогаш сума на Чезаро за таа низа се вика бројот $\frac{s_1+s_2+...+s_n}{n}$, каде што $s_k = a_1 + a_2 + ... + a_k$, $(k = 1, 2, ..., n)$. Ако сумата на Чезаро за 99 члена на низата $a_1, a_2, ..., a_{99}$ е еднаква на 1000, тогаш колкава е сумата на Чезаро за 100 членета низа $1, a_1, a_2, ..., a_{99}$.

Решение. Според условот на задачата имаме:

$$\frac{s_1+s_2+...+s_{99}}{99} = 1000 ,$$

т.е.

$$s_1 + s_2 + ... + s_{99} = 99000 .$$

Сумата на Чезаро за низата $1, a_1, a_2, ..., a_{99}$ е:

$$\frac{1+(1+a_1)+(1+a_1+a_2)+...+(1+a_1+a_2+...+a_{99})}{100} = \frac{100+a_1+(a_1+a_2)+...+(a_1+a_2+...+a_{99})}{100} = \frac{100+99000}{100} = 991$$

62. Нека n е природен број. Дадена е низа $a_1, a_2, ..., a_k$ каде $k = 2^n$ и $a_i = +1$ или -1, за $i = 1, 2, ..., k$. Конструираме нова низа $a_1 a_2, a_2 a_3, ..., a_{n-1} a_n, a_n a_1$ и продолжуваме на истиот начин да конструираме нови низи. Докажи дека, најмногу по $k-$ чекори ќе добиеме низа која се состои само од $+1$.

Решение. Да испишеме неколку чекори од наведената конструкција:

нулти чекор $a_1^1, a_2^1, ..., a_{n-1}^n, a_n^1$

прв чекор $a_1^1 a_2^1, a_2^1 a_3^1, a_3^1 a_4^1, ..., a_{n-1}^1 a_n^1, a_n^1 a_1^1$

втор чекор $a_1^1 a_2^2 a_3^1, a_2^1 a_3^2 a_4^1, a_3^1 a_4^2 a_5^1, ..., a_{n-1}^1 a_n^2 a_1^1, a_n^1 a_1^2 a_2^1$

трет чекор $a_1^1 a_2^3 a_3^3 a_4^1, a_2^1 a_3^3 a_4^3 a_5^1, a_3^1 a_4^3 a_5^3 a_6^1, ..., a_{n-1}^1 a_n^3 a_1^3 a_2^1, a_n^1 a_1^3 a_2^3 a_3^1$

....

Забележуваме дека за секој од испишаните чекори во секој елемент од низата степените се соодветните биномни коефициенти (во втор чекор $1,2,1$, во третиот $1,3,3,1$ и т.н.) Лесно се гледа дека во $m-$ тиот чекор $(m \le 2^n - 1)$ имаме низи кои се составени од производи од облик

$$a_i^{j_\circ} a_{i+1}^{j_1} a_{i+2}^{j_2} ... a_{i+2^n-1}^{j_{2^n-1}}$$

каде $j_t = \binom{m}{t}$, $t = 0,1,2,3,...,m$ и

$$a_t = \begin{cases} a_t, & t \le k \\ a_{t-k}, & t > k. \end{cases}$$

Бидејќи $\binom{2^n-1}{t}, t = 0,1,2,...,m$ се непарни броеви добиваме дека во $(2^n - 1)-$ от чекор низата е составена од производи $a_i a_{i+1} ... a_{i+2^n-1}$. Конечно, во $2^n -$ от чекор низата е составена од производи $(a_1 a_2 .... a_{2^n-1})^2 = 1$, што и требаше да се докаже.

63. Определи го бројот на низите $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ од цели броеви такви што

$$a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 2005, \text{ за секој } n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

Решение. Ако ги одземеме равенствата

$$a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 2005 \text{ и } a_{n+1} + a_{n+2} = 2a_{n+3}a_{n+4} + 2005$$

добиваме

$$a_{n+2} - a_n = 2a_{n+3}(a_{n+4} - a_{n+2}).$$

Ако последната рекурзија ја примениме k пати добиваме

$$a_{n+2} - a_n = 2a_{n+3}(a_{n+4} - a_{n+2}) = 2^2 a_{n+3} a_{n+5}(a_{n+6} - a_{n+4}) = ...$$
$$= 2^k a_{n+3} ... a_{n+2k+1}(a_{n+2k+2} - a_{n+2k}).$$

Според тоа, за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот $a_{n+2} - a_n$ е делив со 2^k за секој $k \in \mathbb{N}$. Последното е можно само ако $a_{n+2} - a_n = 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$, што значи

$$a_1 = a_3 = ... = a_{2n-1} = ... \text{ и } a_2 = a_4 = ... = a_{2n} = ...$$

Сега, од (1) последователно следува

$$a_1 + a_2 = 2a_1 a_2 + 2005$$
$$4a_1 a_2 - a_1 - a_2 + 1 = -4009$$
$$(2a_1 - 1)(2a_2 - 1) = -19 \cdot 211.$$

Од последното равенство следува $2a_1 - 1 = \pm 1, \pm 19, \pm 211$, што значи дека постојат 8 низи кои го задоволуваат условот на задачата.

64. Низата природни броеви $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ го задоволува равенството

$$a_{n+2} = [\frac{2a_{n+1}}{a_n}] + [\frac{2a_n}{a_{n+1}}],$$

каде $[x]$ е функцијата цел дел од x. Докажи дека постои природен број m таков што $a_m = 4$ и $a_{m+1} \in \{3,4\}$.

Решение. Прв ќе докажеме три леми.

Лема 1. За секој природен број $n \geq 3$ важи $a_n \geq 3$.

Доказ. Нека $a_n < 3$, за некој $n \geq 3$. Ако $a_{n-1} \geq a_{n-2}$, тогаш

$$\frac{2a_{n-1}}{a_{n-2}} \geq 2 \Rightarrow [\frac{2a_{n-1}}{a_{n-2}}] \geq 2 \Rightarrow [\frac{2a_{n-2}}{a_{n-1}}] = 0 \Rightarrow a_{n-1} > 2a_{n-2} \Rightarrow \frac{2a_{n-1}}{a_{n-2}} > 4.$$

Последното противречи на $a_n < 3$. Случајот $a_{n-2} \geq a_{n-1}$ се разгледува аналогно. ■

Лема 2. За секој природен број $n \geq 3$ е исполнето

$$a_{n+1} = a_n \text{ или } a_{n+2} < \max\{a_n, a_{n+1}\}.$$

Доказ. Нека претпоставиме дека, $a_{n+1} \neq a_n$. Ако $a_n = \max\{a_n, a_{n+1}\}$, тогаш $\frac{2a_{n+1}}{a_n} < 2$. Од друга страна

$$a_{n+1}a_n \geq 3 \Rightarrow \frac{2a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{2a_n}{3} \Rightarrow a_{n+2} = [\frac{2a_{n+1}}{a_n}] + [\frac{2a_n}{a_{n+1}}] \leq 1 + \frac{2a_n}{3} \leq \frac{a_n}{3} + \frac{2a_n}{3} = a_n$$

Ако $a_{n+2} \geq \max\{a_n, a_{n+1}\} = a_n$, тогаш горното неравенство преминува во равенство и тогаш $a_{n+1} = a_n = 3$, што противречи на $a_{n+1} \neq a_n$. Случајот $a_{n+1} = \max\{a_n, a_{n+1}\}$ се разгледува аналогно. ■

Лема 3. Постои природен број k, за кој $a_k = a_{k+1}$.

Доказ. Нека претпоставиме дека никогаш нема равенство. Од лема 2 следува

$$a_{n+1} < \max\{a_n, a_{n+1}\} \text{ и } a_{n+2} < \max\{a_n, a_{n+1}\}.$$

Според тоа,

$$\max\{a_{n+1}, a_{n+2}\} < \max\{a_n, a_{n+1}\}$$

и функцијата $\max\{a_n, a_{n+1}\}$ монотоно опажа, што не е можно во множеството природни броеви. Со тоа лемата е докажана. ■

Од лема 3 следува, дека постои природен број k таков што $a_k = a_{k+1}$. Тоа значи дека $a_{k+2} = 4$ и ако $a_k = a_{k+1} \in \{3,4\}$, тогаш $a_{k+3} \in \{3,4\}$ и тврдењето е докажано. Ако $a_k = a_{k+1} > 4$, тогаш постои природен број m, таков што $a_{k+m+1} = a_{k+m}$. Сега, од доказот на Лема 3 следува:

Прв случај. Ако m е парен, тогаш

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \max\{a_{k+1}, a_{k+2} = 4\} > \max\{a_{k+3}, a_{k+4}\} > \ldots \\ &> \max\{a_{k+m}, a_{k+m+1}\} = a_{k+m}. \end{aligned}$$

Прв случај. Ако m е непарен, тогаш

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \max\{a_{k+1}, a_{k+2} = 4\} > \max\{a_{k+3}, a_{k+4}\} > \ldots \\ &> \max\{a_{k+m-1}, a_{k+m}\} \geq a_{k+m}. \end{aligned}$$

Според тоа, ако два еднакви соседни членови на низата се поголеми од 4, тогаш постојат два последователни членови на низата со помала вредност. Така можеме да избереме два последователни членови на низата помали или еднакви на 4. Со тоа доказот е завршен, бидејќи следните два члена се 4, 3 или 3, 4.

65. Низата рационални броеви $x_0, x_1, x_2, ...$ е определена со: x_0 е произволен рационален број и за секој $n \ge 0$ важи $x_{n+1} = |\frac{x_n}{2} - 1|$ или $|\frac{1}{x_n} - 1|$, кога x_n запишан како нескратлива дропка има парен или непарен броител, соодветно. Докажи дека за секој x_0:

а) низата содржи конечен број различни членови,

б) низата содржи точно еден од броевите 0 и $\frac{2}{3}$.

Решение. а) Ако $x_k = 0$ за некој k, тогаш понатаму низата е периодична со период 2 (како членови наизменично се менуваат броевите 0 и 1) и тврдењето е докажано. Во спротивно, нека $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ и $y_n = \max\{p_n, q_n\} > 0$. Доволно е да докажеме дека $y_{n+1} \le y_n$ (од каде ќе следува дека $0 < p_n, q_n \le y_0$, а оттука ќе следува и тврдењето). Можни се следниве случаи:

1) p_n е парен. Бидејќи $\mathrm{NZD}(p_n, q_n) = 1$, броителот и именителот на $x_{n+1} = |\frac{\frac{p_n}{2} - q_n}{q_n}|$ исто така се заемно прости. Сега од неравенството $|a - b| \le \max\{a, b\}$ добиваме

$$y_{n+1} = \max\{|\tfrac{p_n}{2} - q_n|, q_n\} \le \max\{\tfrac{p_n}{2}, q_n\} \le \max\{p_n, q_n\} = y_n.$$

2) p_n е неапрен. Тогаш $x_{n+1} = |\frac{q_n - p_n}{q_n}|$ и како и претходно следува дека

$$y_{n+1} = \max\{|q_n - p_n|, q_n\} \le \max\{p_n, q_n\} = y_n.$$

б) Од а) и рекурентната врска следува дека низата е периодична почнувајќи од некое место натаму.

Да забележиме дека 0 и $\frac{2}{3}$ не се истовремено членови на низата, бидејќи ако 0 е член, тогаш понатаму наизменично се менуваат 0 и 1 (и $\frac{2}{3}$ не се добива), а ако $\frac{2}{3}$ е член, тогаш сите членови понатаму се еднакви на $\frac{2}{3}$ (па 0 не се добива).

Од првиот член натаму бројот y_n (дефиниран во а)) е природен, па затоа строгото неравенство $y_{n+1} < y_n$ е исполнето конечен број пати. Сега ќе ги разгледаме следниве случаи ($p_n \ne q_n$, заради $x_n \ne 1$):

1) $p_n > q_n$ и p_n е парен. Тогаш

$$y_n = p_n \text{ и } y_{n+1} = \max\{|\tfrac{p_n}{2} - q_n|, q_n\} < p_n = y_n.$$

2) $p_n < q_n$ и p_n е непарен. Тогаш

$$y_n = q_n \text{ и } y_{n+1} = \max\{|q_n - p_n|, p_n\} < q_n = y_n.$$

3) $p_n > q_n$ и p_n е непарен. Тогаш $x_{n+1} = \frac{p_n - q_n}{q_n} < 1$ и потпаѓа во следниот случај.

4) $p_n < q_n$ и p_n е парен. Тогаш $x_{n+1} = \frac{q_n - \frac{p_n}{2}}{q_n} < 1$. Бидејќи вториот случја се користи конечен број пати, од некое место натаму x_{n+1} припаѓа само во

овој случај.
Според тоа, од некое место натаму сме само во четвртиот случај. За доволно голем број n_0 и некој $k \in \mathbb{N}$ заради периодичноста важи $x_{n_0+k} = x_{n_0}$. Сега од $x_{n+1} = \frac{q_n - \frac{p_n}{2}}{q_n}$ индуктивно се добива

$$p_{n_0} = p_{n_0+k} = \frac{2^k - (-1)^k}{3 \cdot 2^{k-1}} q_{n_0} + \frac{(-1)^k}{2^k} p_{n_0},$$

од каде следува $x_{n_0} = \frac{p_{n_0}}{q_{n_0}} = \frac{2}{3}$.

66. Нека $n \geq 3$ природен број. На кружницата се земени n точки, кои кружницата ја делат на еднакви лаци. Даден е жетон, кој од една од дадените точки во еден чекор се поместува во насока на движењето на стрелката на часовникот во соседната точка или во точката после соседната точка (т.е. имаме $2n$ дозволени чекори). Со a_n да го означиме бројот на начините, на кој кружницата, без повторување на чекор, може да биде обиколена двапати со почеток и крај во фиксирана точка од дадените.

Докажи, дека $a_{n-1} + a_n = 2^n$ за секој $n \geq 4$.

Решение. Ќе докажеме, дека $a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$. Тоа е доволно, бидејќи

$$a_{n-1} + a_n = \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3} + \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} = 2^n.$$

Лема. За секој природен број n точно е равенството

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n-k}{k} 2^k = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

Доказ. Ќе користиме индукција по n. Случаите $n=1$ и $n=2$ лесно се проверуваат. Нека $n = 2m+1 \geq 3$ е непарен број. Ако ја искористиме индуктивната претпоставка за $n = 2m$ и $n = 2m-1$ последователно добиваме

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1-k}{k} 2^k &= 1 + \sum_{k=1}^{m} \binom{2m-k}{k} 2^k + \sum_{k=1}^{m} \binom{2m-k}{k-1} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{2m-k}{k} 2^k + 2\sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m-1-k}{k} 2^k \\ &= \frac{2^{2m+1}+1}{3} + \frac{2(2^{2m+1}-1)}{3} = \frac{2^{2m+2}-1}{3}.\end{aligned}$$

Индуктивниот чекор за $n = 2m+2 \geq 3$ се докажува аналогно, со што лемата е докажана. ■

Ќе го определиме бројот на начините кружницата да се обиколи двапати, организирајќи го броењето около точките, кои се двапати посетени. Јасно е, дека две такви точки не можат да бидат соседни и дека има точно два начина (низи од чекори) да се стигне од една таква точка до следната таква точка (чекорите се само со должина 2 освен можда во краевите).

За $k \geq 1$ такви точки, меѓу кои нема соседни и без точката A, имаме 2^k начина за обиколување на кружницата без повторување на чекорите. Половината од тие можности води до двократно повторување на една и иста маршрута, па затоа бројот на начините е еднаков на 2^{k-1}. Имаме $\binom{n-k}{k}$ начини за избор на k точки (меѓу кои нема соседни и без точката A), што значи дека вкупниот број на начините е еднаков на

$$\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-k}{k}2^{k-1}=\frac{1}{2}[-1+\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-k}{k}2^{k}]=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{6}-\frac{1}{2}.$$

Ако A е од точките кои се двапати посетени, тогаш имаме $\binom{n-k-1}{k-1}$ начини за избор, при што сега имаме 2^k начина за обиколување на кружницата без повторување на чекорите, што значи дека вкупниот број на начините е еднаков на

$$\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-k-1}{k-1}2^{k}=2\sum_{k=0}^{[\frac{n-2}{2}]}\binom{n-k}{k}2^{k}=\frac{2(2^{n+1}+(-1)^n)}{3}.$$

На крајот, ако n е непарен имаме еден дополнителен начин двапати да ја обиколиме кружницата без двапати да посетиме ниту една точка (со чекор со должина 2), кој начин го запишуваме како $\frac{1-(-1)^n}{2}$.

Конечо, добиваме

$$\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{6}-\frac{1}{2}+\frac{2(2^{n+1}+(-1)^n)}{3}+\frac{1-(-1)^n}{2}=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3},$$

со што задачата е решена.

2. ПЕРИОДИЧНИ, ОГРАНИЧЕНИ И МОНОТОНИ НИЗИ

1. Низата (a_n) е зададена со $a_1=1, a_2=\sqrt{19}$ i

$$a_{n+1}+a_n+a_{n-1}=3n,\ n\geq 2.$$

Пресметај a_{2011}.

Решение. Со математичка индукција се докажува дека за $k\geq 1$ важи

$$a_{3k}=3(k+1)-(a_1+a_2);$$
$$a_{3k+1}=3k+a_1;$$
$$a_{3k+2}=3k+a_2.$$

Бидејќи $2011=3\cdot 670+1$, следува дека

$$a_{2011}=a_{3\cdot 670+1}=3\cdot 670+a_1=3\cdot 670+1=2011.$$

2. Нека m е природен број. Определи ги сите природни броеви a за кои низата дефинирана со $a_0=a$ и

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2}, & \text{ако } a_n \text{ е парен,}\\ a_n+m, & \text{ако } a_n \text{ е пепарен,}\end{cases}$$

за $n=1,2,3,..$ е периодична, со циклус (сегмент кој периодично се повторува) од видот $a_0,a_1,...,a_k$, за некој k.

Решение. Ако m е парен број, тогаш низата не е периодична. Навистина, за $a=2^r k, 2\nmid k$ имаме $a_r=k$ и $a_{r+i}=k+im,$ за $i>0$.

Нека m е непарен и нека a_k е најмалиот член на низата. Јасно, $2\nmid a_k$, па затоа $a_{k+1}=a_k+m$ и $a_{k+2}=\frac{a_k+m}{2}\geq a_k$, па затоа $a_k\leq m$. Со едноставна индукција се покажува дека после a_k нема непарни членови на низата поголеми од m и парни членови на низата поголеми од $2m$. Според тоа, ако низата $\{a_n\}$ е чисто периодична, тогаш $a\in S=\{1,2,...,m,m+1,m+3,...,2m\}$.

Од друга страна, за $a\in S$ сите членови на низата припаѓаат на множеството S , па затоа низата е периодична почнувајќи од некоја точка. Уште повеќе, ако $a_k=a_l$ за $l<k$, тогаш лесно се покажува дека мора да важи $a_{k-1}=a_{l-1}$ итн., па затоа низата е периодична почнувајќи од a_0.

3. Нека $y\notin\{-1,0,1\}$ и нека

$$x_1=\frac{y-1}{y+1},\ x_2=\frac{x_1-1}{x_1+1},\ \ldots,\ x_{1996}=\frac{x_{1995}-1}{x_{1995}+1}.$$

Одреди го y, ако $x_{1996}=1997$.

Решение. *Прв начин.* Имаме по ред

$$x_1=\frac{y-1}{y+1},\qquad x_2=\frac{x_1-1}{x_1+1}=\frac{\frac{y-1}{y+1}-1}{\frac{y-1}{y+1}+1}=-\frac{1}{y},\qquad x_3=\frac{x_2-1}{x_2+1}=\frac{-\frac{1}{y}-1}{-\frac{1}{y}+1}=\frac{y+1}{1-y},$$

$$x_4=\frac{x_3-1}{x_3+1}=\frac{\frac{1+y}{1-y}-1}{\frac{1+y}{1-y}+1}=y,\quad x_5=\frac{x_4-1}{x_4+1}=\frac{y-1}{y+1}=x_1.$$

Значи, секој четврти член во низата се повторува. Од $x_4=y$, следува $x_{4k}=y$. Оттука $x_{1996}=x_{4\cdot 499}=y$, т.е. $y=1997$.

Втор начин. Дефинраме функција

$$f(t)=\frac{t-1}{t+1},\ t\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\},$$

со чија помош условите на задачата ги запишуваме во облик:

$$x_1=f(y),\ x_2=f(x_1)=f(f(y))=f^2(y),\ldots,x_k=f^k(y).$$

Од $\operatorname{tg}(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}$, за $y=\operatorname{tg}x$, имаме

$$f(y)=f(\operatorname{tg}x)=\frac{\operatorname{tg}x-1}{\operatorname{tg}x+1}=\operatorname{tg}(x-\tfrac{\pi}{4}),$$

$$f^2(y)=\frac{f(y)-1}{f(y)+1}=\frac{\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{4})-1}{\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{4})+1}=\operatorname{tg}(x-2\tfrac{\pi}{4})$$

$$f^3(y)=\operatorname{tg}(x-3\tfrac{\pi}{4}),\ldots,\ f^k(y)=\operatorname{tg}(x-k\tfrac{\pi}{4}).$$

Тогаш,

$$x_{1996}=f^{1996}(y)=\operatorname{tg}(x-1996\tfrac{\pi}{4})=\operatorname{tg}x=y,$$

т.е. $y=1997$.

4. Низата (a_n) е зададена со:

$i)$ $a_1 = 1$

$ii)$ $(\forall n \in N)\, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{[a_n]}$

За кои вредности на n важи $a_n > 20$?

Решение. Првите неколку членови на низата се:

$$a_1 = 1,\, a_2 = 2,\, a_3 = 1 + \tfrac{1}{2},\, a_4 = 3,\, a_5 = 3 + \tfrac{1}{3},\, a_6 = 3 + \tfrac{2}{3},\, a_7 = 4, \dots$$

Го забележуваме следното правило: низата монотоно расте и нејзините членови го имаат обликот $m + \frac{k}{m},\, 0 \le k \le m-1.$ Да докажеме дека тоа навистина е така. За $n = 1$ тврдењето е точно. Нека $a_n = m + \frac{k}{m},\, 0 \le k \le m-1.$

Тогаш $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{[a_n]} = m + \frac{k}{m} + \frac{1}{m} = m + \frac{k+1}{m}.$ $a_{n+1} = m+1$ ако $k = m-1.$ Значи, еден член од низата има цел дел 1, два члена имаат цел дел 2, три члена имаат цел дел 3, итн. Цел дел не поголем од 19 имаат $1+2+3+\dots+19 = 190$ членови од низата. Тогаш $a_{191} = 20.$ Значи $a_n > 20$ ако $n > 191.$

5. Нека $\{a_n\}$ е непериодична низа со членови од множеството $\{0,1,2\}$. Низите $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ се дефинирани на следниов начин:

$b_n = 0$, ако $a_n = 0$ и $b_n = 1$, ако $a_n \ne 0$;

$c_n = 1$, ако $a_n = 2$ и $c_n = 0$, ако $a_n \ne 2$.

Докажи дека барем една од низите $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ е непериодична.

Решение. Важи $a_n = b_n + c_n$. Ако и $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ се периодични, тогаш и $\{a_n\}$ е периодична, што е во контрадикција со условот на задачата. Во тој случај период на $\{a_n\}$ би бил најмалиот заеднички содржател на периодите на $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$.

6. Низата $a_1, a_2, \dots$ е зададена со: $a_{2n} = a_n$, за $n \ge 1$ и $a_{4n+1} = 1,\, a_{4n+3} = 0$ за $n \ge 0$. Докажете дека оваа низа нема периода, т.е. дека не постои природен број k таков што $a_{n+k} = a_n$, за секој $n \ge 1$.

Решение. Нека претпоставиме дека низата има периода $T = 2^p q$, каде q е непарен број. Ако $q = 4m+3$, тогаш при $k \ge p+2$ имаме

$$\begin{aligned} a_{2^k} &= a_{2^k+T} = a_{2^p(2^{k-p}+q)} = a_{2^{p-1}(2^{k-p}+q)} = \dots \\ &= a_{2^{k-p}+4m+3} = a_{4(2^{k-p}+m)+3} = 0 \end{aligned},$$

што противречи на $a_{2^k} = a_{2^{k-1}} = a_{2^{k-2}} = \dots = a_2 = a_1 = 1$.

Ако пак, $q = 4m+1$, тогаш во претходните разгледувања наместо бројот T го земаме бројот $3T = 2^p(4 \cdot 3m + 3)$, кој исто така е периода на низата и повторно добиваме противречност.

7. Определи го најголемиот член на низата $a_n = \frac{2016^n}{n!}, n \in \mathbb{N}$.

Решение. Од $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2016}{n+1}$, следува дека низата расте до 2015-от член кој е еднаков со 2016-от, а потоа опаѓа. Значи, најголеми членови на низата се a_{2015} и a_{2016}.

8. Да се докаже дека за секој природен број n важи
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1.$$

Решение.Нека $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}$. Тогаш $a_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{3n+4}$, па
$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+4}-\frac{1}{n+1}=\frac{2}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)}>0\ .$$
Значи, низата a_n е растечка. Освен тоа $a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$, па значи $a_n>1$ за секој природен број.

9. Нека $a_1,a_2,a_3,a_4,...$ е низа позитивни броеви, за кои
$$a_2=3a_1-1,\ a_3=2a_2-1,\ a_4=3a_3-1,\ a_5=2a_4-1,...$$
Определи ја најмалата можна вредност на a_1.

Решение. Да ставиме $b_n=a_{2n-1}$ и $c_n=a_{2n}$. Тогаш $b_{n+1}=6b_n-3$ и $c_{n+1}=6c_n-4$. Според тоа, $b_{n+1}-\frac{3}{5}=6(b_n-\frac{3}{5})$ и $c_{n+1}-\frac{4}{5}=6(c_n-\frac{4}{5})$, па затоа
$$b_{n+1}=\frac{3}{5}+6^n(a_1-\frac{3}{5})\ \text{ и }\ c_{n+1}=\frac{4}{5}+6^n(c_1-\frac{4}{5})=\frac{4}{5}+3\cdot 6^n(a_1-\frac{3}{5})\ .$$
Конечно, $a_n>0$ за секој n ако $b_n>0$ и $c_n>0$ за секој n, т.е. ако $a_1\geq\frac{3}{5}$.

10. Да го означиме со $P(n)$ производот на цифрите во децималниот запис на природниот број n. Докажи дека при секој избор на природниот број n_1, низата $n_1,n_2,...,n_k,...,$ определена со равенството $n_{k+1}=n_k+P(n_k),\ k=1,2,...,$ е ограничена.

Решение. Да претпоставиме дека за некој природен број n_1 низата неограничено расте и да избереме природен број m така што $9^m<10^{m-1}$. Ако k е најголемиот природен број за којшто $n_k<10^m$, тогаш
$$10^m\leq n_{k+1}\leq n_k+9^{c(n_k)}<10^m+9^m<10^m+10^{m-1},$$
каде што со $c(n_k)$ е означен бројот на цифрите на бројот n_k. Од ова неравенство, следува дека барем една од цифрите во децималниот запис на n_{k+1} е нула, односно $P(n_{k+1})=0$ и $n_{k+1}=n_{k+2}=...$, па добиваме контрадикција.

11. Во низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ секој член почнувајќи од третиот е еднаков на збирот на претходните два. Најди го пресекот на множествата $A=\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ и $B=\{b_n\mid n\in\mathbb{N}\}$, ако $a_1=1,a_2=2,b_1=2$ и $b_2=1$.

Решение. Прво $a_3=b_3=3$, па $\{1,2,3\}\subseteq A\cap B$.

Со помош на математичка индукција ќе докажеме дека

$$a_{n-1} < b_n < a_n \text{, за } n \geq 4 \qquad (1)$$

За $n=4$ и $n=5$ важи $a_3 = 3 < 4 = b_4 < 5 = a_4$ и $a_4 = 5 < 7 = b_5 < 8 = a_5$, па (1) е точно. Да претпоставиме дека (1) е точно за $n=k$ и $n=k+1$, т.е. $a_{k-1} < b_k < a_k$ и $a_k < b_{k+1} < a_{k+1}$. Ако ги собереме последниве две неравества добиваме $a_{k-1} + a_k < b_k + b_{k+1} < a_k + a_{k+1}$, т.е. $a_{k+1} < b_{k+2} < a_{k+2}$. Значи (1) важи и за $n = k+2$. Од принципот на математичка индукција заклучуваме дека (1) важи за секој $n \geq 4$.

Сега, да претпоставиме дека $a_k = b_s$ за некои $k, s \geq 4$

1) Ако $k < s$, тогаш од (1) имаме

$$a_k < a_{k+1} < b_{k+2} < a_{k+2} < b_{k+3} < ... < a_{s-1} < b_s ,$$

па добиваме контрадикција;

2) За $k > s$ добиваме

$$b_s < b_{s+1} < a_{s+1} < a_{s+2} < b_{s+3} < a_{s+3} < ... < b_{k-1} < a_{k-1} < b_k ,$$

па повторно добиваме контрадикција;

3) За $k = s$ од (1) следува $b_k < a_k$, па повторно не е можно $a_k = b_k$.

Според тоа освен првите три никои други броеви не се сретнуваат во двете низи истовремено, па $\{1,2,3\} = A \cap B$.

12. Нека $a \in \mathbb{R}$. Низата $\{x_n\}$ е дефинирана со $x_1 = a, x_n = \frac{1}{4-3x_{n-1}}$. Најди ги сите вредности на a за кои низата е добро дефинирана, за секој $n \in \mathbb{N}$. Потоа докажи дека низата е ограничена.

Решение. Со разгледување на првите неколку членови на низата се доаѓа до првилото $x_{n+1} = \frac{\frac{3^n-1}{2} - \frac{3^n-3}{2}a}{\frac{3^{n+1}-1}{2} - \frac{3^{n+1}-3}{2}a}$, $n \in \mathbb{N}$ (Докажи го со математичка индукција!). Значи, низата е дефинирана за сите $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}-3} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Ако $a = 1$, низата е константна, па е ограничена.

Нека $a \in \mathbb{R} \setminus \{\{1\} \cup \{\frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}-3} \,|\, n \in \mathbb{N}\}\}$. Тогаш

$$x_n = \frac{3^{n-1}-1-(3^{n-1}-3)a}{3^n-1-(3^n-3)a} = \frac{3^{n-1} - \frac{3a-1}{a-1}}{3^n - \frac{3a-1}{a-1}} < 1 \text{, за } n \geq n_0 .$$

Притоа n_0 е најмалиот број за кој важи $3^{n_0} > \frac{3a-1}{a-1}$.

Ако $M = \max\{1, |x_1|, ..., |x_{n_0-1}|\}$, тогаш $|x_n| \leq M$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

13. Нека $x_1 \in (0,1)$. Докажи дека низата $\{x_n\}$ дефинирана со $x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, е ограничена.

Решение. Со индукција се докажува дека за $n \in \mathbb{N} \setminus \{n^2\}$ важи $x_n < nx_1$, од каде што следува дека постои природен број m за кој $x_m < m-1$ (Во спротивно од $m-1 \le x_m < nx_1$ би добиле дека $m < \frac{1}{1-x_1}$, за секој $m \in \mathbb{N}$, што не е можно). За секој $n \in \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ важи $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n + n^2} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, па за $n > m$ се добива

$$\frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n} = (\frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_{m+1}}) + (\frac{1}{x_{m+1}} - \frac{1}{x_{m+2}}) + \ldots + (\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n})$$
$$< (\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}) + (\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}) + \ldots + (\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}) < \frac{1}{m-1},$$

т.е. $0 < x_n < \frac{1}{\frac{1}{x_m} - \frac{1}{m-1}}$, за секој $n \in \mathbb{N}$, па низата е ограничена.

14 Нека $a = \sqrt[2017]{2017}$ и нека (a_n) е низа таква што $a_1 = a$ и $a_{n+1} = a^{a_n}$, за $n \ge 1$. Дали постои природен број n, така што $a_n \ge 2017$?

Решение. Таков природен број не постои. Со помош на математичка индукција ќе докажеме дека за секој природен број n, важи $a_n < 2017$.

За $n = 1$, тврдењето важи, односно важи $a = \sqrt[2017]{2017} < 2017$. Да претпоставиме дека тврдењето важи за некој природен број $n = k$, т.е. дека $a_k < 2017$. За $n = k+1$, имаме $a_{k+1} = a^{a_k} < a^{2017} = 2017$. Кочечно од принципот на математичка индукција следува дека не постои природен број n, за кој $a_n \ge 2017$.

15. Докажи дека постои единствена низа од природни броеви $\{a_n\}$ за која важи

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_4 = 12 \text{ и } a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 \pm 1,\quad n = 2,3,4,\ldots$$

Решение. Прво, користејќи индукција ќе докажеме дека низата $\{a_n\}$ е растечка. За $n = 1$, имаме $a_1 < a_2 < a_3 = 5 < a_4$. Да претпоставиме дека $a_1 < \ldots < a_k$ за некое $k \ge 4$, тогаш

$$a_{k+1}a_{k-1} = a_k{}^2 \pm 1 \ge a_k(a_k - 1) > a_k a_{k-1} \text{ и } a_{k+1} > a_k\ ,$$

и со тоа е комплетиран доказот дека низата $\{a_n\}$ е растечка. За $n > 3$, $a_{n-1} \ge 5$ и најмногу еден од $a_n^2 + 1$ и $a_n^2 - 1$ е делив со a_{n-1}. Затоа, постои најмногу една таква низа.

Нека $b_1 = 1,\ b_2 = 2$ и $b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n$ за $n \ge 1$. Тогаш $b_3 = 5,\ b_4 = 12$. Тврдиме дека $b_{n+1}b_{n-1} = b_n^2 + (-1)^n$, $n = 2,3,4,\ldots$. За $n = 2,3$ тврдењето е точно. Да претпоставиме дека $b_{k+1}b_{k-1} = b_k{}^2 + (-1)^k$ за некој $k \ge 3$. Имаме:

$$b_{k+2}b_k = b_{k+1}^2 + (-1)^{k+1} \quad \Leftrightarrow \quad b_{k+2}b_k + b_{k+1}b_{k-1} = b_{k+1}^2 + b_k^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$(b_{k+2} - b_k)b_k = (b_{k+1} - b_{k-1})b_{k+1} \quad \Leftrightarrow \quad 2b_{k+1}b_k = 2b_k b_{k+1}.$$

Со тоа, докажавме дека

$$b_{n+1}b_{n-1} = b_n{}^2 + (-1)^n,\ n = 2,3,4,\ldots$$

и затоа низата

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n,\ n = 1,2,\ldots$$

е единствената низа од природни броеви која го задоволува дадениот услов.

16. Нека $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се неограничени од горе низи од реални броеви. Докажи дека постојат природни броеви k и l така што $|a_k - a_l| > 1$ и $|b_k - b_l| > 1$.

Решение. Ако низата $\{x_n\}$ е неограничена од горе, тогаш за секој реален број $\alpha > 0$ постојат $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ така што $|x_{n_1} - x_{n_2}| > \alpha$. Во спротивно, т.е. ако постои $\alpha > 0$ така што за секои $n, n_1 \in \mathbb{N}$ важи $|x_{n_1} - x_n| \le \alpha$, избирајќи $n_1 = 1$ добиваме $x_n \le \alpha + 1$, од што следува дека низата $\{x_n\}$ е ограничена од горе.

Избираме $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ такви што $|a_{n_1} - a_{n_2}| > 2$, $|b_{n_1} - b_{n_3}| > 1$ и $|b_{n_2} - b_{n_3}| > 1$. Ако $|a_{n_1} - a_{n_3}| > 1$, тогаш доволно е да се избере $k = n_1$ и $l = n_3$. Ако, пак, $|a_{n_1} - a_{n_3}| \le 1$ изборот е $k = n_2, l = n_3$.

17. Нека $f(n) = (n!)^{\frac{1}{n}}$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека низата $\{\frac{f(n+1)}{f(n)}\}$ е монотона.

Решение. За секој $n \in \mathbb{N}$ имаме

$$\frac{\frac{f(n+2)}{f(n+1)}}{\frac{f(n+1)}{f(n)}} = \frac{((n+2)!)^{\frac{1}{n+2}}(n!)^{\frac{1}{n}}}{((n+1)!)^{\frac{2}{n+1}}} = \Big(\frac{((n+2)!)^{\frac{n+1}{2}}(n!)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2n}}}{((n+1)!)^{n+2}}\Big)^{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}$$

$$= \Big((n!)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{n+1}\big(\frac{n+2}{n+1}\big)^{\frac{n+1}{2}}\Big)^{\frac{2}{(n+1)(n+2)}} < \Big(\frac{n(n+1)}{2n}\cdot\frac{1}{n+1}\big((1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\big)^{\frac{1}{2}}\Big)^{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}$$

$$< \big(\tfrac{1}{2}3^{\frac{1}{2}}\big)^{\frac{2}{(n+1)(n+2)}} < 1^{\frac{2}{(n+1)(n+2)}} = 1.$$

Значи низата е монотона. Притоа е искористено дека $(1+\frac{1}{n})^n < e$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

18. Нека $a_0 < a_1 < a_2 < ...$ е бесконечна низа природни броеви. Докажи, дека постои точно еден природен број n таков што важи

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + ... + a_n}{n} \le a_{n+1}.$$

Решение. Да означиме $s_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$. Условот $a_n < \frac{s_n}{n} \le a_{n+1}$, после множењето со n го добива обликот $na_n - s_n < 0 \le na_{n+1} - s_n$, т.е. $f_n < 0 \le f_{n+1}$, каде $f_n = na_n - s_n$. Од $f_{n+1} - f_n = n(a_{n+1} - a_n) > 0$ следува дека низата $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ строго монотоно расте, при што $f_0 = -a_0 < 0$. Според тоа, бројот 0 припаѓа точно на еден од интервалите $(f_n, f_{n+1}]$, од што следува тврдењето на задачата.

19. Нека $c > 1$ и $0 < a \le c - 1$. Докажи дека низата $\{a_n\}$ определена со

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{c^n}, n = 1, 2, 3, ...$$

е ограничена.

Решение. Од

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_n^2}{c^n} > a_n, n = 1, 2, 3, ...$$

следува дека разгледуваната низа монотоно расте, па затоа $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1,\ n = 1, 2, \dots$.

Прво ќе докажеме дека низата е ограничена од горе со низата $\{ac^{n-1}\}$, т.е. дека $a_n \le ac^{n-1}$, за $n \ge 1$, при што знак за равенство важи само за $n = 1$. Доказот ќе го спроведеме со индукција по n.

Јасно, тврдењето важи за $n = 1$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n = k$, т.е. $a_k \le ac^{k-1}$. Бидејќи $a \le c - 1$ и $c > 1$, добиваме $a < c(c-1)$, па затоа за $n = k+1$ важи

$$a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{c^k} \le ac^{k-1} + a^2c^{k-2} < ac^{k-1} + ac^{k-2}c(c-1) = ac^k ,$$

што значи дека тврдењето важи и за $n = k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

Нека претпоставиме дека низата $\{a_n\}$ не е ограничена, т.е. дека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Од дадената рекурзија следува дека

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{1}{c^n} < \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{c^n} \text{, за } n \ge 1.$$

Ако ги собереме последните неравенства за $k = p, p+1, \dots, n$ добиваме

$$\frac{1}{a_p} < \frac{1}{a_{n+1}} + \left(\frac{1}{c^p} + \frac{1}{c^{p+1}} + \dots + \frac{1}{c^n}\right) .$$

Од последното неравенство, ако земеме предвид дека $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ следува

$$\frac{1}{a_p} \le \frac{1}{c^p} + \frac{1}{c^{p+1}} + \dots = \frac{1}{c^{p-1}(c-1)} ,$$

односно $a_p \ge c^{p-1}(c-1)$. Претходно докажавме дека $a_p < ac^{p-1}$, па затоа $ac^{p-1} > c^{p-1}(c-1)$, т.е. $a > c-1$, што противречи на условот на задачата.

Од добиената противречност следува дека низата $\{a_n\}$ е ограничена.

20. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е определена со

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Провери дали е таа ограничена.

Решение. За секој $n \in \mathbb{N}$ имаме

$$\begin{aligned}
a_n - \tfrac{1}{2} a_n &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} - \frac{1}{2}\left(a_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{5}{2^3} - \frac{3}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{2n-1}{2^n} - \frac{2n-3}{2^n}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2} - 1 - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{3}{2} - \frac{4}{2^{n+1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Од равенството $\frac{1}{2}a_n = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{2^{n+1}}$ добиваме $a_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n} < 3$, односно низата е ограничена од горе. Бидејќи е очиглено дека таа е ограничена од горе, добиваме дека таа е ограничена.

21. Провери дали низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ определена со

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \ldots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n}$$

е монотона и ограничена.

Решение. Од равенството

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{3^{n+1}},$$

јасно е дека низата е строго монотоно растечка.
Од друга страна

$$\frac{1}{3}a_n - a_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \frac{4}{3^5} + \ldots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}} - (\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \ldots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n})$$

$$= -(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^n}) + \frac{n}{3^{n+1}} = -\frac{1}{3}\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{n}{3^{n+1}} = -\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n}) + \frac{n}{3^{n+1}},$$

од каде добиваме

$$-\frac{2}{3}a_n = -\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3^n}) + \frac{n}{3^{n+1}},$$

$$a_n = \frac{4}{3}(1-\frac{1}{3^n}) + \frac{n}{2\cdot 3^n}.$$

Не е тешко, користејќи го принципот на математичка индукција и неравенството $1 < 3^n$, $n \in \mathbb{N}$, да се докаже дека $n < 3^n$. Според тоа,

$$a_n = \frac{4}{3}(1-\frac{1}{3^n}) + \frac{n}{2\cdot 3^n} < \frac{4}{3}(1-0) + \frac{1}{2} = \frac{11}{6}.$$

Ограниченоста од долу е тривијална.

22. Нека x_0, y_0, z_0 се позитивни реални броеви. и нека низите $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ се определени со

$$x_n = y_{n-1} + \frac{1}{z_{n-1}}, \; y_n = z_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}, \; z_n = x_{n-1} + \frac{1}{y_{n-1}}, \qquad (1)$$

за секој $n \in \mathbb{N}$. Дали некоја од низите е ограничена.

Решение. Од (1) и $x_0, y_0, z_0 > 0$ следува дека $x_1, y_1, z_1 > 0$. Сега, со помош на индукција по n лесно се докажува дека $x_n, y_n, z_n > 0$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Нека претпоставиме дека низите $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ се ограничени и да ја разгледаме низата $s_n = x_n + y_n + z_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Јасно, како збир на три ограничени низи и низата $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, т.е. постои $c > 0$ таков што $0 < s_n \le c$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Тоа значи, дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $\frac{1}{s_n} \ge \frac{1}{c} = C > 0$. Но, $0 < x_n, y_n, z_n < s_n$, па затоа $\frac{1}{x_n}, \frac{1}{y_n}, \frac{1}{z_n} > \frac{1}{s_n} = C$ и ако ги искористиме равенствата (1) добиваме дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$s_{n+1} = x_n + y_n + z_n + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_n} + \frac{1}{z_n} \geq s_n + s_n + 3C .$$

Сега, со индукција по n лесно следува дека $s_n \geq s_0 + 3Cn$, што е противречност, бидејќи низата $p_n = 3Cn$ не е ограничена. Конечно, од добиената противречност следува дека барем една од низите $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е ограничена. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е ограничена. Тогаш, од $z_n = x_{n-1} + \frac{1}{y_{n-1}}$, за секој $n \in \mathbb{N}$ следува дека и низата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е ограничена, а од $y_n = z_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$, за секој $n \in \mathbb{N}$ следува дека и низата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е ограничена.

Конечно, од претодно изнесеното следува дека низите $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ се неограничени.

23. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $a_1 = 1$ и $a_n = a_1 a_2 ... a_{n-1} + 1$, за $n \geq 2$. Дали постои реален број M таков што

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} \leq M \text{, за секој } m \in \mathbb{N}.$$

Решение. Од дефиницијата на низата $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 7$, ... Ако $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ се природнои броеви, тогаш $a_n = a_1 a_2 ... a_{n-1} + 1$, како збир на природни броеви е природен број. Според принципот на математичка индукција добиваме дека a_n е природен број за секој $n \in \mathbb{N}$.

За членовите на низата a_1, a_2, a_3, a_4 имаме $a_1 = 1 \geq 1$, $a_2 = 2 \geq 2$, $a_3 = 3 \geq 3$, $a_4 = 7 \geq 4$. Нека претпоставиме дека $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, ..., a_{k-1} \geq k-1$. Бидејќи a_1, $a_2, ..., a_{k-1} \in \mathbb{N}$, од дефинцијата на a_k и од претпоставката $a_p \geq p,\ \ p = 1, 2, ..., k-1$ добиваме

$$a_k = a_1 a_2 a_3 .... a_{k-1} + 1 \geq a_{k-1} + 1 \geq k - 1 + 1 = k ,$$

т.е. $a_k \geq k$. Според принципот на математичка индукција следува дека $a_n \geq n$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Ако равенството $a_n = a_1 a_2 ... a_{n-1} + 1$ го поделиме со $a_1 a_2 ... a_n$, добиваме

$$\frac{1}{a_1 a_2 ... a_{n-1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1 a_2 ... a_n} ,$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1 a_2 ... a_{n-1}} - \frac{1}{a_1 a_2 ... a_n} \tag{1}$$

Значи, за $n = 2, 3, ..., m$ е точно равенството (1). Тогаш

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{m} \left(\frac{1}{a_1 a_2 ... a_{n-1}} - \frac{1}{a_1 a_2 ... a_n}\right) \\
&= \frac{1}{a_1} + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_1 a_2 a_3}\right) + ... + \left(\frac{1}{a_1 a_2 ... a_{m-1}} - \frac{1}{a_1 a_2 ... a_m}\right) \\
&= \frac{2}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2 ... a_m} = 2 - \frac{1}{a_1 a_2 ... a_m} < 2
\end{aligned}$$

Од неравенството $a_n \geq n$, $n \in \mathbb{N}$, односно $\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ и $a_1 a_2 ... a_m \geq a_m$, добиваме

$$0 < \frac{1}{a_1 a_2 ... a_m} \leq \frac{1}{a_m} \leq \frac{1}{m}.$$

Од последното неравенство следува дека $M = 2$ е најмалиот број за кој е исполнето даденото неравенство.

24. Дадена е строго растечка неограничена низа позитивни реални броеви $a_1, a_2, ...$. Докажете дека за доволно големи вредности на k важат неравенствата

а) $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1$, и

б) $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 2001$.

Решение. Да ставиме

$$s_k = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_k}{a_{k+1}}$$

и да докажеме дека за секој доволно голем број k важи $s_k < k - \frac{1}{2}$. Бидејќи низата $a_1, a_2, ...$ неограничено расте, постои K таков што $\frac{a_1}{a_k} < \frac{1}{2}$, за секој $k \geq K$. Тогаш,

$$\begin{aligned} k - s_k &= (1 - \frac{a_1}{a_2}) + (1 - \frac{a_2}{a_3}) + ... + (1 - \frac{a_k}{a_{k+1}}) \\ &> \frac{a_2 - a_1}{a_{k+1}} + \frac{a_3 - a_2}{a_{k+1}} + ... + \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{k+1}} \\ &= 1 - \frac{a_1}{a_{k+1}} > 1 - \frac{a_1}{a_K} > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ако ова тврдење го примениме на низата $a_{m+1}, a_{m+2}, ...$ добиваме дека за секој доволно голем број $k, k > m$ важи

$$s_k - s_m = \frac{a_{m+1}}{a_{m+2}} + \frac{a_{m+2}}{a_{m+3}} + ... + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - m - \frac{1}{2}.$$

Сега да избереме таков k_1, што $s_{k_1} < k_1 - \frac{1}{2}$, потоа $k_2 > k_1$ таков, што $s_{k_2} - s_{k_1} < k_2 - k_1 - \frac{1}{2}$, потоа $k_3 > k_2$ таков, што $s_{k_3} - s_{k_2} < k_3 - k_2 - \frac{1}{2}$ итн. Тогаш, за секој $k > k_n$ важи

$$\begin{aligned} s_k &= (s_k - s_{k_n}) + (s_{k_n} - s_{k_{n-1}}) + ... + (s_{k_2} - s_{k_1}) \\ &= (k - k_n) + (k_n - k_{n-1} - \frac{1}{2}) + ... + (k_2 - k_1 - \frac{1}{2}) + k_1 - \frac{1}{2} = k - \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Од последното неравенство следуваат тврдењата на задачата:

а) за $n = 2$, и б) за $n = 2 \cdot 2001$.

25. Дали постои низа позитивни броеви $a_1, a_2, ...$ кои ги задоволуваат условите

1) $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n^2$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и

2) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq 2008$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Нека претпоставиме дека таква низа постои. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\frac{1}{a_{n+1}}+...+\frac{1}{a_{2n}} \geq \frac{n^2}{a_{n+1}+...+a_{2n}} \geq \frac{n^2}{a_1+...+a_{2n}} \geq \frac{n^2}{4n^2}=\frac{1}{4},$$

за секој $n \in \mathbb{N}$. Меѓутоа, од тука следува $\sum\limits_{i=1}^{2^k} \frac{1}{a_i} \geq \frac{k}{4}$, за $k=1,2,...$, што противречи на условот 2).

26. Докажи, дека за секој реален број $M>2$ постои строго растечка низа природни броеви $a_1, a_2,...$ за која се исполнети условите:

а) $a_i > M^i$ за секој $i \in \mathbb{N}$,

б) целиот број n е различен од нула ако и само ако постои природен број m и $b_1, b_2,..., b_m \in \{-1,1\}$ такви што

$$n = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_mb_m.$$

Решение. За секој реален број $M>2$ индуктивно ќе ја конструираме бараната низа. Избираме a_1 и a_2 такви што $a_2 - a_1 = 1$ и $a_1 > M^2$. Нека претпоставиме дека сме избрале $a_1, a_2,..., a_{2k}$ такви што $a_i > M^i$ за секој $i=1,2,...,2k$ и множеството

$$A_k = \{a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_mb_m \mid b_1, b_2,..., b_m = -1,1,\ 1 \leq m \leq 2k\}$$

не ја содржи нулата. Очигледно множеството A_k е симетрично и $\pm 1 \in A_1$. Нека n е најмалиот природен број кој не припаѓа на A_k. За $N = \sum\limits_{i=1}^{2k} a_i$ избераме природни броеви a_{2k+1} и a_{2k+2} такви што

$$a_{2k+2} - a_{k+1} = N + n,\ a_{2k+1} > M^{2k+2} \text{ и } a_{2k+1} > \sum_{i=1}^{2k} a_i.$$

Ќе докажеме дека A_{k+1} не ја содржи нулата и $n \in A_{k+1}$. Бидејќи

$$n = -N - a_{k+1} + a_{2k+2} = -\sum_{i=1}^{2k} a_i - a_{k+1} + a_{2k+2}$$

добиваме дека $n \in A_{k+1}$. Ако $\sum\limits_{i=1}^{m} a_ib_i = 0$, тогаш $m = 2k+1$ или $m = 2k+2$. Ако $m = 2k+1$, тогаш

$$\left|\sum_{i=1}^{2k+1} a_ib_i\right| \geq a_{2k+1} - \sum_{i=1}^{2k} a_i > 0.$$

Ако $m = 2k+2$ и b_{2k+1} и b_{2k+2} се со исти знаци, тогаш

$$\left|\sum_{i=1}^{2k+2} a_ib_i\right| \geq a_{2k+1} + a_{2k+2} - \sum_{i=1}^{2k} a_i > 0.$$

Ако $m = 2k+2$ и b_{2k+1} и b_{2k+2} се со различни знаци, тогаш

$$\left|\sum_{i=1}^{2k+2} a_ib_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{2k} a_ib_i \pm (a_{2k+1} - a_{2k+2})\right| \geq |a_{2k+1} - a_{2k+2}| - \sum_{i=1}^{2k} a_i = N + n - N = n > 0.$$

Бидејќи $0 \notin A_k$ и секој различен од нула цел број меѓу $-k$ и k припаѓа на A_k, заклучуваме дека конструираната низа ги задоволува условите на задачата.

3. АРИТМЕТИЧКА ПРОГРЕСИЈА

1. Нека p и q се природни броеви и $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е аритметичка прогресија за која a_p е еднаков на q, а a_q е еднаков на p. Пресметај ја вредноста на a_n.

Решение. Разликата на прогресијата ќе ја означиме со d. Од условот на задачата имаме

$$\begin{cases} a_1 + d(p-1) = q \\ a_1 + d(q-1) = p \end{cases}$$

Според тоа,

$$d(p-1) - d(q-1) = q - p$$

$$d(p-q) = q - p,$$

односно $d = -1$. Сега, $a_1 = p + q - 1$, од каде добиваме

$$a_n = p + q + d(n-1) = p + q - (n-1).$$

2. Ако корените на равенката $x^4 + px^2 + q = 0$ образуваат аритметичка прогресија, тогаш $100q = 9p^2$. Докажи!

Решение. Ако корените на дадената равенка образуваат аритметичка прогресија, тогаш тие може да се запишат во обликот:

$$a-d, a, a+d, a+2d.$$

Според Виетовите правила, прво, ќе имаме

$$a - d + a + a + d + a + 2d = 0,$$

од каде што добиваме $d = -2a$. Значи, корените на дадената равенка ќе бидат

$$3a, a, -a, -3a.$$

Ако пак ги примениме Виетовите правила, ќе имаме $9a^4 = q$. Заменувајќи во дадената равенка, добиваме

$$\tfrac{q}{9} + p\sqrt{\tfrac{q}{9}} + q = 0,$$

од каде што добиваме $100q = 9p^2$.

3. Одреди го бројот n за кој што збировите на првите n членови на аритметичките прогресии $18, 22, 26, ...$ и $7, 13, 19, ...$ се меѓу себе еднакви.

Решение. *Прв начин.* За првата прогресија е: $a_1 = 18$, $d = 4$, а за втората: $b_1 = 7$, $d = 6$. Користејќи ја формулата за збирот на првите n членови на една аритметичка прогресија и условот на задачата, наоѓаме:

$$\tfrac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \tfrac{n}{2}[2b_1 + (n-1)d]$$

$$2\cdot 18+4(n-1)=2\cdot 7+6(n-1)\ ,$$

оид каде што $n=12$.

Втор начин. Од условот $S_n = S_n{'}$ следува $S_n - S_n{'} = 0$. Тоа значи дека разликата на n-тите членови треба да биде спротивен број од разликата на првите членови. Бидејќи $a_1 - b_1 = 18-7=11$, следува дека $a_n - b_n = -11$

$$a_1 + d(n-1) - b_1 - d'(n-1) = -11,$$

$$18+4(n-1)-7-6(n-1)=-11\ ,$$

од каде што $n=12$.

4. Множеството на природните броеви е разбиено на конечен број аритметички прогресии. Докажи дека постои аритметичка прогресија во која првиот член е делив со разликата.

Решение. Со $d_1, d_2, ..., d_n$ да ги означиме разликите на аритметичките прогресии со кои е разбиено множеството од природните броеви. Тогаш $d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n$ е природен број, па е член на некоја аритметичка прогресија, т.е. постои некој $i \in \{1,2,3,...,n\}$, така што

$$d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n = a_{i_1} + pd_i\ ,$$

каде што a_{i_1} е првиот член, а d_i е разликата на таа прогресија. Значи d_i е делител на a_{i_1}.

5. Дали може броевите $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ да бидат членови на една иста аритметичка прогресија?

Решение. Да претпоставиме дека $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ се членови на една иста аритметичка прогресија, и притоа, нека $a_k = 1, a_m = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{3}$. Тогаш

$$\sqrt{2}-1=(m-k)d \text{ и } \sqrt{3}-1=(n-k)d\ ,$$

каде што d е разликата на прогресијата. Од ова следува

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{n-k}{m-k}\,,$$

т.е.

$$\sqrt{6} = \frac{3(m-k)^2+2(n-k)^2-(m-n)^2}{2(m-k)(n-k)}\,,$$

што значи дека $\sqrt{6}$ е рационален број, што не е точно.

Следствено, броевите $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ не може да бидат членови во иста аритметичка прогресија.

6. Во една аритметичка прогресија збирот на првите m члена е еднаков на збирот на првите n члена ($m \neq n$). Докажи дека збирот на првите $m+n$ члена не зависи од a_1 (првиот член) и d (разликата на прогресијата).

Решение. Имаме $S_m = ma_1 + \frac{dm(m-1)}{2}$ и $S_n = na_1 + \frac{dn(n-1)}{2}$. Од $S_m = S_n$ добиваме

$$a_1)m-n)+\tfrac{d}{2}(m^2-m-n^2+n)=0\text{, т.е. } a_1(m-n)+\tfrac{d}{2}(m-n)(m+n-1)=0\,.$$

Од последново равенство, заради $m\neq n$, добиваме $a_1+\frac{d}{2}(m+n-1)=0$, т.е.

$$2a_1+d(m+n-1)=0\,.$$

Сега,

$$S_{m+n}=(m+n)a_1+\tfrac{(m+n)(m+n-1)}{2}d=\tfrac{1}{2}(m+n)(2a_1+(m+n-1)d)=0\,,$$

па S_{m+n} не зависи од a_1 и од d.

7. Седум природни броеви формираат аритметичка прогресија со разлика $d=30$. Точно еден член од прогресијата е делив со 7. Докажи!

Решение. Членовите на аритметичката прогресија се

$$a,\quad a+30,\quad a+2\cdot30,\quad a+3\cdot30,\quad a+4\cdot30,\quad a+5\cdot30,\quad a+6\cdot30\,.$$

Разликата на два члена од ова прогресија е еднаква на $30(m-n)$, за некои $m,n\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(7,30)=1$, добиваме $7\,|\,30(m-n)$ ако и само ако $7\,|\,m-n$. Но $7\nmid m-n$ за $m,n\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$, $m\neq n$. Според тоа, не постојат два члена на прогресијата кои имаат ист остаток при делење со 7. Ако r_i е остаток од делењето на $a+30i$ со 7, $i=0,1,2,3,4,5,6$, тогаш

$$\{r_\circ,r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6\}=\{0,1,2,3,4,5,6\}\,.$$

Значи, постои r_i таков што $r_i=0$. Со други зборови некој член на прогресијата е делив со 7.

8. Колку еднакви членови имаат низите

$$5,\,8,\,11,\,...,3n+2,...\text{ и } 3,\,7,\,11,\,...,4n-1,...$$

ако секоја од нив има 100 членови?

Решение. *Прв начин.* Очигледно дадените низи се аритметички прогресии, а таква е и низата $11,23,...$ на нивните заеднички членови. Првин ги наоѓаме стотите членови на дадените прогресии; имаме

$$a_{100}=5+99\cdot3=302\,,$$
$$b_{100}=3+99\cdot4=399\,.$$

Од условот $c_n<a_{100}$, т.е. $11+(n-1)\cdot12<302$ добиваме $n=25$.

Значи, дадените низи имаат 25 заеднички членови и тоа се:

$$11,23,...,299\,.$$

Втор начин. Нека некои членови од првата аритметичка прогресија a_n се еднакви со некои членови од втората аритметичка прогресија b_m, тогаш

$$5+(n-1)\cdot3=3+(m-1)\cdot4\,,$$

од каде што

$$n=m+\tfrac{m}{3}-1\,. \qquad (1)$$

Бидејќи $n\in\mathbb{N}$, ќе следува дека $m=3k$, па од (1) добиваме $n=4k-1$. По услов n прима вредности $1,2,3,...,100$, а оттука следува дека $k\in\{1,2,3,...,25\}$.

Следствено, постојат 25 еднакви членови.

9. Некои членови од аритметичките прогресии $a_n = 4n+13$ и $b_n = 5n+11$, $n \in \mathbb{N}$, се еднакви. Докажи дека збирот на првите p еднакви членови е еднаков на $p(10p+11)$.

Решение. Од условот $a_n = b_m$ добиваме $4n+13 = 5m+11$, т.е. $n = m + \frac{m-2}{4}$. Бидејќи n е природен број следува дека $k = \frac{m-2}{4} \in \mathbb{N}$. Значи, $m = 4k+2$, па општиот член на заедничкиот дел од низите е $x_k = 20k+21$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Притоа $x_k - x_{k-1} = 20$. Значи (x_k) е аритметичка прогресија со прв член 21 и разлика 20. Првите p членови се добиваат за $k = 0,1,2,..., p-1$. За бараниот збир добиваме

$$S_p = \frac{p}{2}(42 + (p-1)\cdot 20) = \frac{p}{2}(20p+22) = p(10p+11) .$$

10. Дадена е аритметичка прогресија. Нека S_n, S_{2n}, S_{3n} се збировите на првите $n, 2n, 3n$ членови на оваа прогресија, соодветно. Докажи, дека $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$

Решение. Имаме

$$a_{2n} = a_1 + (2n-1)d = a_1 + (n-1)d + nd = a_n + nd$$
$$a_{3n} = a_1 + (3n-1)d = a_1 + (n-1)d + 2nd = a_n + 2nd ,$$

па затоа

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) ,$$
$$S_{2n} = \frac{2n}{2}(a_1 + a_{2n}) = n(a_1 + a_n + nd) = n(\frac{2S_n}{n} + nd) = 2S_n + n^2 d ,$$
$$S_{3n} = \frac{3n}{2}(a_1 + a_{3n}) = \frac{3n}{2}(a_1 + a_n + 2nd) = \frac{3n}{2}(\frac{2S_n}{n} + 2nd) = 3S_n + 3n^2 d ,$$

од каде следува

$$3(S_{2n} - S_n) = 3(2S_n + n^2 d - S_n) = 3(S_n + n^2 d) = S_{3n} .$$

11. Пресметај го збирот

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1} n^2 .$$

Решение. Нека $n = 2k+1$. Тогаш

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - ... - (2k)^2 + (2k+1)^2 = 1^2 + (3^2 - 2^2) + (5^2 - 4^2) + ... + ((2k+1)^2 - (2k)^2)$$
$$= 1 + 5 + 9 + ... + (4k+1) = \frac{(4k+2)(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Нека, сега, $n = 2k$. Тогаш

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (2k-1)^2 - (2k)^2 = -((2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + ... + ((2k)^2 - (2k-1)^2))$$
$$= -(3 + 7 + 11 + ... + (4k-1)) = -\frac{(4k+2)k}{2} = -\frac{n(n+1)}{2} .$$

Значи бараниот збир е $(-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$.

12. Броевите $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ образуваат аритметичка прогресија. Докажи дека

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k^2 = \frac{n}{2n-1}(a_1^2 - a_{2n}^2) .$$

Решение. Ќе ја користиме формулата за општиот член на аритметичката прогресија и формулата за збирот S_k на првите k членови на аритметичка прогресија, при што добиваме

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}a_k^2=(a_1^2-a_2^2)+(a_3^2-a_4^2)+...+(a_{2n-1}^2-a_{2n}^2)=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}^2-a_{2k}^2)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}-a_{2k})(a_{2k-1}+a_{2k})=-d\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=-d\sum_{k=1}^{n}(2a_{2k-1}+d)$$

$$=-d(nd+2\sum_{k=1}^{n}\left[a_1+(2k-2)d\right])=-nd\left[\,2a_1+(2n-1)d\,\right]$$

Од друга страна

$$\tfrac{n}{2n-1}(a_1^2-a_{2n}^2)=\tfrac{n}{2n-1}(a_1-a_{2n})(a_1+a_{2n})=-nd\left[\,2a_1+(2n-1)d\,\right].$$

13. Дадена е аритметичка прогресија $a_1,a_2,\dots,a_n$. Докажи дека

$$\tfrac{1}{a_1a_n}+\tfrac{1}{a_2a_{n-1}}+...+\tfrac{1}{a_na_1}=\tfrac{2}{a_1+a_n}(\tfrac{1}{a_1}+\tfrac{1}{a_2}+\tfrac{1}{a_3}+...+\tfrac{1}{a_n}).$$

Решение. За $i=1,2,\dots,n$ точно е равенството

$$\tfrac{1}{a_ia_{n-i}}=\tfrac{a_i+a_{n-i}}{a_ia_{n-i}(a_i+a_{n-i})}=\tfrac{a_i}{a_ia_{n-i}(a_i+a_{n-i})}+\tfrac{a_{n-i}}{a_ia_{n-i}(a_i+a_{n-i})}=\tfrac{1}{a_{n-i}(a_i+a_{n-i})}+\tfrac{1}{a_i(a_i+a_{n-i})}$$

$$=\tfrac{1}{a_i+a_{n-i}}(\tfrac{1}{a_{n-i}}+\tfrac{1}{a_i})$$

Според тоа

$$\tfrac{1}{a_1a_n}+\tfrac{1}{a_2a_{n-1}}+...+\tfrac{1}{a_na_1}=\tfrac{1}{a_1+a_n}(\tfrac{1}{a_1}+\tfrac{1}{a_n})+\tfrac{1}{a_2+a_{n-1}}(\tfrac{1}{a_2}+\tfrac{1}{a_{n-1}})+...+\tfrac{1}{a_n+a_1}(\tfrac{1}{a_n}+\tfrac{1}{a_1})=(*)$$

Бидејќи $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=...=a_n+a_1$, добиваме

$$(*)=\tfrac{1}{a_1+a_n}(\tfrac{1}{a_1}+\tfrac{1}{a_n})+\tfrac{1}{a_1+a_n}(\tfrac{1}{a_2}+\tfrac{1}{a_{n-1}})+...+\tfrac{1}{a_1+a_n}(\tfrac{1}{a_n}+\tfrac{1}{a_1})$$

$$=\tfrac{1}{a_1+a_n}(\tfrac{1}{a_1}+\tfrac{1}{a_n}+\tfrac{1}{a_2}+\tfrac{1}{a_{n-1}}+...+\tfrac{1}{a_n}+\tfrac{1}{a_1})=\tfrac{2}{a_1+a_n}(\tfrac{1}{a_1}+\tfrac{1}{a_2}+\tfrac{1}{a_3}+...+\tfrac{1}{a_1})$$

14. Нека $a_0,a_1,a_2,...,a_{2n+1}$ е растечка аритметичка прогресија со позитивни членови. Докажи дека

$$\tfrac{n}{a_1a_{2n+1}}<\tfrac{1}{a_1a_2}+\tfrac{1}{a_3a_4}+...+\tfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}<\tfrac{n}{a_0a_{2n}}.$$

Решение. Бидејќи прогресијата е растечка, точни се неравенствата

$$\tfrac{1}{a_0a_1}<\tfrac{1}{a_1a_2}<\tfrac{1}{a_2a_3}<....<\tfrac{1}{a_{2n-2}a_{2n-1}}<\tfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}.$$

Да ја означиме со d диференцијата на прогресијата и нека

$$S=\tfrac{1}{a_1a_2}+\tfrac{1}{a_3a_4}+...+\tfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}.$$

Тогаш за удвоената сума $2S$, имајќи ги предвид горните неравенства имаме:

$$2S=\tfrac{1}{a_1a_2}+\tfrac{1}{a_1a_2}+\tfrac{1}{a_3a_4}+\tfrac{1}{a_3a_4}+...+\tfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}+\tfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}$$

$$<\tfrac{1}{a_0a_1}+\tfrac{1}{a_1a_2}+\tfrac{1}{a_2a_3}+\tfrac{1}{a_3a_4}+...+\tfrac{1}{a_{2n-2}a_{2n-1}}+\tfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}$$

$$=\tfrac{1}{d}(\tfrac{1}{a_0}-\tfrac{1}{a_1}+\tfrac{1}{a_1}-\tfrac{1}{a_2}+\tfrac{1}{a_2}-\tfrac{1}{a_3}+...+\tfrac{1}{a_{2n-2}}-\tfrac{1}{a_{2n-1}}+\tfrac{1}{a_{2n-1}}-\tfrac{1}{a_{2n}})$$

$$=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_{2n}})=\frac{1}{d}\frac{a_0+2nd-a_0}{a_0a_{2n}}=\frac{2n}{a_0a_{2n}}$$

Значи, $S<\frac{n}{a_0a_{2n}}$. На сличен начин добиваме

$$2S=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_3a_4}+\frac{1}{a_3a_4}+...+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}$$

$$>\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+...+\frac{1}{a_{2n-2}a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}+\frac{1}{a_{2n}a_{2n+1}}$$

$$=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+...+\frac{1}{a_{2n-1}}-\frac{1}{a_{2n}}+\frac{1}{a_{2n}}-\frac{1}{a_{2n+1}})$$

$$=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2n+1}})=\frac{1}{d}\frac{a_1+2nd-a_1}{a_1a_{2n+1}}=\frac{2n}{a_1a_{2n+1}}$$

Значи, $S>\frac{2n}{a_1a_{2n+1}}$. Конечно,

$$\frac{2n}{a_1a_{2n+1}}<S<\frac{2n}{a_0a_{2n}}$$

15. Нека $a_0,a_1,\dots,a_n,a_{n+1}$ е аритметичка прогресија со разлика d. Докажи дека важи $a_1^3+a_2^3+\dots+a_n^3=\frac{(a_na_{n+1})^2-(a_1a_0)^2}{4d}$.

Решение. Ќе го докажеме бараното тврдење со математичка индукција. Бидејќи, $\frac{(a_1a_2)^2-(a_1a_0)^2}{4d}=a_1^2\frac{(a_2-a_0)(a_2+a_0)}{4d}=a_1^2\frac{2d\cdot 2a_1}{4d}=a_1^3$, следи дека тврдењето е точно за $n=1$. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за n. Тогаш,

$$a_1^3+\dots+a_{n+1}^3=\frac{(a_na_{n+1})^2-(a_1a_0)^2}{4d}+a_{n+1}^3=\frac{(a_na_{n+1})^2-(a_1a_0)^2+4da_{n+1}^3}{4d}$$

$$=\frac{a_{n+1}^2(a_n^2+4d(a_n+d))-(a_1a_0)^2}{4d}=\frac{a_{n+1}^2(a_n+2d)^2-(a_1a_0)^2}{4d}$$

$$=\frac{(a_{n+1}a_{n+2})^2-(a_1a_0)^2}{4d}$$

што е бараното тврдење за $n+1$.

16. Ератостен го прашал Питагора: дали од низата $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},...,\frac{1}{n},...$ можеш да избереш четири члена кои формираат аритметичка прогресија?

Питагора му одговорил: за секој природен број k можам да изберам k членови од дадената низа кои формираат аритметичка прогресија со должина k.

Дали Питагора бил во право?

Решение. Питагора бил во право. Тој за секој природен број k може да формира низа со должина k од членовите на дадената низа која е аритметичка прогресија.

На пример, $\frac{1}{k!},\frac{2}{k!},...,\frac{k-1}{k!},\frac{k}{k!}$. Навистина, за било кој $j=1,2,3,....,k-1$ имаме $\frac{j+1}{k!}-\frac{j}{k!}=\frac{1}{k!}$,односно избраната низа е конечна аритметичка прогресија со разлика $d=\frac{1}{k!}$.

17. Дали постои неконстантна низа природни броеви $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, таква што за секој природен број $k \geq 2$ е исполнето равенството $a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1}+a_{k+1}}$?

Решение. Нека претпоставиме дека таква низа природни броеви постои. Тогаш за низата од реципрочни вредности $b_n = \frac{1}{a_n}, n \in \mathbb{N}$, имаме

$$b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1}+a_{k+1}}} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}) = \frac{b_{n-1}+b_{n+1}}{2}.$$

Според тоа $b_2, b_3, ..., b_n, ...$ аритметичка прогресија. Бидејќи $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е неконстантна низа, добиваме дека и $(b_n)_{n=2}^{\infty}$ е неконстантна аритметичка низа од позитивни реални броеви. Според тоа, постои $d \neq 0$ така што

$$b_n = b_2 + (n-2)d, \; n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

За n доволно големо, имаме $b_n > 1$ или $b_n < 0$ (во зависност од тоа какво е d односно дали е позитивно или дали е негативно).

Од друга страна, бидејќи $a_n \in \mathbb{N}$, добиваме дека

$$0 \leq b_n = \frac{1}{a_n} \leq 1, \; n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Од добиената контрадикција, заклучуваме дека таква низа природни броеви не постои.

18. Најди $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, ако $a_1 = 1$, $a_{n+1}a_n = 4(a_{n+1} - 1)$, за $n \geq 1$.

Решение. Бидејќи $a_{n+1}a_n = 4(a_{n+1}-1)$, $a_{n+1} = \frac{4}{4-a_n}$. Ако на двете страни одземеме 2, имаме $a_{n+1} - 2 = \frac{4}{4-a_n} - 2 = \frac{2(a_n-2)}{4-a_n}$. Оттука, $\frac{1}{a_{n+1}-2} = \frac{4-a_n}{2(a_n-2)} = \frac{1}{a_n-2} - \frac{1}{2}$. Па, низата $\{\frac{1}{a_n-2}\}$ е аритметичка прогресија со почетен член $\frac{1}{a_n-2} = -1$ и разлика $d = -\frac{1}{2}$. Значи, $\frac{1}{a_n-2} = -1 + (n-1)(-\frac{1}{2}) = -\frac{n+1}{2}$, од каде $a_n = \frac{2n}{n+1}$. Конечно,

$$a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = (2 \cdot \tfrac{1}{2})(2 \cdot \tfrac{2}{3})(2 \cdot \tfrac{3}{4}) \ldots (2 \cdot \tfrac{n}{n+1}) = \frac{2^n}{n+1}.$$

19. Нека a, b, c се позитивни реални броеви така што a^2, b^2, c^2 се последователни членови на аритметичка прогресија. Докажи дека и броевите $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$ се последователни членови на аритметичка прогресија.

Решение. Од тоа што a^2, b^2, c^2 се членови на аритметичка прогресија следува дека

$$2b^2 = a^2 + c^2$$

$$2b^2 + 2ac = (a+c)^2$$

$$2(b^2 + ac) = (a+c)^2$$

Сега добиваме

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}=\frac{a+2b+c}{ab+b^2+ac+bc}=\frac{a+2b+c}{ab+bc+\frac{(a+c)^2}{2}}=\frac{2(a+2b+c)}{2b(a+c)+(a+c)^2}=\frac{2(a+2b+c)}{(a+c)(a+2b+c)}=\frac{2}{a+c},$$

што значи дека броевите $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$ се последователни членови на аритметичка прогресија

20. Броевите a, b и c во овој редослед формираат аритметичка прогресија. Докажи дека броевите a^2+ab+b^2, a^2+ac+c^2 и b^2+bc+c^2 во овој редослед исто така формираат аритметичка прогресија.

Решение. Бидејќи зададените броеви a, b и c формираат аритметичка прогресија, исполнето е равенството $a+c=2b$, односно $a+c-b=b$.

Ако последното равенство го помножиме со $a+b+c$ ќе добиеме

$$(a+c-b)(a+b+c)=b(a+b+c),$$

$$(a+c)^2-b^2=ab+b^2+bc,$$

$$a^2+2ac+c^2-b^2=ab+b^2+bc$$

$$(a^2+ab+b^2)+(b^2+bc+c^2)=2(a^2+ac+c^2).$$

Според тоа a^2+ab+b^2, a^2+ac+c^2 и b^2+bc+c^2 исто така формираат аритметичка прогресија.

21. Аритметичката прогресија се состои од цели броеви. Збирот на првите n членови на прогресијата е степен на бројот 2. Докажи дека и n е степен на бројот 2.

Решение. Нека првиот член на аритметичката прогресија е a, n-тиот член е b а разликата е d. Нека S е збирот на првите n членови на прогресијата. Тогаш

$$\begin{aligned} S &= a+(a+d)+(a+2d)+\dots+(a+(n-1)d) \\ &= na+d(1+2+\dots+n-1)=na+\tfrac{n(n-1)}{2}d= \\ &= \tfrac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]=\tfrac{n}{2}[a+a+(n-1)d]=\tfrac{n}{2}(a+b). \end{aligned}$$

Последното равенство можеме да го запишеме во облик

$$2S=(a+b)n. \qquad (1)$$

Бидејќи S е степен на бројот 2, постои $k\in\mathbb{N}$ така што $S=2^k$. Од равенството (1) добиваме $2^{k+1}=(a+b)n$. Значи, каноничната репрезентација на $(a+b)n$ е еднаква на 2^{k+1}, па затоа $a+b$ и n немаат делители различни од 2. Според тоа, постојат броеви p и q такви што $a+b=2^p$, $n=2^q$, при што $p+q=k+1$.

22. Да се определи множеството од сите аритметички прогресии такви што $S_n=n^2$, $n\in\mathbb{N}$ (S_n е збирот на првите n членови на аритметичката прогресија).

Решение. Бидејќи равенството $S_n=n^2$ е исполнето за секој $n\in\mathbb{N}$, имаме $S_{n-1}=(n-1)^2$. Од друга страна

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1.$$

Според тоа, постои само една таква аритметичка прогресија и тоа низа од природни броеви определена со $a_n = 2n-1$, $n \in \mathbb{N}$.

23. Аритметичка прогресија со 10 члена има разлика $d > 0$. Ако апсолутната вредност на секој член nа прогресијата е прост број, определи ја најмалата можна вредност на d.

Решение. Ако d е непарен, тогаш има по еден парен член во секои два последователни членови. Бидејќи има најмалку пет парни членови во низата, па барем еден од нив не е еднаков на -2 и 2. Имајќи предвид дека апсолутните вредности на елементите од низата се прости броеви, тогаш мора d да биде парен. Слична дискусија ни дава дека мора d да биде делив со 3.

Ќе докажеме дека мора d да биде делив со 5. Ако d не е делив со 5, тогаш меѓу пет последователни членови, мора да има делив со 5, односно мора во целата низа да има два броја кои се деливи со 5. Ако апсолутната вредност на секој член од низата е прост број, тогаш тие два броја кои се деливи со 5 мора да бидат 5 и -5. Но, ова не е можно, бидејќи четирите члена кои треба да бидат меѓу нив се $-3,-1,1,3$, што е во контрадикција со условот дека апсолутните вредности на членовите од низата треба да бидат прости броеви. Значи, најмалата можна вредност за d е 30.

Навистина, можно е $d = 30$. Пример за таква аритметичка низа е

$$-113,-83,-53,-23,7,37,67,97,127,157.$$

24. Дали постои реален број y така што броевите $\sqrt{y^2+2y+1}$, $\frac{y^2+3y-1}{3}$, $y-1$ во дадениот редослед се три последователни членови на аритметичка прогресија.

Решение. Ако p,q,r се три последователни членови на аритметичка прогресија, тогаш збирот на првиот и третиот по ред член е двојна вредност од вториот член, т. е. $p+r=2q$. Овој услов во нашиот случај, го добива обликот

$$\sqrt{y^2+2y+1}+y-1 = 2\frac{y^2+3y-1}{3} \quad \text{или} \quad 3(\sqrt{(y+1)^2}+y-1) = 2(y^2+3y-1).$$

Бидејќи $\sqrt{(y+1)^2} = |y+1|$, добиваме

$$3(|y+1|+y-1) = 2(y^2+3y-1).$$

Ако последната равенка ја средиме, добиваме

$$2y^2+3y-3|y+1|+1=0. \qquad (1)$$

Равенката (1) е еквивалентна со вкупноста на системите

$$\begin{cases} y+1 \ge 0, \\ 2y^2+3y-3(y+1)+1=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y+1<0, \\ 2y^2+3y+3(y+1)+1=0, \end{cases}$$

од каде по средувањето истите може да се запишат во облик

$$\begin{cases} y \ge -1, \\ y^2-1=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y<-1, \\ y^2+3y+2=0, \end{cases}$$

Решение на првиот систем е $y=1$ или $y=-1$, а решение на вториот систем е $y=-2$.

Според тоа бараните броеви y за кои што $\sqrt{y^2+2y+1}$, $\frac{y^2+3y-1}{3}$, $y-1$ се последователни членови на аритметичка прогресија се $y\in\{-2,-1,1\}$.

25. Аритметичката прогресија се состои од цели броеви. Збирот на првите n членови на прогресијата е степен на бројот 2. Докажи дека и n е степен на бројот 2.

Решение. Нека првиот член на аритметичката прогресија е a, n-тиот член е b а разликата е d. Нека S е збирот на првите n членови на прогресијата. Тогаш

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+...+(a+(n-1)d)=na+d(1+2+...+n-1)$$

$$=na+\tfrac{(n-1)n}{2}d=\tfrac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]=\tfrac{n}{2}[a+a+(n-1)d]=\tfrac{n}{2}(a+b)$$

Последното равенство можеме да го запишеме во облик

$$2S=(a+b)n\,. \tag{1}$$

Бидејќи S е степен на бројот 2, постои $k\in\mathbb{N}$ така што $S=2^k$. Од равенството (1) добиваме

$$2^{k+1}=(a+b)n\,.$$

Значи, каноничната репрезентација на $(a+b)n$ е еднаква на 2^{k+1}, па затоа $a+b$ и n немаат делители различни од 2. Според тоа, постојат броеви p и q такви што

$$a+b=2^p,\ n=2^q,$$

при што $p+q=k+1$.

26. Реши ја равенката $x^3+(k-1)x^2-kx=0$, ако нејзините решенија се последователни членови на една аритметичка прогресија.

Решение. Решенијата на равенката се $0,1,-k$. Од тоа што тие се последователни членови на една аритметичка прогресија следува дека $k\neq 0,-1$. Значи равенката има три различни реални решенија кои ги исполнуваат условите на задачата.

Ако $k\in(-\infty,-1)$, тогаш $-k>1$, па редоследот на корените е $0,1,-k$. Разликата на аритметичката прогресија ќе биде $1-0=1$, па $-k=2$, т.е. $k=-2$.

Ако $k\in(-1,0)$, тогаш $-k\in(0,1)$, па редоследот на корените е $0,-k,1$. Од $-k-0=1-(-k)$ добиваме $k=-\frac{1}{2}$, т.е. $-k=\frac{1}{2}$.

Ако $k\in(0,\infty)$, тогаш $-k\in(-\infty,0)$, па редоследот е $-k,0,1$. Во овој случај прогресијата има разлика 1, па $-k=-1$.

27. Бесконечна аритметичка прогресија содржи точен куб на природен број. Докажи дека таа содржи точен куб кој не е полн квадрат на природен број.

Решение. На почеток ќе покажеме една помошна лема.

Лема. Ако n е природен број таков што n^3 е полн квадрат, тогаш и n е полн квадрат.

Доказ. Нека p е прост делител на бројот n и нека неговиот степен во каноничната факторизација е t. Тогаш степенот на p во разложувањето на n^3 е $3t$. Но од условите на лемата $3t$ е парен број, па затоа t е парен број.

Од произволноста на простиот делител p, добиваме дека n е точен квадрат.

Нека во прогресијата со разлика $d>0$ се содржи куб на природен број m. Ако m^3 не е точен квадрат, тогаш бараниот челн на прогресијата е најден.

Ако пак m^3 е и точен квадрат, тогаш според лемата и m е точен квадрат , т.е. $m=k^2$. Но заедно со m^3 член на прогресијата е и $A=(m+md^2)^3$, бидејќи $A=m^3+ld$, за некој природен број l. Бројот A не е полн квадрат. Навистина, нека претпоставиме спротивно, т.е. дека A е полн квадрат. Тогаш, повторно од лемата добиваме дека $m+md^2$ е полн квадрат. Од друга страна

$$m+md^2=k^2+k^2d^2=k^2(1+d^2)$$

треба да е полн квадрат. Според тоа $1+d^2$ е полн квадрат, што не е можно бидејќи

$$d^2<1+d^2<(d+1)^2.$$

Значи A е член на прогресијата кој е полн куб, а не е полн квадрат.

28. Најди го збирот на сите нескратливи дропки со именител 7 кои се наоѓаат меѓу природните броеви a и b, $a<b$.

Решение. Да ги запишеме a и b во обликот $\frac{7a}{7}$ и $\frac{7b}{7}$. Сите дропки со именител еднаков на 7, вклучувајќи ги и a и b може да се запишат како

$$\frac{7a}{7},\frac{7a+1}{7},\frac{7a+2}{7},....,\frac{7b-1}{7},\frac{7b}{7}. \qquad (1)$$

Од нив, само

$$\frac{7a}{7},\frac{7a+7}{7},\frac{7a+14}{7},....,\frac{7b-7}{7},\frac{7b}{7} \qquad (2)$$

се скратливи. Збирот на нескратливите дропки ќе ја пресметаме така што од збирот на сите дропки од низата (1) ќе го одземеме збирот на броевите од низата (2).

Збирот на броевите од низата (1) е збир на броеви од аритметичка прогресија со прв член $\frac{7a}{7}$ и разлика $\frac{1}{7}$. Вкупниот број на собироци ќе го определиме од равенството

$$b=a+(n-1)\tfrac{1}{7},$$
$$7b=7a+n-1,$$
$$n=7b-7a+1.$$

Значи, збирот на броевите од аритметичката прогресија (1) е :

$$\tfrac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\tfrac{7b-7a+1}{2}[2a+(7b-7a+1-1)\tfrac{1}{7}]=\tfrac{7b-7a+1}{2}(a+b).$$

Броевите од низата (2) се исто така членови на аритметичка прогресија во која разликата е еднаква на 1 и последен член b, па бројот на нејзини членови е

$$b = a + (k-1)\cdot 1\,,$$
$$k = b - a + 1\,.$$

Значи, нивниот збир е еднаков на

$$\tfrac{b-a+1}{2}(2a + (b-a+1-1)) = \tfrac{b-a+1}{2}(a+b)\,.$$

Конечно, бараната сума е:

$$S = \tfrac{(b+a)(7b-7a+1)}{2} - \tfrac{(b+a)(b-a+1)}{2} = \tfrac{b+a}{2}(7b-7a+1-b+a-1)$$
$$= \tfrac{b+a}{2}(6a-6b) = 3(a^2-b^2)\,.$$

29. Нека $k,n\in\mathbb{N}$. Најди ги сите аритметички прогресии такви што односот на збирот на првите n членови и збирот на следните kn членови не зависи од n.

Решение. Нека

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+kn}} = c \qquad (1)$$

и нека d е разликата на прогресијата.

Ако $d=0$, тогаш сите членови на прогресијата се еднакви, па имаме

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+kn}} = \frac{na_1}{kna_{n+1}} = \frac{1}{k}\,.$$

т.е. бараниот однос не зависи од n за секој $k\in\mathbb{N}$.

Затоа нека $d\neq 0$. Применувајќи ја формулата за сума на n и kn членови на аритметичката прогресија, од (1) добиваме: $\tfrac{n}{2}(a_1+a_n) = k\tfrac{n}{2}(a_{n+1}+a_{n+kn})c$, т.е.

$$a_1 + a_1 + (n-1)d = ck(a_1 + nd + a_1 + (n+kn-1)d)\,.$$

Оттука

$$2a_1 - 2a_1kc - d + ckd + n(d - cdk^2 - 2cdk) = 0\,.$$

Последново равенство е еквивалентно со (1) и од условот на задачата следува дека е исполнето за секој $n\in\mathbb{N}$. Тоа е можно ако и само ако

$$2a_1 - 2a_1kc - d + ckd = 0 \text{ и } d - cdk^2 - 2cdk = 0 \qquad (2)$$

Првото равенство од (2) е еквивалентно со $(2a_1-d)(\;)(1-ck)=0$. Делејќи го второто равенство со $d\neq 0$ добиваме дека $c=\frac{1}{k(k+2)}$, па заменувајќи во $\left(2a_1-d\right)\left(1-ck\right)=0$ имаме $1-ck=1-k\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{2k}{k(k+2)}\neq 0$, па $d=2a_1$.

Според тоа (1) е исполнето само за прогресијата $a,3a,5a,...$.

Обратно, за прогресијата $a,3a,5a,...$ имаме

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+kn}} = \frac{\frac{n}{2}(2a+(n-1)2a)}{k\frac{n}{2}(a+2an+a+(n+kn-1)2a)} = \frac{2a+2an-2a}{k(2a+2an+2an+2akn-2a)}$$
$$= \frac{2an}{2ank(k+2)} = \frac{1}{k(k+2)}$$

од што следува дека бараниот однос не зависи од n.

Значи, бараните прогресии се $a,a,a,...$ и $a,3a,5a,...$.

30. Природните делители на бројот n, освен n образуваат аритметичка прогресија која има барем три члена. Определи ги сите такви природни броеви.

Решение. Нека претпоставуваме дека n е број кој ги исполнува условите од задачата и нека p е најмалиот прост делител на n поголем од 1. Јасно е дека $a_1 = 1$ и $a_2 = p$. Разликата на аритметичката прогресија е $d = a_2 - a_1 = p-1$.

Ќедпокажеме дека n не е степен на бројот p. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека n е степен на простиот број p. Тогаш

$$a_3 = p^2 \text{ и } a_3 = a_2 + d = p + (p-1) = 2p-1,$$

од каде добиваме $p^2 = 2p-1$. Но тогаш $p=1$, што е во спротивност со претпоставката, односно со изборот на p. Значи, n е сложен број и има прост делител q таков што $p<q$, и n помеѓу p и q нема други прости делители, како ни степени на прости делители на n. Со други зборови, првите три члена на прогресијата се $a_1 = 1, a_2 = p$ и $a_3 = q = 2p-1$ и $q = 2p-1$ е прост број.

Тогаш најголеми членови на прогресијата се $a_{k-1} = \frac{n}{2p-1}$ и $a_k = \frac{n}{p}$, при што $\frac{n}{p} - \frac{n}{2p-1} = p-1$. Од последното равенство добиваме $n = p(2p-1)$, каде p и $2p-1$ се прости броеви.

Не е тешко да се провери дека било кој природен број n од тој облик ги исполнува условите од задачата.

31. Најди ги сите природни броеви n така што некои три последователни биномни коефициенти во развојот $(a+b)^n$ формираат аритметичка прогресија.

Решение. Прво да забележиме дека $n \geq 2$ за да има барем три члена во развојот. Нека за $n,k \in \mathbb{N}$, $k<n$ важи $2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}$, односно

$$2\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}.$$

Оттука

$$\frac{2}{(n-k-1)!(n-k)(k-1)!k} = \frac{1}{(n-k-1)!(n-k)(n-k+1)(k-1)!} + \frac{1}{(n-k-1)!(k-1)!k(k+1)},$$

па со средување на изразите се добива еквивалентното равенство $(n-2k)^2 = n+2$. Според тоа n е од облик m^2-2 за некој $m \in \mathbb{N}$. Заради $n \geq 2$ добиваме $m \geq 2$. Ако $m=2$ следува $n=2$ и $k=1$. Но тогаш $2\binom{2}{1} \neq \binom{2}{0} + \binom{2}{2}$, па овој случај го отфрламе. Значи ако некои три члена од развојот формираат аритметичка прогресија тогаш n е од обликот m^2-2, каде $m = 3,4,...$.

Сега да докажеме дека ако $n = m^2-2$, за $m>2$, тогаш постои $k, k<n$ така што важи $2\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}$. Бројот k ќе го избереме од системот

$$\begin{cases} n = m^2-2 \\ (n-2k)^2 = n+2 \end{cases}.$$

Равенството $n=m^2-2$ го заменуваме во $(n-2k)^2=n+2$ и оттука добиваме $(m^2-2-2k)^2=m^2$, односно $m^2-2-2k=m$ или $m^2-2-2k=-m$. Имаме две можности $k_1=\frac{m(m-1)}{2}-1$ и $k_2=\frac{m(m+1)}{2}-1$. Доволно е да го докажеме тврдењето само за едната, на пример за k_1. Имаме $k_1=\frac{m^2-m-2}{2}<\frac{m^2-2}{2}<m^2-2<n$. Значи за k_1 важи $k_1<n$ и $(n-2k)^2=n+2$. Последново равенство е еквивалентно со равенството

$$2\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k+1}.$$

Конечно, сите барани броеви се од обликот m^2-2, $m=3,4,\dots$.

32. Нека $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ е строго растечка функција таква што за секои $x,y\in(0,+\infty)$ и за секој $\lambda\in(0,1)$ важи

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y). \qquad (1)$$

Докажи дека низата $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ не содржи бесконечна аритметичка прогресија.

Решение. Бидејќи f е строго растечка функција, добиваме дека низата $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ е строго растечка, па затоа секоја нејзина подниза е строго растечка. Да претпоставиме дека низата $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ содржи подниза која е бесконечна аритметичка прогресија, т.е. дека постои низа $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, таква што за секој $k\in\mathbb{N}$ важи $a_k=f(n_k)$. Јасно, разликата d на низата $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ е позитивнеа, од што следува $0<d=a_{k+1}-a_k=f(n_{k+1})-f(n_k)$, $k\in\mathbb{N}$, т.е.

$$n_k<n_{k+1},\ k\in\mathbb{N}. \qquad (2)$$

За членовите на низата $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ важи $a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$, $k>1$. Ако се искористи неравенството (1) при $\lambda=\frac{1}{2}$, за $k>1$ добиваме

$$f(n_k)=\frac{f(n_{k-1})+f(n_{k+1})}{2}>f\left(\frac{n_{k-1}+n_{k+1}}{2}\right).$$

Бидејќи f е строго растечка функција, од последното неравенство следува $n_k>\frac{n_{k-1}+n_{k+1}}{2}$, односно,

$$n_k-n_{k-1}>n_{k+1}-n_k,\ k>1. \qquad (3)$$

Од неравенството (3) добиваме $n_2-n_1>n_3-n_2>\dots>n_i-n_{i-1}>n_{i+1}-n_i>\dots$, што не е можно, бидејќи според (2) броевите $n_{k+1}-n_k$, $k\in\mathbb{N}$ се природни, а не постојат бесконечно многу природни броеви помали од бројот n_2-n_1.

33. Определи ги сите природни броеви n за кои постојат природни броеви $a_1,a_2,\dots,a_n$ такви што низата $a_1a_2,a_2a_3,\dots,a_na_1$ е неконстантна аритметичка прогресија.

Решение. Ако $n=2k$, такви броеви не постојат, бидејќи (без ограничување на општоста), тогаш

$$a_1a_2 < a_2a_3 < ... < a_{2k-1}a_{2k} < a_{2k}a_1$$

доведува до

$$a_1 < a_3 < ... < a_{2k-1} < a_1,$$

што е противречност.

Нека $n = 2k+1$. Ќе конструираме низа со саканите својства. Нека $b_1 = x$, $b_2, b_3, ..., b_{2k+1}$ се такви што $b_1b_2 = 1, b_2b_3 = 2, ..., b_{2k+1}b_1 = 2k+1$. Тогаш $b_2 = \frac{1}{x}$, $b_3 = 2x, b_4 = \frac{3}{2x}$ итн. и воопшто $b_{2i} = \frac{(2i-1)!!}{(2i-2)!!x}$ и $b_{2i+1} = \frac{(2i)!!x}{(2i-1)!!}$. Оттука и од равенството $b_{2k+1}b_1 = 2k+1$ наоѓаме $x = \sqrt{\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}}$.

Ставаме $a_i = b_i\sqrt{(2k+1)!}$. Сега, лесно се проверува дека $a_1a_2, a_2a_3, ..., a_na_1$ е неконстантна аритметичка прогресија. Освен тоа,

$$a_{2i+1} = \frac{(2i)!!x\sqrt{(2k+1)!}}{(2i-1)!!} = (2i)!!(2i+1)(2i+3)...(2k+1),$$

$$a_{2i} = \frac{(2i-1)!!\sqrt{(2k+1)!}}{(2i-1)!!x} = (2i-1)!!(2i)(2i+2)...(2k),$$

т.е. $a_1, a_2, ..., a_n$ се природни броеви

34. Четири броја a_1, a_2, a_3, a_4 формираат аритметичка прогресија. Производот од првиот и четвртиот член е еднаков на поголемиот корен на равенката

$$x^{1+\log x} = 0,001^{-\frac{2}{3}},$$

а збирот на квадратите на вториот и третиот член е петпати поголем од редниот број на членот во развојот на

$$(\frac{1}{\sqrt[4]{y}} + \sqrt[6]{y})^{20}$$

што не зависи од y. Да се најдат тие броеви.

Решение. Да ја решиме, прво, дадената равенка. Неа можеме да ја напишеме во обликот

$$x^{1+\log x} = 10^2,$$

Од каде што добиваме

$$(1+\log x)\log x = 2,$$

т.е. $\log x = 1$ и $\log x = -2$ или $x = 10$ и $x = 10^{-2}$.

Да го најдеме, сега, членот на развојот на дадениот бином што не зависи од y. Притоа $(k+1)$-от член е:

$$\binom{20}{k} y^{\frac{k-20}{4}+\frac{k}{6}},$$

а ако тој не зависи од y, мора да биде $\frac{k-20}{4} + \frac{k}{6} = 0$, т.е. $k = 12$. Значи, 13-от член не зависи од y.

Од условот на задачата имаме

$$a_1a_4 = 10, \qquad a_2^2 + a_3^2 = 5 \cdot 13,$$

т.е.

$$a_1(a_1+3d)=10, \qquad 2a_1^2+5d^2+6a_1d=65,$$

од каде што добиваме $d=\pm 3$, $a_1=\mp 10$. Значи, бараните броеви се $-10,-7,-4,-1$ или $10,7,4,1$.

35. Одреди го x за броевите $\lg 2$, $\lg(3^x+1)$ и $\lg(3^x+5)$ да бидат три последователни членови на аритметичка прогресија.

Решение. Ако $\lg 2$, $\lg(3^x+1)$ и $\lg(3^x+5)$ се три последователни членови на аритметичка прогресија, тогаш

$$\lg(3^x+1)-\lg 2=d,$$

$$\lg(3^x+5)-\lg(3^x+1)=d,$$

од каде следува

$$\lg(3^x+1)-\lg 2=\lg(3^x+5)-\lg(3^x+1)$$

$$\lg\tfrac{3^x+1}{2}=\lg\tfrac{3^x+5}{3^x+1}$$

$$(3^x+1)^2=2(3^x+5)$$

$$3^{2x}+2\cdot 3^x+1=2\cdot 3^x+10,$$

$$3^{2x}=9,$$

Од последната равенка добиваме $x=1$.

36. Нека a и b се позитивни реални броеви такви што броевите $\log_b a$, $\log_{2b}(2a)$ и $\log_{4b}(4a)$, во овој редослед се последователни членови на аритметичка прогресија. Докажи, дека $a=b$.

Решение. Нека $x=\log_b a$, $y=\log_{2b}(2a)$ и $z=\log_{4b}(4a)$. Тогаш

$$b^x=a,\ (2b)^y=2a \text{ и } (4b)^z=4a.$$

Од условот на задачата следува $2y=x+z$, па затоа

$$4a^2=(2b)^{2y}=(2b)^{x+z}=2^{x+z}b^xb^z=2^{x+z}a\tfrac{4a}{4^z}=2^{x-z}4a^2.$$

Според тоа, $2^{-z}=1$, т.е. $x=z$. Сега од $x=z$ следува $(4b)^x=(4b)^z=4a=4b^x$, па затоа $4^xb^x=4b^x$, од каде добиваме $4^x=4$, т.е. $x=1$. Конечно, $a=b^x=b^1=b$.

37. Аглите на конвексниот $n-$аголник се $\alpha, 2\alpha,..., n\alpha$. Најди ги сите можни вредности за n и соодветните вредности за α.

Решение. Јасно е дека $n\ge 3$. Збирот на аглите во конвексниот n- аголник е $(n-2)\pi$ (n-аголникот можеме да го поделиме на $n-2$ триаголници). Од друга страна $\alpha+2\alpha+...+n\alpha=\alpha(1+2+...+n)=\frac{n(n+1)}{2}\alpha$.

Од равенката, $(n-2)\pi=\frac{n(n+1)}{2}\alpha$ добиваме $\alpha=\frac{2\pi(n-2)}{n(n+1)}$ и $n\alpha=\frac{2\pi(n-2)}{n+1}<\pi$. Но, тогаш $\frac{2(n-2)}{n+1}<1$, т.е. $n<5$. Сега за $n=3$ имаме $\alpha=\frac{\pi}{6}$, а за $n=4$ имаме $\alpha=\frac{\pi}{5}$.

38. Определи го бројот x ако $\sin x, \sin 2x$ и $\sin 3x$ се три последователни членови на аритметичка прогресија.

Решение. Три последователни членови на аритметичка прогресија со разлика d се од облик $a-d, a, a+d$, па за нив е исполнето

$$2a=(a-d)+(a+d),$$

односно средниот од нив е аритметичка средина од преостанатите два. Според тоа,

$$2\sin 2x=\sin x+\sin 3x.$$

Од идентитетот $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, за $\alpha=3x$ и $\beta=x$, добиваме

$$2\sin 2x=2\sin\tfrac{3x+x}{2}\cos\tfrac{3x-x}{2},$$

$$(1-\cos x)\sin 2x=0. \qquad (1)$$

Од равенката $\sin 2x=0$, добиваме $2x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$, односно $x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$, а од равенката $\cos x=1$ добиваме $x=2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

За множествата решенија

$$A=\{\tfrac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\} \text{ и } B=\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$$

е исполнета инклузијата $B\subset A$. Според тоа, решенија на равенката (1) се елементите на множеството $A=\{\frac{k\pi}{2} \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Значи, бараните вредности се $x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

39. Реалните броеви x, y, z се последователни членови на аритметичка прогресија. Определи ги сите можни вредности за y ако броевите $\cos^2 x, \cos^2 y, \cos^2 z$ се меѓусебно различни и се последователни членови на аритметичка прогресија.

Решение. Од условот на задачата следува

$$x+z=2y \text{ и } \cos^2 x+\cos^2 z=2\cos^2 y,$$

па затоа

$$\begin{aligned}&\tfrac{1+\cos 2x}{2}+\tfrac{1+\cos 2z}{2}=1+\cos 2y\\ &\cos 2x+\cos 2z=2\cos 2y\\ &\cos(x+z)\cos(x-z)=\cos 2y\\ &\cos 2y\cos(x-z)=\cos 2y\\ &\cos 2y(1-\cos(x-z))=0\end{aligned}$$

Од последното равенство следува $\cos 2y=0$ или $\cos(x-z)=1$. Ако $\cos(x-z)=1$, тогаш $x-z=2k\pi$, што значи дека разликата на низата x, y, z е еднаква на $k\pi$, но тогаш втората низа е константна, што е противречност. Ако $\cos 2y=0$, тогаш $y=\frac{2k+1}{2}\pi, k\in\mathbb{Z}$.

40. Нека $\sin(\beta+\gamma-\alpha), \sin(\gamma+\alpha-\beta)$ и $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$ се последователни членови на аритметичка прогресија. Докажи дека $\mathrm{tg}\alpha, \mathrm{tg}\beta$ и $\mathrm{tg}\gamma$ се исто така последователни членови на аритметичка прогресија.

Решение. Од условот на задачата дека

$$\sin(\beta+\gamma-\alpha), \sin(\gamma+\alpha-\beta) \text{ и } \sin(\alpha+\beta-\gamma)$$

се последователни членови на аритметичка прогресија, имаме

$$\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)=\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\gamma+\alpha-\beta) .$$

Според формулата за разлика на синуси, имаме

$$2\cos\gamma\sin\tfrac{2(\alpha-\beta)}{2}=2\cos\alpha\sin\tfrac{2(\beta-\gamma)}{2}$$

односно,

$$\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha\sin(\beta-\gamma) .$$

Со примена на адиционите формули, имаме

$$\cos\gamma\sin\alpha\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha\sin\beta=\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma .$$

Ако последното равенство го поделиме со $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, добиваме

$$\frac{\cos\gamma\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}-\frac{\cos\gamma\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}-\frac{\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

т.е. $\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\beta-\mathrm{tg}\gamma$, што е доволен услов да $\mathrm{tg}\alpha, \mathrm{tg}\beta, \mathrm{tg}\gamma$ се последователни членови на аритметичка прогресија.

41. Одреди ги сите позитивни вредности на пареметарот a за кои ненегативните вредности на x, што ја задоволуваат равенката

$$\cos((8a-3)x)=\cos((14a+5)x) ,$$

образуваат растечка аритметичка прогресија.

Решение. Дадената равенка ќе ја запишеме во облик

$$\cos((8a-3)x)-\cos((14a+5)x)=0$$

т.е.

$$-2\sin\tfrac{(8a-3)x+(14a+5)x}{2}\sin\tfrac{(8a-3)x-(14a+5)x}{2}=0 .$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна со вкупноста равенки

$$\left[\begin{array}{l}(8a-3)x+(14a+5)x=2k\pi\\(8a-3)x-(14a+5)x=2n\pi\end{array}\right., \quad \text{односно со} \quad \left[\begin{array}{l}(11a+1)x=k\pi\\(3a+4)x=n\pi\end{array}\right. .$$

Бидејќи $a>0$ следува дека $11a+1>0$ и $3a+4>0$. Значи $x=\frac{k\pi}{11a+1}$ или $x=\frac{n\pi}{3a+4}$. Означуваме $x_k=\frac{k\pi}{11a+1}$ и $x_n=\frac{n\pi}{3a+4}$. Бидејќи $x\geq 0$, добиваме дека $n,k=0,1,2,...$, па (x_k) и (x_n) се две растечки аритметички прогресии со први членови 0 и разлики $d_1=\frac{\pi}{11a+1}$ и $d_2=\frac{\pi}{3a+4}$ соодветно.

Ќе го докажеме следново својство: *броевите x_k и y_k образуваат аритметичка прогресија ако и само ако: за $d_1\leq d_2$ постои $m\in\mathbb{N}$ така што $d_2=md_1$, или за $d_2\leq d_1$ постои $m\in\mathbb{N}$ така што $d_1=md_2$.*

Навистина ако $d_1\leq d_2$, тогаш d_1 е втор член на новата аритметичка прогресија (првиот е 0). Бидејќи $\frac{\pi}{11a+1}\leq\frac{\pi}{3a+4}$ следува дека разликата на новата аритметичка прогресија е d_1. Но и d_2 е член на таа аритметичка прогресија, па постои $m\in\mathbb{N}$ така што $d_2=md_1$.

Обратно, нека постои $m\in\mathbb{N}$ така што $d_2=md_1$. Тогаш $x_n=d_2m(n-1)$. Значи секој член од прогресијата (x_n) е член и на прогресијата (x_k), па бараната прогресија е (x_k). Аналогно се докажува и за $d_2\le d_1$.

Натаму нека $d_1\le d_2$. Тогаш постои $m\in\mathbb{N}$ така што $d_2=md_1$, т.е. $m\frac{\pi}{11a+1}=\frac{\pi}{3a+4}$ од каде што следува $a=\frac{4m-1}{11-3m}$. Имаме $m\in\mathbb{N}$ па заради тоа $4m-1>0$, $a>0$ од каде што следува дека $11-3m>0$ па $m\le\frac{11}{3}$. Значи $m\in\{1,2,3\}$ и соодветните вредности за a се $\frac{3}{8},\frac{7}{5},\frac{11}{3}$.

Сега нека $d_2\le d_1$. Тогаш постои $m\in\mathbb{N}$ така што $d_1=d_2m$ т.е. $\frac{\pi}{11a+1}=m\frac{\pi}{3a+4}$, од каде $a=\frac{4-m}{11m-3}$. Заради $m\in\mathbb{N}$ и $a>0$ добиваме, од слични причини како и претходно $m\in\{1,2,3\}$. Соодветните вредности за a се $\frac{3}{8},\frac{2}{19},\frac{1}{30}$.

Значи, $a\in\{\frac{3}{8},\frac{2}{19},\frac{1}{30},\frac{7}{5},\frac{11}{3}\}$.

42. Должините на страните на разностран триаголник формираат аритметичка прогресија и правата низ тежиштето и центарот на впишаната кружница во триаголникот е нормална на негова страна. Докажи дека триаголникот е правоаголен.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за $\triangle ABC$. Нека $GI\perp AB, C_1$ е средината на AB, а C_2 и C_3 се соодветно проекциите на I и C врз AB. Тогаш $GC_2\parallel CC_3$, па затоа $\frac{\overline{C_1C_3}}{\overline{C_1C_2}}=\frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_1G}}=3$. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a>b$. Тогаш

$$\overline{C_1C_2}=\overline{BC_2}-\overline{BC_1}=\frac{a-b+c}{2}-\frac{c}{2}=\frac{a-b}{2}$$

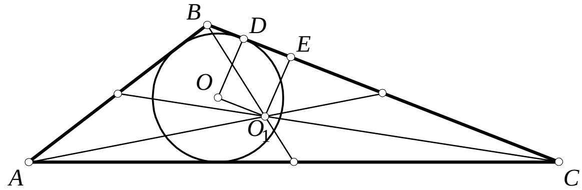
а од косинусната теорема следува дека

$$\overline{C_1C_3}=\overline{BC_3}-\overline{BC_1}=a\cos\beta-\frac{c}{2}=\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}-\frac{c}{2}=\frac{(a-b)(a+b)}{2c}.$$

Според тоа $3c=a+b$. Од друга страна, a,b,c во некој редослед формираат аритметичка прогресија и како $a>b$, заклучуваме дека $2b=a+c$. Конечно, од $3c=a+b$ и $2b=a+c$ следува, дека $a:b:c=5:4:3$, па затоа $\alpha=90^\circ$, т.е. $\triangle ABC$ е правоаголен.

43. Страните на триаголникот образуваат аритметичка прогресија. Докажи дека отсечката што ги сврзува тежиштето на триаголникот и центарот на впишаната кружница е паралелна со средната по должина страна на триаголникот.

Решение. Нека претпоставиме дека ABC е триаголник за кој $\overline{AB}=c$, $a=\overline{BC}=c+d$ и $b=\overline{AC}=c+2d$. Нека точката O е центар на впишаната кружница, точката O_1 е пресек на тежнишните линии, а D и E се нивни ортогонални проекции на страната BC (цртеж десно). Бидејќи r е радиус на



вписаната кружница имаме $\overline{OD}=r$. Плоштината на $\triangle ABC$ е $P=rs$, каде s е полупериметарот на триаголникот, т.е. $s=\frac{a+b+c}{2}$. Но, $s=\frac{c+d+c+c+2d}{2}=\frac{3}{2}(c+d)$, па затоа $r=\frac{P}{s}=\frac{2P}{3(c+d)}$. Бидејќи O_1 е тежиштето на триаголникот ABC, добиваме

$$P_{O_1BC}=\tfrac{1}{3}P_{ABC}=\overline{O_1E}\cdot\tfrac{1}{2}(c+d),$$

па според тоа $\overline{O_1E}=\frac{2P}{3(c+d)}=r$. Конечно, четириаголникот DOO_1E е паралелограм, па според тоа $OO_1 \parallel DE$, т.е. $OO_1 \parallel BC$.

44. Во еден триаголник должините на страните a,b,c во дадениот редослед се последователни членови на аритметичка прогресија. Докажи дека $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{3}$ (α е агол спроти страната a; γ е агол спроти страната c).

Решение. Од синусната теорема имаме $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$. Ако замениме во равенството $a+c=2b$ добиваме $\sin\alpha+\sin\gamma=2\sin\beta$. Ако ги искористиме идентитетите $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ и $\sin 2x=2\sin x\cos x$, добиваме

$$2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Од друга страна, заради равенството $\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}=\sin(90^\circ-\frac{\beta}{2})=\cos\frac{\beta}{2}$, со алгебарски транформации добиваме $\cos\frac{\beta}{2}(\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}-2\sin\frac{\beta}{2})=0$. Бидејќи $\cos\frac{\beta}{2}\neq 0$ и $\sin\frac{\beta}{2}=\cos(90^\circ-\frac{\beta}{2})=\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$, добиваме $\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}-2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}=0$. Сега заради формулате $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$ имаме

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=0,\text{ т.е.}$$

$$3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

од каде се добива точноста на бараното равенство.

45. Ако синусите на аглите на еден триаголник образуваат аритметичка прогресија тогаш и котангенсите од половините на аглите образуваат аритметичка прогресија. Докажи!

Решение. Нека x, y, z се аглите на триаголникот. Тогаш $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$ образуваат аритметичка прогресија односно $\sin y=\frac{\sin x+\sin z}{2}$. Оттука добиваме

$$2\sin(\pi-(x+z))=2\sin\frac{x+z}{2}\cos\frac{x-z}{2},$$

$$\sin(x+z)=\sin\frac{x+z}{2}\cos\frac{x-z}{2},$$

$$2\sin\frac{x+z}{2}\cos\frac{x+z}{2}=\sin\frac{x+z}{2}\cos\frac{x-z}{2},$$

односно

$$\sin\frac{x+z}{2}(2\cos\frac{x+z}{2}-\cos\frac{x-z}{2})=0.$$

Бидејќи $\sin\frac{x+z}{2}\neq 0$ добиваме дека

$$\cos\tfrac{x-z}{2} = 2\cos\tfrac{x+z}{2} \qquad (1)$$

Од $y = \pi - (x+z)$ следува $\frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{x+z}{2}$. Значи

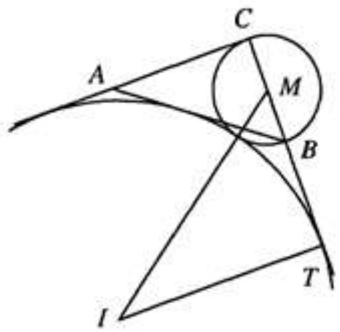
$$\operatorname{ctg}\tfrac{y}{2} = \operatorname{tg}\tfrac{x+z}{2} \qquad (2)$$

Сега имаме:

$$\operatorname{ctg}\tfrac{x}{2} + \operatorname{ctg}\tfrac{z}{2} = \frac{\sin\frac{x+z}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{z}{2}} = \frac{\sin\frac{x+z}{2}}{\frac{1}{2}(\cos\frac{x-z}{2} - \cos\frac{x+z}{2})} \overset{(1)}{=} \frac{2\sin\frac{x+z}{2}}{\cos\frac{x+z}{2}} = 2\operatorname{tg}\tfrac{x+z}{2} = 2\operatorname{ctg}\tfrac{y}{2}.$$

46. Даден е $\triangle ABC$ таков што припишаната кружница кон страната AB се допира до кружницата со дијаметар BC. Определи го $\measuredangle ACB$ ако страните BC, CA и AB формираат во овој редослед артиметичка прогресија.

Решение. Нека M е средината на BC, I е центарот на припишаната кружница кон страната AB и T е нејзионата допирна точка со BC. При стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$ имаме $\overline{IM} = \frac{a}{2} + r_c$, $\overline{IT} = r_c$ и $\overline{MT} = s - \frac{a}{2}$, бидејќи $\overline{BT} = s - a$. Од правоаголниот $\triangle MIT$ следува дека



$$(\tfrac{a}{2} + r_c)^2 + r_c^2 = (s - \tfrac{a}{2})^2 .$$

Оттука $ar_c = s(s-a)$. Но, $r_c = \frac{P}{s-c}$, па од Хероновата формула добиваме дека

$$aP = s(s-a)(s-c) = \frac{P^2}{s-b}, \text{ т.е.}$$

$$a(s-b) = P. \qquad (1)$$

Бидејќи a, b, c во овој редослед формираат аритметичка прогресија, важи $a = b - c, c = b + x$ и тогаш $s = \frac{3b}{a}, s - a = \frac{b}{2} + x, s - c = \frac{b}{2}, s - c = \frac{b}{2} - x$. Сега од (1) и од Хероновата формула ја добиваме равенката

$$(b-x)^2 = 3(\tfrac{b^2}{4} - x^2) ,$$

која има единствено решение $x = \frac{b}{4}$. Според тоа, $a = \frac{3b}{4}, c = \frac{5b}{4}$ и значи $a^2 + b^2 = c^2$, т.е. $\measuredangle ACB = 90^\circ$.

47. Должините на страните на еден триаголник и дијаметарот на впишаната кружница во него се четири последователни членови на аритметичка прогресија (во некој распоред). Определи ги сите такви триаголници.

Решение. Нека a, b, c се должини на страните на триаголникот, h_a, h_b и h_c се соодветните висини. Ако r е радиусот на впишаната кружница, имаме

$$2r < h_a \le b, c$$
$$2r < h_b \le a, c$$
$$2r < h_c \le a, b$$

Ако претпоставиме дека $a \le b \le c$, тогаш $2r, a, b, c$ се четирите последователни членови на аритметичката прогресија. Според тоа, постои $d > 0$, така што

$$a = 2r + d\ , \qquad b = 2r + 2d\ , \qquad c = 2r + 3d\ .$$

Сега полупериметарот на триаголникот е

$$p = \tfrac{a+b+c}{2} = \tfrac{(2r+d)+(2r+2d)+(2r+3d)}{2} = 3r + 3d\ .$$

Според Хероновата формула $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ и заради $P = pr$, добиваме

$$p^2r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$
$$pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c)$$
$$3(r+d)r^2 = (r+2d)(r+d)r$$
$$3r = r + 2d\ .$$

Значи, $r = d$, и аритметичката прогресија е $2r, 3r, 4r, 5r$. Според тоа, бараните триаголници се триаголниците кои се слични со египетскиот триаголник за кој страните се $3, 4, 5$.

48. Пресметај ја плоштината на обвивката на тетраедар со основа $14\ cm^2$, чии бочни рабови образуваат аритметичка прогресија со разлика 2 и се заемно нормални.

Решение. Ја положуваме пирамидата со една бочна страна како основа (види цртеж). Нека $\overline{SA} = x-2$, $\overline{SB} = x$, $\overline{SC} = x+2$ и нека $\overline{SD} = h$ е висината на правоаголниот $\triangle ABS$, а h_1 висината на $\triangle ABC$. Плоштината на обвивката е

$$M = P_{ABS} + P_{BCS} + P_{ACS} = \tfrac{1}{2}[x(x-2) + x(x+2) + (x-2)(x+2)] = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 4)\ .$$

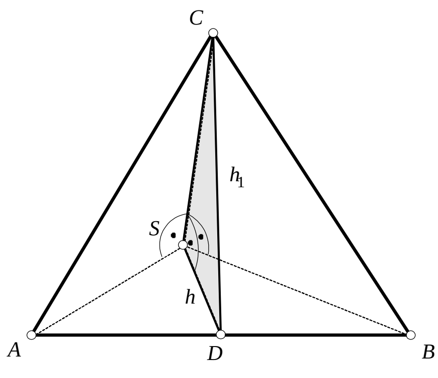
Значи, доволно е да го определиме x.

Од правоаголниот $\triangle ABS$ имаме

$$c \cdot h = x(x-2)\ ,$$

$c = \sqrt{x^2 + (x-2)^2}$, т.е.

$$h = \frac{x(x-2)}{\sqrt{x^2+(x-2)^2}}\ . \qquad (1)$$



Од правоаголниот $\triangle DCS$ имаме:

$$h_1 = h^2 + (x+2)^2 = \frac{x^2(x-2)^2}{x^2+(x-2)^2} + (x+2)^2$$

или

$$h_1 = \sqrt{\frac{3x^4+16}{2x^2-4x+4}}\ . \qquad (2)$$

Бидејќи по услов $P_{ABC} = 14$, добиваме:

$$14 = \tfrac{1}{2}c \cdot h_1\ , \quad 28 = c \cdot h_1\ , \ 28^2 = [x^2 + (x-2)^2]\frac{3x^4+16}{x^2+(x-2)^2}\ , \quad 784 = 3x^4 + 16\ ,$$

од каде имаме $x = 4$. Тогаш

$$M = \tfrac{1}{2}(3 \cdot 16 - 4) = 22\ .$$

Значи, плоштината на обвивката е $22\ cm^2$.

49. Нека n е природен број и $x_1, x_2, ..., x_n$ се реални броеви такви што $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$.

а) Докажи, дека

$$(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2 .$$

б) Докажи, дека знак за равенство важи ако и само ако $x_1, x_2, ..., x_n$ е аритметичка прогресија.

Решение. *Прв начин.* Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на низите $|i-j|$ и $|x_i - x_j|$ следува

$$(\sum_{i,j=1}^{n} (i-j)^2)(\sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2) \ge (\sum_{i,j=1}^{n} |i-j| \cdot |x_i - x_j|)^2 , \qquad (1)$$

при што равенство важи ако и само ако постои λ таков што $x_i - x_j = \lambda(i-j)$, што значи ако и само ако $\{x_i\}$ е аритметичка прогресија. Останува да ги средиме двете страни на (1). Лесно се докажува, на пример со индукција, дека

$$\sum_{i,j=1}^{n} (i-j)^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{6} \text{ и } \sum_{i,j=1}^{n} |i-j| \cdot |x_i - x_j| = \frac{n}{2} \sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j| .$$

Според тоа, неравенството (1) е еквивалентно на неравенството

$$\frac{n^2(n^2-1)}{6}(\sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2) \ge \frac{n^2}{4}(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|)^2 ,$$

кое е еквивалентно со даденото неравенство.

Втор начин. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, (секој број можеме да го транслатираме за $\alpha = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$). Сега, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|)^2 = (2\sum_{i=1}^{n} (2i-n-1)x_i)^2 \le (4\sum_{i=1}^{n} (2i-n-1)^2)(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) = \frac{4n(n^2-1)}{3}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)$$

$$= \frac{4(n^2-1)}{3}(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2) = \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

50. Петар и Васил измислиле десет квадратни полиноми. Потоа Васил кажувал последователни природни броеви (почнувајќи од некој број), а Петар го заменувал секој од кажаните броеви во некој од квадратните полиноми (по сопствен избор) и добиените вредности ги запишувал на табла од лево на десно. Се покажало, дека броевите, запишани на таблата, формираат аритметичка прогресија (во редослед во кој се запишувани). Колку најмногу броеви може да каже Васил?

Решение. Ќе докажеме, дека Петар го искористил секој квадратен полином $P(x)$ не повеќе од двапати. Навистина, нека $n-$тиот член на добиената аритметичка прогресија е еднаков на $an+b$, а $n-$ тиот од броевите на Васил е $k+n$. Тогаш ако $k+n$ го замениме во $P(x)$, тогаш ја добиваме равенката $P(k+n) = an+b$, која е квадратна по n и истата има најмногу два корени.

Значи, Васил може да каже најмногу 20 броеви. Петар и Васил можат да направат да се кажат 20 броеви, на следниов начин: ги избираат квадратните полиноми $P_k(x) = x + (x - 2k)(x - (2k-1))$, за $k = 1, 2, ..., 10$ и Васил ги кажува броевите 1, 2, ..., 20. Бидејќи $P_k(2k-1) = 2k-1$ и $P_k(2k) = 2k$, Петар може да ги заменува така да последователно се добијат броевите 1, 2, ..., 20.

51. Определи ги сите реални броеви m за кои равенката

$$x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = 0$$

има 4 реални корени кои што се последователни членови на аритметичка прогресија.

Решение. Нека a_1, a_2, a_3, a_4 се последователни членови на аритметичка прогресија, корени на равенката $x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = 0$.

Ако $2b$ е разлика на прогресијата и $s = \frac{a_2 + a_3}{2}$ тогаш $a_1 = s - 3b,\ a_2 = s - b,$ $a_3 = s + b,\ \ a_4 = s + 3b$.

Користејќи ги Виетовите врски, од $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ следува дека $s = 0$ и $a_1 = -3b,\ a_2 = -b,\ a_3 = b,\ \ a_4 = 3b$.

Од тоа што a_1, a_2, a_3, a_4 се корени на почетната равенка, следува дека

$$(x+3b)(x+b)(x-b)(x-3b) = x^4 - (3m+2)x^2 + m^2$$

односно

$$x^4 - 10b^2x^2 + 9b^4 = x^4 - (3m+2)x^2 + m^2,$$

од каде што се добива системот равенки

$$\begin{cases} 3m + 2 = 10b^2 \\ m^2 = 9b^4 \end{cases}.$$

Со решавање на системот се добива $m = 6$ или $m = -\frac{6}{19}$.

4. ГЕОМЕТРИСКА ПРОГРЕСИЈА

1. Во геометрискаta прогресија $a_1, a_2, ...$ дадени се членовите $A = a_{m+n}$ и $B = a_{m-n}$. Најди ги a_m и a_n.

Решение. Нека q е количникот на прогресијата. Тогаш $A = a_{m+n} = a_1q^{m+n-1}$ и $B = a_{m-n} = a_1q^{m-n-1}$. Оттука $q^{2n} = \frac{A}{B}$, т.е. $q = \sqrt[2n]{\frac{A}{B}}$. Според тоа

$a_m = a_1q^{m-1} = a_1q^{m-n-1}q^n = a_{m-n}q^n = B(\sqrt[2n]{\frac{A}{B}})^n = \sqrt{AB}$ и

$a_n = a_1q^{n-1} = a_1q^{m+n-1}q^{-m} = a_{m+n}q^{-m} = A(\sqrt[2n]{\frac{A}{B}})^{-\frac{m}{2n}} = A^{1-\frac{m}{2n}}B^{\frac{m}{2n}}$.

2. Првите три члена од една геометриска прогресија се $x, x+6, x+30$. Определи го четвртиот член од таа геометриска прогресија.

Решение. Од тоа што $x, x+6, x+30$ се последователни членови на геометриска прогресија, следува дека квадратот на средниот член е еднаков на производот на првиот и третиот член од прогресијата, т.е. $x(x+30)=(x+6)^2$, односно $x^2+30x=x^2+12x+36$. Решението на последната равенка е $x=2$. Според тоа, првите три члена на геометриската прогресија се 2, 8 и 32, а четвртиот член е $a_4=2\cdot 4^3$ $a_4=2\cdot 4^3=128$.

3. Определи ја геометриската прогресија од реални броеви кај која збирот на нејзините први четири членови е 15, а збирот на нивните квадрати е 85.

Решение. Од условите на задачата следува

$$a(1+q+q^2+q^3)=15 \text{ и } a^2(1+q^2+q^4+q^6)=85 .$$

Оттука следува

$$\frac{(1+q+q^2+q^3)^2}{1+q^2+q^4+q^6}=\frac{45}{17}, \text{ т.е. } \frac{q^4+2q^3+2q^2+2q+1}{q^4+1}=\frac{45}{17}.$$

Последната равенка е еквивалентна на равенката

$$14q^4-17q^3-17q^2-17q+14=0 .$$

Но, $q\neq 0$, па затоа последната равенка можеме да ја поделиме со $q^2\neq 0$, после што ја добиваме равенката

$$14(q^2+\tfrac{1}{q^2})-17(q+\tfrac{1}{q})-17=0 ,$$

која е еквивалентна со равенката

$$14(q+\tfrac{1}{q})^2-17(q+\tfrac{1}{q})-45=0 .$$

Воведуваме смена $t=q+\frac{1}{q}$ и ја добиваме равенката $14t^2-17t-45=0$, чии решенија се $t_1=\frac{5}{2}$ и $t_2=-\frac{9}{7}$. За $t_1=\frac{5}{2}$ ја добиваме равенката $q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2}$ чии решенија се $q_1=2, q_2=\frac{1}{2}$, а додека за $t_2=-\frac{9}{7}$ равенката $q+\frac{1}{q}=-\frac{9}{7}$ нема реални решенија. Конечно, за $q_1=2$ наоѓаме $a_1=1$, т.е. ја добиваме прогресијата $1,2,4,8,...$, а $q_2=\frac{1}{2}$ наоѓаме $a_2=8$, т.е. ја добиваме прогресијата $8,4,2,1,\frac{1}{2},...$.

4. Определи ги цифрите a и b, така што

$$\sqrt{0,aaaa....}=0,bbbb..... .$$

Решение. Броевите $0,aaaa...$ и $0,bbbb...$ се периодични децимални броеви, па според тоа, тие се рационални броеви. Било кој периодичен децимален број $0,xxxx...$, каде x е цифра можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned} 0,xx... &= \frac{x}{10}+\frac{x}{10^2}+\frac{x}{10^3}+...+\frac{x}{10^n}+.... \\ &= \frac{x}{10}(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+...+\frac{1}{10^n}+...)=\frac{x}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{x}{9} \end{aligned}$$

Според тоа, равенката $\sqrt{0,aaaa....}=0,bbbb.....$ можеме да ја запишеме во облик $\sqrt{\frac{a}{9}}=\frac{b}{9}$, односно $a=\frac{b^2}{9}$. Ќе ги определиме решенијата на равенката $b^2=9a$ во множеството природни броеви,т.е. во множеството цифри. Бидејќи $9=3^2$, од последната равенка добиваме дека a е полн квадрат, т.е. $a=c^2$. Според тоа $b^2=9c^2$, т.е. $b=3c$. Бидејќи b и c се цифри, за $c=0$ добиваме $b=0$, за $c=1$ добиваме $b=3$, за $c=2$ добиваме $b=6$ и за $c=3$ добиваме $b=9$. Значи, можни парови цифри (a,b) за кои

$$\sqrt{0,aaaa....}=0,bbbb.....$$

се $(a,b)\in\{(0,0),(1,3),(4,6),(3,9)\}$. Може да се провери дека секој од нив е решение на задачата.

5. Три броеви x,y,z, во дадениот редослед, се последователни членови на геометриска прогресија, а броевите $x,2y$ и $3z$, во дадениот редослед, се членови на аритметичка прогресија. Определи го количникот на геометриската прогресија кој е различен од 1.

Решение. Ќе претпоставиме дека $x\neq 0$, бидејќи случајот $x=0$ е тривијален. Бидејќи x,y,z се последователни членови на геометриска прогресија,постои $q\in\mathbb{R}$ така што

$$y=xq\,,\ z=xq^2\,. \tag{1}$$

Броевите $x,2y,3z$ се последоваелни членови на аритметичка прогресија, во дадениот редослед, па за нив е точно равенството

$$2y-x=3z-2y\,.$$

Заради обликот на y и z имаме $3z-4y+x=0$, и ако замениме од (1) наоѓаме

$$x(3q^2-4q+1)=0\,.$$

Но, $x\neq 0$, па од последната равенка следува $3q^2-4q-1=0$. Решенија на последната равенка се $q_1=1$ и $q_2=\frac{1}{3}$. Значи, бараната вредност за q е $q=\frac{1}{3}$.

6. Броевите $3x,4y,5z$ формираат геометриска прогресија, а броевите $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ формираат аритметичка прогресија. Определи ја вредноста на изразот $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}$.

Решение. Ако $3x,4y,5z$ формираат геометриска прогресија, тогаш

$$(4y)^2=3x\cdot 5z\text{ , т.е. } 16y^2=15xz\,.$$

Ако $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ формираат аритметичка прогресија, тогаш $\frac{2}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{x+z}{xz}$, што е еквивалентно на $x+z=\frac{2xz}{y}$. Од првото равенство имаме дека $xz=\frac{16}{15}y^2$, па со замена во второто равенство добиваме $x+z=\frac{32}{15}y$. Уште повеќе имаме

$$x^2+z^2=(x+z)^2-2xz=\frac{1024y^2}{225}-\frac{32y^2}{15}=\frac{544y^2}{225}\,.$$

Конечно, $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}=\frac{x^2+z^2}{xz}=\frac{544y^2}{225}\cdot\frac{15}{16y^2}=\frac{34}{15}$.

7. Дадена е бесконечна геометриска прогресија $a_1,a_2,a_3,...$, за која

$$a_1-3a_2+2a_3=0 \text{ и } 0<a_1+a_2+...+a_n+...\leq 2012.$$

Определи колку најмногу членови на низата може да бидат природни броеви?

Решение. Бидејќи $a_1\neq 0$ од $a_1-3a_2+2a_3=0$ следува дека $2q^2-3q+1=0$, каде q е количникот на прогресијата. Значи, $q=1$ или $q=\frac{1}{2}$. За $q=1$ збирот $a_1+a_2+...+a_n+...$ е бесконечен, па затоа $q=\frac{1}{2}$. Тогаш

$$a_1+a_2+...+a_n+...=\frac{a_1}{1-q}=2a_1,$$

од каде следува дека $0<a_1\leq 1006$. Најголем степен на бројот 2 кој може да е делител на $0<a_1\leq 1006$ е 2^9. Затоа во прогресијата може да има најмногу 10 природни броеви.

8. Дадена е бесконечна низа $a_1,a_2,...$ таква што, $a_2=2015$ и $xa_{n+1}=a_n+y$, $n\geq 1$ за некои реални броеви x и y. Определи го бројот y ако е познато дека низата $b_1,b_2,...$, зададена со $b_n=a_n-2014$, $n=1,2,...$ е бесконечна геометриска прогресија чиј збир на елементи е еднаков на 4.

Решение. Нека $b_1,b_2,...$ е геометриска прогресија со количник r. Тогаш $b_1=\frac{b_2}{r}=\frac{a_2-2014}{r}$ и затоа $S=\frac{b_1}{1-r}=\frac{\frac{a_2-2014}{r}}{1-r}=\frac{\frac{1}{r}}{1-r}=4$. Последната равенка е еквивалентна на равенката $(2r-1)^2=0$, т.е. $r=\frac{1}{2}$. Сега, ако во равенството $xa_{n+1}=a_n+y$ замениме $a_n=b_n+2014$ и $a_{n+1}=b_{n+1}+2014=\frac{b_n}{2}+2014$ добиваме

$$x(\tfrac{b_n}{2}+2014)=b_n+2014+y.$$

Оттука $b_n(\frac{x}{2}-1)=2014+y-2014x$, па затоа $\frac{x}{2}-1=2014+y-2014x=0$ (во спротивно низата $b_1,b_2,...$ ќе има еднакви членови). Според тоа, $x=2$ и $y=2014$.

9. Нека A е збирот на членовите на една конечна геометриска прогресија (членовите се позитивни) и B е збирот на нивните реципрочни вредности. Најди го производот на членовите на прогресијата.

Решение. Нека членовите на геометриската прогресија се $a_1,a_2,...,a_n$. Ако со q го означиме количникот на прогресијата тогаш

$$P=a_1a_2...a_n=a_1{}^nq^{\frac{(n-1)n}{2}}=(a_1{}^2q^{n-1})^{\frac{n}{2}}=(a_1a_n)^{\frac{n}{2}}.$$

Од друга страна $a_ia_{n+1-i}=a_1q^{i-1}a_1q^{n-i}=a_1a_1q^{n-1}=a_1a_n$, за секој $i\in\{1,2,...,n\}$. Тогаш

$$A=a_1+a_2+...+a_n=\frac{a_1a_n}{a_n}+\frac{a_2a_{n-1}}{a_{n-1}}+...+\frac{a_na_1}{a_1}=a_1a_n(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n-1}}+...+\frac{1}{a_1})=a_1a_nB.$$

Значи, $a_1 a_n = \frac{A}{B}$, а оттука $P = (\frac{A}{B})^{\frac{n}{2}}$.

10. Пресметај ја сумата $S = nx + (n-1)x^2 + ... + 2x^{n-1} + x^n$.

Решение. Ако $x = 1$ тогаш $S = \frac{n(n+1)}{2}$. Нека $x \neq 1$. Тогаш

$$\begin{aligned}
S &= nx + (n-1)x^2 + ... + 2x^{n-1} + x^n \\
&= (n+1-1)x + (n+1-2)x^2 + ... + (n+1-(n-1))x^{n-1} + (n+1-n)x^n \\
&= (n+1)(x + x^2 + ... + x^n) - (x + 2x^2 + ... + (n-1)x^{n-1} + nx^n) \\
&= (n+1)x\frac{x^n-1}{x-1} - [(x + x^2 + ... + x^n) + (x^2 + ... + x^{n-1} + x^n) + ... + (x^{n-1} + x^n) + x^n] \\
&= (n+1)x\frac{x^n-1}{x-1} - [x\frac{x^n-1}{x-1} + x^2\frac{x^{n-1}-1}{x-1} + ... + x^{n-1}\frac{x^2-1}{x-1} + x^n\frac{x-1}{x-1}] \\
&= (n+1)x\frac{x^n-1}{x-1} - \frac{nx^{n+1}-(x+x^2+...+x^n)}{x-1} = (n+1)x\frac{x^n-1}{x-1} - \frac{nx^{n+1}-x\frac{x^n-1}{x-1}}{x-2} \\
&= (n+1)x\frac{x^n-1}{x-1} - \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(x-1)^2} = \frac{x^{n+2}-(n+1)x^2+nx}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

11. Определи ја геометриската прогресија од реални броеви кај која збирот на нејзините први четири членови е 15, а збирот на нивните квадрати е 85.

Решение. Од условите на задачата следува

$$a(1+q+q^2+q^3) = 15 \text{ и } a^2(1+q^2+q^4+q^6) = 85.$$

Оттука следува

$$\frac{(1+q+q^2+q^3)^2}{1+q^2+q^4+q^6} = \frac{45}{17}, \text{ т.е. } \frac{q^4+2q^3+2q^2+2q+1}{q^4+1} = \frac{45}{17}.$$

Последната равенка е еквивалентна на равенката

$$14q^4 - 17q^3 - 17q^2 - 17q + 14 = 0.$$

Но, $q \neq 0$, па затоа последната равенка можеме да ја поделиме со $q^2 \neq 0$, после што ја добиваме равенката

$$14(q^2 + \frac{1}{q^2}) - 17(q + \frac{1}{q}) - 17 = 0,$$

која е еквивалентна со равенката

$$14(q + \frac{1}{q})^2 - 17(q + \frac{1}{q}) - 45 = 0.$$

Воведуваме смена $t = q + \frac{1}{q}$ и ја добиваме равенката $14t^2 - 17t - 45 = 0$, чии решенија се $t_1 = \frac{5}{2}$ и $t_2 = -\frac{9}{7}$. За $t_1 = \frac{5}{2}$ ја добиваме равенката $q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2}$ чии решенија се $q_1 = 2, q_2 = \frac{1}{2}$, а додека за $t_2 = -\frac{9}{7}$ равенката $q + \frac{1}{q} = -\frac{9}{7}$ нема реални решенија. Конечно, за $q_1 = 2$ наоѓаме $a_1 = 1$, т.е. ја добиваме прогресијата $1, 2, 4, 8, ...$, а $q_2 = \frac{1}{2}$ наоѓаме $a_2 = 8$, т.е. ја добиваме прогресијата $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, ...$.

12. Нека a,b,c и d се четири последователни членови на една геометриска прогресија. Пресметај го изразот

$$(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2-(a-d)^2.$$

Решение. Нека $b=aq$, $c=aq^2$ и $d=aq^3$. Тогаш

$$(a-c)^2=(a-aq^2)^2=a^2-2a^2q^2+a^2q^4=a^2(1-2q^2+q^4)$$
$$(b-c)^2=a^2(q^2-2q^3+q^4)$$
$$(b-d)^2=a^2(q^2-2q^4+q^6)$$
$$(a-d)^2=a^2(1-2q^3+q^6).$$

Заменувајќи ги последните четири равенства во почетниот израз имаме

$$\begin{aligned}(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2-(a-d)^2 &= a^2(1-2q^2+q^4)+a^2(q^2-2q^3+q^4)\\ &\quad +a^2(q^2-2q^4+q^6)-a^2(1-2q^3+q^6)\\ &= a^2(1-2q^2+q^4+q^2-2q^3+q^4\\ &\quad +q^2-2q^4+q^6-1+2q^3-q^6)\\ &= a^2\cdot 0=0.\end{aligned}$$

13. Дали е можно од низата $\frac{1}{2},\frac{1}{4},...,\frac{1}{2^n},...$ да се изберат членови кои формираат бесконечна опаѓачка геометриска прогресија со сума $\frac{1}{5}$?

Решение. Јасно е дека $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ не можат да бидат членови на прогресијата (бидејќи се поголеми од $\frac{1}{5}$). Да провериме дали $\frac{1}{8}$ може да е прв член на прогресијата. Ако $\frac{1}{8}$ не е прв член на прогресијата, тогаш нејзината сума е помала или еднаква од $\frac{1}{16}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{8}<\frac{1}{5}$. Значи ако постои прогресија со бараните својства, тогаш мора нејзин прв член да е $\frac{1}{8}$. Бидејќи таа е геометриска, нејзиниот количник мора да е $\frac{1}{2^a}$, каде a е некој природен број. Нејзината сума е $\frac{1}{8}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^a})^n=\frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{1}{2^a}}=\frac{2^{a-3}}{2^a-1}$. Значи, ја добиваме равенката $\frac{2^{a-3}}{2^a-1}=\frac{1}{5}$. Таа е еквивалентна со $3\cdot 2^{a-3}=1$, која нема решение во множеството природни броеви.

Значи таква прогресија на постои.

14. Дали постои неконстантна низа природни броеви $a_1,a_2,...,a_n,...$, таква што за секој природен број $k\geq 2$ е исполнето равенството $a_k=\frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1}+a_{k+1}}$?

Решение. Нека претпоставиме дека таква низа природни броеви постои. Тогаш за низата од реципрочни вредности $b_n=\frac{1}{a_n}, n\in\mathbb{N}$, имаме

$$b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1}+a_{k+1}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{b_{n-1}+b_{n+1}}{2}.$$

Според тоа $b_2, b_3, ..., b_n, ...$ аритметичка прогресија. Бидејќи $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е неконстантна низа, добиваме дека и $(b_n)_{n=2}^{\infty}$ е неконстантна аритметичка низа од позитивни реални броеви. Според тоа, постои $d \neq 0$ така што

$$b_n = b_2 + (n-2)d, \ n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

За n доволно големо, имаме $b_n > 1$ или $b_n < 0$ (во зависност од тоа какво е d односно дали е позитивно или дали е негативно).

Од друга страна, бидејќи $a_n \in \mathbb{N}$, добиваме дека

$$0 \leq b_n = \frac{1}{a_n} \leq 1, \ n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Од добиената контрадикција, заклучуваме дека таква низа природни броеви не постои.

15. Броевите $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{5}$ се заменуваат со нивниот збир и нивниот производ. За новите броеви $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{25}$ се применува истата операција итн. Докажи, дека во секој момент добиените броеви се помали од $\frac{1}{2}$.

Решение. Нека $a_1 = b_1 = \frac{1}{5}$, $a_{n+1} = a_n + b_n$ и $b_{n+1} = a_n b_n$, за $n \geq 1$. Со индукција ќе докажеме дека $a_n < \frac{12}{25}$ и $b_n \leq \frac{1}{25 \cdot 2^{n-2}}$, за $n \geq 2$.

Јасно, за $n = 2$ тврдењето важи. Нека претпоставиме дека тоа важи за некој $n \geq 2$. Имаме

$$a_{n+1} = a_2 + b_2 + b_3 + ... + b_n \leq \frac{2}{5} + \frac{1}{25}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-2}}\right) < \frac{2}{5} + \frac{2}{25} = \frac{12}{25} \text{ и}$$

$$b_{n+1} = a_n b_n < \frac{b_n}{2} = \frac{1}{25 \cdot 2^{n-1}},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

16. Ако (a_n) е геометриска прогресија со позитивни членови, докажи дека $(\ln a_n)$ е аритметичка прогресија. Определи го збирот на првите 2018 членови на аритметичката прогресија.

Решение. За секој природен број n важи $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$, па следува дека $2\ln a_{n+1} = \ln a_n + \ln a_{n+2}$, за секој природен број n. Значи, $(\ln a_n)$ е аритметичка прогресија. Имаме

$$S_{2018} = \frac{2018}{2}(2\ln a_1 + 2017 \ln q),$$

каде q е количникот на геометриската прогресија (a_n).

17. Нека $a_1, a_2, ...$ е бесконечна аритметичка прогресија со прв член a и разлика $d \neq 0$. Докажи дека ако во дадената прогресија постојат три члена кои формираат геометриска прогресија, тогаш $\frac{a}{d}$ е рационален број.

Решение. Нека a_m, a_n и a_p формираат геометриска прогресија. Тогаш: $(a_n)^2 = a_m a_p$, од каде по средувањето, ставајќи $r = n-1$, $s = m-1$ и $t = p-1$, добиваме:

$$a(2r-s-t) = d(st-r^2). \qquad (1)$$

Да претпоставиме дека $2r-s-t=0$. Тогаш:

$$st-r^2 = st-(\tfrac{s+t}{2})^2 = -(\tfrac{s-t}{2})^2 < 0,$$

бидејќи s и t се сигурно различни (поради $d \neq 0$). Значи, левата страна на (1) е 0 а десната не е, што не е можно.

Значи, $2r-s-t \neq 0$, па од (1), добиваме: $\frac{a}{d} = \frac{st-r^2}{2r-s-t}$, од каде е јасно дека $\frac{a}{d}$ е рационален број.

18. Нека $x > 2$ е реален број и $n = 2^{2017}$. Пресметај го збирот на броевите

$$\ln x, \ln\sqrt{x}, \ln\sqrt[4]{x}, \ln\sqrt[8]{x}, ..., \ln\sqrt[n]{x}.$$

Решение. Бидејќи $\frac{\ln x^{\frac{1}{2^s}}}{\ln x^{\frac{1}{2^{s-1}}}} = \frac{1}{2}$ за секој $s \in \{1, 2, ..., 2017\}$ следува дека дадените броеви формираат геометриска прогресија со количник $\frac{1}{2}$. Значи, бараниот збир е

$$S_{2017} = \ln x \frac{(\frac{1}{2})^{2017}-1}{\frac{1}{2}-1} = 2((\tfrac{1}{2})^{2017}-1)\ln x.$$

19. Реалните броеви a, b и c се последовагтелни членови на геометриска прогресија, во дадениот редослед. Определи ја вредноста на

$$\frac{\log_b 3 \cdot (\log_{a^2} c - \log_c \sqrt{a})}{\log_a 9 - 2\log_c 3}.$$

Решение. Бидејќи a, b и c се три последователни членови на геометриска прогресија, исполнето е равенството $b^2 = ac$. Сите логаритми ќе ги сведеме на логаритам со основа 3. При тоа, изразот ќе го добие следниов вид:

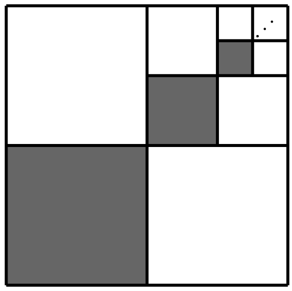
$$\frac{\log_b 3 \cdot (\log_{a^2} c - \log_c \sqrt{a})}{\log_a 9 - 2\log_c 3} = \frac{\frac{\log_3 3}{\log_3 b}(\frac{\log_3 c}{\log_3 a^2} - \frac{\log_3 \sqrt{a}}{\log_3 c})}{\frac{\log_3 9}{\log_3 a} - 2\frac{\log_3 3}{\log_3 c}} = \frac{\frac{1}{\log_3 b}(\frac{\log_3 c}{2\log_3 a^2} - \frac{\log_3 a}{2\log_3 c})}{\frac{2}{\log_3 a} - \frac{2}{\log_3 c}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\log_3 b}\frac{\log_3^2 c - \log_3^2 a}{\log_3 c \cdot \log_3 a}}{2\frac{\log_3 c - \log_3 a}{\log_3 c \cdot \log_3 a}}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\log_3 b}\frac{\log_3^2 c - \log_3^2 a}{\log_3 c - \log_3 a} = \frac{1}{4}\frac{1}{\log_3 b}[\log_3 c + \log_3 a] = \frac{1}{4}\frac{1}{\log_3 b}\log_3 ac$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\log_3 b}\log_3 b^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{\log_3 b} 2\log_3 b = \frac{1}{2}.$$

Значи, вредноста на изразот не зависи од a, b и c.

20. Еден квадрат е разделен на четири еднакви квадрати. Еден од делбените квадрати е обоен во црвено. Еден од необоените делбени квадрати го делиме на четири еднакви квадрати. Еден од четирите нови делбени квадрати го боиме со црвена боја. Постапката на делење и боење ја продолжуваме со делење на еден од најмалите квадрати од претходните делења и боење на еден од новите делбени квадрати. Ако постапката се продолжи неограничено, колкав дел од квадратот ќе остане необоен.



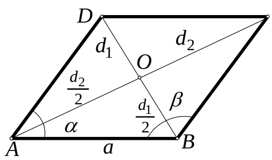
Решение. Ако a е должината на страната на квадратот, тогаш при првото делење и потоа боење, ќе обоиме $\frac{1}{4}a^2$ од плоштината на квадратот. Со второто делење и боење, ќе обоиме $\frac{1}{4^2}a^2$ од плоштината на квадратот. Со третото делење и боење ќе обоиме $\frac{1}{4^3}a^2$ од плоштината на квадратот. Со помош на принципот на математичка индукција се покажува дека со оваа постапка во n-тиот чекор ќе обоиме $\frac{1}{4^n}a^2$ од плоштината на квадратот.

Сега, вкупната обоена површина на квадратот ќе биде

$$P=\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{4^2}a^2+\tfrac{1}{4^3}a^2+\ldots+\tfrac{1}{4^n}a^2+\ldots=\tfrac{1}{4}a^2\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\tfrac{1}{3}a^2 \; .$$

Необоен ќе остане $a^2-\frac{1}{3}a^2=\frac{2}{3}a^2$ од плоштината на квадратот.

21. Должините на помалата дијагонала, страната и поголемата дијагонала во ромбот формираат геометриска прогресија. Определи ги аглите на ромбот!



Решение. Нека $ABCD$ е ромб во кој дијагоналата $d_1=\overline{BD}$, страната $a=\overline{AB}$ и дијагоналата $d_2=\overline{AC}$ се последователни членови на геометриска прогресија. Значи, постојат броеви b и q такви што $d_1=b$, $a=bq$, $d_2=bq^2$. Од правоаголниот триаголник AOB, според теоремата на Питагора имаме

$$(\tfrac{d_1}{2})^2+(\tfrac{d_2}{2})^2=a^2,\quad \tfrac{b^2}{4}+\tfrac{b^2}{4}q^4=b^2q^2\qquad q^4-4q^2+1=0 \; .$$

Ако воведеме смена $q^2=t$, ја добиваме квадратната равенка $t^2-4t+1=0$ чии решенија се $t_{1/2}=2\pm\sqrt{3}$.

За решението $t=2+\sqrt{3}$, добиваме

$$q=\sqrt{2+\sqrt{3}}\text{, и } d_1=b\,,\ a=b\sqrt{2+\sqrt{3}}\,,\ d_2=b(2+\sqrt{3}) \; .$$

Од правоаголниот триаголник AOB, добиваме

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{\frac{d_1}{2}}{\frac{d_2}{2}}=\frac{d_1}{d_2}=\frac{b}{b(2+\sqrt{3})}=2-\sqrt{3} \; .$$

Конечно, аглите на ромбот $ABCD$ се

$$\alpha=2\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3})\ \text{ и }\ \beta=\pi-2\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3}) \; .$$

Аналогно се постапува и за решението $t=2-\sqrt{3}$.

22. Даден е триаголникот ABC со внатрешни агли α,β и γ кои образуваат геометриска прогресија со количник 2. Притоа аголот α е најмал. Докажи дека $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a}$, каде што a,b и c се должините на страните на триаголникот, кои лежат спроти алите α,β,γ, соодветно.

Решение. Бидејќи аглите образуваат геометриска прогресија со количник 2 и α е најмалиот агол имаме $\beta=2\alpha,\gamma=4\alpha$, од каде што следува дека $\alpha=\frac{\pi}{7}$. Од синусната теорема важи $a=2R\sin\alpha; b=2R\sin\beta$ и $c=2R\sin\gamma$. Тогаш

$$\begin{aligned}\frac{1}{b}+\frac{1}{c}&=\frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 4\alpha}\right)=\frac{1}{2R}\cdot\frac{\sin 4\alpha+\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha\cdot\sin 4\alpha}\\&=\frac{1}{2R}\cdot\frac{2\sin 3\alpha\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin 4\alpha}=\frac{1}{2R}\cdot\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin 4\alpha}\end{aligned}.$$

Од $3\alpha+4\alpha=7\alpha=\pi$, следува дека $3\alpha=\pi-4\alpha$, па затоа

$$\sin 3\alpha=\sin(\pi-4\alpha)=\sin 4\alpha.$$

Конечно, $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2R}\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin 4\alpha}=\frac{1}{2R\sin\alpha}=\frac{1}{a}$.

23. Ако должините на страните на триаголникот образуваат геометриска прогресија, тогаш два агли на триаголникот се помали или еднакви на 60°. Докажи!

Решение. Нека страните на триаголникот ABC ги означиме со a, $b=aq$, $c=aq^2$. Во секој случај страната b е меѓу страните a и c (ако $q>1$, тогаш $a<b<c$; ако $q<1$, тогаш $a>b>c$) освен за $q=1$ (тогаш $a=b=c$, па триаголникот е рамностран и во овој случај сите агли се еднакви на 60°). Нека триаголникот не е разностран т.е. $a\neq c$. Според косинусна теорема имаме ($b^2=ac$):

$$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2}{2ac}-\frac{1}{2}$$

Бидејќи $a^2+c^2>2ac$, за $a\neq c$, па следува $\cos\beta>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, а оттука $\beta<60^\circ$. Бидејќи страната b е средна по големина, следува дека и аголот β е меѓу аглите α и γ, т.е. има еден агол помал од β.

Следствено, во $\triangle ABC$ два агли се помали од 60°.

24. Определи ги сите вредности на $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ за кои броевите $\sin x\cos x, 1,$ $\frac{1}{\sin x+\cos x}$ формираат (во некаков редослед) геометриска прогресија.

Решение. Ако 1 е средниот член на прогресијата, тогаш

$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}=1,$$

што не е можно бидејќи $\sin x\cos x<\sin+\cos x$ (последното неравенство е еквивалентно на неравенството од $(\sin x-1)(\cos x-1)<1$). Ако $\sin x\cos x$ е средниот член на прогресијата, тогаш

$$\frac{1}{\sin x+\cos x}=\sin^2 x\cos^2 x,$$

што не е можно бидејќи $\frac{1}{\sin x+\cos x}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$ (следува од познатото неравенство

$\sin x+\cos x\le\sqrt{2}$) и $\sin x\cos x\le\frac{1}{2}$, т.е. $\sin^2 x\cos^2 x\le\frac{1}{4}<\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ако $\frac{1}{\sin x+\cos x}$ е средниот член на прогресијата, тогаш

$$\sin x\cos x=(\frac{1}{\sin x+\cos x})^2 .$$

Понатаму, од $\sin x\cos x=\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2}$, добиваме дека горното равенство е еквивалентно со равенството $\frac{1}{a^2}=\frac{a^2-1}{2}$, каде $a=\sin x+\cos x$. Единствено решение е $a^2=2$, т.е. $a=\sqrt{2}$ и тогаш $x=\frac{\pi}{4}$.

25. Избран е сложен природен број за прв член на една конечна геометриска прогресија со количник фиксиран прост делител на првиот член. Докажи дека низата од бројот на делители на членовите од геометриската прогресија образува аритметичка прогресија.

Решение. Нека $a_1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ е прв член на геометриската прогресија каде $p_1,p_2,..p_k$ се прости делители, и нека p_i е фиксиран количник за геометриската прогресија. На тој начин ја добиваме низата:

$$a_1=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_i^{\alpha_i}...p_k^{\alpha_k},\ a_2=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_i^{1+\alpha_1}...p_k^{\alpha_k},...,$$
$$a_n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_i^{n-1+\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}.$$

Новата низа која се состои од бројот на делителите на $\{a_i\}_{i=1}^n$ е следната:

$$b_1=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(1+\alpha_i)...(1+\alpha_k),\ b_2=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(2+\alpha_i)...(1+\alpha_k),...,$$
$$b_n=(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)...(n+\alpha_i)...(1+\alpha_k).$$

Ако ставиме $S=\frac{b_1}{1+\alpha_i}$ добиваме $b_1=S\alpha_i+S$. Сега лесно се добива

$$b_2=S(2+\alpha_i)=S\alpha_i+2S,...,b_n=S(n+\alpha_i)=S\alpha_i+nS .$$

Оттука следува дека низата $\{b_i\}_{i=1}^n$ е аритметичка прогресија со разлика $d=S$.

26. Дадена е бесконечна аритметичка прогресија со прв член a_1 и разлика d, таква што сите нејзини членови се позитивни и броевите a_1,a_{2011} и $S_{2010}+S_{2011}$ се последователни членови на геометриска прогресија. (Со S_k е означен збирот на првите k членови на аритметичката прогресија.)

а) Определи го бројот $\frac{a_1}{d}$.

б) Докажи, дека за секој природен број n броевите a_1,a_n и $S_{n-1}+S_n$ се последователни членови на геометриска прогресија.

Решение. а) Од условот на задачата следува

$$a_{2011}^2=a_1(S_{2010}+S_{2011})=\frac{a_1((2a_1+2009d)2010+(2a_1+2010d)2011)}{2},$$

од каде добиваме $a_1^2+1004a_1d-1005d^2=0$. Последната равенка ја делиме со $d\neq 0$ и ја решаваме соодветната квадратна равенка, од каде добиваме $\frac{a_1}{d}=1$ или

$\frac{a_1}{d}=-1005$. Ако $\frac{a_1}{d}=-1005$, тогаш или $a_1<0$ или $d<0$, што не е можно, бидејќи сите членови на прогресијата се позитивни. Значи, $\frac{a_1}{d}=1$.

б) Од а) следува $a_1=d$. Тогаш $a_n=nd,\ S_{n-1}=\frac{dn(n-1)}{2}, S_n=\frac{dn(n+1)}{2}$, од каде добиваме $S_{n-1}+S_n=dn^2$. Според тоа, $a_1(S_{n-1}+S_n)=d\cdot dn^2=(nd)^2=a_n^2$, што значи дека a_1,a_n и $S_{n-1}+S_n$ се последователни членови на геометриска прогресија

27. Дадена е растечка аритметичка прогресија $a_1,a_2,...,a_n$ од природни броеви за кои $a_n\le 2015$. Познато е дека членовите на низата со редни броеви еднакви на делителите на 2015 формираат геометриска прогресија. Определи ја најголемата можна вредност на a_n.

Решение. Со d да ја означиме разликата на дадената аритметичка прогресија. Бидејќи $2015=5\cdot 13\cdot 31$ и низата е растечка, заклучуваме дека a_5,a_{13},a_{31}, во овој редослед, формираат геометриска прогресија. Според тоа,

$$(a_1+12d)^2=(a_1+4d)(a_1+30d),$$

од каде добиваме $12d=5a_1$. Последното равенство е исполнето за $a_1=24, d=10$ и тогаш имаме $a_{200}=24+199\cdot 10=2014$. Ако претпоставиме дека за некои a_1 и d важи $2015=a_n=a_1+(n-1)d$, после смената во $a_1=\frac{12}{5}d$ добиваме $d(5n+7)=5\cdot 2015$. Последното равенство не е можно, бидејќи $5\cdot 2015$ нема делител од видот $5n+7$. Според тоа, најголемата можна вредност на a_n е 2014.

28. Нека броевите $a_1,a_2,...,a_n$ формираат аритметичка прогресија со разлика d, а броевите $b_1,b_2,...,b_n$ формираат геометриска прогресија со количник $q\neq 1$. Пресметај го збирот $a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$.

Решение. Бидејќи $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ формираат аритметичка прогресија со разлика d тие се од облик

$$a_1,a_1+d,a_1+2d,...,a_1+(n-1)d$$

Од друга страна, бидејќи $b_1,b_2,...,b_n$ формира геометриска прогресија со количник q, таа е од облик:

$$b_1,b_1q,b_1q^2,...,b_1q^{n-1}.$$

Сега,

$$\begin{aligned}a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+...+a_nb_n &= a_1b_1+(a_1+d)b_1q+..+[a_1+(n-1)d]b_1q^{n-1}\\ &= a_1b_1(1+q+q^2+...+q^{n-1})+b_1dq(1+2q+3q^2+...+(n-1)q^{n-2})\\ &= a_1b_1\frac{q^n-1}{q-1}+b_1dq(1+q+q^2+...+q^{n-1}-1)'\\ &= a_1b_1\frac{q^n-1}{q-1}+b_1dq(\frac{q^n-1}{q-1})'=a_1b_1\frac{q^n-1}{q-1}+b_1dq\frac{(n-1)q^n-nq^{n-1}+1}{(q-1)^2}.\end{aligned}$$

29. Три ненулти реални броеви образуваат аритметичка прогресија, а нивните квадрати земени во истиот редослед образуваат геометриска прогресија. Да се најдат сите можни количници на геометриската прогресија.

Решение. Нека реалните броеви a, b, c образуваат аритметичка прогресија при што броевите a^2, b^2, c^2 образуваат геометриска прогресија. Според тоа $2b = c + a$ и $b^4 = c^2a^2$. Ако равенството $2b = c + a$ го квадрираме добиваме

$$4b^2 = a^2 + 2ac + c^2.$$

Од равенството $b^4 = c^2a^2$ добиваме $b^2 = |ac|$, и ако замениме во претходната равенка имаме

$$a^2 + 2ac + c^2 = 4|ac|.$$

Ќе ги разгледаме двата можни случаи, т.е.

a) a и c имаат ист знак

b) a и c имаат различен знак

Ако a и c имаат ист знак, тогаш последната равенка го добива обликот

$$a^2 - 2ac + c^2 = 0, \text{ т.е. } a = c.$$

Во тој случај, количникот на геометриската прогресија е $q = 1$.

Ако a и c имаат спротивни знаци, тогаш последната равенка го добива обликот $a^2 + 6ac + c^2 = 0$ и бидејќи $a \neq 0$ истата можеме да ја запишеме во облик

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 6\frac{c}{a} + 1 = 0.$$

Решение на последната квадратна равенка по $\frac{c}{a}$ се $\frac{c}{a} = -3 \pm \sqrt{8}$. Ако количникот на геометриската прогресија е q, тогаш $\frac{c^2}{a^2} = q^2$, т.е. $q^2 = (-3 \pm \sqrt{8})^2$. Броевите a^2, b^2, c^2 кои ја образуваат геометриската прогресија се позитивни, па според тоа $q > 0$. Позитивни решенија на равенката $q^2 = (-3 \pm \sqrt{8})^2$ се $3 - \sqrt{8}$ и $3 + \sqrt{8}$.

Значи, бараните количници се $1, 3 - \sqrt{8}$ и $3 + \sqrt{8}$.

30. Дадено е множеството $S = \{1, 2, 3, ..., 100\}$. Дали може S да се разбие на дванаесет дисјунктни подмножества, такви што елементите на секое од нив да бидат членови на геометриски прогресии.

Решение. Ќе покажеме дека три различни прости броеви ($p_1 < p_2 < p_3$) , членови на иста геометриска прогресија со количник $q \neq 1$. Тогаш

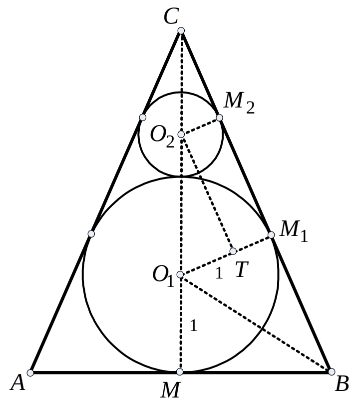
$$p_1 = a_1 q^{k-1}, \qquad p_2 = a_1 q^{r-1}, \qquad p_3 = a_1 q^{m-1}$$

од каде добиваме

$$\frac{p_2}{p_1} = q^{r-k} = q^s, \ (r - k = s), \qquad \frac{p_3}{p_2} = q^{m-r} = q^n \ (m - r = n)$$

Значи, $p_2^{s+n} = p_1^n p_3^s$, што не е можно бидејќи p_1, p_2, p_3 се прости броеви, а $s \neq 0, n \neq 0$. Во множеството C има 25 прости броеви, па барем во едно од дванаесетте множества ќе има барем три прости броеви. Но, тогаш елементите од тоа множество не може да бидат членови на геометриска прогресија.

31. Во рамнокракиот триаголник ABC дадени се $\overline{AC}=\overline{BC}=2b$ и $\measuredangle CAB=2\alpha$. Нека P_1 е плоштината на впишаниот круг k_1 во триаголникот ABC, P_2 е плоштина на кругот што ја допира кружницата k_1 и краците на триаголникот ABC, ..., P_i е плоштина на кругот што ја допира кружницата k_{i-1} и краците на триаголникот ABC итн. Пресметај го збирот $P_1+P_2+...+P_n+...$



Решение. Нека $\overline{AB}=2a$, односно $\overline{MB}=a$, $\measuredangle MBO_1=\measuredangle O_1BM_1=\alpha$. Од правоаголниот триаголник O_1MB следува $\overline{O_1M}=r_1=a\cdot\operatorname{tg}\alpha$. Нека T е точка од отсечката O_1M_1 така што $O_2T\perp O_1M_1$. Оттука следува $\overline{TM_1}=\overline{O_2M_2}=r_2$. Понатаму,

$$\overline{O_1O_2}=r_1+r_2,\ \overline{O_1T}=r_1-r_2 \text{ и } \measuredangle O_2O_1T=2\alpha.$$

Од правоаголниот триаголник O_1TO_2 добиваме

$$r_1-r_2=(r_1+r_2)\cos 2\alpha,$$

т.е.

$$r_1(1-\cos 2\alpha)=r_2(1+\cos 2\alpha).$$

Оттука следува $r_2=r_1\operatorname{tg}^2\alpha$.

Аналогно, $r_3=r_2\operatorname{tg}^2\alpha=r_1\operatorname{tg}^4\alpha$, или општо:

$$r_n=r_1\operatorname{tg}^{2(n-1)}\alpha,\ n\in\mathbb{N}$$

и

$$P_1=\pi r_1^2=\pi a^2\operatorname{tg}^2\alpha,\ P_2=\pi r_2^2=\pi r_1^2\operatorname{tg}^4\alpha,...,\ P_n=\pi r_n^2=\pi r_1^2\operatorname{tg}^{4(n-1)}\alpha,...$$

Бидејќи $2\alpha<\frac{\pi}{2}$, следува $\alpha<\frac{\pi}{4}$, односно $\operatorname{tg}\alpha<1$, па можеме да ја примениме формулата за збир на бескраен геометриски ред

$$P=P_1+P_2+...+P_n+...=\pi r_1^2(1+\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{tg}^8\alpha+...)=\pi r_1^2\frac{1}{1-\operatorname{tg}^4\alpha}$$

$$=\pi a^2\operatorname{tg}^2\alpha\frac{1}{1-\operatorname{tg}^4\alpha}=\pi a^2\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

Од правоаголниот триаголник MBC следува $a=2b\cos 2\alpha$, па конечно добиваме:

$$P=4\pi b^2\cos^2 2\alpha\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha}=\pi b^2\cos 2\alpha\sin^2 2\alpha$$

32. Во произволен агол е впишана кружница со радиус r и центар C на растојание a од темето на аголот. Потоа се впишуваат наредени кружници кон темето на аголот, така што центарот на секоја од нив лежи на претходната кружница. Определи го збирот на плоштините на соодветните кругови.

Решение. Според ознаките од цртежот, од сличноста на триаголниците $\triangle OAC\sim\triangle OA_1C_1\sim\triangle OA_2C_2\sim...$ добиваме: $\overline{OC}:\overline{CA}=\overline{OC_1}:\overline{C_1A_1}=\overline{OC_2}:\overline{C_2A_2}=...$ или

$$a:r=(a-r):r_1=(a-r-r_1):r_2=...$$

од каде што се добива, по ред:

$$r_1 = r\frac{a-r}{a},\ r_2 = r(\frac{a-r}{a})^2,\ \ldots,\ r_n = r(\frac{a-r}{a})^n, \ldots$$

Збирот на плоштините на овие кругови е

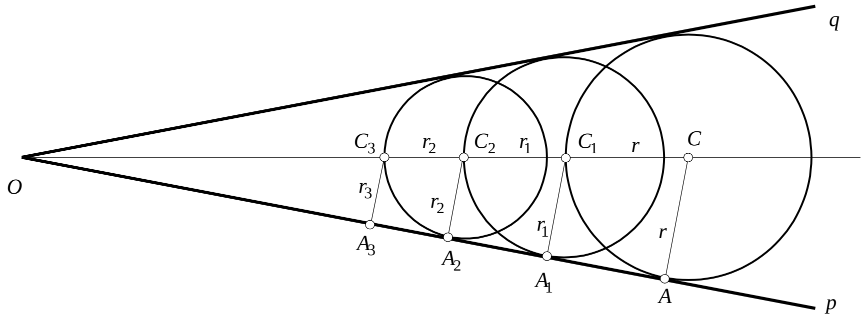
$$P = r^2\pi + r_1^2\pi + r_2^2\pi + \ldots + r_n^2\pi + \ldots = r^2\pi + r^2\pi(\frac{a-r}{a})^2 + r^2\pi(\frac{a-r}{a})^4 + \ldots + r^2\pi(\frac{a-r}{a})^{2n} + \ldots$$

$$= r^2\pi[1 + (\frac{a-r}{a})^2 + (\frac{a-r}{a})^4 + \ldots + (\frac{a-r}{a})^{2n} + \ldots]$$

Изразот во средните загради е бескраен геометриски ред чија сума е

$$S = \frac{1}{1-(\frac{a-r}{a})^2} = \frac{a^2}{r(2a-r)}.$$

Конечно, за збирот P на плоштините на сите кругови добиваме $P = \frac{a^2 r\pi}{2a-r}$.



Забелешка. Ако $\measuredangle O = 60^\circ$, тогаш $a = 2r$, па $P = \frac{4}{3}r^2\pi$.

33. Најди го бројот на сите подмножества од три различни елементи од множеството $\{2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2000}\}$ така што тие елементи се последователни членови на растечка геометриска прогресија.

Решение. Нека трите броеви од множеството $\{2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2000}\}$ се $2^a, 2^b, 2^c$, каде $1 \le a < b < c \le 2000$. За да овие броеви формираат растечка геометриска прогресија потребно е $\frac{2^b}{2^a} = \frac{2^c}{2^b}$, односно $2^{b-a} = 2^{c-b}$, $b - a = c - b$, т.е. $c = 2b - a$. Од овде заклучуваме дека за $1 \le a < b$, можеме да најдеме c, така да трите избрани броеви формираат растечка геометриска прогресија со дополнителните услови: $b < c \le 2000$, $b < 2b - a \le 2000$, $0 < b - a < 2000 - b$. Но $b > a$, па затоа $b - a > 0$, и горните услови се еквивалентни со $b - a \le 2000 - b$, односно $a \ge 2b - 2000$, од каде $2b \le 2000$, па $b \le 1000$. Значи, за секои a, b, за кои $1 \le a < b \le 1000$, можеме да најдеме c такво да $1 \le a < b < c \le 2000$ и $2^a, 2^b, 2^c$ формираат растечка геометриска прогресија. За секој избор на b, каде $2 \le b \le 1000$ имаме $b - 1$ избори на a, па така вкупниот број на избори на a и b е $\sum_{b=2}^{1000}(b-1) = \sum_{b=1}^{999}(b-1) = \frac{999 \cdot 1000}{2} = 499500$.

Значи бројот на такви триелементни подмножества е 499500.

5. КОНВЕРГЕНТНИ НИЗИ

1. Даден е триаголник $A_1B_1C_1$ со агли $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$. Со симетралите на надворешните агли е конструиран нов триаголник $A_2B_2C_2$ со агли $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$. На ист начин од триаголникот $A_2B_2C_2$ е конструиран триаголник $A_3B_3C_3$ со агли $\alpha_3,\beta_3,\gamma_3$, итн. Да се докаже дека

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\tfrac{\pi}{3},\ \lim_{n\to\infty}\beta_n=\tfrac{\pi}{3}\ \text{и}\ \lim_{n\to\infty}\gamma_n=\tfrac{\pi}{3}.$$

Решение. Доволно е да докажеме дека

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\tfrac{\pi}{3}.$$

Направи цртеж и согледај дека

$$\alpha_2=\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{\alpha_1}{2}=\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\tfrac{\pi}{3}).$$

Според тоа, имаме

$$\alpha_n=\tfrac{\pi}{3}-\tfrac{1}{2}(\alpha_{n-1}-\tfrac{\pi}{3}),$$

за секој $n\in\mathbb{N}$. Значи, низата

$$\alpha_1-\tfrac{\pi}{3},\ \alpha_2-\tfrac{\pi}{3},\ \alpha_3-\tfrac{\pi}{3},...,\ \alpha_n-\tfrac{\pi}{3},\ ...$$

е геометриска прогресија со прв член $\alpha_1-\frac{\pi}{3}$ и коефициент $-\frac{1}{2}$, па имаме

$$\alpha_n=\tfrac{\pi}{3}+(-\tfrac{1}{2})^n(\alpha_1-\tfrac{\pi}{3}),$$

од каде што добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\frac{\pi}{3}$.

2. Определи ги сите реални броеви c за кои низата дефинирана со равенствата $a_0=0,\ a_{n+1}=a_n^2+c$ е ограничена.

Решение. Следните тврдења се докажуваат со индукција:

- Ако $c\in[0,\frac{1}{4}]$, тогаш $a_n\le\frac{1}{2}$.
- Ако $c\in[-2,0]$, тогаш $c\le a_n\le -c$.
- Ако $c>\frac{1}{4}$, тогаш $a_{n+1}>a_n$.
- Ако $c<-2$, тогаш $a_{n+1}>a_n>-c$, за $n\ge 2$.

Во третиот случај равенката $x=x^2+c$ нема реални корени, па значи низата $\{a_n\}$ не е конвергентна, од каде следува дека $a_n\to\infty$. Истото важи и во четвртиот случај, бидејќи тогаш корените на равенката се помали од $-c$. Конечно, одговорот на задачата е $c\in[-2,\frac{1}{4}]$.

3. Определи ја вредноста на изразот

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2....}}}}-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....}}}}$$

Решение. Имаме

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\ldots}=2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}=2\,. \qquad (1)$$

Понатаму, да ја разгледаме низата $\{a_n\}$ определена со

$$a_1=\sqrt{2} \text{ и } a_{n+1}=\sqrt{2+a_n},\, n\geq 1\,.$$

Важи $a_1<2$. Нека претпоставиме дека $a_n<2$ за некој $n\geq 1$. Тогаш $a_{n+1}<\sqrt{2+2}=2$, па од принципот на математичка индукција следува дека $a_n<2$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Според тоа, оваа низа е ограничена.

Од друга страна

$$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{2}=a_1\,.$$

Нека претпоставиме дека $a_n>a_{n-1}$, за некој $n\geq 2$. Тогаш

$$2+a_n>2+a_{n-1}$$

$$\sqrt{2+a_n}>\sqrt{2+a_{n-1}}$$

$$a_{n+1}>a_n$$

Сега од принципот на математичка индукција следува дека оваа низа монотоно расте.

Но, монотона и ограничена низа е конвергентна, па затоа постои $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=a$.

Според тоа,

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+a_n}\,,$$

т.е.

$$a=\sqrt{2+a}\,,$$

$$a^2-a-2=0\,,$$

$$a=2 \text{ или } a=-1\,.$$

Но, низата е позитивна, па затоа $a=2$, што значи

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots.}}}}=2\,. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots.}}}}-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots.}}}}=2-2=0\,.$$

Забелешка. Равенството (2) може да се докаже и со помош на тригонометрија, т.е. ако се искористи дека $2+\sqrt{2}=2^2\cos^2\frac{\pi}{8}$ и се разгледува низата определена со $a_1=\sqrt{2}$ и $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, $n\geq 1$.

4. Нека е $|q|<1$. Пресметај го збирот $T_n=1+3q+5q^2+7q^3+\ldots+(2n+1)q^n$, а потоа пресметај $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$.

Решение. Ќе воведеме ознаки $S_{\circ}=\sum\limits_{k=1}^{n}q^k$ и $S_{\circ}=\sum\limits_{k=1}^{n}kq^k$. Со тоа добиваме

$$S_\circ - S_1 = q + 2q^2 + 3q^2 + ... + nq^n - (q + q^2 + q^2 + ... + q^n)$$
$$= q^2 + 2q^3 + 3q^4 + ... + (n-1)q^n$$
$$= q[q + 2q^2 + 3q^3 + ... + (n-1)q^{n-1} + nq^n - nq^n] = q(S_1 - nq^n) .$$

Значи,

$$S_1(1-q) = S_\circ - nq^{n+1}, \text{ т.е. } \quad S_1 = \frac{S_0}{1-q} - \frac{nq^{n+1}}{1-q} .$$

Сега,

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)q^k = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} kq^k + \sum_{k=1}^{n} q^k = 1 + 2S_1 + S_0 = 1 + 2(\frac{S_0}{1-q} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}) + S_0$$
$$= 1 + q\frac{1-q^n}{1-q} + 2q\frac{1-q^n}{(1-q)^2} - \frac{2nq^{n+1}}{1-q},$$

бидејќи $S_0 = q\frac{1-q^n}{1-q}$ (збир на геометриска прогресија). Од тоа што $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} nq^{n+1} = 0$, добиваме

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} (1 + q\frac{1-q^n}{1-q} + 2q\frac{1-q^n}{(1-q)^2} - \frac{2nq^{n+1}}{1-q}) = 1 + q\frac{1}{1-q} + 2q\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1+q}{(1-q)^2}$$

5. Нека $a_1 > 0$ и $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$, за $n \geq 1$. Докажи, дека

а) $a_n \geq n$, за $n \geq 2$ и

б) низата со општ член $\frac{a_n}{n}$ конвергира и определи ја нејзината граница.

Решение. а) Имаме $a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} \geq 2$. Нека за некој $n \geq 2$ важи $a_n \geq n$. Тогаш

$$a_{n+1} - n - 1 = a_n + \frac{n}{a_n} - n - 1 = \frac{(a_n-1)(a_n-n)}{a_n} \geq 0$$

и тврдењето следува од принципот на математичка индукција.

б) Нека $n \geq 2$. Од а) следува дека $a_{n+1} \leq a_n + 1$. Според тоа, $a_n \leq a_2 + n - 2$ и затоа

$$1 \leq \frac{a_n}{n} \leq 1 + \frac{a_2 - 2}{n} .$$

Според тоа, низата со општ член $\frac{a_n}{n}$ е конвергентна и нејзината граница е 1.

6. За низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ се исполнети равенствата $a_{n+1} = 2b_n - a_n$ и $b_{n+1} = 2a_n - b_n$. Докажи, дека

а) $a_{n+1} = 2(a_1 + b_1) - 3a_n$,

б) ако $a_n > 0$ за секој n, тогаш $a_1 = b_1$.

Решение. а) Од $a_{n+1} + b_{n+1} = 2b_n - a_n + 2a_n - b_n = a_n + b_n$, следува

$$a_{n+1} = 2b_n - a_n = 2(a_n + b_n) - 3a_n = 2(a_1 + b_1) - 3a_n .$$

б) Од а) следува

$$a_{n+1}-\tfrac{1}{2}(a_1+b_1)=\tfrac{3}{2}(a_1+b_1)-3a_n$$
$$a_{n+1}-\tfrac{a_1+b_1}{2}=-3(a_n-\tfrac{a_1+b_1}{2})$$

па затоа

$$a_{n+1}-\tfrac{a_1+b_1}{2}=(-3)^n(a_1-\tfrac{a_1+b_1}{2})\text{, т.е. } a_{n+1}=(-3)^n\tfrac{a_1-b_1}{2}+\tfrac{a_1+b_1}{2}\,.$$

Од $\lim\limits_{n\to\infty}3^n=+\infty$ следува дека ако $a_1>b_1$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=-\infty$, што е противречност. Аналогно, ако $a_1<b_1$, тогаш $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=-\infty$, што повторно е противречност. Значи, $a_1=b_1$.

7. Дали постои бесконечна низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ од позитивни реални броеви таква што

$$x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n}\,.$$

Решение. Од позитивноста на низата, т.е. од условот $x_n>0$, $n\in\mathbb{N}$ имаме

$$x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n}>0\,,$$

Значи $\sqrt{x_{n+1}}>\sqrt{x_n}$, $n\in\mathbb{N}$, и заради $x_{n+1},x_n>0$ со квадрирање на последното неравенство добиваме $x_{n+1}>x_n$.

Од произволноста на $n\in\mathbb{N}$ добиваме дека низата е строго монотоно растечка.

Заради последното неравенство, и од дефинцијата на низата добиваме

$$x_{n+2}=\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n}<\sqrt{x_{n+1}}<\sqrt{x_{n+2}}\,.$$

Со квадрирање на неравенството $x_{n+2}<\sqrt{x_{n+2}}$, добиваме $x_{n+2}^2<x_{+2}$, а заради позитивноста на низата добиваме $x_{n+2}<1$.

Низата $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ е строго монотона и е ограничена , па таа е и конвергентна. Бидејќи $x_n<1$ и е строго монотоно растечка, имаме $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c\le 1$. Но од равенствата

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+2}=c\,,\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{x_{n+1}}=\sqrt{c}\ \text{ и }\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{c}$$

(бидејќи $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$) добиваме

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_{n+1}}-\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n}$$
$$c=\sqrt{c}-\sqrt{c}=0\,,$$

што не е можно, бидејќи $0<c\le 1$. Значи, таква низа не постои.

8. Конечната низа $a_0,a_1,...,a_n$ е зададена на следниот начин:

$$a_0=\tfrac{1}{2},\quad a_k=a_{k-1}+\tfrac{1}{n}a_{k-1}^2\quad (k=1,2,...,n)$$

Докажи дека низата конвергира.

Решение. Ќе докажеме дека $1-\frac{1}{n}<a_n<1$, па од теоремата за три низ ќе следува дека низата конвергира.

Од дефиницијата на низата следува дека $\frac{1}{2}=a_0<a_1<...<a_n$. Равенството $a_k=a_{k-1}+\frac{1}{n}a_{k-1}^2$ е еквивалентно со равенството $\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}=\frac{1}{n+a_{k-1}}$.

Од позитивноста на низата и од $\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}=\frac{1}{n+a_{k-1}}$ следува дека

$$\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}<\frac{1}{n},\ k=1,...,n\,.$$

Со собирање на сите неравенства $\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}<\frac{1}{n}$, $k=1,...,n$, се добива $\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}<1$, односно $a_n<1$. Со тоа десното неравенство е покажано.

Да забележиме дека од $\frac{1}{2}=a_0<a_1<...<a_n$ следува

$$\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}>\frac{1}{n+1},\ k=1,...,n\,.$$

Со собирање на сите неравенства $\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}>\frac{1}{n+1}$, $k=1,...,n$, се добива $\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}>\frac{n}{n+1}$, односно $a_n>\frac{n+1}{n+2}>\frac{n-1}{n}$. Со тоа е покажано и левото неравенство.

III ФУНКЦИИ

1. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА ФУНКЦИИТЕ

1. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$ и нека за секој $x\in[-1,1]$ важи $|ax^2+bx+c|\le 1$. Да се докаже дека за секој $x\in[-1,1]$ важи $|cx^2+bx+a|\le 1$.

Решение.Нека $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=cx^2+bx+a$. Очигледно е дека $|c|\le 1$, $|g(1)|=|f(1)|\le 1$ и $|f(-1)|=|g(-1)|\le 1$. Темето на параболата $g(x)$ е во точката $(p,g(p))$ каде што $p=-\frac{b}{2c}$. Ако $|p|>1$, функцијата $g(x)$ е монотона на интервалот $[-1,1]$ и задачата е решена. Затоа, нека $|p|\le 1$. Претходно да воочиме дека за произволни x и y важи

$$g(x)-g(y)=c(x^2-y^2)+b(x-y)=(x-y)[c(x+y)+b]=(x-y)\cdot 2c\cdot(\tfrac{x+y}{2}-p).$$

Можни се два случаја:

1) $0\le p<1$. Тогаш

$$|g(1)-g(p)|=|(1-p)\cdot 2c\cdot\tfrac{1-p}{2}|\le|c|\le 1,$$

па, затоа, $|g(p)|\le 2$ и $|g(x)|\le 2$ за секој $x\in[-1,1]$.

2) $-1<p<0$. Тогаш

$$|g(p)-g(-1)|=|(p+1)\cdot 2c\cdot\tfrac{-1-p}{2}|\le|c|\le 1,$$

па, затоа, $|g(p)|\le 2$ и $|g(x)|\le 2$ за секој $x\in[-1,1]$.

2. Ако важи $f_1(x)=\frac{x}{x-1}$, $f_2(x)=\frac{1}{1-x}$ и $f_{n+2}(x)=f_{n+1}(f_n(x))$ за $n\ge 1$. Пресметај $f_{2015}(2015)$.

Решение. Да ја примениме дадената рекурентна формула за неколку функции:

$$f_3(x)=1-x,\ f_4(x)=\tfrac{x}{x-1},\ f_5(x)=\tfrac{x-1}{x},\ f_6(x)=\tfrac{1}{x},\ f_7=f_1,\ f_8=f_2 \text{ итн.}$$

Забележуваме дека имаме периодично повторување, со период 6. Затоа

$$f_{2015}(x)=f_5(x) \text{ и } f_{2015}(2015)=\tfrac{2014}{2015}.$$

3. Пресметај го збирот

$$f(\tfrac{1}{2000})+f(\tfrac{2}{2000})+\ldots+f(\tfrac{1999}{2000})$$

ако $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Лесно воочуваме дека $\frac{1}{2000}+\frac{1999}{2000}=1$, па затоа наоѓаме $f(1-x)$; имаме:

$$f(1-x)=\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4}{4^x}+2}=\frac{2}{2+4^x}$$

Тогаш

$$f(1-x)+f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{2+4^x}=\frac{4^x+2}{4^x+2}=1$$

За бараниот збир, да го означиме со S, наоѓаме:

$$S=[f(\tfrac{1}{2000})+f(\tfrac{1999}{2000})]+...+[f(\tfrac{999}{2000})+f(\tfrac{1001}{2000})]+f(\tfrac{1000}{2000})$$

$$=\underbrace{1+1+...+1}_{999\text{-пати}}+f(\tfrac{1}{2})=999+\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}+2}=999+\tfrac{1}{2}=999,5.$$

4. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е определена со $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}$, $x\in\mathbb{R}$. Пресметај $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2016)$.

Решение. Дадената функција ја трансформираме на следниот начин:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2})(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{x+1-(x-1)}=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}).$$

Значи $f(x)=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})$. Сега имаме

$$2f(1)=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{0}$$

$$2f(2)=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{1}$$

....

$$2f(2014)=\sqrt[3]{2015}-\sqrt[3]{2013}$$

$$2f(2015)=\sqrt[3]{2016}-\sqrt[3]{2014}$$

$$2f(2016)=\sqrt[3]{2017}-\sqrt[3]{2015}$$

Собирајќи ги горните равенства, добиваме

$$f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2016)=\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{2017}+\sqrt[3]{2016}-1).$$

5. Определи го $f_n(x)=f(f(...(f(x))...))$ во вид $f_n(x)=F(x,n)$, ако

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Решение. Непосредно се добива:

$$f_2(x)=f(f(x))=f(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

Нека претпоставиме дека $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. Тогаш

$$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))=f(\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}})=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}}{\sqrt{1+(\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}})^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+nx^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}}{\sqrt{\frac{1+nx^2+x^2}{1+nx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}.$$

Според принципот на математичка индукција имаме

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}},\ n\in\mathbb{N},\ x\in\mathbb{R}.$$

6. Докажи дека функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, за која важи

$$f(x^2)-[f(x)]^2\geq\frac{1}{4}$$

не е инјекција, т.е. дека постојат $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $x_1\neq x_2$ такви што $f(x_1)=f(x_2)$.

Решение. Бидејќи даденото тврдење важи за секој $x\in\mathbb{R}$, важи и за $x=0$ и $x=1$. За $x=0$ добиваме $f(0)-(f(0))^2\geq\frac{1}{4}$, односно $(f(0)-\frac{1}{2})^2\leq 0$, од каде $f(0)=\frac{1}{2}$. За $x=1$ добиваме $f(1)-(f(1))^2\geq\frac{1}{4}$, односно $(f(1)-\frac{1}{2})^2\leq 0$, од каде $f(1)=\frac{1}{2}$. Следува дека $f(0)=f(1)$, односно дадената функција не е инјективна.

7. Нека $\mathbb{R}$ е множеството реални броеви, а $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција за која се исполнети следниве услови:

а) за било кои реални броеви x и y важи

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

б) постои единствен реален број $x_\circ$ таков што

$$f(x_0)=1987.$$

Докажи: ако $f(x)=f(y)$, тогаш $x=y$, т.е. функцијата е инјективна.

Решение. Според првиот услов на задачата, имаме

$$f(x_0)=f(x_0+0)=f(x_0)+f(0),$$

од каде следува $f(0)=1$. Оттука

$$1=f(x+(-x))=f(x)f(-x),$$

од каде следува дека за секој x, $f(x)\neq 0$ и $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$. Сега, нека $f(x)=f(y)$, односно $\frac{f(x)}{f(y)}=1$. Од овде и заради претходниот заклучок добиваме

$$\begin{aligned}
&f(x)f(-y)=1\\
&f(x-y)=1\\
&f(x_0)f(x-y)=1987\\
&f(x_0+x-y)=1987.
\end{aligned}$$

Бидејќи постои единствен број x_0 така што $f(x_0)=1987$, добиваме

$$x_0+x-y=x_0,$$

односно $x=y$.

8. Нека $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ е биекција. Докажи дека постојат $a,b,c\in\mathbb{N}_0$ такви што $a<b<c$ и $f(a)+f(c)=2f(b)$.

Решение. Нека $a=0$ и b е најмалиот природен природен број за кој што важи $f(b)>f(a)$. Да го разгледаме бројот $f(c)=2f(b)-f(a)$. Од

$$f(c)=f(b)+f(b)-f(a)>f(b)>f(a)$$

следува дека $c>b$ (b е најмалиот природен број таков што $f(b)>f(a)$). Следствено $a<b<c$ и $f(a)+f(c)=2f(b)$.

9. Даден е природен број k. Нека $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ е биекција таква што за секои $i,j\in\mathbb{Z}$ такви што $|i-j|\leq k$ важи $|f(i)-f(j)|\leq k$. Докажи, дека за секои $i,j\in\mathbb{Z}$ важи $|f(i)-f(j)|=|i-j|$.

Решение. За $k=1$ тврдењето е тривијално. Нека $k>2$. Интервал со должина k го нарекуваме множеството од облик $\{x,x+1,...,x+k\}$, $x\in\mathbb{Z}$. Два цели броја x и y се последователни ако и само ако постојат интервали I_1 и I_2 со должина k такви што $I_1\cap I_2=\{x,y\}$. Меѓутоа, според условот на задачата $f(I_1)$ и $f(I_2)$ се исто така интервали со должина k, па како $\{f(x),f(y)\}=f(I_1)\cap f(I_2)$, следува дека $f(x)$ и $f(y)$ се последователни броеви. Оттука следува дека

$$|f(x+1)-f(x)|=1\text{, за } x\in\mathbb{Z}.$$

Конечно, ако се искористи инјективноста на пресликувањето f со едноставна индукција по n се добива дека

$$|f(x+n)-f(x)|=n,$$

што е еквивалентно со тврдењето на задачата.

10. Нека $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е сурјекција, $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е инјекција и $f(n)\geq g(n),\ \forall n\in\mathbb{N}$. Докажи дека $f(n)=g(n),\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Решение. Ќе ја користиме следнава теорема: Секое непразно подмножество на множеството на природни броеви содржи најмал елемент.

Да претпоставиме дека постои $a\in\mathbb{N}$ таков што $f(a)\neq g(a)$. Тогаш множеството $A=\{n\,|\,n\in\mathbb{N}, f(n)\neq g(n)\}$ е непразно. Нека $B=\{g(n)\,|\,n\in A\}$ и нека $g(b)$ е најмалиот елемент во B, каде што $b\in A$. Од условот на задачата следува $g(b)\leq f(b)$, а од $b\in A$ следува дека $f(b)\neq g(b)$. Добиваме дека $g(b)<f(b)$. Бидејќи f е сурјекција, постои $c\in\mathbb{N}$ таков што

$$f(c)=g(b)<f(b) \tag{1}$$

Да забележиме дека $c\neq b$. Бидејќи g е инјекција, важи

$$g(c)\neq g(b)=f(c) \tag{2}$$

Од (2) следува дека $c\in A$ и

$$g(c)<f(c)=g(b) \tag{3}$$

Сега (3) противречи на претпоставката дека $g(b)$ е најмалиот елемент во B.

Значи, нашата претпоставка не е точна и заклучуваме дека $f=g$.

11. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ги задоволува условите:

$$|f(a)-f(b)|\leq|a-b| \text{ и } f(f(f(0)))=0$$

Докажи дека $f(0)=0$.

Решение. Заради поедноставување на означувањето, ќе ја користиме ознаката

$$f^k(x)=\underbrace{f(f(...f}_{k-\text{пати}}(x)....)).$$

Со вака воведената ознака, со користење на условите од задачата добиваме

$$|f(0)|=|f(0)-0|\geq|f^2(0)-f(0)|\geq|f^3(0)-f^2(0)|=|f^2(0)|$$

и

$$|f^2(0)|=|f^2(0)-0|\geq|f^3(0)-f(0)|=|f(0)|.$$

Од последните две неравенства добиваме $|f(0)|=|f^2(0)|$.

Сега имаме два случаи.

1) $f(0)=f^2(0)$. Тогаш

$$0=f(0)-f^2(0)\geq|f^2(0)-f^3(0)|=|f^2(0)|,$$

па според тоа $f(0)=f^2(0)=0$.

2) $f(0)=-f^2(0)$. Тогаш, од условите на задачата имаме

$$|f(0)|=|f(0)-0|\geq|f^2(0)-f(0)|=2|f(0)|.$$

Од последното неравенство едноставно се гледа дека $|f(0)|\leq 0$, т.е. $f(0)=0$.

Од 1) и 2) добиваме дека $f(0)=0$.

12. Нека $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ е функција која ги исполнува следните услови:

- f е строго растечка
- $f(x)>-\frac{1}{x}$ за секој реален број $x>0$
- $f(x)f(f(x)+\frac{1}{x})=1$ за секој реален број $x>0$.

Определи ја вредноста $f(1)$.

Решение. Нека е $f(1)=t$. За $x=1$, од третата особина која ја задоволува функцијата имаме $tf(t+1)=1$, па според тоа $t\neq 0$ и $f(t+1)=\frac{1}{t}$. Ако замениме $x=t+1$, добиваме

$$f(t+1)f(f(t+1)+\tfrac{1}{t+1})=1,$$

па според тоа

$$f(\tfrac{1}{t}+\tfrac{1}{t+1})=t=f(1).$$

Бидејќи f е строго монотоно растечка функција, добиваме дека $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}=1$, т.е. бараната вредност за t е решение на равенката $t^2-t-1=0$. Нејзини решенија се $t_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Ако е $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$, тогаш би имале

$$1<t=f(1)<f(1+t)=\tfrac{1}{t}<1.$$

Заради добиената контрадикција $f(1)=t=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Да забележиме дека $f(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2x}$ е функција која ги задоволува условите од задачата.

13. За неконстантните функции $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ важи

$$f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y) \quad \text{и} \quad g(x+y)=g(x)g(y)-f(x)f(y).$$

Пресметај ги $f(0)$ и $g(0)$.

Решение. Во равенствата да ставиме $x=y=0$. Добиваме

$$f(0)=2f(0)g(0) \text{ и } g(0)=g(0)^2-f(0)^2.$$

Ако $f(0)\neq 0$ од првата равенка добиваме $g(0)=\frac{1}{2}$ и заменувајќи во втората имаме

$$f(0)^2=g(0)^2-g(0)=-\frac{1}{4},$$

што не е можно бидејќи $f(0)^2>0$ за $f(0)\neq 0$. Значи $f(0)=0$. Од

$$g(0)=g(0)^2-f(0)^2$$

добиваме $g(0)=g(0)^2$ и оттука $g(0)=0$ или $g(0)=1$. Ако $g(0)=0$ ставајќи $y=0$ во равенката

$$f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y)$$

добиваме

$$f(x)=f(x)g(0)+g(x)f(0)=0$$

што противрчи на условот на задачата . Значи мора $g(0)=1$.

14. Нека f е функција која го задоволува равенството

$$f(a-b)+f(a+b)=2f(a)+2f(b),$$

за секои $a,b\in\mathbb{R}$. Докажи дека f е парна функција.

Решение. Равенството кое го исполнува f е исполнето за произволни $a,b\in\mathbb{R}$. Според тоа, таа е определена на множството реални броеви. Значи, D_f е симетрично множество. Даденото равенство можеме да го запишеме во облик

$$f(b)=\frac{f(a-b)+f(a+b)-2f(a)}{2}.$$

Сега,

$$f(-b)=\frac{f[a-(-b)]+f[a+(-b)]-2f(a)}{2}=\frac{f(a+b)+f(a-b)-2f(a)}{2}$$
$$=\frac{f(a-b)+f(a+b)-2f(a)}{2}=f(b).$$

Според дефинцијата за парност, f е парна функиција.

15. Нека $P(x), \deg P=2013$ е полином со реални коефициенти таков што за секои $x,y,z\in\mathbb{R}$ за кои $P(x)+P(y)+P(z)=0$ важи

$$P(x^3)+P(y^3)+P(z^3)=3P(x)P(y)P(z). \qquad (1)$$

Докажи, дека

а) $P(x)\neq 0$, ако $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$,

б) P е непарна функција.

Решение. а) Нека $P(a)=0$, за некој $a\in\mathbb{R}$. Тогаш од (1) следува

$$3P(a^3)=3P(a)^3=0$$

и со индукција добиваме дека $P(a^{3^n})=0$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Но, P има најмногу 2013 корени (нули), па затоа последното е можно ако и само ако $a=0$ или $a=\pm 1$.

б) Од $\deg P=2013$ следува дека постои $a\in\mathbb{R}$ таков што $P(a)=0$. Понатаму, од а) следува дека $a\in\{-1,0,1\}$, што значи дека $a^3=a$. За секој $x\in\mathbb{R}$ можеме да избереме $y\in\mathbb{R}$ така да важи $P(x)=-P(y)$. За $z=a$ од (1) добиваме $P(x^3)=-P(y^3)$. Повторно по индукција добиваме $P(x^{3^n})=-P(y^{3^n})$. Ако $x>1$ имаме $\lim\limits_{n\to\infty} x^{3^n}=\infty$, па затоа и $|y|>1$. Сега, од $\lim\limits_{|t|\to\infty}\frac{P(t)}{t}\neq 0$ и $P(x^{3^n})=-P(y^{3^n})$ следува

$$\lim_{n\to\infty}(\tfrac{x}{y})^{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{P(x^{3^n})}{y^{3^n}}}{\frac{P(x^{3^n})}{x^{3^n}}}=-\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(y^{3^n})}{y^{3^n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{P(x^{3^n})}{x^{3^n}}}=-1,$$

па затоа $x=-y$, што значи дека $P(x)=-P(-x)$, за $x>-1$, а оттука следува и за секој $x\in\mathbb{R}$.

16. Функцијата f има својство да за произволно $x\in\mathbb{R}$ и фиксен број $a\in\mathbb{R}$ е исполнето равенството

$$f(x+a)=\tfrac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

Докажи дека таа е периодична функција.

Решение. Од равенството $f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ добиваме

$$f(x+2a)=f(x+a+a)=\tfrac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=\frac{\frac{2}{1-f(x)}}{-\frac{2f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)},$$

$$f(x+3a)=f(x+2a+a)=\tfrac{1+f(x+2a)}{1-f(x+2a)}=\frac{1-\frac{1}{f(x)}}{1+\frac{1}{f(x)}}=\tfrac{f(x)-1}{f(x)+1},$$

$$f(x+4a)=f(x+3a+a)=\tfrac{1+f(x+3a)}{1-f(x+3a)}=\frac{1-\frac{f(x)-1}{f(x)+1}}{1+\frac{f(x)-1}{f(x)+1}}=\tfrac{2f(x)}{2}=f(x).$$

Од произволноста на x добиваме дека функцијата е периодична со периода $4a$.

Произволна функција $f:[0,a)\to\mathbb{R}$, која не прима вредност 1, може периодично да се продолжи (со периода $4a$) на целата реална права.

17. Дадена е функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква што $f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x)$. Докажи дека f е периодична функција.

Решение. Од даденото равенство што го исполнува функцијата f имаме :

$$f(x+2)+f(x)=\sqrt{2}f(x+1)=\sqrt{2}(\sqrt{2}f(x)-f(x-1))=2f(x)-\sqrt{2}f(x-1),$$

односно $f(x+2)=f(x)-\sqrt{2}f(x-1)$. Понатаму,

$$\begin{aligned}f(x+4)&=f(x+2)-\sqrt{2}f(x+1)=f(x)-\sqrt{2}(f(x-1)+f(x+1))\\&=f(x)-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}f(x)=f(x)-2f(x)=-f(x).\end{aligned}$$

Од ова пак следува дека, $f(x+8)=-f(x+4)=-(-f(x))=f(x)$. Значи, функцијата f е периодична со период 8.

18. Ако $a>0$, одреди ја најмалата вредност на функцијата $f(x)=x^5+\frac{a}{x}$ за $x>0$.

Решение. Имаме

$$f(x)=x^5+\tfrac{a}{5x}+\tfrac{a}{5x}+\tfrac{a}{5x}+\tfrac{a}{5x}+\tfrac{a}{5x}\geq 6\sqrt[6]{x^5\cdot(\tfrac{a}{5x})^5}=6\sqrt[6]{(\tfrac{a}{5})^5}\ .$$

Најмала вредност на функцијата се добива кога во горното неравенство важи знак за равенство, т.е. кога $x^5=\frac{a}{5x}\Leftrightarrow x^6=\frac{a}{5}\Leftrightarrow x=\sqrt[6]{\frac{a}{5}}$, и изнесува $f(\sqrt[6]{\frac{a}{5}})=6\cdot\sqrt[6]{(\frac{a}{5})^5}$.

19. За функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ важи: за произволни x и y такви што $x>y$ точно е неравенството $(f(x))^2\leq f(y)$. Докажи дека множеството вредности на функцијата f се содржи во интервалот $[0,1]$.

Решение. Од условот следува, дека $f(y)\geq(f(y+1))^2\geq 0$, т.е. сите вредности на функцијата се ненегативни.

Нека претпоставиме дека $f(a)=b>1$ за некои a и b. Нека $c<a$ е произволен број и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго монотоно растечка низа која конвергира кон a, при што $c<x_n<a$ за секој n (на пример $x_n=a-\frac{1}{tn}$ за некој доволно голем t. Тогаш

$$f(c)\geq(f(x_1))^2\geq(f(x_2))^4\geq...\geq(f(x_n))^{2^{n+1}}\geq(f(a))^{2^{n+2}}=b^{2^{n+2}}$$

т.е. $f(c)\geq b^{2^{n+2}}$, за секој природен број n. Последното е противречност бидејќи $f(c)$ е конечен број, а $b^{2^{n+2}}\to\infty$, кога $n\to\infty$. Од добиената противречност следува дека $f(x)\leq 1$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

20. Најди ги сите можни вредности на изразот $\frac{t_a+t_b}{a+b}$, каде a и b се страни на триаголник, а t_a и t_b се соодветните тежишни линии во триаголникот.

Решение. Нека A_1 и B_1 се средините на страните BC и AC, соодветно, и T е тежиштето на $\triangle ABC$. Од $\triangle BA_1T$ и $\triangle ATB_1$ следува дека $\frac{t_a}{3}+\frac{2t_b}{3}>\frac{a}{2}$ и $\frac{t_b}{3}+\frac{2t_a}{3}>\frac{b}{2}$.

Ако ги собереме последните две неравенства добиваме $t_a + t_b > \frac{a+b}{2}$ односно $\frac{t_a+t_b}{a+b} > \frac{1}{2}$. За истте триаголници важат и неравенствата $\frac{t_a}{3} + \frac{a}{2} > \frac{2t_b}{3}$ и $\frac{t_b}{3} + \frac{b}{2} > \frac{2t_a}{3}$, од каде со нивно собирање наоѓаме $\frac{a+b}{2} > \frac{t_a+t_b}{3}$ т.е. $\frac{t_a+t_b}{a+b} < \frac{3}{2}$. Според тоа, $\frac{t_a+t_b}{a+b} \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Ќе докажеме дека разгледуваниот израз ја прима секоја вредност од интервалот $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Да разгледаме правоаголен триаголник со хипотенуза $a = 2$ и катета $b = 2t, t \in (0,1)$. Имаме

$$\frac{t_a+t_b}{a+b} = f(t) = \frac{1+\sqrt{4-3t^2}}{2(1+t)}, t \in (0,1) \text{ и } f(0) = \frac{3}{2}, f(1) = \frac{1}{2}.$$

Бидејќи $f(t)$ е непрекината функција во интервалот $(0,1)$ заклучуваме дека таа ја прима секоја вредност од интервалот $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

21. Нека $n \geq 2$ е природен број и $f(x) = (x+a)(x+b)$, каде a и b се позитивни реални броеви. Определи ја најголемата вредност на

$$F = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \min\{f(x_i), f(x_j)\},$$

каде $x_1, x_2, ..., x_n$ се ненегативни реални броеви чиј збир е еднаков на 1.

Решение. Бидејќи

$$\begin{aligned}\min\{f(x_i), f(x_j)\} &= \min\{(x_i+a)(x_i+b), (x_j+a)(x_j+b)\}\\ &\leq \sqrt{(x_i+a)(x_i+b)(x_j+a)(x_j+b)}\\ &\leq \frac{1}{2}((x_i+a)(x_j+b) + (x_j+a)(x_i+b))\\ &= x_i x_j + \frac{1}{2}(x_i+x_j)(a+b) + ab,\end{aligned}$$

добиваме

$$\begin{aligned}F &\leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j + \frac{a+b}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i + x_j) + \binom{n}{2} ab\\ &= \frac{1}{2}[(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2] + \frac{a+b}{2}(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i + \binom{n}{2} ab\\ &= \frac{1}{2}(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2) + \frac{a+b}{2}(n-1) + \binom{n}{2} ab\\ &\leq \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2) + \frac{a+b}{2}(n-1) + \binom{n}{2} ab\\ &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{n-1}{2}(a+b) + \frac{n(n-1)}{2} ab\\ &= \frac{n-1}{2}(\frac{1}{n} + a + b + nab).\end{aligned}$$

Во користените неравенства знаци за равенства важат ако и само ако $x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{1}{n}$, па затоа најголемата вредност на F е $\frac{n-1}{2}(\frac{1}{n} + a + b + nab)$

22. За секој природен број n важи $f(n+1)=\frac{2f(n)+3}{f(n)+2}$ и $f(0)=\frac{1}{4}$. Докажи дека за секој природен број n, важи $0<f(n)<\sqrt{3}$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. Јасно, $0<f(1)<\sqrt{3}$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n=k$, т.е. $0<f(k)<\sqrt{3}$. Имаме, $f(k+1)=2-\frac{1}{f(k)+2}$. Оттука, имајќи предвид дека $0<f(k)<\sqrt{3}$, добиваме дека $0<2-\frac{1}{2}<f(k+1)<2-\frac{1}{\sqrt{3}+2}=\sqrt{3}$, т.е. тврдењето важи и за $n=k+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека $0<f(n)<\sqrt{3}$, за секој природен број n.

23. Дадена е функцијата $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ за која важи

а) $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[0,1]$, б) $f(1)=1$

в) ако $x_1,x_2\in[0,1]$ и $x_1+x_2\leq 1$, тогаш

$$f(x_1)+f(x_2)\leq f(x_1+x_2).$$

Докажи дека за секој $x\in[0,1]$ важи $f(x)\leq 2x$.

Решение. Забележуваме дека за $x_1=x_2=0$ од неравенството под в) следува дека $2f(0)\leq f(0)$, т.е. $f(0)\leq 0$. Од тука и од а) следува дека $f(0)=0$, значи неравенството $f(x)\leq 2x$ важи за $x=0$.

Ако во в) ставиме $x_1=x, x_2=1-x$, добиваме

$$f(x)\leq f(x)+f(1-x)\leq f(x+1-x)=f(1)=1,$$

што покажува дека $f(x)\leq 1$, за секој $x\in[0,1]$.

Нека сега $x\in(0,\ \frac{1}{2}]$. Тогаш, $2x\in(0,1]$, па од в) за $x_1=x_2=x$ следува дека $2f(x)\leq f(2x)$, односно

$$\frac{f(x)}{x}\leq\frac{f(2x)}{2x}, \text{ за секој } x\in(0,\tfrac{1}{2}]. \tag{1}$$

Да го докажеме неравенството $f(x)\leq 2x$, за $x\in(0,1]$, приметуваме дека секој број $x\in(0,1]$ припаѓа во некој од полуотворените интервали од видот $(2^{-n-1},2^{-n}]$, каде $n=0,1,2,\ldots$.

Ако $x\in(\frac{1}{2},1]$, т.е. ако $n=0$, тогаш $\frac{f(x)}{x}\leq\frac{1}{x}<2$, затоа што $f(x)\leq 1$ и $x>\frac{1}{2}$. И тогаш, бараното неравенство важи.

Нека $x\in(0,\frac{1}{2}]$, т.е. нека $n\geq 1$. Тогаш, $x<2x<2^2x<\cdots<2^{n-1}x\leq\frac{1}{2}<2^n x$, за некој $n\in\mathbb{N}$. Тогаш, сторед (1)

$$\frac{f(x)}{x}\leq\frac{f(2x)}{2x}\leq\cdots\leq\frac{f(2^{n-1}x)}{2^{n-1}x}\leq\frac{f(2^n x)}{2^n x}<2,$$

при што последното неравенство во претходната низа неравенства важи затоа што во неа $2^n x>\frac{1}{2}$, а во тој случај веке покажавме дека важи бараното неравенство. Со тоа, тврдењето на задачата е докажано.

24. Во секоја точка од рамнината со целобројни координати е запишан по еден реален број од интервалот $(0,1)$. Познато е дека бројот запишан во дадена точка е еднаков на аритметичката средни на броевите запишани во четирите најблиски точки. Докажи, дека сите запишани броеви се еднакви.

Решение. Нека $f(x,y)$ е бројот запишан во точката со координати (x,y). Тогаш

$$f(x,y)=\frac{f(x+1,y)+f(x-1,y)+f(x,y+1)+f(x,y-1)}{4}.$$

Нека претпоставиме дека сите броеви не се еднакви. Тогаш постојат две точки на растојание 1, во кои броевите се различни и после евентуална ротација можеме да сметаме дека $f(x_0+1,y_0)>f(x_0,y_0)$, за некои $x_0,y_0\in\mathbb{Z}$. Тогаш за $g(x,y)=f(x+1,y)-f(x,y)$ следува дека $M=\sup\limits_{z\in\mathbb{Z}} g(x)\in(0,1]$ и

$$g(x,y)=\frac{g(x+1,y)+g(x-1,y)+g(x,y+1)+g(x,y-1)}{4}.$$

Во случајот, ако $g(a,b)\geq M-\varepsilon$, каде $\varepsilon>0$, тогаш

$$\begin{aligned}g(a+1,b)&=4g(a,b)-g(a-1,b)-g(a,b+1)-g(a,b-1)\\&\geq 4(M-\varepsilon)-3M=M-4\varepsilon\end{aligned}$$

и по индукција добиваме $g(a+n,b)\geq M-4^n\varepsilon$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Сега нека избереме $n\geq\frac{2}{M}$, $\varepsilon\in(0,\frac{M}{2\cdot 4^{n-1}})$ и $a,b\in\mathbb{Z}$ такви што $g(a,b)\geq M-\varepsilon$. Тогаш

$$1>f(a+n,b)>f(a+n,b)-f(a,b)=\sum_{k=0}^{n-1} g(a+k,b)\geq n\frac{M}{2}\geq 1,$$

што е противречност.

25. За функцијата $f:[0,1]\to[0,1]$ определена е низа од функции $f^1(x)=f(x)$ и

$$f^{n+1}(x)=f(f^n(x)),\text{ за } x\in[0,1] \text{ и } n=1,2,3,\dots .$$

За некое $n\in\mathbb{N}$ и за $x,y\in[0,1]$ е исполнето

$$|f^n(x)-f^n(y)|<|x-y|.$$

Докажи дека постои единствен $x_0\in[0,1]$ таков што $f(x_0)=x_0$.

Решение. Дадениот услов означува дека за фиксниот природен број $n\in\mathbb{N}$ функцијата f^n е непрекината функција. Разликата $g(x)=f^n(x)-x$ е функција која како разлика од непрекинати функции е непрекината функција. Таа ги задоволува условите

$$g(0)=f^n(0)-0=f^n(0)\geq 0,$$

$$g(1)=f^n(1)-1\leq 1-1=0.$$

Заради непрекинатоста на g постои $x_0\in[0,1]$ таков што $g(x_0)=0$, односно $f^n(x_0)=x_0$. Значи, функцијата $f^n:[0,1]\to[0,1]$ има фиксна точка. Ќе покажеме дека таа е фиксна точка и за f и уште повеќе дека е единствена фиксна точка.

Нека претпоставиме дека $f(x_0)=x_1$ и $x_1\neq x_0$. Јасно е дека

$$f^n(x_1)=f^n(f(x_\circ))=f(f^n(x_\circ))=f(x_\circ)=x_1,$$

односно и x_1 е фиксна точка за f^n. Од друга страна

$$|x_0-x_1|=|f^n(x_0)-f^n(x_1)|<|x_0-x_1|,$$

што претставува контрадикција. Значи, $x_0=x_1$.

Ако претпоставиме дека постои и друга фиксна точка, различна од $x_\circ$, тогаш таа е фиксна точка и за f^n. Но тогаш како и во првиот дел на задачата ќе добиеме контрадикција. Со друг зборови f има единствена фиксна точка.

26. За множеството $X=\{1,2,...,100\}$ разгледуваме функција $f:X\to X$, за која се исполнето следниве два услови:

1) $f(x)\neq x$, за секој $x\neq X$;

2) $A\cap f(A)\neq\varnothing$ за секое множество $A\subset X$, за кое $|A|=40$.

Определи го најмалиот природен број k, за кој за секоја таква функција постои множество $B\subseteq X$, за кое $|B|=k$ и $B\cup f(B)=X$.

Забелешка. За подмножество T на X дефинираме $f(T)=\{x\,|\,\exists t, x=f(t)\}$.

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f:X\to X$ дефинирана со

$$f(3i-2)=3i-1,\ f(3i-1)=3i,\ f(3i)=3i-2,\ i=1,2,...,30,$$
$$f(j)=100,\ 91\leq j\leq 99,\ f(100)=99.$$

Очигледно оваа функција го задоволува условот 1). За секое множество $A\subset X$, за кое $|A|=40$ имаме:

i) или постои $i, 1\leq i\leq 30$, за кој $|A\cap\{3i-2,3i-1,3i\}|\geq 2$ и тогаш $A\cap f(A)\neq\varnothing$,

ii) или $91,92,93,...,100\in A$ и тогаш $A\cap f(A)\neq\varnothing$.

Значи, и во двата случаја f го задоволува условот 2). За множество $B\subseteq X$, за кое $B\cup f(B)=X$ имаме $|B\cap\{3i-2,3i-1,3i\}|\geq 2$ за секој $i, 1\leq i\leq 30$, како и $\{91,92,...,98\}\subset B$ и $B\cap\{99,100\}\neq\varnothing$. Значи, $|B|\geq 69$.

Ќе докажеме, дека за секоја функција f која ги задоволува дадените услови, постои множество $B\subseteq X$, за кое $|B|\leq 69$ и $B\cup f(B)=X$.

Меѓу сите подмножества $U\subseteq X$, за кои $U\cup f(U)=X$ (егзистенцијата на барем едно такво множество следува од условот 1)) да избереме множество за кое $|U|$ е можно најголем. Ако $V=f(U)$ и $W=X\setminus(U\cup V)$, тогаш U,V и W се по парови дисјунктни множества и $X=U\cup V\cup W$. Од условите $|U|\leq 39, |V|\leq 39$ и од 2) следува:

i) $f(w)\in U$ за секој $w\in W$, Во спротивен случај за множеството $U'=U\cup\{w\}$ имаме $f(U)=V,\quad f(w)\notin U,\ f(w)\neq w$, од каде следува $U'\cap f(U')=\varnothing$. Последното противречи на максималноста на $|U|$.

ii) $f(w_1)\neq f(w_2)$, за секои $w_1,w_2\in W, w_1\neq w_2$. Во спротивен случај за $u=f(w_1)=f(w_2)$ од 1) имаме $u\in U$. Тогаш за множеството $U'=(U\setminus\{u\})\cup\{w_1,w_2\}$ имаме $f(U')\subseteq V\cup\{u\}$, $U'\cap(V\cup\{u\})=\varnothing$, што противречи на максималноста на $|U|$.

iii) $f(u_i)\neq f(u_j)$ за $1\leq i<j\leq m$. Во спротивен случај нека $v=f(u_i)=f(u_j)\in V$ и $U'=(U\setminus\{u_i\})\cup\{w_i\}$. Тогаш $f(U')=V\cup\{u_i\}, U'\cap f(U')=\varnothing$ и од $|f(U')|>|f(U)|$ одново добиваме противречност со максималноста на $|f(U)|$.

Според тоа, $f(u_1), f(u_2),..., f(u_m)$ се различни елементи на V. Во случајов $|V|\geq|W|$ и како $|U|\leq 39$ имаме $|V|+|W|\geq 61$ и $|V|\geq 31$. За множеството $B=U\cup W$ имаме $|B|\leq 69$ и $B\cup f(B)\supseteq B\cup V=X$.

Според тоа, бараниот број е $k=69$.

27. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е таква што

$$|f(x+y)|=|f(x)+f(y)|,$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$. Докажи, дека $f(x+y)=f(x)+f(y)$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека претпоставиме, дека постојат a и b такви што

$$f(a+b)\neq f(a)+f(b). \qquad (1)$$

Од условот на задачата следува дека $f(a+b)=-f(a)-f(b)$. Ако $f(a+b)=0$, тогаш $f(a)+f(b)=0$, па затоа $f(a+b)=f(a)+f(b)$, што противречи на изборот на a и b. Според тоа, $f(a+b)\neq 0$. Имаме

$$\begin{aligned}|f(2a+2b)|=|f(a+(a+b+b)|=|f(a)+f((a+b)+b)|\\ &=|f(a)+f(a+b)+f(b)| \text{ или } |f(a)-f(a+b)-f(b)|\\ &=0 \text{ или } |f(a)-(-f(a)-f(b))-f(b)|\\ &=0 \text{ или } 2|f(a)|.\end{aligned}$$

Освен тоа,

$$|f(2a+2b)|=|f(a+b)+f(a+b)|=|2f(a+b)|=2|f(a+b)|\neq 0,$$

па затоа $2|f(a)|=|f(2a+2b)|=2|f(a+b)|$, т.е. $|f(a+b)|=|f(a)|$. Аналогно добиваме $|f(a+b)|=|f(b)|$, па затоа $|f(a)|=|f(b)|$.

Ако $f(a)=f(b)$, тогаш

$$2|f(a)|=|f(a)+f(b)|=|f(a+b)|=|f(a)|,$$

па затоа $f(a)=0$. Сега добиваме $f(a+b)=-f(a)-f(b)=-2f(a)=0$, што е противречност. Според тоа, $f(a)=-f(b)$ и тогаш $0=|f(a)+f(b)|=|f(a+b)|$, што повторно е противречност.

Според тоа, претпоставката дека постојат a и b такви што важи (1) доведува дои противречност. Затоа, за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

28. Функцијата $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ е таква што

$$f(x+y)=f(\tfrac{x+y}{xy})+f(xy)\,, \qquad (1)$$

за секои $x,y\in(0,\infty)$. Докажи, дека $f(xy)=f(x)+f(y)$, за секои $x,y\in(0,\infty)$.

Решение. Прво ќе докажеме дека за произволни реални броеви $a,b\in(0,\infty)$ такви што $a^2b\geq 4$ важи $f(ab)=f(a)+f(b)$. За $a^2b\geq 4$ и $a,b>0$ броевите

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-\frac{4}{b}}}{\frac{2}{b}} \text{ и } y=\frac{a-\sqrt{a^2-\frac{4}{b}}}{\frac{2}{b}}$$

се позитивни и го задоволуваат условот $x+y=ab$ и $xy=b$. Ако замениме во (1) добиваме

$$f(ab)=f(x+y)=f(\tfrac{x+y}{xy})+f(xy)=f(a)+f(b)\,.$$

Нека $x,y>0$ и

$$z=\max\{\tfrac{4}{x^2y^2},\tfrac{4}{x^2y},\tfrac{4}{y^2}\}\,.$$

Тогаш $(xy)^2z\geq 4, x^2(yz)\geq 4$ и $y^2z\geq 4$, од што следува дека

$$f(xyz)=f(xy)+f(z),\ f(xyz)=f(x)+f(yz) \text{ и } f(yz)=f(y)+f(z)\,.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} f(xy)&=f(xyz)-f(z)=f(x)+f(yz)-f(z)\\ &=f(x)+(f(y)+f(z))-f(z)\\ &=f(x)+f(y). \end{aligned}$$

29. Нека $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ е функција, за која

1) $f(a)=0 \Leftrightarrow a=0$,
2) $f(ab)=f(a)f(b)$ и
3) $f(a+b)\leq 2\max\{f(a),f(b)\}$.

Докажи, дека $f(a+b)\leq f(a)+f(b)$, за секои $a,b\in[0,+\infty)$.

Решение. Со индукција по k лесно следува, дека

$$f(a_1+a_2+...+a_{2^k})\leq 2^k\max\{f(a_1),f(a_2),...,f(a_{2^k})\}\,.$$

Навистина, базата на индукцијата всушност е условот 3), а индуктивниот заклучок непосредно следува од индуктивната претпоставка и од 3).

Нека $2^{k-1}<n\leq 2^k$. Тогаш

$$\begin{aligned} f(a_1+a_2+...+a_n)&=f(a_1+a_2+...+a_n+0+0...+0)\\ &\leq 2^k\max\{f(a_1),f(a_2),...,f(a_n),f(0)\}\\ &=2^k\max\{f(a_1),f(a_2),...,f(a_n)\}\\ &\leq 2n\max\{f(a_1),f(a_2),...,f(a_n)\}, \end{aligned}$$

(во првиот ред имаме 2^k-n нули, третиот ред следува од 1) и заради изборот на k очигледно важи $2^k\leq 2n$). Ако во горното неравенство земеме $a_1=a_2=...$ $=a_n=1$, добиваме $f(n)\leq 2nf(1)$. Сега последователно добиваме

$$(f(a+b))^n = (f(a+b)^n) = f(\sum_{i=0}^{n} \tbinom{n}{i} a^i b^{n-i}) \le 2(n+1) \max_{0\le i\le n} \{ f(\tbinom{n}{i} a^i b^{n-i}) \}$$

$$= 2(n+1) \max_{0\le i\le n} \{ f(\tbinom{n}{i}) f(a)^i f(b)^{n-i} \} \le 2(n+1) \sum_{i=0}^{n} f(\tbinom{n}{i}) f(a)^i f(b)^{n-i}$$

$$\le 4(n+1) f(1) \sum_{i=0}^{n} \tbinom{n}{i} f(a)^i f(b)^{n-i} = 4(n+1) f(1)(f(a)+f(b))^n .$$

Значи,

$$f(a+b) \le \sqrt[n]{4(n+1)f(1)}(f(a)+f(b)) .$$

Сега, ако во последното неравенство земеме $n \to \infty$, тогаш бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4(n+1)f(1)} = 1 ,$$

добиваме дека

$$f(a+b) \le f(a)+f(b) ,$$

за секои $a,b \in [0,+\infty)$.

30. Функцијата $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ ги задоволува следните услови:

(i) $f(0) = f(1) = 0$

(ii) $f(\frac{a+b}{2}) \le f(a)+f(b)$ за секои $a,b \in [0,1]$.

Докажи дека равенката $f(x)=0$ има бесконечно многу решенија.

Решение. Ако во (ii) ставиме $a=b$, ќе добиеме $f(a) \le 2f(a)$, односно

$$f(a) \ge 0 \text{ за секој } a \in [0,1]. \qquad (1)$$

Ако во (ii) ставиме $a=0$, $b=1$ ќе добиеме $f(\frac{1}{2}) \le f(0)+f(1)=0$, а имајќи го предвид и (1), следува дека $f(\frac{1}{2})=0$. Понатаму ги разгледуваме интервалите $[0,\frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2},1]$. За секој од нив, f е еднаква на нула во крајните точки, па од (ii) следува $f(\frac{1}{4}) = 0 = f(\frac{3}{4})$. Со индукција по n се добива дека $f(x)=0$ за секој $x \in [0,1]$ од облик $x=\frac{m}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $m = 0,1,2,\ldots,2^n$.

31. За полиномите $A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ и $B(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$, ($a_n b_m \ne 0$) ќе велиме дека се *слични* ако се исполнети следниве услови

1) $n=m$,
2) Постои пермутација π на множеството $\{0,1,2,\ldots,n\}$ таква што $b_i = a_{\pi(i)}$, за секој $i \in \{0,1,2,\ldots,n\}$.

Нека $P(x)$ и $Q(x)$ се слични полиноми со целобројни коефициенти. Ако $P(16) = 3^{2012}$, која е најмалата можна вредност на $|Q(3^{2012})|$?

Решение. Бидејќи $3^{2012} \equiv 1 (\operatorname{mod} 5)$, важи

$$Q(3^{2012}) \equiv Q(1) = P(1) \equiv P(16) \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 5) ,$$

па затоа $|Q(3^{2012})| \geq 1$.

Ќе конструираме полиноми P и Q кои ги исполнуваат условите на задачата и за кои $Q(3^{2012}) = 1$. Полиномите ќе ги побараме во облик $P(x) = ax^2 + bx + c$ и $Q(x) = cx^2 + ax + b$. За $m = 16$ и $n = 3^{2012}$ системот

$$\begin{cases} am^2 + bm + c = n \\ cn^2 + an + b = 1 \end{cases}$$

треба да има барем едено целобројно решение (a,b,c). Од првата равенка имаме $c = n - am^2 - bm$ и ако замениме во втората равенка добиваме

$$n^2(n - am^2 - bm) + an + b = 1, \text{ т.е. } n(m^2 n - 1)a + (mn^2 - 1)b = n^3 - 1 .$$

Доволно е последната равенка да има целобројно решение (a,b), а тоа е можно ако $\mathrm{NZD}(n(m^2 n - 1), (mn^2 - 1)) \mid n^3 - 1$. Ќе покажеме дека последниот услов е исполнет. Навистина, ако $d \mid n(m^2 n - 1)$ и $d \mid (mn^2 - 1)$ тогаш

$$d \mid n(m^2 n - 1) - m(mn^2 - 1) = m - n ,$$

а оттука следува дека $d \mid mn^2 - 1 + n^2(n - m) = n^3 - 1$.

32. Множеството M е добиено од множеството $\mathbb{R}$ со бришење на конечен број реални броеви. Докажи, дека за секој природен број n постои полином $f(x)$ таков што $\deg f = n$, коефициентите на f припаѓаат на множеството M и сите n корени на f припаѓаат на множеството M.

Решение. Од условот на задачата следува дека множеството

$$T = \{|x| \in \mathbb{R}, x \notin M\}$$

е конечно и нека $\alpha = \max_{x \in T} x$. За секој реален број $k > \max\{|\alpha|, 1\}$ важи $-k \notin T$, па затоа $-k \in M$. Ќе докажеме, дека полиномот $f(x) = k(x+k)^n$ ги има саканите својства. Од $k > 1$ следува дека $\deg f = n$ и коефициентот пред x^m е еднаков на

$$k\binom{n}{m}k^{n-m} \geq k .$$

Оттука следува, дека сите коефициенти на $f(x)$ не припаѓаат на T, па затоа тие припаѓаат на множеството M. Од друга страна корените на полиномот $f(x)$ се $-k$ со кратност n, па затоа и тие припаѓаат на множеството M.

33. За полиномот $P(x)$ од n-ти степен важи $P(k) = 2^k$ за $k = 0,1,2,...,n$. Определи go $P(n+1)$.

Решение. Од Њутновата биномна формула следува

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k .$$

Ако во ова равенство ставиме $x=1$ добиваме

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Да означиме

$$a_k(x) = \frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!}$$

за k природен број и x реален број и ако s е природен број поголем од k тогаш $a_k(s)=0$. Нека

$$Q(x) = a_0(x) + a_1(x) + ... + a_n(x).$$

Имајќи го предвид $a_k(x)$ следува дека $Q(x)$ е полином од n-ти степен. За $0 \le k \le n$ важи

$$Q(k) = a_0(k) + a_1(k) + \ldots + a_k(k) + a_{k+1}(k) + \ldots + a_n(k)$$

$$= \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + ... + \binom{k}{k} + 0 + \ldots + 0 = 2^k = P(k).$$

Значи $P(x)$ и $Q(x)$ се полиноми од степен n кои се совпаѓаат во $n+1$ точка па полиномот $P(x)-Q(x)$ е полином од степен n кој има $n+1$ нула. Според тоа $P(x)-Q(x)$ е нултиот полином, односно $P(x)$ и $Q(x)$ се идентични. Значи

$$P(n+1) = Q(n+1) = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + ... + \binom{n+1}{n}$$

$$= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + ... + \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} - \binom{n+1}{n+1}$$

$$= 2^{n+1} - 1.$$

34. Докажи дека постојат бесконечно многу функции $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за кои важи $f(x) = f(1-x)$.

Решение. Нека $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е произволна функција и нека

$$f(x) = g(x) + g(1-x).$$

Тогаш за функцијата f важи $f(x) = f(1-x)$.

Сега, тврдењето следува од произволноста на функцијата g.

35. Нека $f, g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Докажи дека постојат реални броеви x и y такви што

$$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, |xy - f(x) - g(y)| \ge \tfrac{1}{4}.$$

Решение. Ако за секои $x, y \in [0,1]$ важи $|xy - f(x) - g(y)| < \frac{1}{4}$, тогаш, специјално, за $x=1$ и $y=0$ добиваме $|f(1)+g(0)| < \frac{1}{4}$, и за $x=0, y=1$ добиваме $|f(0)+g(1)| < \frac{1}{4}$ и за $x=y=0$, $|f(0)+g(0)| < \frac{1}{4}$. Од неравенството на триаголник имаме

$$|1-f(1)-g(1)| \ge 1-|f(1)+g(1)| \ge 1-(|f(1)+g(0)|+|-g(0)-f(0)|+|f(0)+g(1)|)$$

$$> 1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4},$$

што е противречност.

36. Нека $N\in\mathbb{N}$ и $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ако за секој $h\in\mathbb{R}$ важи $f(x)\neq f(x+h)$ за најмногу $2N$ точки x, тогаш $f(x)$ е константна функција, освен за најмногу N точки x. Докажи!

Решение. За секој $x\in\mathbb{R}$ ја разгледуваме низата $u_n(x)=f(x+n)$. Бидејќи $f(x+1)\neq f(x)$ во конечно многу точки, постои $N_x\in\mathbb{N}$ таков што за $n\geq N_x$ важи $u_n(x)=c_x$. Ако $c_x\neq c_y$ за $x\neq y$, тогаш за $n\geq\max\{N_x,N_y\}$ и $h=y-x$ имаме

$$f(h+(x+n))=f(y+n)=c_y\neq c_x=f(x+n)$$

во бесконечно многу точки од облик $x+n$, што противречи на условот на задачата. Значи, $c_x=c_y=c$. Да означиме $E=\{x\,|\,f(x)\neq c\}$. Ако E е бесконечно, тогаш од E избираме точки $x_1,x_2,...,x_{2n-1}$ и $h=n\geq\max\{N_{x_1},N_{x_2},...,N_{x_{2n+1}}\}$. За секој $i\in\{1,2,...,2n+1\}$ добиваме дека $c=f(x_i+h)\neq f(x_i)$, што е невозможно според условот. Следува дека E е конечно, т.е. $E=\{x_1,...,x_s\}$. Да го избереме h така што за секој $i\in\{1,2,...,s\}$, $x_i\pm h\notin E$. Тогаш $f(x_i-h)\neq f(x_i)$ и $f(x_i+h)\neq f(x_i)$, од каде $2s\leq 2n$, т.е. $s\leq n$.

37. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција таква што $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$, за секои реални броеви x и y. Докажи дека ако $x,f(x),f(f(x)),...$ е аритметичка прогресија, за секој реален број x, тогаш постои реален број a таков што $f(x)=x+a$, за секој реален број x.

Решение. Да претпоставиме дека постојат $x,y\in\mathbb{R}$ такви што $f(x)-x>f(y)-y$ и нека $p=f(x)-x$ и $q=f(y)-y$. Тогаш $f(x+np)=x+(n+1)p$ и $f(y+nq)=y+(n+1)q$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Од $|f(x+np)-f(y+nq)|\leq|x+np-y-nq|$ следува $|x-y+(n+1)(p-q)|\leq|x-y+n(p-q)|$. За доволно големо n, добиваме дека $x-y+(n+1)(p-q)\leq x-y+n(p-q)$ од каде следува $p\leq q$, што е противречност. Затоа $f(x)-x=f(y)-y$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$, па важи $f(x)-x=f(0)-0$, т.е. $f(x)=x+a$, каде $a=f(0)$.

38. Нека φ е биекција од рамнината во себе при која кружница се пресликува во кружница. Докажи дека со φ права се пресликува во права.

Решение. Прво, ќе докажеме дека инверзна слика на права е права. Нека l' е произволна права од рамнината и A',B',C' се произволни точки од правата. Да претпоставиме дека $A=\varphi^{-1}(A')$, $B=\varphi^{-1}(B')$ и $C=\varphi^{-1}(C')$ не се колинеарни. Тогаш постои кружница k која минува низ A, B и C. Но, тогаш $\varphi(k)$ е кружница која минува низ A', B' и C', што не е можно. Значи $\varphi^{-1}(l')\subseteq l$. Да претпоставиме дека постои $M\in l\setminus\varphi^{-1}(l')$ и нека $\varphi(M)=M'$. Низ M' повлекуваме права m која ја сече l' во точка P'. Јасно е дека $\varphi^{-1}(m)\subseteq l$. Да означиме $P=\varphi^{-1}(P')$. Ако P не лежи на правата низ M' паралелна со l', тогаш постои права n која l' и m ги сече во две различни точки P_1 и P_2, соодветно. Заради $\varphi^{-1}(P_1),\varphi^{-1}(P_2)\in l$ ќе важи $\varphi^{-1}(n)\subseteq l$. Но тогаш инверзната слика на целата рамнина е подмножество од унијата на l и правата низ M' паралелна со l', што не е можно, бидејќи φ е биекција. Значи $\varphi^{-1}(l')=l$. Нека, сега, l е произволна права и P и Q се две различни точки од неа. Ја разгледуваме правата l' која минува низ $\varphi(P)$ и $\varphi(Q)$. Тогаш $\varphi^{-1}(l')$ е права што минува низ P и Q, т.е. $\varphi^{-1}(l')=l$ и $l'=\varphi(l)$ е права, што требаше да се докаже.

39. Дали постојат функции $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви, што

$$|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|>1 \text{, за секои } x\neq y.$$

Решение. Нека претпоставиме дека постојат функции со саканото својство. Тогаш

$$(f(x)-f(y))^2+(g(x)-g(y))^2\geq\tfrac{1}{2}(|f(x)=f(y)|+|g(x)-g(y)|)^2>\tfrac{1}{2}.$$

Нека k_x го означува затворениот круг со центар $(f(x),g(x))$ и радиус $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Тогаш $\{k_x\}_{x\in\mathbb{R}}$ е непребројлива фамилија од дисјунктни кругови. Ако во секој кру избереме по еден една точки со рационални координати, добиваме дека множеството подредени парови со рационални координати е непребројливо, што е противречност. Од добиената противречност следува дека не постојат функции f и g со саканото својство.

40. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е таква што

$$|f(x+y)|=|f(x)+f(y)|,$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$. Докажи, дека $f(x+y)=f(x)+f(y)$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека претпоставиме, дека постојат a и b такви што

$$f(a+b)\neq f(a)+f(b). \tag{1}$$

Од условот на задачата следува дека $f(a+b)=-f(a)-f(b)$. Ако $f(a+b)=0$, тогаш $f(a)+f(b)=0$, па затоа $f(a+b)=f(a)+f(b)$, што противречи на изборот на a и b. Според тоа, $f(a+b)\neq 0$. Имаме

$$\begin{aligned}|f(2a+2b)|&=|f(a+(a+b+b)|=|f(a)+f((a+b)+b)|\\&=|f(a)+f(a+b)+f(b)| \text{ или } |f(a)-f(a+b)-f(b)|\\&=0 \text{ или } |f(a)-(-f(a)-f(b))-f(b)|\\&=0 \text{ или } 2|f(a)|.\end{aligned}$$

Освен тоа,

$$|f(2a+2b)|=|f(a+b)+f(a+b)|=|2f(a+b)|=2|f(a+b)|\neq 0,$$

па затоа $2|f(a)|=|f(2a+2b)|=2|f(a+b)|$, т.е. $|f(a+b)|=|f(a)|$. Аналогно добиваме $|f(a+b)|=|f(b)|$, па затоа $|f(a)|=|f(b)|$.

Ако $f(a)=f(b)$, тогаш

$$2|f(a)|=|f(a)+f(b)|=|f(a+b)|=|f(a)|,$$

па затоа $f(a)=0$. Сега добиваме $f(a+b)=-f(a)-f(b)=-2f(a)=0$, што е противречност. Според тоа, $f(a)=-f(b)$ и тогаш $0=|f(a)+f(b)|=|f(a+b)|$, што повторно е противречност.

Според тоа, претпоставката дека постојат a и b такви што важи (1) доведува дои противречност. Затоа, за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

41. Функцијата $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ е таква што

$$f(x+y)=f(\tfrac{x+y}{xy})+f(xy), \tag{1}$$

за секои $x,y\in(0,\infty)$. Докажи, дека $f(xy)=f(x)+f(y)$, за секои $x,y\in(0,\infty)$.

Решение. Прво ќе докажеме дека за произволни реални броеви $a,b\in(0,\infty)$ такви што $a^2b\ge 4$ важи $f(ab)=f(a)+f(b)$. За $a^2b\ge 4$ и $a,b>0$ броевите

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-\frac{4}{b}}}{\frac{2}{b}} \text{ и } y=\frac{a-\sqrt{a^2-\frac{4}{b}}}{\frac{2}{b}}$$

се позитивни и го задоволуваат условот $x+y=ab$ и $xy=b$. Ако замениме во (1) добиваме

$$f(ab)=f(x+y)=f(\tfrac{x+y}{xy})+f(xy)=f(a)+f(b).$$

Нека $x,y>0$ и

$$z=\max\{\tfrac{4}{x^2y^2},\tfrac{4}{x^2y},\tfrac{4}{y^2}\}.$$

Тогаш $(xy)^2z\ge 4, x^2(yz)\ge 4$ и $y^2z\ge 4$, од што следува дека

$$f(xyz)=f(xy)+f(z),\ f(xyz)=f(x)+f(yz) \text{ и } f(yz)=f(y)+f(z).$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} f(xy)&=f(xyz)-f(z)=f(x)+f(yz)-f(z)\\ &=f(x)+(f(y)+f(z))-f(z)=f(x)+f(y). \end{aligned}$$

42. Графиците на функциите $f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=\frac{cx+b}{cx+a}$ и $h(x)=cx+b$ имаат една заедничка точка, а графикот на $h(x)$ нема други пресечни точки со графиците на $f(x)$ и $g(x)$.

Броевите a, b и c се ненулти попарно различни реални броеви. Определи ги a, b и c.

Решение. Бидејќи графиците на $f(x)$ и $h(x)$ имаат една заедничка точка, равенката $ax^2+bx+c=cx+b$, т.е.

$$ax^2+(b-c)x-(b-c)=0 \tag{1}$$

има точно едно решение. Според тоа, нејзината дискриминанта е нула, т.е.

$$(c-b)^2-4a(c-b)=0 \tag{2}$$

Но, од условот на задачата $c\ne b$,т.е. $c-b\ne 0$, па според тоа $c-b-4a=0$. Значи, $c-b=4a$, па од (1) и (2) добиваме $ax^2-4ax+4a=0$.

Повторно, од условот на задачата $a \neq 0$, па $x^2 - 4x + 4 = 0$, т.е. $(x-2)^2 = 0$. Апсцисата на заедничката точка на трите графици е $x = 2$.

Бидејќи графиците на $g(x)$ и $h(x)$ имаат точно една заедничка точка, равенката $\frac{cx+b}{cx+a} = cx + b$, т.е. $(cx+b)(cx+a-1) = 0$ има точно едно решение. Според тоа $x = -\frac{b}{c} = -\frac{1-a}{c}$. Бидејќи $x = 2$, добиваме

$$-\frac{b}{c} = 2 \tag{3}$$

$$-\frac{1-a}{c} = 2 \tag{4}$$

Сега, од (2), (3) и (4), добиваме $a = \frac{3}{11}$, $b = -\frac{8}{11}$, $c = \frac{4}{11}$. Не е тешко да се провери дека за овие вредности на a, b и c графиците имаат една зедничка точка.

43. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функција за која важи

$$|f(x)| - |f(x) + x - 1| = |x+1| - 2|x|, \tag{1}$$

за секој $x \in \mathbb{R}$. Докажи, дека множеството

$$A = \{(x, y) \mid 0 < y < f(x), x \in \mathbb{R}\}$$

ја содржи внатрешноста на триаголник со плоштина 1.

Решение. Нека $x \leq -1$ и $f(x) > 0$. Ако $f(x) + x - 1 \geq 0$, тогаш од (1) следува дека $x = 1$, што е противречност. Ако $f(x) + x - 1 < 0$, тогаш од (1) следува $f(x) = 0$, што повторно е противречност. Според тоа, $f(x) \leq 0$. Обратно, ако $x \leq -1$ и $f(x) \leq 0$, тогаш равенството (1) е исполнето. Аналогно се проверува, дека за $-1 < x < 0$ равенството (1) е исполнето само ако $f(x) > 0$ и $f(x) + x - 1 \leq 0$. Во овој случај наоѓаме дека $f(x) = x + 1$. Со аналогни размислувања се докажува дека за $0 \leq x < 1$ равенството (1) е еквивалентно на $f(x) \geq 1 - x$, а за $x \geq 1$ тоа е еквивалентно на $f(x) \geq 0$. Според тоа, множеството A ја содржи внатрешноста на триаголникот чии темиња се $(-1, 0), (1, 0)$ и $(0, 1)$, чија плоштина е днаква на 1.

44. Ја разгледуваме низата полиноми $f_1, f_2, f_3, \ldots$ таква што $f_1(x) = x^3 - 3x$ и $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$, за секој $n \geq 1$. Определи го бројот на реалните корени на равенката

а) $f_{2013}(x) = 2$,

б) $f_{2013}(x) = 3$.

Решение. Ако $x \in [-2, 2]$, тогаш x еднозначно може да се запише во облик $x = 2\cos\alpha$, за некој $\alpha \in [0, \pi]$. Ако $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, тогаш постои единствен реален број $t < -1$ или $t > 1$, таков што $x = t + \frac{1}{t}$. Со индукција лесно се покажува дека во првиот случај $f_n(x) = 2\cos 3^n \alpha$, а во вториот случај $f_n(x) = t^{3^n} + \frac{1}{t^{3^n}}$.

а) Јасно, корените се во интервалот $[-2, 2]$. Имаме

$$2\cos 3^{2013}\alpha = 2$$
$$3^{2013}\alpha = 2k\pi$$
$$\alpha = \tfrac{2k\pi}{3^{2013}}.$$

Од условот $\alpha \in [0,\pi]$ следува $k = 0,1,2,...,\frac{3^{2013}-1}{2}$, што значи дека равенката $f_{2013}(x) = 2$ има $\frac{3^{2013}+1}{2}$ реални корени.

б) Јасно, $x \in (2,+\infty)$. За $x = t + \frac{1}{t}, t > 1$ имаме $t^{3^{2013}} + \frac{1}{t^{3^{2013}}} = 3$. Равенката $y + \frac{1}{y} = 3$ има единствен корен кој е поголем од 1 и тој корен е $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Според тоа, равенката $f_{2013}(x) = 3$ има единствен корен $x = \sqrt[2013]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[2013]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$.

45. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е ограничена и ја задоволува равенката
$$f(x+\tfrac{1}{3}) + f(x+\tfrac{1}{2}) = f(x) + f(x+\tfrac{5}{6}),$$
за секој реален број x. Докажи дека f е периодична фукција.

Решение. Ќе ја разгледаме функцијата g, определена со $g(6x) = f(x)$. Бидејќи f е ограничена функција, добиваме дека и g е ограничена функција. Од друга страна, од равенството $g(t) = f(\frac{t}{6})$, добиваме
$$g(t+2) = f(\tfrac{t}{6}+\tfrac{1}{3}),\ g(t+3) = f(\tfrac{t}{6}+\tfrac{1}{2}),\ g(t+5) = f(\tfrac{t}{6}+\tfrac{5}{6}).$$
Но, тогаш
$$g(t+2) + g(t+3) = f(\tfrac{t}{6}+\tfrac{1}{3}) + f(\tfrac{t}{6}+\tfrac{1}{2}) = f(\tfrac{t}{6}) + f(\tfrac{t}{6}+\tfrac{5}{6}) = g(t) + g(t+5),$$
за секој реален број t.

Ако го искористиме претходното равенство, добиваме
$$\begin{aligned} g(t+12) - g(t+6) &= g(t+12) - g(t+10) + g(t+10) - g(t+8) + g(t+8) - g(t+6) \\ &= g(t+9) - g(t+7) + g(t+7) - g(t+5) + g(t+5) - g(t+3) \\ &= g(t+6) - g(t+4) + g(t+4) - g(t+2) + g(t+2) - g(t) \\ &= g(t+6) - g(t), \end{aligned}$$
односно $g(t+12) - g(t+6) = g(t+6) - g(t)$. Не е тешко, со помош на принципот на математичка индукција, да докажеме дека
$$g(t+6n) - g(t) = n[g(t+6) - g(t)],$$
за секој природен број n. Бидејќи g е ограничена функција, исполнето е равенството $g(t+6) - g(t) = 0$ (во спротивен случај се добива неограниченост на g). Значи, g е периодична функција со периода 6. Но, тогаш
$$f(x+1) = f(6\tfrac{x+1}{6}) = g(6(x+1)) = g(6x+6) = g(6x) = f(x),\ ‘$$

за секој $x \in \mathbb{R}$. Од произволноста на $x \in \mathbb{R}$ добиваме дека f е периодична функција со периода 1.

46. Определи ги сите $k > 0$ за кои постои опаѓачка реална функција g таква што $g(x) \geq kg(x+g(x))$ за секој $x > 0$.

Решение. Нека $k \in (0,1]$ и да ја разгледаме функцијата $g(x) = \frac{1}{x}$. Тогаш $x + g(x) > x$ и $g(x) > g(x+g(x)) \geq kg(x+g(x))$ за секој $x > 0$.

Нека $k > 1$ и да претпоставиме дека постои опаѓачка реална функција g за која важи $g(x) \geq kg(x+g(x))$ за секој $x > 0$. Ако земеме $s = \frac{1}{k}$, тогаш важи $sg(x) \geq g(x+g(x))$ за секој $x > 0$. Нека $x > 0$ е фиксирано и да ја разгледаме низата $x_0 = x, x_{n+1} = x_n + g(x_n)$, $n = 0,1,2,3,...$. Бидејќи

$$g(x_{n+1}) = g(x_n + g(x_n)) \leq sg(x_n),$$

по индукција следува дека $g(x_n) \leq s^n g(x)$. Понатаму имаме:

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + g(x_0) + g(x_1) + g(x_2) + ... + g(x_{n-1}) \\ &\leq x + g(x) + sg(x) + ... + s^{n-1}g(x) \\ &= x + (1 + s + s^2 + ... + s^{n-1})g(x) \\ &= x + \tfrac{1}{1-s} g(x), \end{aligned}$$

па затоа $g(x_n) > g(x + \frac{1}{s-1} g(x))$ и затоа $g(x + \frac{1}{s-1} g(x)) < s^n g(x)$ за секој природен број n. Сега, ако во последното неравенство земеме $n \to \infty$ добиваме $0 < g(x + \frac{1}{s-1} g(x)) \leq \lim\limits_{n\to\infty} s^n g(x) = 0$, што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека решението на задачата е $k \in (0,1]$.

2. ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ ВО МНОЖЕСТВАТА ЦЕЛИ И ПРИРОДНИ БРОЕВИ

1. Докажи дека не постои бикеција $f : \{1,2,...,n,...\} \to \{0,1,2,...,n,...\}$ таква што

$$f(mn) = f(m) + f(n) + 3f(m)f(n), \text{ за секои } m,n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Нека претпоставиме дека постои функција со саканите својстваи да ја разгледаме функцијата $g(x) = 3f(x) + 1$. Лесно се проверува дека g е биекција и дека $g(mn) = g(m)g(n)$, за секои $m,n \in \mathbb{N}$. Освен тоа важи $g(1) = 1$.

Нека p,q и r се природни броеви за кои $g(p) = 4, g(q) = 10$ и $g(r) = 25$. Бидејќи ниту еден од броевите 4, 10 и 25 не може да се запише како производ на два броја од множеството $\{4,7,10,...\}$, заклучуваме дека p,q и r се различни прости броеви. Но,

$$4\cdot 25=10^2 \quad\Leftrightarrow\quad g(p)g(r)=g^2(q) \quad\Leftrightarrow\quad q(pr)=g(q^2) \quad\Leftrightarrow\quad pr=q^2,$$

што не е можно за различни прости броеви.

Конечно, од добиената противречност следува дека не постои функција со саканите својства.

2. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што за секој природен број $n>1$ и за секои $x,y\in\mathbb{N}$ важи

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k .$$

Решение. Од условот на задачата за $n=1$ добиваме

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy,$$

а за $n=2$ имаме

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+3x^2y+3xy^2.$$

Ако ги одземеме последните две равенства добиваме дека

$$2xy=3x^2y+3xy^2.$$

Во последното равенство ставаме $x=y=1$ и добиваме $2=6$, што е противречност. Според тоа, не постои функција која ги задоволува условите на задачата.

3. За функцијата $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ важи

$$f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)},$$

за секој $x\in\mathbb{Z}$. Ако $f(1)=2$, определи го $f(2004)$.

Решение. За секој природен број n и за функцијата f важи

$$f(n+1)=\frac{1+f(n)}{1-f(n)},\quad f(n+2)=\frac{1+f(n+1)}{1-f(n+1)}=\frac{1+\frac{1+f(n)}{1-f(n)}}{1-\frac{1+f(n)}{1-f(n)}}=-\frac{1}{f(n)}\quad,\quad f(n)=-\frac{1}{f(n+2)}=f(n).$$

Значи, функцијата f го има својството $f(n+4)=f(n)$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Сега,

$$f(2004)=f(2000)=f(1996)=...=f(4)=\tfrac{1}{3}.$$

4. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ за кои:

а) $f(f(n))=n$, за секој $n\in\mathbb{N}$;

б) $f(f(n+2)+2)=n$, за секој $n\in\mathbb{N}$;

в) $f(0)=1$.

Решение. Нека f е функција која ги исполнува наведените услови. Од $f(0)=1$ следува дека $f(1)=f(f(0))=0$. Со примена на f од двете страни на $f(f(n+2)+2)=n$ добиваме дека $f(n+2)+2=f(f(f(n+2)+2))=f(n)$, т.е. $f(n+2)=f(n)-2$. Сега, со принципот на математичка индукција се докажува дека

$$f(n)=\begin{cases} f(0)-n, & n \text{ парен} \\ f(1)+1-n, & n \text{ непарен} \end{cases} =1-n .$$

Обратно, функцијата $f(n)=1-n$ ги исполнува условите на задачата.

5. Нека f е дефинирана за сите природни броеви и важи $f(1)=2004$ и $f(1)+f(2)+...+f(n)=n^2 f(n)$ за сите $n>1$. Колку е $f(2004)$?

Решение. За $n=2$ имаме $f(1)+f(2)=4f(2)$, $f(2)=\frac{f(1)}{2^2-1}$. За $n=3$ имаме

$$f(1)+f(2)+f(3)=9f(3),\ f(3)=\frac{2^2}{3^2-1}\cdot\frac{1}{2^2-1}f(1).$$

Претпоставуваме дека за некое n важи

$$f(n)=\frac{1}{2^2-1}\cdot\frac{2^2}{3^2-1}\cdot...\cdot\frac{(n-1)^2}{n^2-1}f(1).$$

Тогаш за $n+1$ имаме:

$$f(1)+f(2)+...+f(n+1)=(n+1)^2 f(n+1)$$

$$n^2 f(n)+f(n+1)=(n+1)^2 f(n+1)$$

Според индуктивната претпоставка имаме

$$n^2(\frac{1}{2^2-1}\cdot\frac{2^2}{3^2-1}\cdot...\cdot\frac{(n-1)^2}{n^2-1}f(1))=((n+1)^2-1)f(n+1)$$

$$f(n+1)=\frac{1}{2^2-1}\cdot\frac{2^2}{3^2-1}\cdot...\cdot\frac{(n-1)^2}{n^2-1}\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2-1}f(1))$$

Значи $f(n)=\frac{1}{2^2-1}\cdot\frac{2^2}{3^2-1}\cdot...\cdot\frac{(n-1)^2}{n^2-1}f(1)$ за $\forall n\in\mathbb{N}$, па затоа

$$f(2004)=\frac{1}{2^2-1}\cdot\frac{2^2}{3^2-1}\cdot...\cdot\frac{2003^2}{2004^2-1}\cdot 2004 .$$

6. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ за кои се исполнети условите

1) $f(n)f(-n)=f(n^2)$, за секој $n\in\mathbb{Z}$,

2) $f(m+n)=f(m)+f(n)+2mn$, за секои $m,n\in\mathbb{Z}$.

Решение. Нека функцијата $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ е определена со $g(n)=f(n)-n^2$, т.е. $f(n)=g(n)+n^2$. Заменуваме во 2) и после средувањето добиваме

$$g(m+n)=g(m)+g(n). \tag{1}$$

Ако во (1) ставиме $m=0$, добиваме $g(0)=0$. Сега, за $m=-n$ добиваме $g(-n)=-(n)$. Понатаму, со индукција по n се докажува дека од (1) следува $g(k)=g(1)k$, за секој природен број k, па затоа $g(k)=ig(k)=-kg(1)$, т.е.

$$g(k)=g(1)k \text{, за секој } k\in\mathbb{Z} . \tag{2}$$

Останува да го определиме $g(1)$. Во 1) заменуваме $f(n)=g(n)+n^2$ и добиваме

$$(g(n)+n^2)(g(-n)+n^2)=g(n^2)+n^4 .$$

Ако во претходното равенство ставиме $n=1$, добиваме

$$(g(1)+1)(g(-1)+1)=g(1)+1\text{, т.е. } g(1)(g(1)+1)=0\,.$$

Оттука следува $g(1)=0$ или $g(1)=-1$. Поред тоа, $g(n)=0$ или $g(n)=-n$, па затоа $f(n)=n^2$ или $f(n)=n^2-n$. Непосредно се проверува дека овие функции се решенија на задачата.

7. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што

$$f(f(m)^2+2f(n)^2)=m^2+2n^2\text{, за секои } m,n\in\mathbb{N}\,.$$

Решение. Јасно, функцијата f е инјекција. Воведуваме смена $g(n)=f(n)^2$ и ја добиваме равенката

$$g(g(m)+2g(n))=(m^2+2n^2)^2\,. \tag{1}$$

Од равенството

$$(n+2)^2+2(n-1)^2=(n-2)^2+2(n+1)^2$$

следува дека

$$g(n+2)-2g(n-1)+2g(n-1)-g(n-2)=0\,,$$

т.е. низата $\{g(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ задоволува линеарна диференцна равенка чие општо решение е

$$g(n)=an^2+bn+c+d(-1)^n\,. \tag{2}$$

Ако (2) го замениме во (1), тогаш за $m=1$ после средувањето добиваме

$$An^4+Bn^3+Cn^2+Dn+E\pm F=4n^4+4n^2+1\text{, за секој } n\in\mathbb{N}\,,$$

каде $A=4a^3$ и $B=8a^2b$, па затоа $a=1$ и $b=0$. Сега (2) од (2) имаме

$$f(n)^2=n^2+c+d(-1)^n\,.$$

Понатаму, за $n>|c|+|d|$ имаме $n^2-n<f(n)^2<n^2+n$, па затоа мора да важи $f(n)=n$, т.е. $c+d(-1)^n=0$, од каде следува $c=d=0$. Според тоа, $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Лесно се проверува дека функцијата $f(n)=n$ е решение на задачата.

8. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што

$$f(f(m+n))=f(m)+f(n)\text{, за секои } m,n\in\mathbb{N}\,.$$

Решение. Од условот на задачата следува дека за секои $m,n\in\mathbb{N}$ важи

$$f(f(f(f(m+n))=f(f(f(m)+f(n)))=f(f(m))+f(f(n))\,.$$

Според тоа, за секои природни броеви m,n,p важи

$$f(f(m))+f(f(n+p))=f(f(f(f(m+n+p))))=f(f(m+n))+f(f(p))\,.$$

Понатаму, бидејќи

$$f(f(m+n))=f(m)+f(n)\text{ и } f(f(n+p))=f(n)+f(p)$$

добиваме

$$f(f(m))+f(n)+f(p)=f(f(p))+f(m)+f(n)\,.$$

Ако во последната равенка земеме $p=1$ и ставиме $c=f(f(1))-f(1)$ добиваме

$$f(f(m))=f(m)+c\,.$$

Според тоа,

$$f(m+n) = f(f(m+n)) - c = f(m) + f(n) - c .$$

Ставаме $g(n) = f(n) - c$ и последната равенка го добива видот

$$g(m+n) = g(m) + g(n) ,$$

од каде со индукција следува дека $g(n) = ng(1)$.

Според тоа, f е функција од видот $f(n) = an + b$, каде a и b се константи. Со непосредна проверка се добива дека $a = 1$, т.е. решенијата се дадени со $f(n) = n + b$, каде b е произволна ненегативна константа.

9. Најди ги сите инјекции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ за кои важи

$$f(f(n)) \le \tfrac{n+f(n)}{2}, \text{ за секој } n \in \mathbb{N} .$$

Решение. Нека f е решение. Да забележиме дека важи

$$f(f(n)) \le \max\{n, f(n)\} \ , \forall n \in \mathbb{N} \qquad (*) .$$

Нека

$$f^k(a) = \underbrace{f(f(...f(a))...)}_{k} .$$

Да претпоставиме дека постои a таков што $a > f(a)$. Тогаш од (*) следува

$$f^2(a) < a$$

и со индукција по k лесно се покажува дека

$$f^k(a) < a, \text{ за секој } k > 0 . \qquad (1)$$

Бидејќи множеството $\{1, 2, ..., a-1\}$ е конечно, следува дека постојат i, j такви што $0 < i < j$ и

$$f^i(a) = f^j(a) = f^i(f^{j-i}(a)) .$$

Пресликувањето f е инјекција, па затоа $f^{j-i}(a) = a$, што е во контрадикција со (1) . Значи

$$a \le f(a), \text{ за секој } a > 0 . \qquad (2)$$

Тогаш

$$f(a) \le f(f(a)), \text{ за секој } a \in \mathbb{N} .$$

Од друга страна заради (*) и (2) имаме

$$f(f(a)) \le \max\{a, f(a)\} = f(a)$$

т.е.

$$f(f(a)) = f(a)$$

и конечно заради инјективноста на f , добиваме $f(a) = a,$ за секој $a \in \mathbb{N}$. Значи

$$f(n) = n, \text{ за секој } n \in \mathbb{N} .$$

10. Најди ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ така што за $m, n \in \mathbb{N}$ и $m > n$ важи

$$f(f(m+n) + f(m-n)) = 8m .$$

Решение. Ако ставиме $k=m+n, l=m-n$ добиваме $f(f(k)+f(l))=4(k+l)$. Ќе докажеме дека f е инјекција. Нека $f(k)=f(l)$. Тогаш

$$4(k+l)=f(f(k)+f(l))=f(f(k)+f(k))=8k\ ,$$

па $k=l$.

Од друга страна,

$$f(f(k)+f(k))=4\cdot 2k=4((k-1)+(k+1))=f(f(k-1)+f(k+1)).$$

Бидејќи f е инјекција, следува дека

$$f(k)+f(k)=f(k+1)+f(k-1),$$

односно

$$f(k+1)=2f(k)-f(k-1).$$

За $k=2$,

$$f(3)=2f(2)-f(1)=2(f(2)-f(1))+f(1),$$

за $k=3$,

$$f(4)=2f(3)-f)2)=3(f(2)-f(1))+f(1).$$

Со индукција се докажува дека $f(n)=(n-1)(f(2)-f(1))+f(1)$ односно

$$f(n)=n(f(2)-f(1))+2f(1)-f(2).$$

Значи, $f(n)=an+b$, каде што $a,b\in\mathbb{Z}$ ($a=f(2)-f(1), b=2f(1)-f(2)$.

Последниов израз го заменуваме во почетниот и добиваме:

$$f(a(m+n)+b+a(m-n)+b)=8m$$

$$f(2am+2b)=8m$$

$$a(2am+2b)+b=8m$$

$$2a^2m+2ab+b=8m\ .$$

Бидејќи последното равенство важи за секој $m\in\mathbb{N}$, добиваме дека $a^2=4$, $b(2a+1)=0$, односно $a=\pm 2, b=0$. За $a=-2$, се добива $f(n)=-2n$, но тоа не е пресликување од $\mathbb{N}$ во $\mathbb{N}$. Затоа, $f(n)=2n$ е единствено решение на дадената равенка.

11. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$2n+2001\le f(f(n))+f(n)\le 2n+2002\ .$$

Решение. Функцијата $f(n)=n+667$ ги задоволува условите на задачата. За даден $n\in\mathbb{N}$, дефинираме низа $\{a_k\}$ со $a_0=n$ и $a_{k+1}=f(a_k), k\ge 0$. Ако означиме $b_k=a_{k+1}-a_k-667-\frac{1}{6}$, тогаш од условот на задчата следува $-\frac{1}{2}\le c_k=b_{k+1}+2b_k\le\frac{1}{2}$. Бидејќи

$$b_m=(-2)^m b_0+\sum_{k=0}^{m-1}(-2)^{m-1-k}c_k$$

и

$$a_n=a_0+667+\sum_{m=0}^{n-1}b_m=a_0+667+\sum_{m=0}^{n-1}(-2)^m b_0+\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{m=k+1}^{n-1}(-2)^{m-1-k}c_k$$

$$= a_0 + 667 + \tfrac{1-(-2)^n}{3} b_0 + \sum_{k=0}^{n-2} \tfrac{1-(-2)^{n-k-1}}{3} c_k$$

$$\leq a_0 + 667 + \tfrac{1-(-2)^n}{3} (b_0 + \tfrac{(-1)^{n-1}}{2}),$$

мора да важи $a_n < 0$ за некој n ако $|b_0| > \frac{1}{2}$. Но, според условот на задачата важи $a_n > 0$, за секој n, па затоа

$$-\tfrac{1}{2} \leq b_0 = f(n) - n - 667 - \tfrac{1}{6} \leq \tfrac{1}{2},$$

од каде заклучуваме дека $f(n) = n + 667$.

12. Даден е природен број n и функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ за која важи

1) $f(1) \leq f(2) \leq ... \leq f(n) \leq f(1) + n$,
2) $f(n+i) = f(i)$, за секој природен број i,
3) $f(f(i)) \leq n + i - 1$, за секој природен број i.

Докажи, дека

$$f(1) + f(2) + ... + f(n) \leq n^2. \qquad (1)$$

Решение. Нека $m < n$ е фиксиран природен број. Ако го искористиме својството 1), потоа дека од 3) следува $f(f(m+1)) \leq n + m$ и условот 2) добиваме

$$\begin{aligned} f(f(m)+1) + ... + f(f(m+1)) &\leq [f(m+1) - f(m)] f(f(m+1)) \\ &\leq [f(m+1) - f(m)](m+n). \end{aligned}$$

Нека $f(1) = k$. Тогаш $k < n$ и од претходното неравенство за $m = 1, 2, ..., k-1$ добиваме

$$f(f(1)+1) + ... + f(f(2)) \leq [f(2) - f(1)](n+1)$$

$$f(f(2)+1) + ... + f(f(3)) \leq [f(3) - f(2)](n+2)$$

$$..$$

$$f(f(k-1)+1) + ... + f(f(k)) \leq [f(k) - f(k-1)](n+k-1).$$

Освен тоа, од 1) имаме

$$f(f(k)+1) + ... + f(n) \leq (n - f(k))(n + f(1)).$$

Ако ги собереме овие неравенства го добиваме неравенството (1).

13. Докажи, дека постои единствена функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таква што

$$f(1) = f(2) = 1 \text{ и } f(n) = f(f(n-1)) + f(n - f(n-1)), \; n = 3, 4, ...$$

За оваа функција да се пресмета $f(2^m)$, кога $m \geq 2$.

Решение. Со индукција ќе докажеме, дека за секој $n > 1$ вредноста на функцијата $f(n)$ еднозначно е определена од $f(1), f(2), ..., f(n-1)$ и дека $\frac{n}{2} \leq f(n) \leq n$.

За $n = 2$ имаме $f(2) = 1$ и тврдењето е точно. Нека претпоставиме дека за секој $k, 1 \leq k < n,$ вредноста $f(k)$ е определена и $\frac{k}{2} \leq f(k) < k$. Тогаш

$$1 \leq \tfrac{n-1}{2} \leq f(n-1) \leq n-1 \text{ и } 1 \leq n - f(n-1) \leq n-1$$

и од индуктивната претпоставка следува дека вредностите

$$f(f(n-1)) \text{ и } f(n-f(n-f(n-1))$$

се еднозначно определени. Според тоа,

$$f(n)=f(f(n-1))+f(n-f(n-1)) \qquad (1)$$

исто така е еднозначно определена. Освен тоа

$$\tfrac{1}{2}f(n-1)\leq f(f(n-1))\leq f(n-1),$$

$$\tfrac{1}{2}(n-f(n-1))\leq f(n-f(n-1))\leq n-f(n-1).$$

Сега од (1) следува дека $\frac{n}{2}\leq f(n)\leq f(n-1)+(n-f(n-1))=n$, т.е. тврдењето е точно и за n. Значи, докажавме дека постои единствена функција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, која го задоволува условот на задачата и за неа важи $\frac{n}{2}\leq f(n)\leq n$.

Повторно со индукција ќе докажаме, дека за секој природен број n важи

$$f(n+1)-f(n)\in\{0,1\}. \qquad (2)$$

За $n=1$ условот (2) важи. Нека претпоставиме дека (2) важи за $n\leq k$. Од условот и од (1) добиваме

$$\begin{aligned} f(k+1)-f(k)&=(f(f(k+1)+f(k+2-f(k+1))-(f(f(k))+f(k+1-f(k))) \\ &=(f(f(k+1))-f(f(k)))+(f(k+2-f(k+1))-f(k+1-f(k))). \end{aligned}$$

Од индуктивната претоставка имаме $f(k+1)-f(k)\in\{0,1\}$. Ако $f(k+1)=f(k)+1$, тогаш од $1\leq f(k)\leq k$ и од индуктивната претпоставка следува

$$f(k+2)-f(k+1)=f(f(k))+1)-f(f(k))\in\{0,1\}.$$

Ако $f(k+1)=f(k)$, тогаш од $1\leq k+1-f(k)\leq k$ и од индуктивната претпоставка повторно добиваме

$$f(k+2)-f(k+1)=f(k+1-f(k))-f(k+1-f(k))\in\{0,1\}.$$

Според тоа, за секој n важи (2).

Конечно, со индукција ќе докажеме дека за секој природен број m важи $f(2^m)=2^{m-1}$. За $m=1$ тврдењето е точно и нека претпоставиме, дека тоа е точно за $m=k$, т.е. дека $f(2^k)=2^{k-1}$.

Нека претпоставиме дека $f(2^{k+1})\neq 2^k$. Бидејќи $f(2^{k+1})\geq 2^k$ и $f(2^{k+1})$ е природен број, добиваме дека $f(2^{k+1})\geq 2^k+1$. Бидејќи $f(1)=1$, од (2) следува, дека постои најмал рприоден број n, за кој $f(n)=2^k+1$. Од минималноста на n следува, дека $f(n-1)=2^k$. Сега, од $n-2^k\leq 2^k$ добиваме

$$2^k+1=f(n)=f(f(n-1))+f(n-f(n-1))=f(2^k)+f(n-2^k)\leq 2f(2^k)=2^k,$$

што е противречност. Според тоа, $f(2^{k+1})=2^k$ и од индуктивната претпоставка следува дека $f(2^m)=2^{m-1}$ за секој природен број m.

14. Функцијата f е дефинирана на множеството ненегативни цели броеви $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$, и има вредности во истото множество $\mathbb{N}_\circ$.

За секој $n \in \mathbb{N}_0$ е исполнето $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$. Да се најде $f(2012)$.

Решение. За $n = 0$ имаме $f(0) + f(f(0)) = 3$, па имајќи во предвид дека $f(f(0)) \geq 0$, следува дека $0 \leq f(0) \leq 3$, $f(0) \in N_0$.

а) Нека $f(0) = 0$, тогаш

$$f(f(0)) = f(0) = 0. \text{ Па, } 3 = f(0) + f(f(0)) = 0,$$

што е контрадикција. Значи $f(0) \neq 0$.

б) Нека $f(0) = 1$. Тогаш

$$f(f(0)) = f(1) = 2. \text{ Од } 5 = f(1) + f(f(1)) = f(1) + f(2)$$

се добива дека $f(2) = 3$. Со индукција ќе покажеме дека $f(n) = n + 1$. Нека тврдењето е точно за $k \leq n$, односно $f(k) = k + 1$. Тогаш

$$2k + 3 = f(k) + f(f(k)) = k + 1 + f(k+1).$$

Од овде $f(k+1) = k + 2$, па согласно принципот на математичка индукција $f(n) = n + 1$ за секој n. Согласно ова, $f(2012) = 2013$.

в) Нека $f(0) = 2$. Тогаш $f(2) = 1$, па

$$7 = f(2) + f(f(2)) = 1 + f(1).$$

Следува $f(1) = 6$. Но, $5 = f(1) + f(f(1))$, од каде $f(1) \leq 5$, што е контрадикција.

г) Нека $f(0) = 3$. Тогаш $f(3) = 0$. Но,

$$3 = f(0) + f(f(0)) = f(0) + f(3) = f(3) + f(f(3)) = 9,$$

па ова е повторно контрадикција.

Значи $f(n) = n + 1$, па $f(2012) = 2013$.

15. Определи ги сите функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такви што

$$xf(2f(y) - x) + y^2 f(2x - f(y)) = \frac{f(x)^2}{x} + f(yf(y)), \qquad (1)$$

за секои цели броеви x и y, $x \neq 0$.

Решение. Нека p е прост број. Од условот следува $p \mid f(p)^2$, па затоа $p \mid f(p)$. Понатаму, за $y = 0, x = p$ од (1) добиваме

$$pf(2f(0) - p) = \frac{f(p)^2}{p} + f(0),$$

од каде следува дека $p \mid f(0)$. Но, p е произволен прост број, па затоа $f(0) = 0$.

Ако во (1) ставиме $y = 0$, добиваме

$$xf(-x) = \frac{f(x)^2}{x}. \qquad (2)$$

Ако во последното равенство x го замениме со $-x$ и ги комбинираме добиените равенства наоѓаме $f(x) = 0$ или $f(x) = x^2$, за секој x.

Да допуштиме дека $f(a) = 0$ за некој $a \neq 0$. Во (1) ставаме $y = a$ и добиваме

$$xf(-x) + a^2 f(2x) = \frac{f(x)^2}{x},$$

па од (2) следува $a^2 f(2x) = 0$, т.е. $f(2x) = 0$.

Значи, f се анулира за секој парен број. Да претпоставиме дека $f(b)\neq 0$ за некој непарен број b. Тогаш $f(b)=b^2$ и ако во (1) ставиме $y=b$ добиваме

$$xf(2b^2-x)+b^2f(2x-b^2)=\tfrac{f(x)^2}{x}+f(b^3).$$

Ако во последното равенство земеме парен x, добиваме $b^2f(2x-b^2)=\ \ f(b^3)$, што значи дека $f(2x-b^2)=f(b^3)=0$, (во спротивно имаме $b^2(2x-b^2)^2=b^6$, за секој парен x, што не е можно).

Од $f(2x-b^2)=0$ за секој парен x следува дека $f(y)=0$ за секој $y\equiv 3 \pmod 4$. Сега од $x^2f(-x)=f(x)^2$ заклучуваме, дека $f(y)=0$ и за секој $y\equiv 1 \pmod 4$. Според тоа, $f(y)=0$ за секој непарен y, што противречи на $f(b)\equiv 0$.

Според тоа, или $f(x)\equiv 0$ или $f(x)=x^2$. Првата од овие две функции очигледно е решение на задачата, а дека втората е решение следува од равенството на Софија Жермен,

$$\begin{aligned} xf(2f(y)-x)+y^2f(2x-f(y)) &= xf(2y^2-x)+y^2f(2x-y^2)\\ &= x(2y^2-x)^2+y^2(2x-y^2)^2\\ &= x^3+y^6=\tfrac{f(x)^2}{x}+f(yf(y)). \end{aligned}$$

16. Најди ги сите функции $f:\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R}$ за кои

$$f(n+m)+f(n-m)=f(3n),\quad \forall n,m\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}, n\geq m.$$

Решение. Ако во равенството ставиме $m=0$, добиваме $2f(n)=f(3n)$, за секој $n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$. За $n=m=0$ добиваме $f(0)=0$. Понатаму, ако ставиме $m=n$, добиваме $f(2n)+f(0)=f(3n)$ односно $f(2n)=f(3n)$. Значи, од една страна, за секое $n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ важи $f(4m)=f(6m)=f(9m)$, а од друга страна, ако ставиме $n=3m$ во равенството, добиваме $f(4m)+f(2m)=f(9m)$, што е возможно ако и само ако $f(2m)=0$. Следствено, за произволен $n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ имаме

$$f(n)=\tfrac{1}{2}f(3n)=\tfrac{1}{2}f(2n)=0,$$

односно единствена функција што го задоволува равенството е $f(n)=0$, за секој $n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$.

17. Најди ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ такви што $f(1)=\frac{5}{2}$ и важи

$$f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y),\text{ за секои } x,y\in\mathbb{Z}.$$

Решение. Ако $x=y=0$ имаме $f(0)^2=2f(0)$, а оттука $f(0)=0$ или $f(0)=2$. Нека $f(0)=0$. Ако $y=1$ имаме $\frac{5}{2}f(x)=f(x+1)+f(x-1)$ односно

$$f(x+1)=\tfrac{5}{2}f(x)-f(x-1).$$

Тогаш $f(2)=\frac{25}{4}$, $f(3)=\frac{105}{8}$, $f(4)=\frac{425}{16}$. Но, од $f(2)^2=f(4)+f(0)$ следува дека $f(4)=\frac{625}{16}$. Значи $f(0)\neq 0$.

Нека $f(0)=2$. Бидејќи $f(x)f(-y)=f(x-y)+f(x+y)=f(x)f(y)$, за сите $x,y\in\mathbb{Z}$, тогаш и за $x=1$ равенството важи. Но бидејќи $f(1)\neq 0$ добиваме дека $f(-y)=f(y)$, за секој $y\in\mathbb{Z}$, односно функцијата е парна. Важи $f(0)=2$, $f(1)=\frac{5}{2}$, $f(2)=\frac{17}{4}$, $f(3)=\frac{65}{8}$ ... . Затоа, со индукција ќе докажеме дека ако x е позитивен цел број тогаш $f(x)=\frac{2^{2x}+1}{2^x}$ е единствено решение (единствено бидејќи секоја функционална вредност зависи само од претходните две вредности, односно $f(x+1)=\frac{5}{2}f(x)-f(x-1)$). Јасно е дека за $x=1$ тврдењето важи. Нека за секој $t<x, t\in\mathbb{N}$ тврдењето важи. Тогаш имаме

$$f(t+1)=\frac{5}{2}f(t)-f(t+1)=\frac{5}{2}\frac{2^{2t}+1}{2^t}-\frac{2^{2(t-1)}+1}{2^{t-1}}=\frac{2^{2(t+1)}+1}{2^{t+1}}.$$

Од $f(0)=\frac{2^{2\cdot 0}+1}{2^0}=2$ и од тоа што f е парна функција добиваме дека $f(x)=\frac{2^{2x}+1}{2^x}$ е единствена функција што го задоволува равенството за секој цел број x. Обратното е јасно. односно лесно се проверува дека ако $f(x)=\frac{2^{2x}+1}{2^x}$ тогаш таа го задоволува даденото равенство.

18. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(m)+f(n)=f(mn)+f(m+n+mn), \qquad (1)$$

за секои $m,n\in\mathbb{Z}$.

Решение. Ако во (1) ставиме $n=1$ добиваме

$$f(m)+f(1)=f(m)+f(2m+1)$$

од каде следува дека за секој непарен цел број d важи $f(d)=f(1)=a$, за некој реален број a. Секој цел број, различен од нула може да се претстави во облик $2^k d$, каде k е ненегативен цел број, а d е непарен цел број. Во (1) ставаме $m=d$ и $n=2^k$ и добиваме

$$f(d)+f(2^k)=f(2^k d)+f(2^k(d+1)+d).$$

Бидејќи d и $2^k(d+1)+d$ се непарни броеви важи $f(2^k(d+1)+d)=f(d)=a$. Според тоа, $f(2^k d)=f(2^k)$ и функцијата е определена еднозначно од вредностите $f(2^k)$, за $k=0,1,2,...$ и $f(0)$.

За $k\geq 2$ ставаме $m=2^k$ и $n=2$ и добиваме

$$f(2^k)+f(2)=f(2^{k+1})+f(3\cdot 2^k+2).$$

Бидејќи $3\cdot 2^k+2$ е од видот $2d$ и d е непарен добиваме дека $f(3\cdot 2^k+2)=f(2)$, од каде наоѓаме $f(2^k)=f(2^{k+1})$, за $k\geq 2$. Според тоа, $f(2^k)=b$, за $k\geq 2$. За $m=n=2$ од (1) следува $2f(2)=f(4)+f(8)=2b$, т.е. $f(2)=b$. За $m=n=-2$ од

(1) следува $2f(-2) = f(4) + f(0)$, па затоа $f(0) = b$. Според тоа, функција која го задоволува условот на задачата треба да е од видот

$$f(n) = \begin{cases} a, & n \text{ непарно} \\ b, & n \text{ парно или } 0, \end{cases}$$

за некои реални броеви a и b. Ќе докажеме дека секоја таква функција ги задоволува условите на задачата. Поради симетрија доволно е да разгледаме три случаи за парноста на m и n.

- Ако m и n се парни, двете страни на (1) се еднакви на $2b$.
- Ако m и n се непарни, двете страна на (1) се еднакви на $2a$.
- Ако m и n се со различна парност, двете страни на (1) се еднакви на $a+b$.

Според тоа, сите функции од опишаниот вид се решенија на задачата.

19. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ кои ги задоволуваат условите

1) $f(n!) = f(n)!$, за секој $n \in \mathbb{N}$,

2) $m-n$ е делител на $f(m) - f(n)$, за секои $m,n \in \mathbb{N}, m \neq n$.

Решение. Од $f(1) = f(1)!$ и $f(2) = f(2)!$ следува $f(1), f(2) \in \{1,2\}$.

Нека претпоставиме дека $f(3) = 3$. Ако индуктивно дефинираме $n_0 = 3$ и $n_{i+1} = n_i!$, за $i \geq 0$, добиваме дека $f(n_i) = n_i$, за секој i. Нека m е произволен природен број. Бидејќи разликата $m - n_i$ е делител на $f(m) - f(n_i)$, добиваме дека $m - n_i$ е делител на $f(m) - m = f(m) - f(n_i) + f(n_i) - m = f(m) - f(n_i) + n_i - m$ за секој i. Според тоа, $f(m) - m$ има бесконечно многу делители, што значи дека $f(m) = m$, за секој m.

Сега нека $f(3) \neq 3$. Од $4 = 3! - 2 \mid f(3)! - f(2)$ следува дека $4 \nmid f(3)!$, па затоа $f(3) \in \{1,2\}$. Освен тоа, $n! - 3$ е делител на $f(n)! - f(3)$ за секој $n \geq 4$, па затоа $3 \nmid f(n)!$, од што следува дела $f(n) \in \{1,2\}$, за секој n. Сега лесно се докажува дека во случајов $f(n)$ мора да е константа.

Конечно, единствени решенија се функциите $f \equiv 1$, $f \equiv 2$ и $f(x) = x$, за секој $x \in \mathbb{N}$.

20. Дали постои функција $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ која не е полином и таква што за секои $a,b \in \mathbb{Z}$ важи $a-b \mid f(a) - f(b)$?

Решение. Индуктивно ќе конструираме функција, која не е полином и ги задоволува условите на задачата.

Нека $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Да претпоставиме дека вредностите на функцијата $f(-t), f(-t+1), f(-t+2), \ldots, f(s)$ се определени така што $a-b$ е делител на $f(a) - f(b)$, за произволни $-t \leq a < b \leq s$. За произволен прост број $p < s+t+1$ постои $\alpha(p) \in \mathbb{N}$ таков што $0 < p^{\alpha(p)} \leq s+t+1 < p^{\alpha(p)+1}$.

Нека x_0 е решение на системот $x \equiv f(s+t-p^{\alpha(p)}) (\bmod p^{\alpha(p)})$, паде p се менува меѓу сите прости броеви помали или еднакви на $s+t+1$. Нека

$$f(s+1)=x_0+((s+t+1)!)^{s+1}.$$

За секој $b, -t\le b<s,$ ако $s+1-b=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, тогаш

$$f(b)=f(s+1-p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k})\equiv f(s+1-p_i^{\alpha(p_i)})\equiv x_0\equiv f(s+1)(\mathrm{mod}\, p_i^{\alpha_i}).$$

Аналогно дефинираме $f(-t-1)$. Бидејќи $f(s)>s^s$, за секој цел број $s>2$, вака дефинираната функција не е полином.

21. Нека k е даден природен број. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што $m^2+f(n^k)\,|\,mf(m)+n^k$, за секои $m,n\in\mathbb{N}$.

Решение. Очигледно $f(n)=n$ е решение на задачата. Ќе докажеме дека тоа е единствено решение. Од условот следува дека $m^2+f(n^k)\le mf(m)+n^k$, т.е. $m(f(m)-m)\ge f(n^k)-n^k$, за секои $m,n\in\mathbb{N}$. Во случајов за $n-1$ добиваме дека $f(m)\ge m$, за секој $m\in\mathbb{N}$. Од друга страна, ако во условот m го замениме со $f(n^k)$, тогаш добиваме дека $f(n^k)\,|\,n^k$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Но, како што веќе докажавме $f(n^k)\ge n^k$, па затоа $f(n^k)=n^k$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Според тоа, условот го добива видот $m^2+n^k\,|\,mf(m)+n^k$, за секои $m,n\in\mathbb{N}$, од каде следува дека $m^2+n^k\,|\,(mf(m)+n^k)-(m^2+n^k)=m(f(m)-m)$, за секои $m,n\in\mathbb{N}$. Последно е можно ако и само ако $f(m)=m$, за секој $m\in\mathbb{N}$.

22. Да се најдат сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што $(f(m))^2+f(n)\,|\,(m^2+n)^2$.

Решение. За $m=n=1$ добиваме

$$(f(1))^2+f(1)\,|\,(1^2+1)^2=4,\text{ т.е. } f(1)(f(1)+1)\,|\,4.$$

Значи, $f(1)\,|\,4$, при што ги имаме следните можности:

а) $f(1)=4$, што не е можно бидејќи $5\nmid 4$,

б) $f(1)=2$, што не е можно бидејќи $3\nmid 4$.

Единствена можност е $f(1)=1$.

Ќе избереме $m=1$ и $n=p-1$, каде p е прост број. Тогаш

$$(f(1))^2+f(p-1)\,|\,(1^2+p-1)^2=p^2,\text{ т.е. } f(p-1)+1\,|\,p^2.$$

Бидејќи $f(p-1)+1\ge 2$, имаме две можности и тоа

i) $f(p-1)+1=p$, т.е. $f(p-1)=p-1$,

ii) $f(p-1)+1=p^2$, т.е. $f(p-1)=p^2-1$. Овој случај не е можен. Ако претпоставиме дека $f(p-1)=p^2-1$, тогаш за $m=p-1$ и $n=1$ би добиле

$$(f(p-1))^2+f(1)=(p^2-1)^2+1=p^4-2p^2+2=a_p, \qquad (1)$$

е делител на

$$[(p-1)^2+1]^2=p^4-4p^3+8p^2-8p+4=b_p, \qquad (2)$$

за секој прост број p. Од друга страна

$$b_p - a_p = (p^4 - 4p^3 + 8p^2 - 8p + 4) - (p^4 - 2p^2 + 2) = 2p^2(5-2p) + 4(1-2p),$$

што не е можно, бидејќи $a_p \mid b_p$ и бројот на десната страна во последното равенство е негативен за $p > 2$.

Нека n е фиксен природен број и p произволен прост број. Тогаш

$$(p-1)^2 + f(n) \equiv 0 \pmod{(p-1)^2 + f(n)},$$

$$n + (p-1)^2 + f(n) - n \equiv 0 \pmod{(p-1)^2 + f(n)},$$

$$[n + (p-1)^2 - (n - f(n))][n + (p-1)^2 + (n - f(n))] \equiv 0 \pmod{(p-1)^2 + f(n)},$$

$$[n + (p-1)^2]^2 - [(n - f(n))]^2 \equiv 0 \pmod{(p-1)^2 + f(n)},$$

$$[n + (p-1)^2]^2 \equiv [(n - f(n))]^2 \pmod{(p-1)^2 + f(n)}.$$

Но од условот на задачата имаме $[n + (p-1)^2]^2 \equiv 0 \pmod{(p-1)^2 + f(n)}$, па според тоа

$$[(n - f(n))]^2 \equiv 0 \pmod{(p-1)^2 + f(n)} \qquad (3)$$

Од (3) имаме дека $(p-1)^2 + f(n) \mid [(n - f(n))]^2$, што е можно ако и само ако $[(n - f(n))]^2 = 0$, т.е. $f(n) = n$.

23. Функцијата $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ е таква што постои природен број a за кој

$$f(a) = f(1995), \quad f(a+1) = f(1996), \quad f(a+2) = f(1997) \text{ и } f(n+a) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1},$$

за секој $n \in \mathbb{N}$.

а) докажи дека $f(n+4a) = f(n)$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

б) определи ја најмалата вредност за a.

Решение. а) Од равенството $f(n+a) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}$, добиваме

$$f(n+2a) = f((n+a)+a) = \frac{f(n+a)-1}{f(n+a)+1} = \frac{\frac{f(n)-1}{f(n)+1}-1}{\frac{f(n)-1}{f(n)+1}+1} = -\frac{1}{f(n)}$$

$$f(n+4a) = f((n+2a)+2a) = -\frac{1}{f(n+2a)} = -\frac{1}{-\frac{1}{f(n)}} = f(n).$$

б) Најмалата вредност за a е 3. Навистина, ако $a = 1$, тогаш

$$f(1) = f(a) = f(1995) = f(3+1992) = f(3+498\cdot 4) = f(3+498\cdot 4a) = f(3)$$
$$= f(3a) = f(a+2a) = f(1+2a) = -\frac{1}{f(1)}.$$

Значи, $(f(1))^2 = -1$ што не е можно.

Ако $a = 2$, тогаш

$$f(2) = f(a) = f(1995) = f(3+249\cdot 4a) = f(3) = f(a+1) = f(1996)$$
$$= f(4+249\cdot 4a) = f(4) = f(2+a) = \frac{f(2)-1}{f(2)+1}.$$

Од равенството $f(2) = \frac{f(2)-1}{f(2)+1}$ добиваме $(f(2))^2 = -1$ што не е можно.

Не е тешко да се провери дека $a=3$ е најмалата вредност за која таква функција постои.

3. ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ ВО МНОЖЕСТВОТО РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

1. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ за кои важи

$$f(1)=2 \text{ и } f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1.$$

Решение. За $x=y=1$, добиваме $f(1)=2$, а за $y=1$ имаме $f(x+1)=f(x)+1$ и користејќи го ова и принципот на математичка индукција добиваме

$$f(n+x)=f(x)+n, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{Q}. \qquad (1)$$

Од $f(1)=2$ и следува дека $f(n)=n+1, \forall n\in\mathbb{N}$. За $x=y=0$ се добива $f(0)=1$. За $x=1, y=-1$ се добива $f(-1)=0$. За $y=-x$ се добива $f(-x)=-x+1$, т.е. се добива дека важи $f(z)=z+1, \forall z\in\mathbb{Z}$. Ако во почетната равенка ставиме $x=q$, $y=\frac{p}{q}$ добиваме $f(q+\frac{p}{q})=f(\frac{p}{q})+q$ односно $f(\frac{p}{q})=\frac{p}{q}+1$. Значи, единствена функција што ги задоволува условите на задачата е $f(x)=x+1$.

2. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ кои ги задоволуваат условите

1) $f(1)+2>0$,

2) $f(x+y)-xf(y)-yf(x)=f(x)f(y)+f(x)+f(y)+xy$, за секои $x,y\in\mathbb{Q}$,

3) $f(x)=3f(x+1)+2x+5$, за секој $x\in\mathbb{Q}$.

Решение. Ја воведуваме смената $f(x)=g(x)-x-1$, при што дадените услови го добиваат обликот:

1) $g(1)>0$,

2) $g(x+y)=g(x)g(y)$, за секои $x,y\in\mathbb{Q}$,

3) $g(x+1)=\frac{1}{3}g(x)$, за секој $x\in\mathbb{Q}$.

Од условот 2) за $x=0, y=1$ следува $g(1)=g(0)g(1)$ и како според 1) важи $g(1)>0$, добиваме $g(0)=1$. Понатаму, од условот 3) следува $g(1)=\frac{1}{3}$, $g(2)=\frac{1}{3^2}$ итн. па со индукција може да се докаже дека $g(n)=3^{-n}$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Но,

$$1=g(0)=g(x+(-x))=g(x)g(-x),$$

па затоа $g(n)=3^{-n}$, за секој $n\in\mathbb{Z}$. Сега,

$$\frac{1}{3}=g(1)=g(n\cdot\frac{1}{n})=g(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n})=(g(\frac{1}{n}))^n,$$

па затоа $g(\frac{1}{n})=3^{-\frac{1}{n}}$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Аналогно,

$$g(\tfrac{m}{n})=g(m\cdot\tfrac{1}{n})=(g(\tfrac{1}{n}))^m=3^{-\frac{m}{n}}, \text{ за } m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}.$$

Значи, $f(x)=3^{-x}-x-1$, за секој $x\in\mathbb{Q}$.

3. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ такви што

1) $f(x+y)-yf(x)-xf(y)=f(x)f(y)-x-y+xy$, за секои $x,y\in\mathbb{Q}$,

2) $f(x)=2f(x+1)+2+x$, за секој $x\in\mathbb{Q}$,

3) $f(1)+1>0$.

Решение. Условот 1) е еквивалентен со условот

$$f(x+y)+x+y=(f(x)+x)(f(y)+y).$$

Воведуваме смена $g(x)=f(x)+x$ и условите 1) – 3) ги добиваат облиците

$$g(x+y)=g(x)g(y),\quad g(x+1)=\tfrac{1}{2}g(x),\qquad g(1)>0. \tag{*}$$

Понатаму, од $g(1)=g(1)g(0)$ следува $g(1)=1$, а од $g(0)=g(x)g(-x)$ следува дека $g(x)\neq 0$. Од првиот услов во (*) следува $g(x)=g(\frac{x}{2})^2>0$ за секој $x\in\mathbb{Q}$. Ако ставиме $h(x)=\log_2 g(x)$, тогаш од условите (*) добиваме

$$h(x+y)=h(x)+h(y) \tag{**}$$

$$h(x+1)=h(x)-1 \tag{***}$$

Според (**) функцијата h ја задоволува Кошиевата равенка, па затоа $h(x)=h(1)x$, за $x\in\mathbb{Q}$, а од (***) добиваме $h(1)=h(0)-1=-1$. Според тоа, $h(x)=-x$, па затоа $g(x)=2^{-x}$ и $f(x)=2^{-x}-x$. Лесно се проверува дека оваа функција ги задоволува условите 1) – 3).

4. Да се определат сите функции $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ такви што

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y),$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Ако избереме $x=y=0$ и замениме во равенката, добиваме

$$2f(0)=4f(0),$$

па според тоа $f(0)=0$. Ако пак во равенката замениме $x=0$ ќе добиеме

$$f(y)+f(-y)=2f(y),$$

или $f(-y)=f(y)$. Од произволноста на $y\in\mathbb{Q}$, добиваме дека f е парна функција.

Ако избереме $y=nx$, тогаш добиваме

$$f((n+1)x)+f((n-1)x)=2f(x)+f(nx)$$

$$f((n+1)x)=2f(x)+2f(nx)-f((n-1)x),$$

за секој $n\in\mathbb{N}$ и $x\in\mathbb{Q}$. Специјално, за $n=1$ добивме

$$f(2x)=2f(x)+2f(x)+f(0), \text{ т.е. } f(2x)=4f(x)=2^2f(x).$$

Аналогно

$$f(3x)=2f(2x)+2f(x)-f(x)=9f(x)=3^2f(x).$$

Со помош на математичка индукција ќе покажеме $f(nx)=n^2f(x)$. Јасно е дека тврдењето е точно за $n=1,2,3$.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за секој природен број k, $k\le n$. Тогаш

$$\begin{aligned}f((n+1)x)&=2f(x)+2f(nx)-f((n-1)x)\\&=2f(x)+2n^2f(x)-(n-1)^2f(x)\\&=(n+1)^2f(x).\end{aligned}$$

Според принципот на математичка индукција $f(nx)=n^2f(x)$, за секои $x\in\mathbb{Q}$ и $n\in\mathbb{N}$.

Ако $x=\frac{1}{q}$, каде q е природен број, тогаш $f(1)f(qx)=q^2f(x)$, па според тоа $f(\frac{1}{q})=\frac{f(1)}{q^2}$. Од овде непосредно следува дека

$$f(\tfrac{p}{q})=f(p\tfrac{1}{q})=p^2f(\tfrac{1}{q})=p^2\tfrac{f(1)}{q^2}=(\tfrac{p}{q})^2f(1).$$

Заради немање на ограничување на вредноста на $f(1)$, доволно е да избереме $f(1)=a$, каде a е рационален број. Тогаш $f(x)=ax^2$ за било кој позитивен рационален број x. Заради парноста на f имаме дека $f(x)=ax^2$ за $x\in\mathbb{Q}$.

Но, за a рационален број и $f(x)=ax^2$, имаме

$$f(x+y)+f(x-y)=a(x+y)^2+a(x-y)^2=2ax^2+2ay^2=2f(x)+2f(y).$$

Значи, сите функции $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ кои го исполнуваат условот на задачата се $f(x)=ax^2$, $x\in\mathbb{Q}$, каде a е рационален број.

5. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{R}^+$ такви што

$$f(xy)=f(x+y)(f(x)+f(y)), \text{ за секои } x,y\in\mathbb{Q}^+.$$

Решение. Ако ставиме $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, тогаш $g:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{R}^+$ и дадената равенка го добива видот

$$g(x+y)g(x)g(y)=g(xy)(g(x)+g(y)). \tag{1}$$

Нека $f(1)=c>0$, т.е. $g(1)=\frac{1}{c}$. Од (1) добиваме $g(x+1)=cg(x)+1$, па затоа

$$g(2)=2,\ \ g(3)=2c+1,\ g(4)=2c^2+c+1,$$
$$g(5)=2c^3+c^2+c+1,\ g(6)=2c^4+c^3+c^2+c+1.$$

Од друга страна, ако во (1) ставиме $x=2, y=3$ добиваме

$$g(5)g(2)g(3)=g(6)(g(2)+g(3)). \tag{2}$$

Ако во (2) замениме за $g(2), g(3), g(5)$ и $g(6)$, ја добиваме равенката

$$4c^5-2c^3-c^2-c+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad (c-1)(c+1)(2c-1)(2c^2+2c+1)=0,$$

од каде следува $c=1$ или $c=\frac{1}{2}$.

Прв случај. Ако $c=1$, тогаш $g(x+1)=g(x)+1$. Оттука со индукција добиваме дека $g(n)=n$, за секој $n\in\mathbb{N}$ и уште повеќе, $g(x+n)=g(x)+n$, за секој $x\in\mathbb{Q}^+$ и за секој $n\in\mathbb{N}$. Сега во (1) ставаме $y=n$ и добиваме

$$(g(x)+n)g(x)n=g(nx)(g(x)+n),$$

т.е. $g(nx)=ng(x)$. Оттука, за $x=\frac{p}{q}$ и $y=q$, каде $p,q\in\mathbb{N}$ добиваме $g(x)=x$, за секој $x\in\mathbb{Q}^+$, т.е. $f(x)=\frac{1}{x}$, за секој $x\in\mathbb{Q}^+$.

Втор случај. Ако $c=\frac{1}{2}$, тогаш $g(x+1)=\frac{1}{2}g(x)+1$. Оттука,

$$g(n)=2 \text{ и } g(x+n)-2=\frac{g(x)-2}{2^n},\ x\in\mathbb{Q}^+,\ n\in\mathbb{N}.$$

Сега, ако во (1) ставиме $y=n$ добиваме

$$2g(x+n)g(x)=g(nx)(g(x)+2)$$

и останува да покажеме дека од последните три равенства следува $g(x)=2$, за секој $x\in\mathbb{Q}^+$, т.е. $f(x)=\frac{1}{2}$ за секој $x\in\mathbb{Q}^+$.

Конечно, задачатаа има две решенија и тоа $f(x)=\frac{1}{x}$ и $f(x)=\frac{1}{2}$.

4. ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ ВО МНОЖЕСТВОТО РЕАЛНИ БРОЕВИ

1. Определи ги броевите A, B и C такви што постои функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква што

$$f(x+f(y))=Ax+By+C,$$

за било кои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека A, B и C се реални броеви и f е функција таква што

$$f(x+f(y))=Ax+By+C,$$

за било кои $x,y\in\mathbb{R}$.

Нека z е реален број, $x=z-f(0)$ и $y=0$. Тогаш

$$f(z)=f(z-f(0)+f(0))=A(z-f(0))+B\cdot 0+C=Az-Af(0)+C.$$

па значи постојат реални броеви a и b, такви што $f(z)=az+b$ за секој $z\in\mathbb{R}$. Оттука добиваме

$$f(x+f(y))=a(x+f(y))+b=ax+af(y)+b=ax+a(ay+b)+b=ax+a^2y+b(a+1).$$

Според тоа $(A,B,C)=(a,a^2,c)$ каде a и c се произволни реални броеви. Ако $a=-1$, тогаш $c=0$ како специјален случај.

2. Одреди го множеството функции што го задоволуваат равенството

$$f(x)+f(a-x)=x,\quad \forall x\in\mathbb{R}, a\in\mathbb{R}$$

Решение. За $x=0$, почетната равенка се трансформира во

$$f(a)=-f(0),\quad \forall a\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

додека за $x=a$, равенката се трансформира во

$$f(a)=a-f(0),\quad \forall a\in\mathbb{R} \qquad (2).$$

Од (1) и (2) следува дека $a=0, \forall a\in\mathbb{R}$ што не е можно. Заклучокот е дека не постои таква функција.

3. Одреди ги сите строго растечки функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои важи

$$f(f(x))=x,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Решение. Да забележиме дека функцијата $f(x)=x$ е едно решение. Ќе покажеме дека не постојат други функции што ги задоволуваат условите на задачата.

Да претпоставиме дека постои таква функција $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и постои број $a\in\mathbb{R}$ таков што $g(a)\neq a$.

Ако $g(a)<a$ тогаш, бидејќи g е строго растечка, важи $g(g(a))<g(a)$. Од условот $g(g(a))=a$ следува $a<g(a)$ што е контрадикција.

Ако $g(a)>a$ тогаш, бидејќи g е строго растечка, важи $g(g(a))>g(a)$. Од условот $g(g(a))=a$ следува $a>g(a)$ што е повторно контрадикција. Можеме да заклучиме дека единствено решение е функцијата $f(x)=x,\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

4. Определи ги сите реални функции f кои се определени за секој реален број x, такви што $f(x)+xf(1-x)=x^2-1$.

Решение. Нека f е функција која ја задоволува равенката. Ако воведеме смена $1-x=t$, добиваме $f(1-t)+(1-t)f(t)=t^2-2t$.

Последната равенка ќе ја помножиме со t и го формираме системот

$$\begin{cases} tf(1-t)+(t-t^2)f(t)=t^3-2t^2 \\ f(t)+tf(1-t)=t^2-1 \end{cases}$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка, добиваме:

$$f(t)(t^2-t+1)=-t^3+3t^2-1,$$

од каде добиваме $f(t)=\frac{-t^3+3t^2-1}{t^2-t+1}$.

Не е тешко да се провери и обратното, т.е. дека фунцкијата

$$f(x)=\frac{-x^3+3x^2-1}{x^2-x+1}$$

ја задоволува дадената равенка.

5. Да се реши функционалната равенка

$$f(x)+f(\tfrac{1}{x})=-63x\,,$$

на множеството $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Решение. Ако воведеме смена $\frac{1}{x}=t$, т.е. $x=\frac{1}{t}$, при што добиваме

$$f(\tfrac{1}{t})+8f(t)=-63\tfrac{1}{t}\,.$$

Значи, $f(\frac{1}{x})+8f(x)=-63\frac{1}{x}$. Ако првата равенка од системот

$$\begin{cases} f(x)+8f(\tfrac{1}{x})=-63x \\ f(\tfrac{1}{x})+8x=-\tfrac{63}{x} \end{cases},$$

ја помножиме со $-\frac{1}{8}$ и ја собереме со втората равенка, добиваме

$$-\tfrac{1}{8}f(x)+8f(x)=\frac{63}{8}x-63\tfrac{1}{x}\text{, т.е. }\tfrac{63}{8}f(x)=\tfrac{63}{8}(x-\tfrac{8}{x})\,,$$

Па затоа $f(x)=x-\frac{8}{x}$.

Не е тешко да се провери дека $f(x)=x-\frac{8}{x}$ е решение на почетната равенка. Значи, единствено решение на равенката е $f(x)=x-\frac{8}{x}$.

6. Да се определат сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ кои ја задоволуваат равенката

$$(x-1)f(\tfrac{x+1}{x-1})-f(x)=x\,.$$

Решение. Ако воведеме смена $\frac{x+1}{x-1}=t$, тогаш $x=\frac{t+1}{t-1}$, и ако замениме во равенката добиваме:

$$\tfrac{2}{t-1}f(t)-f(\tfrac{t+1}{t-1})=\tfrac{t+1}{t-1}\,,$$

т.е.

$$2f(x)-(x-1)f(\tfrac{x+1}{x-1})=x+1\,.$$

Од системот равенки

$$\begin{cases} (x-1)f(\tfrac{x+1}{x-1})-f(x)=x \\ 2f(x)-(x-1)f(\tfrac{x+1}{x-1})=x+1 \end{cases}$$

добиваме $f(x)=2x+1$.

Непосредно може да се провери дека функцијата $f(x)=2x+1$ ја задоволува дадената равенка.

7. Нека α е реален број. Најди ги сите функции $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ такви што

$$\alpha x^2 f(\tfrac{1}{x}) + f(x) = \tfrac{x}{x+1}.$$

Решение. Ако во равенката го замениме x со $\frac{1}{t}$, односно $\frac{1}{x}$ со t (пресликувањето $t \to \frac{1}{t}$ е биекција на $(0,+\infty)$), добиваме

$$\alpha \tfrac{1}{t^2} f(t) + f(\tfrac{1}{t}) = \tfrac{1}{t+1}, \qquad \alpha \tfrac{1}{t} f(t) + tf(\tfrac{1}{t}) = \tfrac{t}{t+1}.$$

Сега од почетната равенка поделена со x и последната добиена равенка го добиваме системот

$$\begin{cases} \alpha x f(\tfrac{1}{x}) + \tfrac{1}{x} f(x) = \tfrac{1}{x+1} \\ \alpha \tfrac{1}{x} f(x) + x f(\tfrac{1}{x}) = \tfrac{x}{x+1} \end{cases}$$

Ако $\alpha = \pm 1$, тогаш системот го добива обликот

$$\begin{cases} \pm x f(\tfrac{1}{x}) + \tfrac{1}{x} f(x) = \tfrac{1}{x+1} \\ \pm \tfrac{1}{x} f(x) + x f(\tfrac{1}{x}) = \tfrac{x}{x+1} \end{cases}$$

Од овој систем добиваме $\frac{1}{x+1} = \pm \frac{x}{x+1}$. Заради ова равенство почетната равенка нема решение.

Ако $\alpha \neq \pm 1$, т.е. $\alpha^2 \neq 1$ лесно се добива дека $f(x) = \frac{x(1-\alpha x)}{(x+1)(1-\alpha^2)}$.

Не е тешко да се провери дека оваа функција ја задоволува равенката.

8. Нека $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ и $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ е дадена функција. Најди функција $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ така што $f(\frac{x}{x-1}) = af(x) + \varphi(x)$.

Решение. Ако за $x \neq 1$ ставиме $t = \frac{x}{x-1}$ се добива $x = \frac{t}{t-1}$ и

$$f(t) = af(\tfrac{t}{t-1}) + \varphi(\tfrac{t}{t-1}) = a(af(t) + \varphi(t)) + \varphi(\tfrac{t}{t-1}) = a^2 f(t) + a\varphi(t) + \varphi(\tfrac{t}{t-1}).$$

Оттука заради $a \neq \pm 1$, односно $1 - a^2 \neq 0$, добиваме дека за секој $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ важи $f(t) = \frac{a\varphi(t) + \varphi(\frac{t}{t-1})}{1-a^2}$. Лесно се проверува дека оваа функција ги исполнува условите на задачата.

9. Одреди ги сите функции $f ; \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ за кои важи $f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = x$.

Решение. Почетната равенка ќе ја означиме со (*). Таа е еквивалентна со равенката

$$f(x) = x - f(\tfrac{1}{1-x}) \tag{1}$$

Ако во почетната равенка x го замениме со $\frac{1}{1-x}$, се добива $f(\frac{1}{1-x}) + f(\frac{x-1}{x}) = \frac{1}{1-x}$, односно

$$f(\tfrac{1}{1-x}) = \tfrac{1}{1-x} - f(\tfrac{x-1}{x}). \tag{2}$$

Ако пак, x го замениме со $\frac{x-1}{x}$, се добива $f(\frac{x-1}{x}) + f(x) = \frac{x-1}{x}$, односно

$$f(\tfrac{x-1}{x}) = \tfrac{x-1}{x} - f(x). \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) следува

$$f(x)=x-f(\tfrac{1}{1-x})=x-(\tfrac{1}{1-x}-f(\tfrac{x-1}{x}))=x-\tfrac{1}{1-x}+\tfrac{x-1}{x}-f(x),$$

односно $2f(x)=x-\frac{1}{1-x}+\frac{x-1}{x}$, т.е. $f(x)=\frac{x^3-x+1}{2x(x-1)}$.

10. Нека за функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ важи $f(x)+(x+\frac{1}{2})\cdot f(1-x)=1$. Пресметај $f(0)$ и $f(1)$.

Решение. Ако во почетната равенка x се замени со $1-x$ се добива равенката

$$f(1-x)+(\tfrac{3}{2}-x)\cdot f(x)=1. \qquad (*)$$

Ако означиме $f(x)=a$ и $f(1-x)=b$, од почетната равенка и од (*) се добива системот

$$\begin{cases} a+(x+\frac{1}{2})b=1 \\ (\frac{3}{2}-x)a+b=1 \end{cases}.$$

Од $\Delta=-(x-\frac{1}{2})^2$ и $\Delta_a=x-\frac{1}{2}$ следува дека единствено решение за $x\neq\frac{1}{2}$ е $f(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}-x}=\frac{2}{1-2x}$. Понатаму $f(\frac{1}{2})$ се добива кога во почетната равенка x се заменува со $\frac{1}{2}$, т.е. $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. Значи, единствена функција што ги задоволува условите на задачата е функцијата зададена со

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & x=\frac{1}{2} \\ \frac{2}{1-2x}, & x\neq\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Затоа $f(0)=2$ и $f(1)=-2$.

11. Најди функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ако за секој $x\neq 0$ важи

$$(x+1)f(x)=1-f(\tfrac{1}{x}),\text{ и } f(0)=1.$$

Решение. Нека $x\neq 0$. Важи

$$(x+1)f(x)=1-f(\tfrac{1}{x}). \qquad (1)$$

Заменувајќи го x со $\frac{1}{x}$, ($x\neq 0$), добиваме

$$(\tfrac{1}{x}+1)f(\tfrac{1}{x})=1-f(x). \qquad (2)$$

Од (1) наоѓаме $f(\frac{1}{x})=1-(x+1)f(x)$, па заменувајќи во (2) наоѓаме:

$$(\tfrac{1}{x}+1)(1-(x+1)f(x))=1-f(x),$$

$$\tfrac{1}{x}=\tfrac{x+1+x^2}{x}f(x),$$

$$f(x)=\tfrac{1}{1+x+x^2}. \qquad (*)$$

Бидејќи $f(0)=1$, заклучуваме дека бараната функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е зададена со (*).

12. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(xf(x)+f(y))=(f(x))^2+y\text{, за секои } x,y\in\mathbb{R}.$$

Решение. За $x=0$ добиваме $f(f(y))=y+(f(0))^2$. Според тоа, $f(f(y))$, па затоа и $f(y)$ е сурјекција. Тогаш, ако $f(a)=0$, со замена во равенката добиваме $f(f(y))=y$, од каде следува дека $f(0)=0$. Сега, за $y=0$ од условот добиваме $f(xf(x))=(f(x))^2$. Според тоа

$$(f(x))^2=f(xf(x))=f(f(f(x))\cdot f(x))=[f(f(x))]^2=x^2.$$

Ако $f(x)=x$ и $f(y)-y$ за некои x и y, тогаш од условот следува дека $f(x^2-y)=x^2+y$. Оттука добиваме $\pm(x^2-y)=x^2+y$, т.е. $x=0$ или $y=0$. Значи, $f(x)=x$ или $f(x)=-x$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Очигледно овие функции се решенија на задачата.

13. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои важи

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y),\qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Решение. За $y=x$ се добива

$$2xf(x)=2x[f(x)]^2 \tag{1}$$

Ако $x\neq 0$ од (1) следува дека $f(x)=[f(x)]^2$ од каде се добива дека $f(x)=0$ или $f(x)=1$.

Да претпоставиме дека постои реален број $a\neq 0$ таков што $f(a)=0$. Тогаш следува дека $af(y)=0,\ \forall y\in\mathbb{R}$. Добиваме дека $f(x)\equiv 0$. Значи функцијата $f(x)\equiv 0$ е решение на функционалната равенка.

Да претпоставиме дека постои реален број $a\neq 0$ таков што $f(a)=1$. Тогаш $x=xf(x)$. За $x\neq 0$ важи $f(x)\equiv 1$. Ако за $x=0$ земеме $f(0)=c$, каде што c е произволен реален број, лесно се проверува дека функциите од облик

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ c, & x=0\end{cases} \tag{2}$$

ја задоволуваат функционалната равенка. Значи единствени решенија на функционалната равенка се константната нула функција и функциите од облик (2).

14. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ такви што

$$f(x)+f(y)=f(xyf(x+y)),$$

за секои $x,y\neq 0$ такви што $x+y\neq 0$.

Решение. Ако $x\neq y$ тогаш $x-y\neq 0$. Ако уште $y\neq 0$ имаме

$$f(y)+f(x-y)=f(y(x-y)f(x)).$$

Бидејќи $f(y)\neq 0$, не може да е исполнето равенството $f(x-y)=f(y(x-y)f(x))$ па и равенството $x-y=y(x-y)f(x)$, т.е. $yf(x)=1$. Значи, за $x,y\neq 0$ и $x\neq y$ е исполнето $yf(x)\neq 1$. Бидејќи f е функција, единствена можност е $xf(x)=1$, т.е. $f(x)=\frac{1}{x}$.

Не е тешко да се провери дека функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ ја задоволува функционалната равенка.

15. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ кои што ја задоволуваат равенката

$$f((x-y)^2)=(f(x))^2-2x\cdot f(y)+y^2$$

Решение. Ако $x=y$ тогаш $f(0)=(f(x))^2-2x\cdot f(x)+x^2$. За $x=0$ добиваме $f(0)=(f(0))^2$

Според тоа $f(0)=0$ или $f(0)=1$.

1° Ако $f(0)=0$ тогаш $(f(x)-x)^2=0 \Rightarrow f(x)=x$. Функцијата $f(x)=x$ ја задоволува равенката.

2° Ако $f(0)=1$, тогаш $f(x)-x=\pm 1$, за било кој $x\in\mathbb{R}$. Значи $f(x)=x+1$ или $f(x)=x-1$.

16. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои реални броеви x и y важи

$$f(x+f(y))=f(f(y))+2xf(y)+x^2.$$

Решение. Во дадената равенка ставаме $x=-f(y)$ и добиваме

$$f(0)=f(f(y))-(f(y))^2.$$

Сега во последната равенка ставаме $y=0$ и ако означиме $f(0)=a$ ја добиваме равенката $f(a)=a^2+a$. Да се вратиме на почетната равенка и да ставиме $y=0$. Имаме,

$$f(x+a)=f(a)+2xa+x^2=x^2+2xa+a^2+a=(x+a)^2+a.$$

Според тоа, единствени можни решенија на почетната равенка е функциите $f(x)=x^2+a$, каде a е произволен реален број. Со непосредна проверка се гледа дека овие функции навистина се решенија на почетната равенка.

17. Најди ги сите функции $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ за кои важи $f(f(x))=6x-f(x)$.

Решение. Се проверува дека функцијата $f(x)=2x$ ги исполнува условите на задачата. Ако f е функција што ги исполнува условите на задачата, тогаш за функцијата $g(x)=f(x)-2x$ важи $g(g(x)+2x)+3g(x)=0$ и $g(x)>-2x$. Се докажува дека $g(x)\geq 0$, од каде $g(x)=0$, за секој $x\in(0,\infty)$.

18. Да се определи функцијата $f(x)$, ако за секои релани броеви x и y е точно равенството

$$f(xy)=f(x)f(y) \text{ и } f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy\,.$$

Решение. Ако во втората равенка замениме $y=0$, добиваме

$$f(x+0)=f(x)+f(0)+2x\cdot 0\,, \text{ т. е. } \quad f(0)=0\,.$$

Според тоа,

$$0=f(0)=f(1+(-1))=f(1)+f(-1)-2\,, \text{т. е.} \quad f(1)+f(-1)=2\,.$$

Од друга страна, ако во втората равенка замениме $y=-x$, и ја искористиме првата равенка, добиваме:

$$0=f(x+(-x))=f(x)+f(-x)-2x^{2}=f(x\cdot 1)+f(x(-1))-2x^2=$$

$$=f(x)f(1)+f(x)f(-1)-2x^2=f(x)[f(1)+f(-1)]-2x^2=2f(x)-2x^2$$

Според тоа, $f(x)=x^2$.

19. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f(x^2+f(y))=y-x^2\,.$$

Решение. Во дадената равенка ставаме $x=0$ и добиваме $f(f(y))=y$, за секој $y\in\mathbb{R}$. Затоа за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f(y-x^2)=f(f(x^2+f(y)))=x^2+f(y)\,. \qquad (1)$$

Во (1) ставаме $y=x^2$ и добиваме $f(0)=x^2+f(x^2)$, т.е. $f(x^2)=-x^2+f(0)$. Потоа, во (1) ставаме $y=0$ и добиваме $f(-x^2)=x^2+f(0)$. Според тоа, за секој $x\in\mathbb{R}$ важи $f(x)=-x+c$, каде $f(0)=c$. Непосредно се проверува дека функциите $f(x)=-x+c$, $c\in\mathbb{R}$ ја задоволуваат дадената равенка.

20. Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ кои ги задоволуваат условите:

$$f(x+y)<f(x)+f(y) \text{ и } f(f(x))=[x]+2\,.$$

Решение. Ако $f(0)=a$, тогаш $f(a)=f(f(0))=2$, $f(2)=f(f(a))=a+2$. Со продолжување на оваа постапка добиваме дека

$$f(2k)=a+2k \text{ и } f(a+2k)=2k+2\,.$$

Сега

$$2k+2=f(a+2k)<f(a)+f(2k)=2+a+2k\,, \text{ од каде } a>0\,.$$

Ако ставиме $x=y=a$ добиваме $a+2a=f(2a)<f(a)+f(a)=4$, па $3a<4$, т.е. $a=1$. Оттука со примена на $f(2k)=a+2k$ и $f(a+2k)=2k+2$ добиваме $f(x)=x+1$, за сите природни броеви x.

За $x=y=\frac{1}{2}$ во неравенството добиваме

$$2=f(1)=f(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})<2f(\tfrac{1}{2})\,,$$

па $f(\frac{1}{2})>1$. Од друга страна

$$1+f(\tfrac{1}{2})=f(f(\tfrac{1}{2})=2,$$

па $f(\frac{1}{2})=1$, што е контрадикција.

Следува, дека не постои функција која ги задоволува бараните услови.

21. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ такви што

$$xf(xy)+f(-y)=xf(x),\text{ за секои } x,y\in\setminus\{0\}.$$

Решение. Ако во дадената равенка ставиме $x=1$, добиваме $f(-y)=1-f(y)$. Повторно ако во дадената равенка ставиме $y=-1$ добиваме $xf(-x)+f(1)=xf(x)$. Во последното равенство заменуваме $f(-x)=f(1)-f(x)$ и добиваме

$$x(f(1)-f(x))+f(1)=xf(x),\text{ т.е. } xf(1)+f(1)=2xf(x).$$

Според тоа, $f(x)=c+\frac{c}{x}$, каде $c=\frac{f(1)}{2}$. Проверуваме кога функцијата од дадениот вид го задоволува условот. Имаме

$$xf(xy)+f(-y)=x(c+\tfrac{c}{xy})+c+\tfrac{c}{-y}=cx+c=x(c+\tfrac{c}{x})=xf(x),$$

што значи дека секоја функција од видот $f(x)=c+\frac{c}{x}$ е решение на задачата.

22. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2.$$

Решение. Нека $f(0)=a$ и $f(1)=b$. Ако во почетната равенка ставиме $x=0$ добиваме $b=(a-1)f(y)+2$. Ако $a\neq 1$, тогаш $f(y)=\frac{b-2}{a-1}$, за секој $y\in\mathbb{R}$. Со замена во почетната равенка лесно се гледа дека константните функции не се решение. Значи, мора да биде $a=1$, па затоа $b=2$. Ако сега во дадената равенка ставиме $y=0$, ја добиваме равенката

$$b=af(x)-a-x+2,\text{ т.е. } 2=f(x)-x+1,$$

од каде наоѓаме $f(x)=x+1$. Лесно се проверува дека оваа функција навистина е решение на дадената равенка.

23. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(f(x)+f(y))=f(x)+y,\text{ за секои } x,y\in\mathbb{R}.$$

Решение. *Прв начин.* Нека x_1,x_2 се реални броеви за кои важи $f(x_1)=f(x_2)$. Заменувајќи, последователно $y=x_1$ и $y=x_2$ во дадената равенка, добиваме $f(f(x)+f(x_1))=f(x)+x_1$ и $f(f(x)+f(x_2))=f(x)+x_2$. Бидејќи левите страни на последните две равенства се еднакви, имаме $f(x)+x_1=f(x)+x_2$, од каде $x_1=x_2$. Добивме дека функцијата $f(x)$ е инјекција. Заменувајќи $y=0$, во почетното равенство, добиваме $f(f(x)+f(0))=f(x)$, за секој реален број x. Бидејќи $f(x)$ е инјекција, имаме дека $f(x)+f(0)=x$. Ако ставиме $x=0$, од последното равенство добиваме $2f(0)=0$, односно $f(0)=0$. Оттука, добиваме дека функцијата $f(x)=x$ го задоволува почетното равенство.

Втор начин. Менувајќи ги местата x и y во почетната равенка добиваме дека
$$f(f(y)+f(x))=f(y)+x.$$
Бидејќи левата страна во последното равенство е иста како и левата страна на почетното равенство, добиваме $f(x)+y=f(y)+x$. Заменувајќи $y=0$, во последното равенство добиваме $f(x)=x+f(0)$. Сега со замена во почетната равенка добиваме
$$x+f(0)+y+f(0)+f(0)=x+f(0)+y \quad ,$$
од каде следува $f(0)=0$. Сега од $f(x)=x+f(0)$, добиваме дека $f(x)=x$.

24. Определи ги сите строго растечки функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што
$$f(x+f(y))=f(x+y)+1.$$

Решение. Од равенката, добиваме $f(y+f(x))=f(x+y)+1$. Значи,
$$f(x+f(y))=f(y+f(x)).$$
Бидејќи f е строго растечка функција, добиваме $x+f(y)=y+f(x)$, за секои x и y од множеството реални броеви. Ако во последната добиена равенка замениме $y=0$, добиваме $f(x)=x+f(0)$. Заменувајќи во почетната равенка, добиваме $x+f(y)+f(0)=x+y+f(0)+1$, т.е. $f(y)=y+1$. Значи, ако f го исполнува условот на задачата, тогаш $f(x)=x+1$. Непосредно се проверува дека функцијата $f(x)=x+1$ ги исполнува условите на задачата.

25. Определи ги сите реални функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што
$$f(x+f(y))=f(x-f(y))+4xf(y), \tag{1}$$
за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Јасно, функцијата $f\equiv 0$ е решение. Нека $f\not\equiv 0$ и да земеме y таков што $f(y)\neq 0$. Тогаш $4xf(y)$ ги прима сите реални вредности и затоа секој реален број може да се претстави во облик $f(a)-f(b)$ за соодветни вредности на a и b. Последнот ќе го користиме во облик $x=2f(y)-2f(z)$, за секој $x\in\mathbb{R}$ и соодветни вредности на y и z.

Ако во (1) ставиме $x=-f(z)$ и $y=z$ добиваме
$$f(0)=f(-2f(z))-4f(z)^2. \tag{2}$$
Понатаму, ако во (1) ставиме $x=f(y)-2f(z)$ добиваме
$$f(2f(y)-2f(z))=f(-2f(z))+4f(y)^2-8f(y)f(z). \tag{3}$$
Од (2) и (3) добиваме
$$f(2f(y)-2f(z))=(2f(y)-2f(z))^2+f(0),$$
што значи дека $f(x)=x^2+c$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Непосредно се проверува дека оваа функција навистина е решение на (1).

26. Определи ги сите реални функции $f(x)$ такви што

$$\tfrac{1}{2}f(xy)+\tfrac{1}{2}f(xz)-f(x)\cdot f(yz)\geq \tfrac{1}{4},$$

за секои реални броеви x,y,z.

Решение. Ако во неравенството замениме $x=y=z=0$, со алгебарски трансформации добиваме

$$(f(0))^2-f(0)+\tfrac{1}{4}\leq 0$$

$$(f(0)-\tfrac{1}{2})^2\leq 0 .$$

Од особините на реални броеви добиваме дека $f(0)-\frac{1}{2}=0$, т.е $f(0)=\frac{1}{2}$.

Сега, ако во почетната неравенка избереме $y=z=0$ го добивме неравенството

$$4f(0)-4f(x)f(0)\geq 1 .$$

Со алгебарски трансформации и ако го искористиме равенството $f(0)=\frac{1}{2}$, добиваме $f(x)\leq \frac{1}{2}$.

Ако во почетното неравенство замениме $x=y=z=1$, добиваме дека

$$f(1)-f^2(1)\geq \tfrac{1}{4}$$

$$(f(1)-\tfrac{1}{2})^2\leq 0 .$$

Повторно од особините на реални броеви, добиваме дека $f(1)-\frac{1}{2}=0$, т.е $f(1)=\frac{1}{2}$.

Со замена $y=z=1$ во почетната равенка, добиваме дека $f(x)-f(x)f(1)\geq \frac{1}{4}$, и ако го искористиме равенството $f(1)=\frac{1}{2}$, добиваме дека $f(x)\geq \frac{1}{2}$.

Од целата претходна дискусија јасно е дека единствена функција која го задоволува неравенството е $f(x)=\frac{1}{2}$.

27. Определи ги сите реални функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои реални броеви x и y важи

$$f(xf(y)+x)=xy+f(x).$$

Решение. За $x=1$ имаме $f(f(y)+1)=y+f(1)$. За било кој реален број a , и за реалниот број $y=a-f(1)$ имаме

$$f(f(y)+1)=y+f(1)=a-f(1)+f(1)=a,$$

па според тоа функцијата е *сурјективна*.

Специјално, постои $b\in\mathbb{R}$ таков што $f(b)=-1$.

Нека $c,d\in\mathbb{R}$ се такви што $f(c)=f(d)$. Но тогаш

$$c+f(1)=f(f(c)+1)=f(f(d)+1)=d+f(1),$$

односно $c=d$. Според тоа, f е *инјективна* функција.

За $x=1$ и $y=0$ добиваме $f(f(0)+1)=f(1)$. Бидејќи f е инјективна функција добиваме дека $f(0)+1=1$, т.е. $f(0)=0$.

За $x\neq 0$ определуваме $y=-\frac{f(x)}{x}$. Тогаш

$$f(xf(y)+x)=x(-\tfrac{f(x)}{x})+f(x)=-f(x)+f(x)=0=f(0),$$

па повторно од инјективноста на f имаме $xf(y)+x=0$, т.е.

$$f(y)=-1$$

$$f(-\tfrac{f(x)}{x})=f(b),$$

$$-\tfrac{f(x)}{x}=b$$

$$f(x)=-bx,$$

за сите реални броеви $x\neq 0$.

Сега, со замена во почетната равенка, добиваме дека $b^2=1$, т.е. $b=\pm 1$, со што ги добиваме функциите $f(x)=-x$ и $f(x)=x$.

Не е тешко да се провери дека истите ја задоволуваат почетната равенка.

28. Дали постојат природни броеви m и n и функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што се исполнети следниве услови:

i) $f(f(x))=2f(x)-x-2,$ за секој $x\in\mathbb{R}$,

ii) $m\leq n$ и $f(m)=n$.

Решение. Ќе докажеме дека такви броеви и таква функција не постојат. Нека функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е таква што $f(f(x))=2f(x)-x-2$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Ќе докажеме дека не постојат цели броеви m и $k\geq 0$ такви што $f(m)=m+k$. Ако $k=0$, тогаш $f(m)=m$ и ако земеме $x=m$ добиваме

$$m=f(m)=f(f(m))=2f(m)-m-2=2m-m-2,\text{ т.е. } m=m-2,$$

што не е можно. Нека $k=1$. Сега важи $f(m)=m+1$, па затоа

$$f(m+1)=f(f(m))=2f(m)-m-2=2(m+1)-m-2$$

и затоа $f(m+1)=m$. Но, тогаш

$$m+1=f(m)=f(f(m+1))=2f(m+1)-(m+1)-2=2m-m-3=m-3$$

и повторно добивме противречност. Понатаму, нека $k\geq 2$ е таков што $f(m)=m+k$ и нека земеме дека k е најмалиот број со ова својство. Имаме,

$$f(m+k)=f(f(m))=2f(m)-m-2=2(m+k)-m-2=(m+k)+(k-2).$$

Ставаме $m_1=m+k$ и $k_1=k-2$. Тогаш $f(m_1)=m_1+k_1$, што противречи на минималноста на k, кога $k_1\geq 2$. Ако $k_1<2$, тогаш $k_1=0$ или $k_1=1$, кои случаи беа претходно отфрлени.

29. Определи ги сите функци f, определени на множеството реални броеви, за кои се исполнети неравенствата $f(x)\leq x$ и $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$, за секои реални броеви x и y.

Решение. Од неравенството $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$, за $x=y=0$ добиваме

$$f(0)=f(0+0)\leq f(0)+f(0),$$

т.е. $0\leq f(0)$. Ако пак во $f(x)\leq x$ замениме $x=0$ добиваме $f(0)\leq 0$. Според тоа, $f(0)=0$.

Понатаму, за секој $x\in\mathbb{R}$ важи

$$0=f(x+(-x))\leq f(x)+f(-x)\leq x+(-x)=0$$

$$f(x)+f(-x)=0$$
$$f(-x)=-f(x).$$

Од произволноста на реалниот број x добиваме дека $f(x)$ е непарна функција.

Бидејќи за произволен $x\in\mathbb{R}$ е исполнето $f(-x)\le -x$, т.е. $x\le -f(-x)$, ако ја искористиме непарноста на функцијата, добиваме

$$x\le -f(-x)=f(x)\le x,$$

па според тоа $f(x)=x$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

Не е тешко да се докаже дека $f(x)=x$, го задоволува даденото неравенство. Од претходната дискусија непосредна последица е единственоста.

30. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е адитивна, т.е. го исполнува условот

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$. Ако f е растечка на интервалот $[a,b]$, $a<b$, тогаш таа е растечка на $\mathbb{R}$. Докажи!

Решение. Функцијата f , $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ која го исполнува условот

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

го исполнува и условот $f(nx)=nf(x)$, за секој $n\in\mathbb{Z}$ и за секој $x\in\mathbb{R}$. Непосредно се докажува со помош на математичка индукција. Навистина, за $n=2$ имаме

$$f(2x)=f(x+x)=f(x)+f(x)=2f(x).$$

Нека претпоставиме дека $f((n-1)x)=(n-1)f(x)$. Тогаш

$$\begin{aligned}f(nx)&=f((n-1)x+x)=f((n-1)x)+f(x)\\&=(n-1)f(x)+f(x)=[(n-1)+1]f(x)=nf(x).\end{aligned}$$

Според принципот на математичка индукција $f(nx)=nf(x)$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

Од друга страна $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$, па според тоа $f(0)=0$. За било кој реален број x е исполнето

$$f(x)+f(-x)=f(x+(-x))=f(0)=0.$$

Значи, за било кој реален број x имаме $f(-x)=-f(x)$.

Ако $n\in\mathbb{Z}$ и $n<0$, тогаш $n=-|n|$ и според претходниот дел од доказот, добиваме

$$f(nx)=f(-|n|x)=-f(|n|x)=-|n|\,f(x)=nf(x).$$

Нека t е произволен реален број од интервалот $[0,b-a]$. Тогаш $a\le a+t\le b$ и бидејќи f е растечка на интервалот $[a,b]$ имаме

$$f(t)=f((a+t)-a)=f(a+t)-f(a)\ge 0,$$

односно f е позитивна на сегментот $[0,b-a]$.

Ако x е произволен позитивен реален број, постои природен број n таков што $\frac{x}{n}\le b-a$, па според тоа $f(\frac{x}{n})\ge 0$. Ако го искористиме последното неравенство, добиваме

$$f(x)=f(n\tfrac{x}{n})=nf(\tfrac{x}{n})\ge 0.$$

Конечно, за произволни реалени броеви x и y за кои е исполнето неравенството $x<y$, имаме $f(y)-f(x)=f(y-x)\ge 0$.

31. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$(x+y)(f(x)-f(y))=(x-y)f(x+y),$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. За $x\neq 0$ да го разгледаме последователно даденото равенство ако (x,y) соодветно го замениме со $(\frac{x}{2}-1,\frac{x}{2}+1),(\frac{x}{2}+1,-\frac{x}{2})$ и $(-\frac{x}{2},\frac{x}{2}-1)$. Ги добиваме равенствата

$$f(\tfrac{x}{2}-1)-f(\tfrac{x}{2}+1)=-\tfrac{2}{x}f(x)$$

$$f(\tfrac{x}{2}+1)-f(-\tfrac{x}{2})=(x+1)f(1)$$

$$f(-\tfrac{x}{2})-f(\tfrac{x}{2}-1)=(x-1)f(-1)$$

Ако ги собереме горните равенства добиваме

$$f(x)=\tfrac{f(1)+f(-1)}{2}x^2+\tfrac{f(1)-f(-1)}{2}x=ax^2+bx,$$

што е точно и за $x=0$, бидејќи за $(x,y)=(1,0)$ добиваме $f(0)=0$. Обратно, лесно се проверува дека секоја функција $f(x)=ax^2+bx$ ја задоволува дадената равенка.

32. Нека $a\in\mathbb{R}$ и функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е таква што

1) $f(x+y)=f(x)f(a-y)+f(y)f(a-x)$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$

2) $f(0)=\frac{1}{2}$.

Докажи, дека $f=\text{const}$.

Решение. Ако во 1) ставиме $x=y=0$ добиваме $f(a)=\frac{1}{2}$. Тогаш за $x=0$ и произволно y добиваме

$$f(y)=\tfrac{1}{2}f(a-y)+\tfrac{1}{2}f(y),$$

од каде следува $f(y)=f(a-y)$. Сега равенството од условот може да се запише во видот $f(x+y)=2f(x)f(y)$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$. Ако го искористиме последното равенство последователно добиваме

$$f(x+y)=2f(x)f(y)=2f(a-x)f(y)=f(a-x+y).$$

За $y=-x$ имаме

$$\tfrac{1}{2}=f(0)=f(a-2x)=f(2x).$$

Според тоа, важи $f(z)=f(2\frac{z}{2})=\frac{1}{2}$, за секој $z\in\mathbb{R}$.

33. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1,$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека $f(0)=c$. За $x=y=0$ добиваме $f(-c)=f(c)+c-1$, па затоа $c\neq 0$. Да го разгледаме множеството $A=\{f(x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$. Ако во почетната равенка ставиме $x = f(y)$ добиваме $f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2}$, за секој $x \in A$. Уште повеќе, за $u, v \in A$ имаме

$$f(u-v) = f(u) + uv + f(v) - 1 = c - \frac{u^2+v^2}{2} + uv = c - \frac{(u-v)^2}{2}.$$

Останува да забележиме дека за секој $x \in \mathbb{R}$ постојат $u, v \in A$ такви што $u - v = x$. Навистина, почетната равенка за $y = 0$ дава

$$f(x-c) - f(x) = cx + f(c) - 1,$$

и вредностите на десната страна на последното равенство се сите реални броеви.

Според тоа, $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, за секој $x \in \mathbb{R}$. Непосредно се проверува дека последната функција ги задоволува условите на задачата.

34. Определи ги сите функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што за секои $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(xy-1) + f(x)f(y) = 2xy - 1. \tag{1}$$

Решение. Ако во (1) ставиме $y = 0$ ддобиваме

$$f(-1) + f(x)f(0) = -1.$$

Ако $f(0) \neq 0$, од последното равенство следува дека $f(x)$ е константна функција, што не е можно бидејќи десната страна на (1) се менува во зависност x и y. Според тоа, $f(0) = 0$ и ако во (1) ставиме $x = y = 1$, добиваме $f(1)^2 = 1$, т.е. или $f(1) = 1$ или $f(1) = -1$.

Ако $f(1) = 1$, тогаш ставајќи во (1) $x = xy$ и $y = 1$ го добиваме равенството $f(xy-1) + f(xy) = 2xy - 1$. Оттука и од (1) следува

$$f(xy) = f(x)f(y). \tag{2}$$

Ако во (1) ставиме прво $y = 1$, а потоа $x = x + 1$ и $y = 1$ добиваме

$$f(x-1) = 2x - 1 - f(x) \text{ и } f(x+1) = 2x + 1 - f(x). \tag{3}$$

Сега, ако во (1) ставиме $y = x$ и ги искористиме равенствата (2) и (3) добиваме

$$\begin{aligned} 2x^2 - 1 &= f(x^2 - 1) + f(x)^2 \\ &= f(x-1)f(x+1) + f(x)^2 \\ &= (2x - 1 - f(x))(2x + 1 - f(x)) + f(x)^2 \\ &= 2f(x)^2 - 4xf(x) + 4x^2 - 1, \end{aligned}$$

од каде следува $(f(x) - x)^2 = 0$, т.е. $f(x) = x$.

Ако $f(1) = -1$, со аналогни размислувања се добива дека

$$2x^2 - 1 = 2f(x) + 4x^2 - 1,$$

т.е. $f(x) = -x^2$.

Со непосредна проверка се добива дека и двете функции го задоволуваат условот на задачата, т.е. единствени решенија се $f(x) = x$ и $f(x) = -x^2$.

35. Најди ги сите пресликувања $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои

$$f(x+yf(x))=f(xy)+f(x).$$

Решение. За $x=y=0$ се добива $f(0)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$. Нека $f(a)=m$. Тогаш за $x=a$, $y=1$ се добива $f(a+m)=2m$. За $x=a+m, y=1$ се добива $f(a+3m)=4m$. За $x=a, y=3$ се добива $f(a+3m)=f(3a)+m$. Од последните две равенства се добива: $f(3a)+m=f(a+3m)=4m\Rightarrow f(3a)=3m$. Од произволноста на a следува дека $f(3x)=3f(x)$, за секој реален број x.

Ако $f(x)=0$ за некој $x\neq 0$, тогаш за $y=\frac{a}{x}$ се добива

$$0=f(x)=f(x+yf(x))=f(xy)+f(x)=f(a).$$

Од ова следува дека $f(x)=0$ за секој реален број.

Функцијата $f(x)=0$ го задоволува равенството од задачата.

Сега, нека $f(x)\neq 0$, за секој $x\neq 0$ и нека $y=-\frac{x}{3f(x)}$. Тогаш добиваме

$$2f(x)=2f(x)+f(0)=2f(x)+f(x+3yf(x))=2f(x)+3f(xy)+f(x)$$
$$=3(f(xy)+f(x))=3f(x+yf(x))=f(3x+3yf(x))=f(2x).$$

За $y=-\frac{2x}{f(x)}$ добиваме

$$f(-x)=f(-x+2x+yf(x))=f(xy)+f(x)=2(\frac{f(xy)}{2}+f(x))-f(x)$$
$$=2f(x+\frac{y}{2f(x)})-f(x)=2f(0)-f(x)=-f(x).$$

За $y=-1$ се добива $f(x-f(x))=f(-x)+f(x)=0$, од што следува дека $x-f(x)=0\Rightarrow f(x)=x$.

Значи функциите $f(x)=0$ и $f(x)=x$ се единствените кои го задоволуваат условот на задачата.

36. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што $f(0)=0, f(1)=2013$ и

$$(x-y)(f(f^2(x))-f(f^2(y)))=(f(x)-f(y))(f^2(x)-f^2(y)),$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. За $x\neq 0, y=0$ добиваме $xf(f^2(x))=f^3(x)$, па затоа за $x\neq 0$ важи $f(f^2(x))=\frac{f^3(x)}{x}$. Ако замениме во почетната равенка, кога $xy\neq 0$ добиваме

$$(x-y)(\frac{f^3(x)}{x}-\frac{f^3(y)}{y})=(f(x)-f(y))(f^2(x)-f^2(y)). \qquad (1)$$

Во (1) ставаме $x<0$ и $y=1$ и добиваме

$$(x-1)(\frac{f^3(x)}{x}-2013^3)=(f(x)-2013)(f^2(x)-2013^2),$$

од каде следува

$$(f(x)-2013x)(f^2(x)-2013^2x)=0.$$

Но, за $x<0$ имаме $f^2(x)-2013^2x\neq 0$, па затоа $f(x)=2013x$, кога $x<0$. Во случајов имаме $f(-1)=-2013$. Сега земаме $x>0,\ y=-1$ и со замена во (1) добиваме

$$(f(x)-2013x)(f^2(x)+2013^2x)=0\ .$$

Значи, $f(x)=2013x$, кога $x>0$. Бидејќи $f(0)=0$, заклучуваме дека $f(x)=2013x$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Непосредно се проверува, дека оваа функција го задоволува равенството од условот на задачата.

37. Дали постои функција $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ таква што

$$(x+y)f(2yf(x)+f(y))=x^3f(yf(x))\,, \qquad (1)$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}^+$.

Решение. Нека претпоставиме дека таква функција постои. Ќе докажеме дека таа е инјекција. Нека $a\neq b$ и да претпоставиме дека $f(a)=f(b)$. Тогаш од

$$(a+y)f(2yf(a)+f(y))=a^3f(yf(a))$$

и

$$(b+y)f(2yf(a)+f(y))=(b+y)f(2yf(b)+f(y))=b^3f(yf(b))=b^3f(yf(a))$$

следува дека $\frac{a+y}{b+y}=\frac{a^3}{b^3}$, за секој y, што очигледно не е можно.

Нека $y=x^3-x>0$. Добиваме

$$x^3f(2(x^3-x)f(x)+f(x^3-x))=x^3f((x^3-x)f(x))\ .$$

Ако последното равенство го поделиме со $x^3\neq 0$ и искористиме дека f е инјекција добиваме

$$2(x^3-x)f(x)+f(x^3-x)=(x^3-x)f(x)\,,$$

т.е.

$$(x^3-x)f(x)+f(x^3-x)=0\,,$$

што не е можно, бидејќи

$$x^3-x>0,\ f(x)>0,\ f(x^3-x)>0\ .$$

Конечно, не постои функција $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ таква што важи (1).

38. Определи ги сите реални броеви $a>0$ за кои постои функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква што

а) $f(x)=ax+1-a$, за секој $x\in[2,3)$,

б) $f(f(x))=3-2x$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Ако ставиме $h(x)=f(x+1)-1$, лесно се проверува дека условите за $f(x)$ се еквивалентни со $h(x)=ax$, за секој $x\in[1,2)$ и $h(h(x))=-2x$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Тогаш

$$h(-2x)=h(h(h(x)))=-2h(x)$$

и во случајов $h(0)=0$. По индукција следува дека $h(4^nx)=4^nh(x)$ и значи

$h(x) > 0$ за $x \in [4^n, 2\cdot 4^n)$, за секој цел број n. Бидејќи $0 > -2x = h(h(x)) = h(ax)$, за $x \in [1, 2)$, важи $[a, 2a) \subset [2\cdot 4^k, 4^{k+1})$ за некој цел број k. Според тоа, $a = 2\cdot 4^k$.

Обратно, ако a го има овој вид, тогаш непосредно се проверува дека функцијата

$$h(x) = \begin{cases} ax, & x \in [4^n, 2\cdot 4^n), \\ -\frac{2x}{a}, & x \in [2\cdot 4^n, 4^{n+1}), \\ 0, & x = 0, \\ ax, & x \in (-4^{n+1}, -2\cdot 4^n) \\ -\frac{2x}{a}, & x \in (-2\cdot 4^n, -4^n] \end{cases}$$

каде n се менува во целите броеви ги има саканите својства. Лесно се докажува дека тоа е единствената функција со тие својства.

39. Определи ги сите растечки функции $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ такви што

$$f(\tfrac{x+f(x)}{2} + y) = 2x - f(x) + f(f(y)),\ \text{за секои } x, y \ge 0.$$

Решение. Нека $f(0) = a$. За $x = y = 0$ имаме, дека $f(\frac{a}{2}) = f(a) - a$. За $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$ добиваме $f(\frac{f(a) - \frac{a}{2}}{2}) = 2a$ и за $x = a,\ y = 0$ добиваме $f(\frac{f(a)+a}{2}) = 2a$. Бидејќи f е растечка функција, следува дека $f(\frac{f(a)+\frac{a}{2}}{2}) = 2a$. Од друга страна, за $x = y = \frac{a}{2}$ добиваме дека

$$f(\tfrac{f(a)+\frac{a}{2}}{2}) = 2a - f(a) + f(f(a) - a)$$

и следствено $f(a) = f(f(a) - a)$. Ако ставиме $x = 0,\ y = \frac{a}{2}$, наоѓаме

$$f(a) = -a + f(f(a) - a),$$

па затоа $a = 0$, т.е. $f(0) = 0$. Сега, за $x = 0$ добиваме $f(y) = f(f(y))$. Понатаму, за $x = y$ наоѓаме

$$f(\tfrac{3x+f(x)}{2}) = 2x.$$

Според тоа, функцијата f е сурјекција и од $f(x) = f(f(x))$ закчуваме дека $f(x) = x$ за секој $x \ge 0$. Оваа функција навистина е решение на задачата.

40. Да се определат сите функции f определени на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ такви што, кои примаат реални вредности и за секои $x, y \in \mathbb{R}^+$ е исполнето

$$f(x)f(y) = f(xy) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Решение. Ако избереме $y = 1$, тогаш за секој $x \in \mathbb{R}$, $x \ne 0$ имаме

$$f(x)f(1) = f(x) + \frac{1}{x} + 1$$

т.е.

$$f(x)[f(1)-1]=\tfrac{1}{x}+1. \qquad (*)$$

Ако избереме $x=1$, тогаш $f(1)[f(1)-1]=2$, т.е. $f(1)^2-f(1)-2=0$. Од последната равенка имаме $f(1)=-1$ или $f(1)=2$. Но, тогаш $f(1)-1=-2$ или $f(1)-1=1$. Значи, во секој случај $f(1)-1\neq 1$. Сега од (*) имаме $f(x)=\frac{1}{f(1)-1}(\frac{1}{x}+1)$.

Според тоа, $f(x)=-\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+1)$ или $f(x)=1+\frac{1}{x}$. Не е тешко да се провери дека првата функција не е решение на равенката. Единствено решение е $f(x)=1+\frac{1}{x}$.

41. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(f(x)+2y)=6x+f(f(y)-x)$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Во дадената равенка ставаме $y=-\frac{f(x)}{2}$ и добиваме

$$f(0)=6x+f(f(-\tfrac{f(x)}{2})-x),$$

т.е.

$$f(f(-\tfrac{f(x)}{2})-x)=f(0)-6x.$$

Сега за произволен y избираме $x=\frac{f(0)-y}{6}$ и со замена во последната равенка добиваме $f(A(y)=y$, каде $A(y)$ е функција од y. Според тоа, пресликувањето f е сурјекција. Ќе докажеме дека f е инјекција. Нека $a,b\in\mathbb{R}$ се такви што $f(a)=f(b)$. Бидејќи f е сурјекција постои y таков што $f(y)=a+b$. Тогаш

$$\begin{aligned}6a+f(b)&=6a+f(f(y)-a)\\&=f(f(a)+2y)\\&=f(f(b)+2y)\\&=6b+f(f(y)-b)\\&=6b+f(a)\end{aligned}$$

па затоа $a=b$, т.е. f е инјекција. Сега, за $x=0$ од даденото равенство следува $f(f(0)+2y)=f(f(y))$ и како f е инјекција добиваме $f(y)=f(0)+2y$, за секој $y\in\mathbb{R}$. Непосредно се проверува дека функцијата од видот $f(x)=2x+c$ е решение на задачата.

42. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x^2+y+f(y))=2y+(f(x))^2, \qquad (1)$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Од условот (1) следува дека функцијата f е сурјекција. Освен тоа $(f(x))^2=(f(-x))^2$, па затоа постои a таков што $f(a)=f(-a)=0$. Ако во (1) ставиме $x=0,\ y=\pm a$ добиваме $0=f(\pm a)=(f(0))^2\pm 2a$, т.е. $a=0$. Понатаму, во

(1) заменуваме $y=-\frac{f(x^2)}{2}$ и добиваме $f(x^2+y+f(y))=0$, што значи дека $y+f(y)=-x^2$. Според тоа, $y+f(y)$ ги прима сите непозитивни вредности. Бидејќи $f(0)=0$ од (1) следува дека

$$f(x^2)=(f(x))^2\geq 0 \text{ и } f(y+f(y))=2y\,.$$

Ако ставиме $z=x^2$ и $t=y+f(y)$, повторно од (1) заклучуваме дека

$$f(z+t)=f(z)+f(t)\,, \qquad (2)$$

за произволни $t\geq 0\geq z$. Оттука $f(-t)=-f(t)$ и тогаш лесно следува дека (2) важи за секои $z,t\in\mathbb{R}$ (искористи дека $f(-t)=-f(t)$). Бидејќи $f(t)\geq 0$, кога $t\geq 0$ следува дека функцијата f монтоно расте. Сега, ако претпоставиме дека $f(y)>y$, тогаш $f(f(y))>f(y)$ и добиваме

$$2y=f(y+f(y))=f(y)+f(f(y))>2f(y)\,,$$

што е противречност. Аналогно следува дека не може да биде $f(y)<y$. Конечно, $f(x)=x$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Очигледно оваа функција ја задоволува функционалната равенка (1).

43. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои равенството

$$f(x^2+2yf(x))+f(y^2)=f^2(x+y)$$

е исполнето за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Ставаме $x=y=0$ и добиваме $2f(0)=f^2(0)$, т.е. $f(0)=0$ или $f(0)=2$.

1) Нека $f(0)=2$. За $x=0$ добиваме $f(4y)=f^2(y)-f(y^2)$, а при $y=0$ добиваме $f^2(x)-f(x^2)=2$. Од последните две равенства следува $f(4y)=2$, т.е. $f(x)\equiv 2$.
2) Нека $f(0)=0$. За $y=0$ добиваме $f(x^2)=f^2(x)$, па затоа $|f(x)|=|f(-x)|$ и $f(x)\geq 0$, за $x\geq 0$.
   Нека претпоставиме дека постои $a>0$ таков што $f(a)=0$. Ставаме $x=y=a$ и добиваме
   $$f^2(2a)=f(a^2+2af(a))+f(a^2)=2f(a^2)=2f^2(a)=0\,.$$
   Според тоа, $f(2a)=0$. За секој $b, 0<b<a$ ставаме $x=a-b$, $y=b$ и добиваме $f(x^2+2yf(x))+f(b^2)=0$. Бидејќи $x^2+2yf(x)\geq 0$, добиваме $f(x^2+2yf(x))\geq 0$, а исто така и $f(b^2)\geq 0$. Тоа значи дека $f(b^2)=0$, т.е. $f(b)=0$. Според тоа, $f(x)=0$ кога $x\geq 0$, па затоа $f(x)\equiv 0$.
   Нека $f(x)\neq 0$, за $x\neq 0$. Ставаме $y=2f(x)-2x$ и добиваме
   $$x^2+2yf(x)=x^2+y(y+2x)=(x+y)^2\,.$$

Според тоа, $f((x+y)^2)+f(y^2)=f^2(x+y),\ f(y^2)=0$. Тоа значи, дека $y=2f(x)-2x=0$, па затоа $f(x)\equiv x$.

Со непосредна проверка се покажува дека секоја од функциите $f(x)\equiv 2$, $f(x)\equiv 0$ и $f(x)\equiv x$ е решение на задачата.

44. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ такви што равенството

$$f(a-b)+f(c-d)=f(a)+f(b+c)+f(d)$$

е исполнето за сите реални броеви a,b,c и d кои го задоволуваат равенството $ab+bc+cd=0$.

Решение. Прво ќе докажеме, дека $f(p)+f(q)=f(r)$ за секои реални броеви p,q и r, за кои $p^2+q^2=r^2$. Навистина, ако $2a=p-q+r$, $2b=p-q-r$, $2c=p+q+r$ и $d=q$, имаме $2(ab+bc+cd)=p^2+q^2-r^2$, па затоа

$$f(r)+f(\tfrac{p-q+r}{2})=f(\tfrac{p-q+r}{2})+f(p)+f(q)\text{, т.е. } f(p)+f(q)=f(r).$$

За $p=q=r=0$ добиваме $f(0)=0$. Понатаму, за $q=0$ и $r=-p$ имаме $f(p)=f(-p)$, т.е. функцијата f е парна.

Да ја разгледаме функцијата $g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ определена со $g(t)=f(\sqrt{t})$. Тогаш, од докажаното за f при $p=\sqrt{a}$ и $q=\sqrt{b}$ следува $g(a)+g(b)=g(a+b)$. Оттука за $a\geq b\geq o$ добиваме $g(a)=g(a-b)+g(b)\geq g(b)$, т.е. функцијата е моното растечка.

Од досега изнесеното следува, дека $g(x)=g(1)x$, па затоа $f(x)=f(1)x^2$, за секој $x\geq 0$ и како функцијата f е парна добиваме дека $f(x)=f(1)x^2$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

Лесно се проверува, дека сите функции од видот $f(x)=\lambda x^2$, $\lambda\geq 0$ го задоволуваат условот на задачата.

45. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што важи

$$(f(x)+f(z))(f(y)+f(t))=f(xy-zt)+f(xt+yz),\qquad(1)$$

за секои $x,y,z,t\in\mathbb{R}$.

Решение. Ако во (1) ставиме $x=z=0$ и $y=t$ добиваме $4f(0)f(y)=2f(0)$. Ако $f(0)\neq 0$, тогаш $f(y)=\frac{1}{2}$, за секој $y\in\mathbb{R}$.

Нека $f(0)=0$. Ако во (1) ставиме $z=t=0$ добиваме

$$f(xy)=f(x)f(y)\text{, за секои } x,y\in\mathbb{R}.\qquad(2)$$

Ако $f(y)=0$ за некој $y\neq 0$, добиваме дека $f(x)=0$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Затоа нека $f(y)\neq 0$ за секој $y\neq 0$. Да забележиме дека од (2) следува дека $f(x)=f(\sqrt{x})^2>0$ за секој $x>0$, па од (1) за $t=x$ и $z=y$ следува

$$f(x^2+y^2)=(f(x)+f(y))^2\geq f(x^2)\text{, за секои } x,y\geq 0.$$

Според тоа, функцијата f строго монотоно расте на $\mathbb{R}^+$.

Од (2) следува дека $f(1)=1$. Понатаму, ако во (1) земеме $t=y$, тогаш од (2) после скратувањето со $f(y)$ добиваме

$$2(f(x)+f(z))=f(x-z)+f(x+z)\text{, за секои } x,z\in\mathbb{R}. \qquad (3)$$

Сега ако во (3) земеме $x=0$ добиваме $f(z)=f(-z)$. Понатаму, користејќи ја (3) со индукција лесно се докажува дека $f(nx)=n^2 f(x)$ за секој $n\in\mathbb{N}$, а оттука следува дека $f(\frac{m}{n})=\frac{1}{n^2}f(m)=(\frac{m}{n})^2$ за секој рационален број $\frac{m}{n}$. Конечно, бидејќи функцијата f монотоно расте за $x>0$ мора да важи $f(x)=x^2$ за секој $x\in\mathbb{R}$.

Лесно се проверува дека функциите $f(x)=0,\ f(x)=\frac{1}{2},\ f(x)=x^2$ навистина се решенија на равенката (1).

46. Најди ги сите функции f и g што го задоволуваат идентитетот:

$$f(x)+f(y)+g(x)-g(y)=\sin x+\cos y.$$

Решение. За $y=x$ добиваме:

$$f(x)+f(x)+g(x)-g(x)=\sin x+\cos x$$

$$f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x),$$

па идентитетот го добива видот:

$$\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin y+\frac{1}{2}\cos y+g(x)-g(y)=\sin x+\cos y,$$

$$g(x)+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)=g(y)+\frac{1}{2}(\cos y-\sin y).$$

Оттука е јасно дека функцијата

$$g(x)+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)$$

е константна, па според тоа

$$g(x)=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+C,$$

каде што C е кој било реален број. Лесно се проверува дека најдените функции $f(x)$ и $g(x)$ го задоволуваат зададениот идентитет.

47. Определи ги сите реални функции $f(x)$, такви што за секој реален број x е исполнето равенството

$$x^2 f(x)+f(1-x)=2x-x^4. \qquad (1)$$

Решение. Ако во (1) направиме трансформација $x\to 1-x$, тогаш равенката го добива обликот

$$(1-x)^2 f(1-x)+f[1-(1-x)]=2(1-x)-(1-x)^4$$

$$(1-x)^2 f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4, \qquad (2)$$

за секој реален број x.

Од почетната равенка имаме

$$f(1-x)=2x-x^4-x^2f(x).$$

Ако замениме во (2), со помош на алгебарски трансформации добиваме

$$f(x)(x^2-x-1)(x^2-x+1)=(1-x)(1+x^3)(x^2-x-1).$$

Од неравенството $x^2-x+1>0$, кое е исполнето за секој $x\in\mathbb{R}$ добиваме дека

$$f(x)(x^2-x-1)=(1-x^2)(x^2-x-1). \qquad (3)$$

Од равенството (3) непосредно добиваме дека $f(x)=1-x^2$, за $x\neq\alpha,\beta$, каде α и β се решенија на равенката $x^2-x-1=0$. Според Виетовите правила, за α и β се исполнети равенствата $\alpha\beta=-1$ и $\alpha+\beta=1$. Заменувајќи во равенката (1) добиваме

$$\begin{cases}\alpha^2f(\alpha)+f(1-\alpha)=2\alpha-\alpha^4\\ \beta^2f(\beta)+f(1-\beta)=2\beta-\beta^4\end{cases},$$

т.е.

$$\begin{cases}\alpha^2f(\alpha)+f(\beta)=2\alpha-\alpha^4\\ \beta^2f(\beta)+f(\alpha)=2\beta-\beta^4\end{cases}.$$

Решение на овој систем е

$$f(\alpha)=k \text{ и } f(\beta)=2\alpha-\alpha^4-\alpha^2k,$$

каде k е произволен реален број.

Конечно, решение на (1) е

$$f(x)=\begin{cases}k & \text{ako} \quad x=\alpha\\ 2\alpha-\alpha^4-\alpha^2k & \text{ako} \quad x=\beta\\ 1-x^2 & \text{ako} \quad x\neq\alpha,\beta\end{cases},$$

каде α и β се решенија на равенката $x^2-x-1=0$. Од претходната дискусија јасно е дека овие функции се единствените решенија на (1).

48. Најди ги сите функции $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ такви што

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

за сите позитивни реални броеви w,x,y,z за кои важи $wx=yz$.

Решение. За $x=y=z=w$ имаме

$$f(x^2)=f(x)^2$$

од каде, поради областа на дефинираност на функцијата, добиваме $f(1)=1$.

Нека сега $w=1$, $z=y=\sqrt{x}$, за кои е исполнет условот од задачата. Ја добиваме следната равенка:

$$\frac{(f(1))^2+(f(x))^2}{f(x)+f(x)}=\frac{1+x^2}{x+x} \Leftrightarrow x((f(1))^2+(f(x))^2)=(1+x^2)f(x)$$

Ја добиваме квадратната равенка

$$x(f(x))^2-(1+x^2)f(x)+x=0$$

која ако ја решиме по $f(x)$, добиваме:

$$f(x)=\frac{1+x^2\pm\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}}{2x}=\frac{1+x^2\pm\sqrt{(1-x^2)^2}}{2x}=\frac{1+x^2\pm(1-x^2)}{2x}$$

Јасно, за дадено x, $f(x)$ може да прими само две можни вредности:

$$f(x)=x \text{ или } f(x)=\tfrac{1}{x}.$$

Да претпоставиме дека постојат

$$a\neq 1, b\neq 1, a\neq b,$$

но

$$f(a)=a \text{ и } f(b)=\tfrac{1}{b}.$$

Да ја разгледаме сега почетната функционална равенка каде

$$w=a, x=b, y=z=\sqrt{ab}$$

кои ги исполнуваат условите. Имаме:

$$\frac{(f(a))^2+(f(b))^2}{f(ab)+f(ab)}=\frac{a^2+b^2}{ab+ab}\Leftrightarrow f(ab)=ab\frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{a^2+b^2}$$

Па сега, или $f(ab)=ab$ или $f(ab)=\frac{1}{ab}$. Ако $f(ab)=ab$, тогаш

$$\frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{a^2+b^2}=1\Leftrightarrow b^4=1,$$

и бидејќи $b>0$ единственото решение е $b=1$. Ако $f(ab)=\frac{1}{ab}$, тогаш

$$a^2b^2\frac{a^2+\frac{1}{b^2}}{a^2+b^2}=1 \Leftrightarrow a^2+b^2=a^4b^2+a^2 \Leftrightarrow a^4=1,$$

и слично, единствено решение е $a=1$. Одовде, функционалната равенка има две решенија

$$f(x)=x,\ \forall x\in(0,\infty) \text{, и } f(x)=\tfrac{1}{x},\ \forall x\in(0,\infty).$$

49. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција за која $f(1)\neq 0$ и за $x\neq y$ важи

$$(f(x)-f(y))f(\tfrac{x+y}{x-y})=f(x)+f(y) \qquad (1)$$

Докажи дека

а) f е инјекција

б) $f(x)=x,\quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Решение. а) Од (1) следува дека ако $x\neq y$ и $f(x)=f(y)$ важи $f(x)=f(y)=0$. Да претпоставиме дека постои $a\neq 0$ таков што $f(a)=0$. Тогаш $f(x)=0$ или $f(\frac{x+a}{x-a})=1$. Значи, ако за некое x важи $f(x)\neq 0$ тогаш

$f(\frac{x+a}{x-a})=f(\frac{1+a}{1-a})=1$ и во согласност со претходно докажаното имаме дека важи $\frac{x+a}{x-a}=\frac{1+a}{1-a}$, т.е. $x=1$ (Зошто?). Следствено, $f(x)=0$ за $x\neq 1$. Ако во (1) замениме $x=1, y=0$ се добива $f(1)(f(1)-1)=0$ и поради $f(1)\neq 0$ следува дека

$$f(1)=1=f(\frac{1+a}{1-a}) \qquad (2)$$

Од (2) следува дека $\frac{1+a}{1-a}=1$ односно $a=-a$, што претставува контрадикција. Значи, почетната претпоставка не е точна, односно за $x\neq 0$ важи $f(x)\neq 0$. Од последното, поради (1), можеме да заклучиме дека f е инјекција.

б) Во решавањето на задачата ќе ја користиме следнава лема, дадена без доказ.

Лема. Секоја монотона функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, која е адитивна, т.е.

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

за произволни x и y, е од обликот $f(x)=cx$, каде што c е константа.

За $y=0$ имаме $f(x)(f(1)-1)=f(0)(f(1)+1)$ и бидејќи f не е константа, следува дека $f(1)=1$ и $f(0)=0$. Ако во (1) y го замениме со xy, се добива

$$f(\frac{1+y}{1-y})=\frac{f(x)+f(xy)}{f(x)-f(xy)} \qquad (3)$$

Ако во (3) земеме $x=1$, се добива

$$f(\frac{1+y}{1-y})=\frac{f(1)+f(y)}{f(1)-f(y)} \qquad (4)$$

Бидејќи $f(1)=1$ следува дека

$$\frac{f(x)+f(xy)}{f(x)-f(xy)}=\frac{1+f(y)}{1-f(y)} \qquad (5)$$

односно,

$$f(xy)=f(x)f(y) \qquad (6)$$

т.е. f е мултипликативна функција. Специјално, $f(x^2)=[f(x)]^2=[f(-x)]^2$. Од последното и од инјективноста на f следува дека $f(x)=-f(-x)>0$, од каде што, поради (1), имаме дека $f(x)>f(y)$ за $x>y>0$ (f е растечка функција за $x>0$).

Ако ја искористиме лемата за функцијата $\lg f(e^x)$, добиваме дека $f(x)=x^\alpha$ за $\alpha>0$. Ако изразот за f го замениме во (1), добиваме дека $\alpha=1$, од каде што следува дека $f(x)=x, \forall x\in R$.

50. Најди ги сите реални функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x^2-y^2)=(x-y)[f(x)+f(y)]. \qquad (1)$$

Решение. Нека f е функција која е решение на равенката (1). Ако избереме $x=y$, добиваме

$$f(x^2-x^2)=(x-x)[f(x)+f(x)],$$
$$f(0)=0\cdot[2f(x)]=0.$$

Значи, $f(0)=0$.

Ако во равенката (1) замениме $y=-x$, добиваме

$$f[x^2-(-x)^2]=[x-(-x)][f(x)+f(-x)],$$
$$f(0)=2x[f(x)+f(-x)],$$
$$0=-2x[f(x)+f(-x)].$$

Бидејќи последното равенство е исполнето за секој $x\in\mathbb{R}$, добиваме

$$f(x)+f(-x)=0,$$
$$f(-x)=-f(x).$$

Значи, f е непарна функција.

Ако y го замениме со $-y$, и од тоа што f е непарна функција, равенката (1) го добива обликот

$$f(x^2-(-y)^2)=[x-(-y)][f(x)+f(-y)],$$
$$f(x^2-y^2)=(x+y)[f(x)-f(y)] \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$(x-y)[f(x)+f(y)]=f(x^2-y^2)=(x+y)[f(x)-f(y)],$$

односно

$$(x-y)[f(x)+f(y)]=(x+y)[f(x)-f(y)],$$
$$xf(x)-yf(x)+xf(y)-yf(y)=xf(x)+yf(x)-xf(y)-yf(y),$$
$$-yf(x)+xf(y)=yf(x)-xf(y),$$
$$2yf(x)=2xf(y).$$

Ако избереме $y=1$ и воведеме ознака $f(1)=k$, добиваме $f(x)=kx$, каде $k\in\mathbb{R}$. Не е тешко да се провери дека секоја функција од облик $f(x)=kx$ е решение на равенката (1).

51. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$(x^2+y^2)f(xy)=f(x)f(y)f(x^2+y^2),$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека $f(x)\not\equiv 0$. Ако земеме $x=y=0$ добиваме $f(0)=0$. За $y=1$ функционалната равенка го добива видот

$$(x^2+1)f(x)=f(x)f(1)f(x^2+1). \qquad (1)$$

Ако постои $b\neq 0$, таков што $f(b)=0$, тогаш ставаме $y=b$ и добиваме $f(bx)=0$, што противречи на $f(x)\not\equiv 0$.

Понатаму, кога $x>1$ ако x во (1) го замениме со $\sqrt{x-1}$ добиваме

$$f(x)f(1)=x. \qquad (2)$$

Сега од (2) и од функционалната равенка од условот следува, дека ако x и y се такви што $x^2+y^2>1$, тогаш

$$f(xy)f(1)=f(x)f(y). \qquad (3)$$

За $0<x<1$ ставаме $y=\frac{1}{x}$, па како $x^2+y^2>2>1$, од (2) и (3) добиваме

$$f(x)=f(1)^3 x. \qquad (4)$$

Ако во равенката од условот ставиме $x=y\in(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$, тогаш од (4) следува дека

$$x^2(2x)^2 f(1)^3=(2x^2)f(x^2)=f(2x^2)f(x)^2=(f(1)^2 2x^2)(f(1)^3 x)^2,$$

од каде наоѓаме $f(1)=\pm 1$.

1) Нека $f(1)=1$. Од (2) и (4) следува, дека

$$f(x)=x, \text{ за } x\geq 0. \qquad (5)$$

Бидејќи $x^2+y^2\geq 0$, од (5) и од почетната функционална равенка следува

$$f(xy)=f(x)f(y). \qquad (6)$$

Ако $f(x)=x$ за секој $x<0$, тогаш $f(x)=x$ за секој x. Ако постои $a<0$, таков што $f(a)\neq a$, тогаш за $x=y=a$ од (6) следува $f(a^2)=a^2$. Сега од (5) следува $f(a)^2=a^2$, т.е. $f(a)=-a$. Но, за $x<0$ имаме $ax>0$ и од (5) наоѓаме $f(ax)=ax$. За $x=a, y=x$ од (6) наоѓаме

$$ax=f(ax)=f(a)f(x)=-af(x), \text{ т.е. } f(x)=-x.$$

Според тоа, $f(x)=|x|$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

2) Нека $f(1)=-1$.За $g(x)=-f(x)$ функцијата $g(x)$ ја задоволува истата функционална равенка како и $f(x)$ и важи $g(1)=1$. Значи, $g(x)=|x|$, за секој $x\in\mathbb{R}$, што значи $f(x)=-|x|$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

Со непосредна проверка за добиените функции се добива дека решенија се

$$f(x)\equiv 0,\ f(x)=x,\ f(x)=-x,\ f(x)=|x|,\ f(x)=-|x|.$$

52. Нека g е полином со ненегативни коефициенти и степен поголем или еднаков на 2. Определи ги сите функции $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, за кои

$$f(f(x)+g(x)+2y)=f(x)+g(x)+2f(y) \qquad (1)$$

за секои $x,y\in(0,+\infty)$.

Решение. Да ја разгледаме функцијата $h(x)=f(x)-x$. Имаме

$$\begin{aligned} h(h(x)+g(x)+x+2y) &= f(f(x)+g(x)+2y)-(f(x)+g(x)+2y) \\ &= f(x)+g(x)+2f(y)-(f(x)+g(x)+2y) . \\ &= 2h(y). \end{aligned}$$

Оттука следува дека за секои $x, y, z \in (0,+\infty)$ важи

$$h(h(x)+g(x)+x+2y) = h(h(z)+g(z)+z+2y) .$$

Функцијата $h(x)+g(x)+x$ не е константна, бидејќи ако е еднаква на константа c, тогаш функцијата

$$f(x) = h(x)+x = h(x)+g(x)+x-g(x) = c-g(x)$$

ќе прима и негативни вредности, бидејќи $g(x)\to\infty$, кога $x\to\infty$. Според тоа, постојат позитивни броеви x и z, за кои бројот

$$T = h(x)+g(x)+x-(h(z)+g(z)+z)$$

е позитивен. Тогаш овој број е периода на функцијата h и уште повеќе, секој број од видот

$$S(x) = h(x+T)+g(x+T)+x+T-h(x)-g(x)-x = g(x+T)-g(x)+T$$

е периода за функцијата h. Но, бидејќи $g(x)$ е полином со степен поголем или еднаков на 2, $S(x)$ не е константа и множеството нејзини вредности содржи интервал од видот $[a,+\infty)$. Според тоа, сите броеви од интервалот $[a,+\infty)$ се периоди на функцијата h, што значи дека h е константа, т.е. $h(x)=k$. Значи, $f(x)=x+k$. Сега,

$$\begin{aligned} f(f(x)+g(x)+2y) &= f(x)+g(x)+2y+k = x+k+g(x)+2y+k \\ &= g(x)+x+2y+3k \\ f(x)+g(x)+2f(y) &= x+k+g(x)+2(y+k) = g(x)+x+2y+3k \end{aligned}$$

и до (1) следува $k=0$.

Значи, $f(x)=x$.

Лесно се проверува дека оваа функција е решение на задачата.

53. Да се определат сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x^3+y^3) = x^2 f(x)+yf(y^2) .$$

Решение. Бидејќи равенството е исполнето за секои x и y, за $x=0, y\in\mathbb{R}$ добиваме

$$f(y^3) = f(0^3+y^3) = 0^2 f(0)+yf(y^2) = yf(y^2)$$

Аналогно, за $x\in\mathbb{R}, y=0$ добиваме дека

$$f(x^3) = f(x^3+0^3) = x^2 f(x)+0f(0^2) = x^2 f(x) .$$

Ако $x^2 f(x)$ и $yf(y^2)$ ги замениме во почетната равенка, добиваме дека

$$f(x^3+y^3) = f(x^3)+f(y^3) .$$

Ако $u,v\in\mathbb{R}$ се произволно зададени реални броеви, тогаш постојат x и y така што $u=x^3, v=y^3$, па според тоа

$$f(u+v)=f(x^3+y^3)=f(x^3)+f(y^3)=f(u)+f(v),$$

односно функцијата f е адитина. Од равенството $f(u+v)=f(u)+f(v)$ добиваме дека $f(0)=0$. Од друга страна, за броевите $x,0$ и $0,x$ имаме

$$f(x^3)=f(x^3+0^3)=x^2f(x)+0f(0^2)=x^2f(x)$$
$$f(x^3)=f(0^3+x^3)=0^2f(0)+xf(x^2)=xf(x^2),$$

па според тоа точно е равенството $x^2f(x)=xf(x^2)$, односно $f(x^2)=xf(x)$. Користејќи ја адитивноста и последното равенство добиваме

$$\begin{aligned}f((x+1)^2)&=(x+1)f(x+1)=(x+1)[f(x)+f(1)]\\&=xf(x)+f(x)+xf(1)+f(1)\\f((x+1)^2)&=f(x^2+2x+1)=f(x^2+x+x+1)\\&=f(x^2)+2f(x)+f(1)=xf(x)+2f(x)+f(1)\end{aligned}$$

Од последните две равенства имаме

$$xf(x)+f(x)+xf(1)+f(1)=xf(x)+2f(x)+f(1)$$

односно $f(x)=f(1)x$.

Ако воведеме ознака $f(1)=k$, добиваме дека $f(x)=kx$, каде $k\in\mathbb{R}$. Не е тешко да се провери дека секоја функција од облик $f(x)=kx$ ја задоволува равенката.

54. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(x^{2015}+f(y)^{2015})=f(x)^{2015}+y^{2015},$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. *Лема*. Ако за функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ важи

$$f(x)+f(y)=f(x+y) \text{ и } f(x^{2015})=f(x)^{2015},$$

за секои $x,y\in\mathbb{R}$, тогаш $f(x)$ идентички е еднаква на $x,-x$ или 0.

Доказ. Како кај равенството на Коши се докажува дека $f(qx)=qf(x)$ за секој рационален q и реален број x. Тогаш

$$f(x+q)^{2015}=(f(x)+f(q))^{2015}=\sum_{i=0}^{2015}\binom{2015}{i}(qf(1))^i f(x)^{2015-i}$$

$$f(x+q)^{2015}=f((x+q)^{2015})=\sum_{i=0}^{2015}\binom{2015}{i}f(x^iq^{2015-i})=\sum_{i=0}^{2015}\binom{2015}{i}q^{2015-i}f(x^i).$$

За фиксиран x, двете претставувања се идентички еднакви полиноми на q (бидејќи важат за секој рационален q). Ако ги споредиме коефициентите пред првите степени добиваме

$$f(x^{2014})=f(1)f(x)^{2014}$$

и затоа на ненегативните реални броеви f го прима знакот на $f(1)$ и е ограничена. Според тоа, $f(x)=cx$ и со непосредна проверка се добива дека $c=1,0,-1$, што и требаше да се докаже. ■

Ставаме $x=0$ и добиваме

$$f(f(y)^{2015})=f(0)^{2015}+y^{2015}$$

од каде што следува дека f е биекција. Ако во даденото равенство x го замениме со $f(x)$ добиваме

$$f(f(x)^{2015}+f(y)^{2015})=f(f(x))^{2015}+y^{2015},$$

а заменувајќи го y со $f(y)$ добиваме

$$f(x^{2015}+f(f(y))^{2015})=f(x)^{2015}+f(y)^{2015}.$$

Оттука добиваме

$$f(f(f(x))^{2015}+f(y)^{2015})=f(x^{2015}+f(f(y))^{2015})=f(x)^{2015}+f(y)^{2015}.$$

Бидејќи f е биекција имаме $f(f(x))=x$, па затоа

$$f(f(x)^{2015}+f(y)^{2015})=x^{2015}+y^{2015}=f(f(x)^{2015})+f(f(y)^{2015})-2f(0)^{2015}$$

и како f е биекција следува дека $f(x+y)=f(x)+f(y)-2f(0)^{2015}$. Во последното равенство ставаме $x=y=0$ и добиваме дека $f(0)=0$ или $f(0)=(\pm\frac{1}{2})^{\frac{1}{2014}}$. Но при ненултите можности полиномот $x^{2015}-x+f(0)^{2015}$ (чии корени се $f(-1),f(0),f(1)$) нема три различни реални корени. Според тоа, $f(0)=0$ и $f(1)=\pm1$. Значи, $f(x)+f(y)=f(x+y)$ и $f(x^{2015})=f(x)^{2015}$, па од лемата и можните вредности за $f(1)$ следува дека решенија на задачата се $f(x)=x$ и $f(x)=-x$. Непосредно се проверува дека овие функции се решенија на задачата.

55. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ за кои што важи ($\forall x,y\in\mathbb{R}^+$)

$$f(x^y)=f(x)^{f(y)}$$

Решение.Забележуваме дека $f(x)=1$ ги исполнува ги исполнува условите од задачата. Да побараме други решенија. Нека $f(a)\neq1$ за некое $a>0$. Тогаш

$$f(a)^{f(xy)}=f(a^y)=f(a^x)^{f(y)}=f(a)^{f(x)f(y)}.$$

Значи,

$$f(xy)=f(x)f(y),\ (\forall x,y\in\mathbb{R}). \qquad (1)$$

и како

$$f(a)^{f(x+y)}=f(a^{x+y})=f(a^xa^y)=f(a^x)f(a^y)=f(a)^{f(x)}f(a)^{f(y)}=f(a)^{f(x)+f(y)}$$

добиваме

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ (\forall x,y\in\mathbb{R}). \qquad (2)$$

Од (1) следува $f(1)=f(1\cdot1)=f(1)f(1)$, односно $f(1)=1$. Сега најпрво од (2) а потоа со примена на (1) добиваме

$$f(n)=f(1+1+1+\ldots+1)=f(1)+f(1)+\ldots+f(1)=n, \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

$$f(\tfrac{m}{n})n = f(\tfrac{m}{n})f(n) = f(\tfrac{m}{n}\cdot n) = f(m) = m$$

Значи, за секои $m,n \in \mathbb{N}$ важи

$$f(\tfrac{m}{n}) = \tfrac{m}{n}. \qquad (3)$$

Да претпоставиме дека постои $x \in \mathbb{R}$ таков што $f(x) \neq x$. Нека $f(x) < x$ (случајот $f(x) > x$ се разгледува аналогно). Постои $y = \frac{m}{n}$ таков што

$$f(x) < y < x \qquad (4)$$

Од (2) и (3) следува

$$f(x) = f(y-(x-y)) = f(y) + f(x-y) > f(y) > y,$$

односно $f(x) > x$, што противречи на (4).

Значи, $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$, $f(x) = x$. Бараните функции се $f(x) \equiv 1$ и $f(x) \equiv x$.

.

56. Да се најдат сите функции $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрекинати во нула, кои ја задоволуваат релацијата $f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ при што $t \in (0,1)$ е фиксен број.

Решение. По претпоставка важи:

$$f(x) - 2f(tx) + f(t^2x) = x^2$$
$$f(tx) - 2f(t^2x) + f(t^3x) = t^2x^2$$
$$f(t^2x) - 2f(t^3x) + f(t^4x) = t^4x^2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(t^nx) - 2f(t^{n+1}x) + f(t^{n+2}x) = t^{2n}x^2$$

Собирајќи ги овие $(n+1)$-равенство добиваме:

$$f(x) - 2f(tx) - f(t^{n+1}x) + f(t^{n+2}x) = x^2\,\tfrac{t^{2(n+1)}-1}{t^2-1}. \qquad (*)$$

Согласно непрекинатоста на функцијата f во точката 0, добиваме

$$\lim_{n\to\infty} f(t^{n+1}x) = f(0) \qquad \text{и} \qquad \lim_{n\to\infty} f(t^{n+2}x) = f(0).$$

Ако во равенството (*) пуштиме $n \to \infty$, имаме

$$f(x) - 2f(tx) = \tfrac{x^2(-1)}{t^2-1}, \text{ т.е. } f(x) - 2f(tx) = \tfrac{x^2}{1-t^2}.$$

Применувајќи ја истата постапка добиваме:

$$f(x) - 2f(tx) = \tfrac{x^2}{1-t^2}$$
$$f(tx) - 2f(t^2x) = \tfrac{t^2x^2}{1-t^2}$$
$$f(t^2x) - 2f(t^3x) = \tfrac{t^4x^2}{1-t^2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(t^{n-1}x) - 2f(t^nx) = \tfrac{t^{2n}x^2}{1-t^2}.$$

Користејќи дека $\lim\limits_{n\to\infty} f(t^nx) = f(0)$, добиваме $f(x) = \frac{x^2}{(1-t^2)^2} + f(0)$.

Следствено, секоја функција од обликот $f(x)=\frac{x^2}{(1-t^2)^2}+a$, $a\in\mathbb{R}$ ја задоволува дадената релација.

57. Определи ги сите полиноми $P(x,y)$ со реални коефициенти такви, што

$$P(ab,c^2+1)+P(bc,a^2+1)+P(ca,b^2+1)=0 \text{, за секои } a,b,c\in\mathbb{R}.$$

Решение. Треба да ги определиме сите полиноми $Q(x,y)=P(x,y+1)$, за кои важи

$$Q(ab,c^2)+Q(bc,a^2)+Q(ca,b^2)=0. \qquad (1)$$

Да претпоставиме, дека постои таков ненулти полином Q. Можеме да сметаме дека неговиот степен е минимален. За $a=b=c=0$ од (1) следува дека $Q(0,0)=0$. Сега за $a=b=0$, повторно од (1) следува дека $Q(0,c^2)=0$, за секој c, па затоа $Q(0,y)=0$, за секој y. Сега, за $a=0$, повторно од (1) и од претходните разгледувања следува $Q(bc,0)=0$, т.е. $Q(x,0)=0$, за секој x. Според тоа, $Q(x,y)=xyR(x,y)$, каде R е полином. Сега за R добиваме

$$abc^2R(ab,c^2)+bca^2R(bc,a^2)+cab^2R(ca,b^2)=0,$$

т.е.

$$cR(ab,c^2)+aR(bc,a^2)+bR(ca,b^2)=0. \qquad (2)$$

За $a=b=0$ добиваме $R(0,c^2)=0$, за секој c, па затоа $R(0,y)=0$, за секој y. Според тоа, $R(x,y)=xQ_1(x,y)$, каде Q_1 е полином. Од (2) следува дека

$$abcQ_1(ab,c^2)+abcQ_1(bc,a^2)+abcQ_1(ca,b^2)=0,$$

т.е.

$$Q_1(ab,c^2)+Q_1(bc,a^2)+Q_1(ca,b^2)=0.$$

Добивме, дека полиномот Q_1 е од понизок степен и за него важи истото равенство како и за полиномот Q, што противречи на изборот на Q. Од добиената противречност следува дека $Q(x,y)=0$, т.е. $P(x,y)=0$.

58. Со $\mathbb{R}_+$ да го означиме множеството позитивни реални броеви. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}_+^3\to\mathbb{R}_+$ такви што за секои $x,y,z,k\in\mathbb{R}_+$ важи

1) $xf(x,y,z)=zf(z,y,x)$,

2) $f(x,ky,k^2z)=kf(x,y,z)$ и

3) $f(1,k,k+1)=k+1$.

Решение. Од својствата на функцијата f следува дека за секои $x,y,z,a,b>0$ важи

$$f(a^2x,aby,b^2z)=bf(a^2x,ay,z)=b\frac{z}{a^2x}f(z,ay,a^2x)=\frac{bz}{ax}f(z,y,x)=\frac{b}{a}f(x,y,z).$$

Броевите a и b ќе ги избереме така што тројката (a^2x,aby,b^2z) и од облик $(1,k,k+1)$, за некој k. Нека земеме $a=\frac{1}{\sqrt{x}}$ и b така да важи $b^2z-aby=1$. Последната равенка ја решаваме по b и добиваме

$$b=\frac{y+\sqrt{y^2+4xz}}{2z\sqrt{x}} \text{ и } k=\frac{y(y+\sqrt{y^2+4xz})}{2xz}.$$

Сега лесно следува дека

$$f(x,y,z)=\frac{a}{b}f(a^2x,aby,b^2z)=\frac{a}{b}f(1,k,k+1)=\frac{a}{b}(k+1)=\frac{y+\sqrt{y^2+4xz}}{2x}.$$

Непосредно се проверува дека функцијата f ги задоволува условите на задачата.

4. ПРИМЕНА НА ИЗВОДИТЕ

1. Определи ја најголемата вредност на функцијата $y=x^2\sqrt{9-x^2}$.

Решение. Функцијата е дефинирана за $9-x^2\geq 0$, односно за $-3\leq x\leq 3$. Исто така заради $(-x^2)\sqrt{9-(-x)^2}=x^2\sqrt{9-x^2}$ доволно е да најдеме најголема вредност на функцијата за $0\leq x\leq 3$.

Првиот извод на функцијата е $y'=-3x\frac{x^2-6}{\sqrt{9-x^2}}$, па тој е еднаков на нула, ако и само ако, $x=0$ или $x=\pm\sqrt{6}$. Имајќи предвид дека за $0<x<\sqrt{6}$ функцијата расте ($y'>0$), а за $\sqrt{6}<x<3$ опаѓа, добиваме дека најголемата вредност на y е $(\sqrt{6})^2\sqrt{9-\sqrt{6^2}}=6\sqrt{3}$.

2. Најди полином со најмал можен степен кој има максимална вредност 6 при $x=1$ и минимална вредност 2 при $x=3$.

Решение. Да го означиме бараниот полином со $P(x)$. Полиномот не може да е константен, линеарен или квадратен (Зошто?). Бидејќи во 1 и 3 има екстреми, следува дека постои полином $Q(x)$ така што $P'(x)=Q(x)(x-1)(x-3)$. Да провериме дали може $Q(x)=A$, т.е. константен полином. Тогаш, со интегрирање се добива

$$P(x)=A(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x)+B.$$

Од

$$P(1)=\frac{4}{3}A+B=6 \text{ и } P(3)=B=2$$

добиваме дека $A=3,B=2$, па бараниот полином е

$$P(x)=x^3-6x^2+9x+2\ .$$

Провери дали $x=1$ е максимум, а $x=3$ е минимум.

3. Дадена е низата $a_1=1, a_{n+1}=3-\frac{a_n+2}{2^{a_n}}$, за $n\geq 1$. Докажи дека низата е конвергентна и определија нејзината граница.

Решение. Со индукција ќе докажеме дека $a_n>1$, за секој $n>1$. За $n=2$ имаме $a_2=\frac{3}{2}>1$. Нека претпоставиме дека за некој k важи $a_k>1$. Тогаш

$$a_{k+1}=3-\frac{a_k+2}{2^{a_k}}>1 \iff 2^{a_k+1}>a_k+2$$

и бидејќи функцијата $u(x)=2^{x+1}-x-2$ монотоно расте на интервалот $(1,+\infty)$ заклучуваме дека $u(a_k)>u(1)>0$, т.е. $a_{k+1}>1$.

Од $a_n>1$ следува дека за секој $n>1$ важи $a_{n+1}=3-\frac{a_n+2}{2^{a_n}}<3$. Ќе докажеме дека низата монотоно расте. За функцијата $f(x)=3-\frac{x+2}{2^x}$, кога $1<x<3$ важи $f'(x)=\frac{\ln 4+x\ln 2-1}{2^x}>0$, што значи дека функцијата $f(x)$ монотоно расте кога $1<x<3$. Освен тоа, $a_2=\frac{3}{2}>1=a_1$, што значи дека низата монотоно расте.

Според тоа, дадената низа моното расте и е ограничена, па затоа таа е конвергентна. Ако a е границата на низата, тогаш $a=3-\frac{a+2}{2^a}$. Ќе докажеме дека равенката $a=3-\frac{a+2}{2^a}$ има единствено решение на интервалот $(1,3)$. Навистина, за функцијата $g(x)=3-\frac{x+2}{2^x}-x$, кога $x\in(1,3)$ важи

$$g'(x)=\frac{\ln 4+x\ln 2-1}{2^x}-1=\frac{\ln 4+x\ln 2-1-2^x}{2^x}.$$

За функцијата $h(x)=\ln 4+x\ln 2-1-2^x$ важи

$$h'(x)=(1-2^x)\ln 2<0\ ,$$

кога $x\in(1,3)$, па затоа $h(x)<h(1)=\ln 8-2<0$, од што следува дека $g'(x)<0$, кога $x\in(1,3)$, т.е. функцијата $g(x)$ монотоно опаѓа на интервалот $(1,3)$ и како $g(1)=\frac{1}{2}>0>-\frac{5}{8}=g(3)$ заклучуваме дека равенката $g(x)=0$ има единствено решение на интервалот $(1,3)$. Конечно, од $g(2)=0$ следува $a=2$.

4. Нека α,β и γ се агли во триаголник. Докажи дека

$$\sin\frac{|\alpha-\beta|}{2}+\sin\frac{|\beta-\gamma|}{2}+\sin\frac{|\gamma-\alpha|}{2}<\sqrt{\frac{71+17\sqrt{17}}{32}}$$

Решение. Нека $\alpha\geq\beta\geq\gamma$. Означуваме $\alpha-\beta=2y$ и $\beta-\gamma=2x$. Тогаш $x\geq 0, y\geq 0$ и

$$2x+y=\frac{\pi}{2}-\frac{3\gamma}{2}\ .$$

Оттука $2x+y<\frac{\pi}{2}$ и $x<\frac{\pi}{4}$. Сега

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{|\alpha-\beta|}{2}+\sin\tfrac{|\beta-\gamma|}{2}+\sin\tfrac{|\gamma-\alpha|}{2} &\le \sin(\tfrac{\pi}{2}-2x)+\sin x+\sin(\tfrac{\pi}{2}-x)\\ &=\sin x+\cos x+\cos 2x\\ &=\sqrt{1+\sin 2x}+\sqrt{1-\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Ја разгледуваме функцијата $f(t)=\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t^2}$ за $t\in[0,1]$. Бидејќи

$$f'(t)=-\frac{4t^2+t-1}{2\sqrt{1-t^2}(\sqrt{1-t}+2t)}$$

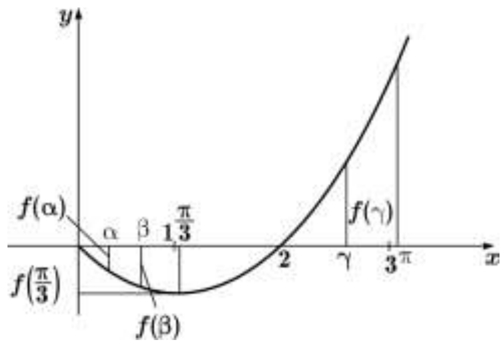
следува дека најголемата вредност на $f(t)$ се достигнува за $t=\frac{\sqrt{17}-1}{8}$ и

$$f(\tfrac{\sqrt{17}-1}{8})=\sqrt{\tfrac{71+17\sqrt{17}}{32}}\,.$$

5. Докажи дека во секој триаголник е точно неравенството

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\tfrac{3\sqrt{3}}{2}\,.$$

Решение. Ќе ја разгледаме функцијата $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$. Изводот на оваа функција е $f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x$, од каде што гледаме дека на интервалот $[0,\pi]$ најмала вредност (глобален минимум) има во точката $x=\frac{\pi}{3}$. Заради тоа (види цртеж) $f(\alpha)\ge f(\frac{\pi}{3})$, $f(\beta)\ge f(\frac{\pi}{3})$ и $f(\gamma)\ge f(\frac{\pi}{3})$. Ако ги искористиме претходно добиените неравенства и равенството $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ добиваме



$$\begin{aligned}\tfrac{\pi}{2}-(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma) &= \tfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\\ &=\tfrac{\alpha}{2}-\sin\alpha+\tfrac{\beta}{2}-\sin\beta+\tfrac{\gamma}{2}-\sin\gamma\\ &=f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\ge 3f(\tfrac{\pi}{3})\\ &=3(\tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{3}-\sin\tfrac{\pi}{3})=3(\tfrac{\pi}{6}-\tfrac{\sqrt{3}}{2})=\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{3\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Конечно,

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\tfrac{3\sqrt{3}}{2}\,.$$

6. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\overline{AC}=\overline{BC}=1$ и $\overline{AB}=2x$.

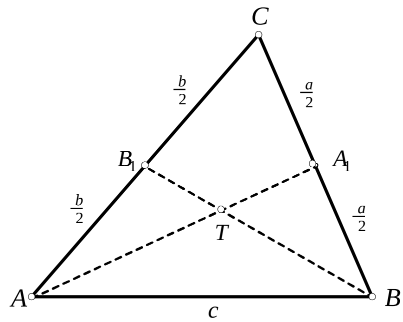
а) Изрази го како функција од x радиусот r на впишаната кружница во $\triangle ABC$.

б) Определи ја најголемата можна вредност за r.

Решение. а) Од Питагоровата теорема следува дека висината на триаголникот спуштена кон страната AB е $\sqrt{1-x^2}$. Според тоа, $r=\frac{P}{s}=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

б) Треба да најдеме максимум на функцијата $f(x)=\frac{x^2(1-x)}{1+x}$ во интервалот $(0,1)$. Имаме $f'(x)=\frac{2x(1-x-x^2)}{(x+1)^2}$. Стационарна точка е $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и функцијата расте на интервалот $(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}]$, а опаѓа на интервалот $[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1)$. Според тоа, максимумот на f во $(0,1)$ е $f(\frac{\sqrt{5}-1}{2})=\frac{5\sqrt{5}-11}{2}$. Значи, најголемата можна вредност на r е $\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$.

7. Најди ги сите можни вредности на изразот $\frac{t_a+t_b}{a+b}$, каде a и b се страни на триаголник, а t_a и t_b се соодветните тежишни линии во триаголникот.

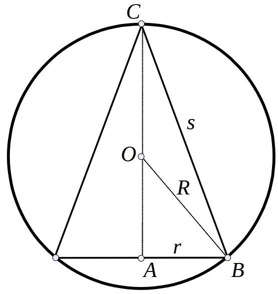


Решение. Нека A_1 и B_1 се средините на страните BC и AC, соодветно, и T е тежиштето на $\triangle ABC$. Од $\triangle BA_1T$ и $\triangle ATB_1$ следува дека $\frac{t_a}{3}+\frac{2t_b}{3}>\frac{a}{2}$ и $\frac{t_b}{3}+\frac{2t_a}{3}>\frac{b}{2}$. Ако ги собереме последните две неравенства добиваме $t_a+t_b>\frac{a+b}{2}$, односно $\frac{t_a+t_b}{a+b}>\frac{1}{2}$. За истите триаголници важат и неравенствата $\frac{t_a}{3}+\frac{a}{2}>\frac{2t_b}{3}$ и $\frac{t_b}{3}+\frac{b}{2}>\frac{2t_a}{3}$ од каде со нивно собирање наоѓаме $\frac{a+b}{2}>\frac{t_a+t_b}{3}$, т.е. $\frac{t_a+t_b}{a+b}<\frac{3}{2}$. Според тоа, $\frac{t_a+t_b}{a+b}\in(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$. Ќе докажеме дека разгледуваниот израз ја прима секоја вредност од интервалот $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$. Да разгледаме правоаголен триаголник со хипотенуза $a=2$ и катета $b=2t,\ t\in(0,1)$. Имаме

$$\frac{t_a+t_b}{a+b}=f(t)=\frac{1+\sqrt{4-3t^2}}{2(1+t)},\ t\in(0,1)$$

и $f(0)=\frac{3}{2}$ и $f(1)=\frac{1}{2}$. Бидејќи $f(t)$ е непрекината функција во интервалот $(0,1)$ заклучуваме дека таа ја прима секоја вредност од интервалот $(0,1)$.

8. Да се најде висината на конусот со најголема бочна површина, којшто може да се впише во топка со радиус R.



Решение. Да ја означиме висината на конусот со x. Плоштината на бочната површина на конусот е $y=rs\pi$ (види цртеж). Од триаголникот OAB имаме

$$\overline{OA}=x-R\ ,\ r^2=R^2-(x-R)^2=2Rx-x^2.$$

Од триаголникот ABC имаме

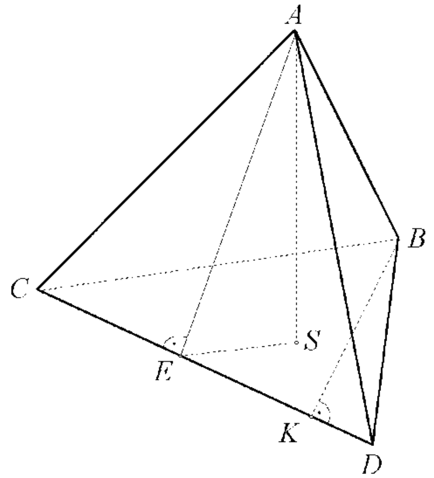
$$s^2 = x^2 + r^2 = x^2 + 2Rx - x^2 = 2Rx$$

од каде што добиваме

$$y = \pi\sqrt{4R^2x^2 - 2Rx^3}\,.$$

Имаме $y' = \pi\frac{4R^2x - 3Rx^2}{\sqrt{4R^2x^2 - 2Rx^3}}$ и од $y' = 0$ добиваме $x = 0$ или $x = \frac{4R}{3}$. Јасно, $x = 0$ не е решение на задачата, а за $x = \frac{4R}{3}$ се добива дека функцијата има максимум (Провери!).

9. Даден е тетраедар во кој должината на точно еден раб е поголема од 1. Докажи дека неговиот волумен е помал или еднаков на $\frac{1}{8}$.



Решение. Нека AB е работ со најголема должина, а AS е висина на тетраедарот (цртеж десно). Според тоа, должините на страните на триаголниците ACD и BCD не се поголеми од 1. Нека нивните висини се AE и BK. Должината на работ CD ја означуваме со x. Точката E ја дели отсечката CD на два дела од кои еден дел, на пример CE, има должина која не е помала од $\frac{x}{2}$. Тогаш

$$\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CE}^2 \le 1 - (\tfrac{x}{2})^2,$$

$$\overline{AS} \le \overline{AE} \le \sqrt{1 - \tfrac{x^2}{4}}\,.$$

Исто така $\overline{BK} \le \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. Волуменот на тетраедарот е

$$V = \tfrac{1}{3}P_{BCD} \cdot \overline{AS} \le \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2}x(1 - \tfrac{x^2}{4}) = \tfrac{1}{24}x(4 - x^2)\,.$$

Доволно е да се докаже дека

$y = x(4 - x^2) \le 3$. Од

$y' = 4 - 3x^2 > 0$,

кога $0 < x < 1$ следува дека функцијата $y = x(4 - x^2)$ е растечка на интервалот $[0,1]$, па затоа $y \le 3$.

Останува да докажеме дека постои тетраедар со волумен $\frac{1}{8}$, кој ги исполнува условите на задачата. Нека $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = 1$ и рамнината ACD е нормална на BCD. Тогаш

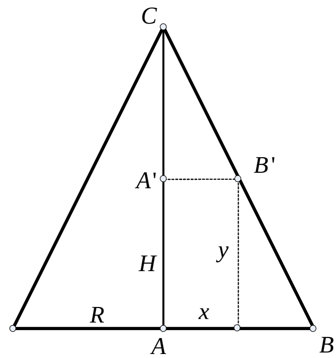
$$\overline{AB} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1,$$

а волуменот е $V = \frac{1}{8}$.

10. Во даден кружен конус, со висина H и радиус на основата R вписан е цилндар со максимален волумен. Во цилиндарот е вписан конус и во тој конус пак е вписан цилндар со максимален волумен, итн (основите на цилндрите и конусите се во иста рамнина). Да се најде сумата на волумените на вписаните цилиндри.

Решение. Да го означиме со x радиусот на основата на вписаниот цѕлиндер, а со y неговата висина. Јасно е дека $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$ (види цртеж; двата триаголници имаат еден заеднички остар агол и двата се правоаголни). Од нивната сличност се добива

$$x = \frac{R}{H}(H - y). \qquad (1)$$



Го бараме оној цилиндар којшто има максимален волуме $V = \pi x^2 y$, т.е. ќе најдеме за кој y функцијата

$$\Phi(y) = \frac{R^2}{H^2}(H - y)^2 y$$

има максимална вредност. Од

$$\Phi'(y) = \pi\frac{R^2}{H^2}[2(H - y)(-1)y + (H - y)^2] = 0,$$

ја добиваме равенката

$$3y^2 - 4Hy + H^2 = 0,$$

чии решенија се $y_1 = H$ и $y_2 = \frac{H}{3}$. Поради

$$\Phi''(y) = \pi\frac{R^2}{H^2}[2(-1)(-1)y + 12(H - y)(-1) + 2(h - y)(-1) = \pi\frac{R^2}{H^2}(-4H + 6y),$$

имаме $\Phi''(y_1) = \pi\frac{R^2}{H^2}2H > 0$, што значи дека $\Phi(y_1)$ е минимум на функцијата $\Phi(y)$ (цилиндарот дегенерира во висината на конусот), а $\Phi''(y_2) = \pi\frac{R^2}{H^2}(-2H) < 0$, што значи дека за $y = \frac{H}{3}$ се добива максимум на $\Phi(y)$. За ова вредност на y, од равенството (1) добиваме $x = \frac{2}{3}R$ И максималниот волуме ќе биде

$$\Phi(y_1) = 4\pi\frac{R^2 H}{27}.$$

Ако сега, во добиениот цилиндер впишеме конус(висината на тој конус е висината на цилиндерот, $\frac{H}{3}$, а радиусот на основата на конусот е радиусот на основата на цилиндарот, $\frac{2}{3}R$) и во тој конус впишеме цилиндер со максимален волумен, тогаш висината на нововпишаниот цилиндар ќе биде $\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{3} = \frac{1}{3^2}H$, а радиусот на неговата основа ќе биде

$$\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3}R=(\tfrac{2}{3})^2R,$$

додека неговиот волумен е $\pi R^2H(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^2$; третиот впишан цилиндар ќе има висина $(\frac{1}{3})^3H$, радиус на основата $(\frac{2}{3})^3R$ и волумен $\pi R^2H(\frac{2}{3})^6(\frac{1}{3})^3$ и аналогно, за секој нареден впишан цилиндар. На овој начин добиваме една низа броеви(волумени) која претставува геметриска низа со количник $q=\frac{4}{27}<1$ и затоа сумата на бескрајниот геометриски ред ќе биде $\frac{4\pi R^2H\frac{1}{27}}{1-\frac{4}{27}}=\frac{4}{23}\pi R^2H$.

11. Најди го најголемиот можен волумен на правилна четиристрана пирамида со бочен раб 1.

Решение. Нека S е врвот на пирамидата $SABCD$, нека $ABCD$ е нејзината основа и нека E е подножјето на нормалата од S кон $ABCD$. Триаголникот SEA е правоаголен со хипотенуза $\overline{AS}=1$. Нека $\measuredangle SAE=\alpha$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Тогаш висината на пирамидата е $\overline{SE}=\sin\alpha$, а дијагоналата на квадратот на основата е $2\overline{AE}=2\cos\alpha$, па волуменот на пирамидата е $V(\alpha)=\frac{1}{3}\frac{(2\overline{AE})^2}{2}\overline{SE}=\frac{2}{3}\sin\alpha\cos^2\alpha$. Тогаш,

$$V'(\alpha)=\tfrac{2}{3}\cos\alpha(\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)=\tfrac{2}{3}\cos\alpha(1-3\sin^2\alpha),$$

па $V'(\alpha)>0$ за $0<\sin\alpha<\frac{1}{\sqrt{3}}$, а $V'(\alpha)<0$ за $\frac{1}{\sqrt{3}}<\sin\alpha<1$, односно максимумот се достигнува за $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и изнесува $V=\frac{4}{27}\sqrt{3}$.

12. Најди ја висината на цилиндар со максимален волумен впишан во топка со радиус $\sqrt{3}$.

Решение. Нека r е радиусот на основата на цилиндарот и нека H е висината на цилиндарот. Во пресекот на цилиндарот и рамнината која минува низ неговата оска се добива правоаголник со страни H и $2r$, а дијагонала $2\sqrt{3}$. Тогаш,

$$V(H)=r^2\pi H=((\sqrt{3})^2-(\tfrac{H}{2})^2)\pi H,\ 0<H<2\sqrt{3}.$$

Имаме, $V'(H)=3\pi(1-\frac{H^2}{4})$, од каде следува дека $V'(H)>0$ за $0<H<2$ и $V'(H)<0$ за $2<H<2\sqrt{3}$, односно максималниот волумен се добива ако се впише цилиндар со висина $H=2$.

13. Најди точка на елипсата $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$ во првиот квадрант, таква да тангентата на елипсата во таа точка со координатните оски формира триаголник со најмала плоштина.

Решение. Равенката на тангентата во точката $M(a,b)$, $a,b>0$ има вид

$$\tfrac{xa}{8}+\tfrac{yb}{18}=1.$$

Нејзините пресеци со координатните оски се точките $A(\frac{8}{a},0)$ и $B(0,\frac{18}{b})$. Од $\frac{a^2}{8}+\frac{b^2}{18}=1$ добиваме $b=\frac{3}{2}\sqrt{8-a^2}$, па затоа

$$P_{\triangle ABO}=\frac{72}{ab}=\frac{48}{a\sqrt{8-a^2}}.$$

Бидејќи $P'(a)=\frac{96(a^2-4)}{a^2(8-a^2)^{3/2}}$ важи $P'(a)<0$ за $0<a<2$, $P'(a)>0$ за $2<a<2\sqrt{2}$, т.е. минимумот се достигнува за $a=2$. Значи, бараната точка е $M(2,3)$.

14. Определи ги сите диференцијабилни функции f, такви што за кои било $x,y\in\mathbb{R}$ да важи равенството

$$f(x+y)=f(x)+f(y). \tag{1}$$

Решение. Лесно се проверува дека функциите $f(x)=kx$, каде што k е произволен реален број се решенија на (1). Да докажеме: (1) нема други решенија освен споменатите.

Да го фиксираме $y\in\mathbb{R}$. Тогаш двете страни на (1) определуваат функции од променливата x, и бидејќи тие се еднакви, еднакви се и нивните изводи. Бидејќи y е фиксиран, имаме

$$(f(x+y))'=f'(x+y), \qquad f'(y)=0.$$

Следствено, го добиваме идентитетот

$$f'(x+y)=f'(x). \tag{2}$$

Ова важи за кој било $x\in\mathbb{R}$ и кој било $y\in\mathbb{R}$. Но, $x+y$ и x се два произволни реални броја и затоа од идентитетот (2) следува дека f' е константна функција. Навистина, за било кои $a,b\in\mathbb{R}$ (ставајќи $x=b$, $y=a-b$) ќе имаме:

$$f'(a)=f'(a+(b-a))=f'(b).$$

Нека $f'(x)=k$. Тогаш $f(x)=kx+b$, $b\in\mathbb{R}$, па (1) добива вид

$$k(x+y)+b=(kx+b)+(ky+b).$$

Следствено, (1) е идентитет при кој било k, и $b=0$, така што условот на задачата го задоволуваат само функциите од видот $f(x)=kx$.

15. На почетокот на таблата се запишани полиномите x^3-3x^2+5 и x^2-4x. Ако во даден момент на таблата се запишани полиномите $f(x)$ и $g(x)$, можеме да ги допишеме полиномите $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, каде c е произволна константа. Дали е можно после неколку такви операции на таблата да е запишан полином од видот x^n-1, n е природен број.

Решение. Нека $f(x)$ и $g(x)$ се два полиноми и t е точка за која $f'(t)=0$ и $g'(t)=0$. Тогаш очигледно $(f\pm g)'(t)=0$ и $cf'(t)=0$. Освен тоа, имаме

$$(fg)'(t)=f'(t)g(t)+g'(t)f(t)=0 \text{ и } (h(g(t)))'=h'(g(t))g'(t)=0,$$

за произволна функцијата $h(x)$.

Според тоа, ако изводите на почетните полиноми истовремено се анулираат во некоја точка, тогаш при примена на дозволените операции постојано ќе добиваме полиноми кои се анулираат во истата таа точка.

Горното расудување е доволно за негативен одговор на поставеното прашање. Имено, при $x=2$ важи

$$(x^3-3x^2+5)'=3x^2-6x=0 \text{ и } (x^2-4x)'=2x-4=0,$$

но $(x^n-1)'=nx^{n-1}=n2^{n-1}\neq 0$, за секој природен број n.

IV ИГРИ И СТРАТЕГИИ

1. НЕКОНКУРЕНТСКИ ИГРИ

1. На секое поле од една 100×100 „шаховска“ табла запишан е знак $+$. Се дозволува со една операција да се заменат сите знаци во некој ред или колона со нивните спротивни знаци ($+$ со $-$ или $-$ со $+$). Дали е можно по конечно многу операции на таблата да бидат запишани точно 1986 знаци $-$?

Решение. По конечен број операции, нека x_k е бројот на операции применети на k-тиот ред, а y_k е бројот на операции применети на k-тата колона, за $k=1,2,...,100$. Нека меѓу броевите $x_1,x_2,...,x_{100}$ има p, а меѓу $y_1,y_2,...,y_{100}$ има q непарни броеви. Бидејќи парен број операции на дадена колона или ред не ги менува знаците, следува дека, по конечниот број на операции, на таблата ќе има точно

$$100p+100s-2pq=p(100-q)+q(100-p)$$

знаци $-$. Според тоа, задачата се сведува на прашањето: Дали постојат непарни броеви p и q такви што $0\le p\le100$, $0\le q\le100$ и

$$p(1000-q)+q(100-p)=1986\ ?$$

Последното равенство е еквивалентно со равенството

$$(50-p)(50-q)=1507=11\cdot137\ .$$

Бидејќи 11 и 137 се прости броеви, а $-50\le50-p\le50$ и $-50\le50-q\le50$, следува дека такви броеви p и q не постојат.

2. Во полињата на табела со димензии 100×100 се запишани 100^2-1 знаци плус и еден знак минус (по еден знак во едно поле). Во еден чекор се менуваат сите знаци во даден ред или дадена колона. Дали може по конечен број чекори да се добие табела во која има точно 2011 минуси?

Решение. Нека x (соодветно y) е бројот на редиците (соодветно колоните), со кои се направени непарен број потези. За момент да заборавиме на минусот и да го сметаме за плус. Тогаш бројот на минусите е $x(100-y)+y(100-x)$ и тоа е непарен број. Според тоа, 2011 минуси може да се добијат само ако горниот број е 2010 или 2012 и ако се земе предвид почетниот минус ќе имаме зголемување или намалување за 1. Ќе докажеме, дека $x(100-y)+y(100-x)\ne2010,\ 2012$.

Ако $x(100-y)+y(100-x)=2010$, тогаш

$$(x-50)(y-50)=1495=5\cdot13\cdot23\ .$$

Бидејќи $0\le x,y\le100$, множителите на левата страна од последното равенство се по апсолутна вредност помали од 50, а во производот $5\cdot13\cdot23$ секои два множители даваат производ поголем од 50. Аналогно, од

$$x(100-y)+y(100-x)=2012$$

добиваме

$$(x-50)(y-50)=1494=2\cdot9\cdot83$$

и останува да забележиме дека множителите на левата страна на последното равенство по апсолутна вредност се помали од 50, а 83 е поголем од 50.

Според тоа, после конечен број чекори не може да се добијат 2011 минуси.

3. На една 3×3 квадратна табла се поставени три црвени и три жолти жетони, а две полиња се празни како што е тоа прикажано на левиот цртеж. Секој жетон може да се помести за едно поле по хоризонтали или вертикала ако соседното поле е празно.

Ц	/	*Ж*
Ж	*Ж*	*Ц*
Ж	*Ц*	/

Ц	*Ж*	/
Ж	*Ц*	*Ж*
/	*Ж*	*Ц*

Дали е можно по 1992 потези на таблата да се добие позиција како на десниот цртеж?

Решение. Да ги означиме сите девет полиња со a_{ij} $(i,j\in\{1,2,3\})$ како на цртежот десно. Нека по n-тиот потез празните места се a_{ij} и a_{kl}. Го разгледуваме збирот $S(n)=i+j+k+l$. За секој природен број n важи $|S(n)-S(n-1)|=1$, па $S(n)$ и $S(n-1)$ се броеви со различна парност. Ако одговорот на задачата е позитивен, тогаш треба броевите $S(0)$ и $S(1992)$ да имаат иста парност. Но ова не важи бидејќи

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

$$S(0)=1+2+3+3=9 \text{ и } S(1992)=1+3+3+1=8$$

имаат различна парност.

Значи, одговорот на задачата е **Не**.

4. Во секој збор составен од буквите a и b можеме да ги извршиме следниве замени: $aba\to b, b\to aba, bba\to a, a\to bba$. Дали може со помош на овие замени од зборот $b\underbrace{aa...a}_{2003}$ да се добие зборот $\underbrace{aa...a}_{2003}b$?

Решение. Ќе докажеме дека при примена на било која од дозволените операции бројот на буквите a на парни (соодветно непарни) позиции ја запазува парноста. Навистина, да ја разгледаме замената $aba\to b$, применета кон зборот $uabav$. Во новодобиениот збор ubv сите букви a од u остануваат на своите места, а сите букви a од v се поместиле за две позиции, па затоа за запазуваат парноста на позициите. Бришењето на две букви a од aba го намалува бројот на буквите a на парни или непарни позиции за два.

Аналогно, при примена на $bba\to a$ кон зборот $ubbav$ го добиваме зборот uav и лесно се гледа дека свјоството е исполнето.

Бидејќи операциите $a\to aba$ и $a\to bba$ се обратни на претходно разгледаните, следува дека својството важи и за овие операции.

Во првиот збор $b\underbrace{aa...a}_{2003}$ бројот на буквите a на парни позиции е 1002, а во вториот збор $\underbrace{aa...a}_{2003}b$ тој број е 1001. Според тоа, со дозволените операции од првиот збор не може да се добие вториот збор.

5. Дадена е тројката броеви $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$. Дозволен е премин на една тројка реални броеви во друга на следниот начин:кои било два броја од тројката се заменуваат со: нивниот збир поделен со $\sqrt{2}$, нивната разлика поделена со $\sqrt{2}$, а третиот останува ист. Дали е можно со такви постапки, по неколку чекори дадената тројка да премине во тројката $1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$.

Решение. Трансформацијата $(x, y) \to (\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}})$, го запазува збирот на квадратите на парот броеви, т.е. $x^2 + y^2 = (\frac{x+y}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{x-y}{\sqrt{2}})^2$. Според тоа, со секој потег се запазува збирот на квадрати на дадената тројка. Меѓутоа, од

$$2^2 + (\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 6\frac{1}{2} \neq 6 + 2\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{2})^2,$$

следува дека по произволен број чекори не е можно да се премине од едната во другата тројка.

6. Во секое теме на правилниот $n-$аголник $P_1P_2...P_n$ е запишан бројот 1. Имаме право да ја реализираме следнава операција:

Избираме три произволни темиња $P_iP_{i+1}P_{i+2}, (P_{n+1} = P_1, P_{n+2} = P_1)$ и ги заменуваме броевите a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, запишани во нив соодветно со броевите $a_i - x$, $a_{i+1} - |x-y|$ и $a_{i+2} - y$, каде $x, y \in \mathbb{R}^+$ ги задоволуваат неравенствата $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$, $a_i - x \geq 0$ и $a_{i+2} - y \geq 0$. За секоја операција броевите x и y може да се различни.

Да се определи дали после неколкукратно применување на горната операција за некој $a_i, 1 \leq i \leq n$ е можно да е исполнето неравенството:

а) $a_i > 1,5$, б) $a_i > \frac{5}{3}$.

Решение. а) Да, на пример

$$(1,1,1) \to (\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{1}{3}) \to (0, \tfrac{5}{3}, 0).$$

б) Нека претпоставиме дека $a_i > \frac{5}{3}$ после конечен број чекори. Од $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$ следува $|x-y| \leq \min\{x, y, \frac{x+y}{3}\}$. Под $i-$та операција ќе подразбираме операција врз тројката a_{i-1}, a_i, a_{i+1}. Бројот a_{i-1} ќе се зголемува само при примена на $(i-1)-$та операција и да го означиме вкупното зголемување на a_{i-1} со α. Тогаш намалувањето на a_i не е помало од α. Аналогно, нека β е вкупното зголемување на a_{i+1} после $i+1$ операции и γ е вкупното зголемување на a_i после i операции. Тогаш збирот на намалувањата на $a_{i+1} + a_{i-1}$ после i оперции не е помал од 3γ. Според тоа, $(1+\alpha) + (1+\beta) \geq 3\gamma$, од каде следува $2 \geq 3(\gamma - \alpha - \beta)$, односно $\gamma - \alpha - \beta \leq \frac{2}{3}$. Оттука добиваме

$$a_i \leq 1 + \gamma - \alpha - \beta \leq 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3},$$

што е противречност.

7. Во еден ред се наредени n бели и n црни жетони. Во еден потез две разнобојни жетони можат да си ги заменат местата, но само ако меѓу нив има најмногу $n-1$ други жетони. Кој е најмалиот број потези со кои, тргнувајќи од произволен распоред, белите жетони може да се разместат на првите n места, а црните жетони на преостанатите n места.

Решение. Нека во почетниот распоред црните жетони се наоѓаат на првите n места, а белите на последните n места. Јасно, тргнувајќи од овој распоред за да се добие саканиот распоред се потребни најмалку n потези (секој бел жетон треба да се премести).

Ќе докажеме дека тргнувајќи од произволен распоред, после најмногу n потези може да се добие саканиот распоред на жетоните.

Ако почетниот распоред е саканиот, тогаш се потребни 0 потези.

Нека постои црн жетон кој се наоѓа меѓу првите n жетонии нека најлевиот таков жетон се наоѓа на $i-$тото место ($i \geq 1$). Следните n жетони не може да бидат црни, т.е. некој од следните n жетони е бел. Но, тогаш меѓу тој бел и почетно избраниот црн жетон има најмногу $n-1$ други жетони, па можеме да ги зелениме нивните места. Значи, во еден потез добиваме распоред во кој најлевиот црн жетон е десно од $i-$тото место ($i \geq 1$). Ако е добие саканиот распоред, тогаш постапката заврѓува псоле еден потез. Нека повторно постои црн жетон кој се наоѓа меѓу првите n жетони и нека најлевиот таков жетон е на $i-$тото место ($i \geq 2$). Повторувајќи ја претходната постапк црн жетона, после вкупно два потега, добиваме распоред во кој најлевиот црн жетон е десно од $i-$тото место ($i \geq 2$). Ако вака добиениот распоред е саканиот, тогаш постапката завршува после два потага.

Повторувајќи ја опишаната постапка или саканиот распоред ќе го добиеме пред $n-$тиот потез или после $n-1$ потези меѓу првите n жетони ќе има црн жетон и тој ќе се наоѓа десно од $(n-1)-$вото место, т.е. ќе се наоѓа на $n-$тото место. Сега со уште еден потез се добива саканиот распоред.

8. Дадени се низа A од 2014 природни броеви од интервалот $[1,6]$ и природен број $t \leq 2014$. Во еден потез можеме да избереме произволни t броеви од A и за 1 да го зголемиме секој од овие броеви кој е помал од 6, а секој број кој е еднаков на 6 да го замениме со 1. Определи ги сите вредности на t, за кои од секоја низа A по конечен број потези може да се добијат само шестки.

Решение. Ќе докажеме дека бараните броеви t се оние за кои $\text{NZD}(t,6)=1$. Нека $\text{NZD}(t,6)=d \neq 1$ и да избереме t броеви, x од кои се еднакви на 6. После извршување на дозволената операција збирот на броевите се менува за $(t-x)-5x = t-6x$ и овој број се дели со d. Сега е јасно, дека ако еден од броевите е 5, а сите останати се 6, тогаш не можеме да добиеме само шестки.

Нека $\text{NZD}(t,6)=1$ и да избереме природен број k таков што $kt \equiv 1 (\text{mod}\, 6)$. Ќе докажеме како може да се зголеми даден број $a \neq 6$ за 1, а сите останати броеви да останат непроменети. Нека B е подмножество од A со $t+1$ броеви (бидејќи $t \neq 2014$ такво множество постои) и $a \in B$. Да ја реализираме k пати дозволената операција врз секое од t елементните подмножества од B. Секој број од B се менува точно kt пати. Бидејќи $kt \equiv 1 (\text{mod}\, 6)$, заклучуваме дека претходното е еквивалентно на еднократна примена на дозволената операција врз сите броеви од B.

Ако t пати ја примениме операцијата врз $t-$елементното множество $B\setminus\{a\}$, ќе добиеме дека само a е зголемен за 1. Според тоа, после конечен број потези може да се добијат само шестки.

9. Нека $n \geq 2$ е даден природен број и нека на хоризонтална права се распоредени n болви така, што не сите се наоѓаат во една точка.

За позитивен реален број λ да дефинираме скок на следниот начин:

Се избираат две болви, кои се наоѓаат во произволни точки A и B така, што A е лево од B, и болвата од A скока во точката C, која е на правата десно од B и така, што $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \lambda$.

Да се најдат сите вредности на λ така, што за секоја точка M од правата и за произволен распоред на $n-$те болви постои конечна низа од скокови, после која сите болви се наоѓаат десно од точката M.

Решение. Нека после $k-$от скок имаме конфигурација, во која растојанието меѓу најлевата и најдесната болва го означуваме со d_k, а најмалото растојание меѓу соседните болви го означуваме со δ_k. Јасно, $d_k \geq (n-1)\delta_k$. Ја избираме следната стратегија: во секој чекор најлевата болва ја прескокнува најдесната. Тогаш при $(k+1)-$от чекор се појавува ново растојание меѓу соседните болви и тоа λd_k. Ако $\delta_{k+1} = \lambda d_k$, тогаш $\delta_{k+1} \geq \lambda(n-1)\delta_k$, а ако $\delta_{k+1} \neq \lambda d_k$, тогаш $\delta_{k+1} \geq \delta_k$. Да земеме $\lambda \geq \frac{1}{n-1}$. Тогаш, во секој случај $\delta_{k+1} \geq \delta_k$, за секој k и низата од најмалите растојанија е неопаѓачка. Тоа значи, дека во секој чекор најлевата болва се преместува во однос на најдесната на растојание кое не е помало од дадена константа, што значи дека при избраната стратегија сите болви ќе се преместат во десно на онаа далечина на која ќе посакаме.

Ќе покажеме обратно, дека при $\lambda < \frac{1}{n-1}$, како и да прескокнуваат болвите, тие не може да се најдат десно од претходно избрана точка M. Положбата на болвите ќе ја определиме со координатите во однос на координатен систем на дадената права. Нека s_k е збирот на координатите на $n-$те болви после $k-$от скок, а ω_k е координатата на најдесната болва после $k-$от скок. Јасно, $s_k \leq n\omega_k$. Ќе докажеме дека низата $\{\omega_k\}$ е ограничена.

Нека при $(k+1)-$от скок болвата од точката A ја прескокнува болвата во точката B и паѓа на точката C. Координатите на точките A, B и C да ги означиме со a, b и c, соодветно. Тогаш, $s_{k+1} = s_k + c - a$, а според правилото за прескокнување имаме $c - b = \lambda(b-a)$, што е еквивалентно на $\lambda(c-a) = (1+\lambda)(c-b)$. Според тоа, $s_{k+1} - s_k = c - a = \frac{\lambda}{1+\lambda}(c-b)$. Нека $c > \omega_k$. Тогаш, $\omega_{k+1} = c$ и како $b \leq \omega_k$ добиваме

$$s_{k+1} - s_k = \frac{\lambda}{1+\lambda}(c-b) \geq \frac{\lambda}{1+\lambda}(\omega_{k+1} - \omega_k).$$

Последното неравенство е точно и кога $c \leq \omega_k$, бидејќи притоа

$$\omega_{k+1}=\omega_k \text{ и } s_{k+1}-s_k=c-a>0\,.$$

Сега да ја разгледаме низата

$$z_k=\tfrac{1+\lambda}{\lambda}\omega_k-s_k,\, k=0,1,2,\dots.$$

Од претходната оценка следува, дека $z_{k+1}-z_k\le 0$, т.е. разгледуваната низа не расте и затоа $z_k\le z_0$, за секој k. Од $\lambda<\frac{1}{n-1}$ следува дека $1+\lambda>n\lambda$, па затоа $z_k=(n+\mu)\omega_k-s_k$, каде $\mu=\frac{1+\lambda}{\lambda}-n>0$. Според тоа, $z_k=\mu\omega_k+(n\omega_k-s_k)\ge\mu\omega_k$ односно $\omega_k\le\frac{z_k}{\mu}\le\frac{z_0}{\mu}$, за секој k. Значи, $\{\omega_k\}$ е ограничена и притоа нејзината ограниченост е докажана без разлика на избраната стратегија на прескокнување.

10. На секое поле од квадратна табла 2005×2005 се наоѓа по еден жетон. Во секој потез дозволено е да се извади жетон од таблата ако во тој момент бројот на неговите соседни жетони е парен и поголем од нула. Под соседни жетони се подразбираат жетоните кои се наоѓаат на полиња со барем едно заедничко теме.

а) Колку најмалку жетони *n* можат да останат на таблата.

б) Ако на таблата останал тој минимален број од *n* жетони, докажи дека меѓу нив нема соседни.

Решение. а) Бараниот број е 2 тој може да се добие на следниот начин. По два реда може да се извадат такашто се вадат соодветно вториот жетон од вториот ред, третиот од првиот ред, потоа се ваѓаат по ред жетоните од првиот ред, па од вториот ред по ред. Оваа постапка ја продолжуваме додека не останат три реда, потоа го правиме истото по колони се додека не останат уште три жетони, па го ваѓаме средниот.

б) Со секој изваден жетон бројот на парови соседни жетони се намалува за парен број заради начинот на вадење на жетоните. На почетокот има

$$2003^2\cdot 4+2\cdot 2003\cdot 5+6$$

(парен број), па на крајот мора да има парен број на парови соседни жетони, но ако останатите два жетони се соседни тогаш ќе има точно еден таков пар.

11. Дадена е квадратна табла со димензии $n\times n$, $n\ge 3$ е природен број. На секое поле од главната дијагонала (сите полиња од горниот лев до долниот десен агол на таблата) без првото и последното е поставен по еден жетон. Дозволена е следнава операција: ако на дадено поле има жетон, а во двете полиња оддесно и одгоре на даденото поле нема жетони, можеме да го отстраниме тој жетон и да поставиме по еден жетон во тие две празни полиња. Дадена операција е применета конечен број пати, после што се покажало дека во полињата на главната дијагонала нема жетони. Определи ги сите можни вредности на бројот на жетоните на таблата во тој момент.

Решение. Во секое поле во кое на почетокот има жетон да го запиошеме бројот 1. Понатаму, во секое поле над главната дијагонала да запишеме $\frac{1}{2}$, во секое поле над полето со $\frac{1}{2}$ да запишеме $\frac{1}{4}$ итн. при што во последните две полиња кои се соседни со горното десно поле запишуваме $\frac{1}{2^{n-2}}$. Да забележиме дека при примена на дозволената операција збирот на броевите соодветни на полињата во кои има жетони не се менува. На почетокот овој збир е еднаков на $n-2$. Од друга страна, од равенството

$$n-2=\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{2^2}+\frac{n-3}{2^3}+\ldots+\frac{2}{2^{n-2}}$$

(кое лесно се докажува со индукција) следува дека збирот на броевите во сите полиња над главната дијагонала без најгорното десно поле е еднаков на $n-2$. Бидејќи во најгорното десно поле не може да има жетон, добиваме дека ако во даден момент на главната дијагонала нема жетони, тогаш сите полиња над главната дијагонала, без најгорното десно поле, треба да имаат жетони. Нивниот бро е еднаков на $\frac{n(n-1)}{2}-1$.

12. На кружница се означени 3000 точки. Во една од овие точки се наоѓа скакулец. Со секој свој скок скакулецот прескокнува една или две точки во насока на движењето на стрелката на часовникот и застанува на следната означена точка. Определи колку најмалку скокови направил скакулецот ако на секоја означена точка застанал барем еднаш и се вратил во почетната точка.

Решение. Скакулецот треба да направи најмалку 3001 скок.

Да ги означиме точките во насока на движењето на стрелките на часовникот со 1, 2 , 3, ..., 3000, тргнувајќи од точката во која скакулецот се наоѓа на почетокот. Скакулецот може да застане на секоја точка барем еднаш и да се врати во точката од која тргнал со 3001 скок на следниов начин:

$$1\xrightarrow{3}4\xrightarrow{3}7\xrightarrow{3}\ldots\xrightarrow{3}2998\xrightarrow{2}3000\xrightarrow{3}3\xrightarrow{3}\ldots\xrightarrow{3}2997\xrightarrow{2}2999\xrightarrow{3}2\xrightarrow{3}\ldots\xrightarrow{3}2999\xrightarrow{2}1.$$

Ќе докажеме дека скакулецот тоа не може да го направи со помалку скокови. Нека k е бројот на скоковите со должина 2, а l е бројот на скоковите со должина 3. Бидејќи скаколецот мора да се врати во точката од која тргнал, т.е. мора да направи цел број полни кругови, постои природен број n таков што $2k+3l=3000n$. Понатаму, бидејќи скакулецот мора да застане на секоја точка барем еднаш важи $k+l\geq 3000$. Ако важи $k+l=3000$, тогаш од

$$3000n=2k+3l=2(k+l)+l=6000+l$$

ќе следува дека $3000\,|\,l$. Но, $k,l\geq 0$, па затоа мора да важи $l=0$ или $l=3000$.

Случајот $l=0$ значи дека сите скокови се со должина 2, но тогаш скакулецот нема да застане на секоја означен точка. Случајот $l=3000$ значи дека сите скокови се со должина 3 и повторно скакулецот нема да застане на секоја означена точка. Значи, не е можно $k+l=3000$.

13. Лавиринт се состои од 10000 квадратни соби, поставен во форма на квадрат 100×100. Секои две соби, кои имаат заедничка страна се поврзани со врата. Илија шета низ лавиринтот, така што во секој свој потег влегува во некоја соба низ една од нејзините врати и излегува низ друга врата. Притоа Илија не може да искористи еден ист пар врати за две последователни посети на една иста соба (на пример, ако при првата посета Илија влегува во собата низ вратата A и излегува низ врата B, тогаш при втората посета не множе да влезе низ вратата B и да излезе низ вратата A). Дали Илија може во лавиринтот да направи повеќе од 4^{100} потези?

Решение. Да ги означиме редовите и колоните од соби во лавиринтот со броевите од 1 до 100 и секоја соба да ја означиме со подредениот пар од броевите на нејзиниот ред и колона.

Нека S е множеството соби (i,j) за кои $1\le i\le 50, 1\le j\le 50$. Да го поделиме S на 99 помали множества $S_2, S_3, ..., S_{100}$ така што во S_k се наоѓаат собите (i,j) од S за кои $i+j=k$, $2\le k\le 100$. Нека P_k е вкупниот број посети кои Илија ги направил на собата S_k.

Множеството S_2 се состои од една соба. Бидејќи таа има само две врати, добиваме дека $P_2\le 1$. Нека a е произволна соба од S_k, $k>2$. Бидејќи a има само две врати кои не водат кон соба од S_{k-1}, барем една од две последователни посети на a треба или да претходи или да следува од посета на соба од S_{k-1}. Бидејќи на секоја посета на соба од S_{k-1} може да претходи или да следува на најмногу две посети на соби од S_k, заклучуваме дека P_k е помал или еднаков од $k-1$ (бројот на собите во S_k) $+4P_{k-1}$.

Оттука со индукција следува дека $P_k\le 2^{2k-3}-k+1$. Според тоа, вкупниот број на посети на собите од S е помал или еднаков на

$$S_2+S_3+...+S_{100}\le 2^1+2^3+...+2^{197}=\tfrac{2^{198}-2}{3}.$$

Истата оценка можеме да ја направиме и за секој од преостанатите три квадранти од лавиринтот, па затоа вкупниот број потези е помал или еднаков на $4\cdot\frac{2^{198}-2}{3}<4^{100}$.

14. Коцка со димензии $3\times 3\times 3$ е поделена на 27 складни единечни коцки (клетки). Една од добиените единечни клетки е празна, а во секоја од преостанатите се наоѓа единечна коцка означена со еден од броевите 1, 2, ..., 26 (секој од овие броеви е доделен на точно една коцка). Дозволено е единечна коцка да се премести во соседна празна клетка (две клетки се соседни ако имаат заеднички ѕид). Дали може со помош на конечно многу дозволени потези единичните коцки да се распоредат така што коцките означени со броевите k и $27-k$ ги заменат местата, за секој $k\in\{1,2,...,13\}$?

Решение. Да ја означиме секоја непразна клетка со бројот на коцката која се наоѓа во неа, а празната клетка со 0. Така позицијата во секој чекор можеме да ја опишеме со некоја пермутација σ на множеството $\{0,1,2,...,26\}$, при што почетната позиција соодветствува на идентичната пермутација $\sigma\binom{0\ 1\ 2\ ...\ 25\ 26}{0\ 1\ 2\ ...\ 25\ 26}$. Во секој потез реализираме транспозиција $(0,x)$ за некој $x\ne 0$, т.е. елементите 0 и x ги менуваат местата. Секоја транспозиција ја менува парноста на пермутацијата (т.е. парноста на бројот парови (i,j) такви што $i<j$ и $\sigma(i)>\sigma(j)$). Бидејќи конечната пермутација $\sigma\binom{0\ 1\ 2\ ...\ 26\ 26}{0\ 26\ 25\ ...\ 2\ 1}$ е непарна (како производ на 13 транспозиции $(i,26-i)$), потребен е непарен број потези.

Од друга страна, ако клетките ги обоиме наизменично црно и бело, како кај шаховската табла), добиваме дека бојата на празната клетка се менува во секој потез. Така, таа после непарен број потези не може да биде во иста боја. Тоа значи, дека празната клетка не може да остане на истото место како во почетната позиција, со што добивме противречност.

15. Во сите единечни клетки на $n \times m$ таблица е запишан по еден цел број. Дијагонала на таблицата се нарекува множеството клетки за кои разликата меѓу бројот на редот и бројот на колоната е еднаква. Во секој чекор имаме право или да додадеме 1 или да одземеме 1 од сите клетки од даден ред, дадена колона или дадена дијагонала. Докажи, дека ако со помош на овие операции можеме да ги направиме еднакви на нула броевите во секоја 3×3 подтаблица, при што останатите броеви не се менуваат, тогаш можеме да ги направиме еднакви на нула сите броеви од таблицата.

Решение. Со $a_{i,j}$ да го означиме бројот кој е запишан во клетката која се наоѓа во $i-$тиот ред и $j-$тата колона, а со $S(i, j)$ да го означиме 3×3 квадратот со горен десен агол со клетката со бројот $a_{i,j}$, ако таков постои.

Кога $m,n \geq 3$ (ако $m \leq 2$ или $n \leq 2$ нема подтаблица 3×3), за секоја подтаблица $S_{i,j}$ да го разгледаме изразот

$$M_{i,j} = a_{i+1,j} - a_{i+2,j} + a_{i+2,j-1} - a_{i+1,j-2} + a_{i,j-2} - a_{i,j-1}.$$

Ако избереме ред, колона или дијагонала на таблицата $S_{i,j}$, вредноста на тој израз не се менува. Бидејќи по услов можеме да ги направиме сите броеви на секоја 3×3 подтаблица еднакви на нула, добиваме дека $M_{i,j} = 0$.

Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $m+n$. Ако $m+n=6$, т.е. $m=n=3$, тогаш тврдењето е точно. Ако $m+n>6$, без ограничување на општоста можеме да земеме дека $m>3$. Разгледуваме таблица $n \times (m-1)$, добиена од дадената таблица без последната колона. Од индуктивната претпоставка следува, дека сите броеви на оваа $n \times (m-1)$ таблица можеме да ги направиме еднакви на нула.

Вредностите $m_{i,m}, 1 \leq i \leq n-1$ се инваријанти, од каде следува (имајќи предвид, дека само во последната колона на разгледуваните 3×3 подтаблици има различни од нула), дека $a_{i+1,m} = a_{i+2,m}$, за $1 \leq i \leq n-2$. Според тоа, $a_{2,m} = a_{3,m} = \ldots$ $= a_{n,m}$ и ако ја извршиме дозволената операција за таа колона можеме да ги направиме сите овие броеви еднакви на нула. Останува само бројот $a_{1,m}$, кој е дијагонала и исто така можеме да гонаправиме еднаков на нула. Со тоа индукцијата е завршена.

За $m+n<6$ имаме $m \leq 2$ или $n \leq 2$ и доказот е тривијален.

2. КОНКУРЕНТСКИ ИГРИ

1. Дваесет монети се распоредени во круг. Двјца играчи последователно земаат по три монети, се додека не останат две монети. Ако преостанатите монети не се соседни, играта ја добива првиот играч, а ако се соседни, тогаш играта ја добива вториот играч. Кој од двајцата играчи има добитна стратегија?

Решение. Вториот играч има добитна стратегија и таа е следната.

Прво тој ги дели сите монети на парови од соседни монети, т.е. ако монетите се нумерираат последователно, на пример во насока на движењето на стрелките на часовникот, со броевите од 1 до 20, парови се на пример (1,2), (3,4), ..., (19,20). После тоа на секој потез на првиот играч вториот одговара на следниот начин.

- Ако првиот играч земе три монети од различни парови, тогаш вториот играч ги зема останатите три монети од истите парови.
- Ако првиот играч земе две монети од еден пар и една монета од друг пар, тогаш вториот играч ја зема останата монета од вториот пар и било кои две монети од ист пар.

Така, на крајот после третиот чекор, последните две монети ќе бидат од еден ист пар, што значи дека тие ќе бидат соседни.

Забелешка. Ваквата стратегија е добитна за вториот играч ако бројот на монетите е од облик $6n+2,\ n=1,2,3,...$.

2. Дадена е таблица $1\times n,\ (n\geq 2)$. Двајца играчи во слободните полиња наизменично ги запишуваат знаците „+“ и „-“. Првиот играч секогаш запишува „+“, а вториот играч секогаш запишува „-“. Не е дозволено два исти знака да бидат запишани во во две соседни полиња. Играта ја губи играчот кој не може да одигра потез. Кој од играчите има победничка стратегија?

Решение. Вториот играч има победничка стратегија. Стратегијата се состои во тоа да во првиот потез вториот играч запише „-“ во некое од крајните полиња. Сега во натамошниот тек на играта може да игра на произволен начин, се разбира почитувајќи ги правилата за игра. Ќе докажеме дека со оваа стратегија тој стално победува. После $k-$от потез на првиот играч ако се изфрлат k полиња кои содржат „+“, таблицата се разбива на k поврзани делови кои содржат прани полиња или полиња со „-“. Бидејќи има $k-1$ минуси, добиваме дека останал еден дел кој содржи само празни полиња и вториот играч може да запише „-“ во некое од тие полиња. Значи, вториот играч има потез после секој потез на првиот играч, што значи дека тој победува.

3. Дадени се природни броеви M и $n\geq 3$. Двајца играчи A и B, (прв на потез е играчот A) последователно го заменуваат бројот M со еден од броевите $M-1, M-2$ или $M-n$. Играчот кој прв ќе добие негативен број ја губи играта. Определи го најголемиот природен број k за кој постои n и k последователни вредности на M, за секоја од кои играта ја добива играчот A.

Решение. Ќе докажеме дека $k=3$. Нека претпоставиме дека постои n за кој има 4 последователни вредности на M (нека тоа се $t,t+1,t+2,t+3$) за секоја од кои играта ја добива играчот A. Тоа значи дека за $M=t+2$ играчот A треба да го замени M со $M-n$ (бидејќи во спротивен случај бројот ќе биде t или $t+1$ и играта ќе ја добие играчот B)., бидејќи при $M-n=t+2-n$ играта ја добива играчот кој не е на потег. Аналогно, за да играчот A ја добие играта кога $M=t+3$, тој треба M да го замени со $M-n$, бидејќи кога $M-n=t+3-n$ играта ја добива играчот кој не е на потег. Добивме две последователни вредности $t+2-n$ и $t+3-n$, за кои играта ја добива играчот кој не е на потег. Но, тоа не е можно, бидејќи при $t+3-n$ играчот кој е потег може бројот да го замени со $t+2-n$ (ако одземе од него 1) и да ја добие играта. Од добиената противречност следува дека $k \leq 3$. Останува да забележиме дека за $n = 3$ вредностите $M = 1, 2, 3$ се добитни за играчот A.

4. Даден е природен број k и бесконечна решетка од правилни шестаголници. Двајца играчи A и B наизменично играат на решетката, а прв почнува играчот A. На почетокот сите клетки на решетката се празни. Играчот A има право да избере две празни соседни клетки и да стави жетони на нив, а играчот B има право да отстрани еден од веќе поставените жетони. Играчот A победува ако успее во една линија да постави жетони во k последователни клетки. Определи ја најмалата вредност за k, за која играчот A не може да победи со конечен број чекори или докажи дека, таква најмала вредност не постои.

Решение. Ќе докажеме, дека ако играчот B избере правилна стратегија, тогаш минималната вредност на k, за која A не може да победи со конечен број чекори е еднаква на 6.

Прво ќе докажеме, дека за $k = 6$ играчот B има стратегија со која ќе го оневозможи играчот A да победи со конечен број чекори. Решетката да ја обоиме "шаховски" со три бои и да избереме една од боите, на пример бела. Тогаш играчот B игра на следниот начин: го отстранува секој жетон кој што играчот A туку што го поставил на бело поле, а ако нема таков жетон, тогаш игра на произволен начин. Бидејќи во еден чекор A може да постави најмногу еден жетон на бело поле, оваа стратегија гарантира дека во секој момент на решетката ќе има најмногу едно поле со бел жетон. Но, секоја група од 6 последователни полиња на една линија содржи по две бели полиња (поточно, по две полиња од секоја боја), па затоа A не може да има добитна позиција.

Сега ќе докажеме, дека A секогаш може да стигне до 5 последователни жетони во еден ред. Да разгледаме "правоаголник" со ширина 2 клетки и должина 10 клетки. Нека A игра на тој "правоаголник", додека е тоа можно, и да го разгледаме моментот, во кој A не може понатаму да игра на правоаголникот. Ако A се уште не победил, во правоаголникот за секои две соседни клетки има барем по еден жетон и нема 5 последователни жетони во еден ред. Ако во горниот ред има две низи од жетони со заедничка должина (т.е. $0+4, 1+3$ или $2+2$) и празна клетка меѓу нив, тогаш A победува со чекор во таа празна клетка и клетката над неа. Во спротивен случај не е тешко да се провери (со разгледување на неколку едноставни случаи), дека постои жетон во горниот ред, чии соседни клетки се празни. Тогаш четирите соседи на тие две клетки од вториот ред имаат жетони и A победува со чекор на било кој од краевите на таа група.

5. Петар и Никола ја играат следнава игра: на почетокот Петар замислил едно од полињата на шаховска 100×100 табла. Потоа Никола покажува на произволно поле од шаховската табла и го прашува Петар колку најмалку потези и се потребни на шаховската фигура крал за да стигне од посоченото до замисленото поле. Откако ќе го добие одговорот, Никола може повторно на ист начин да постави прашање или да го погоди полето кое го замислил Петар итн. Петар на сите прашања одговара коректно. Колку најмалку прашања треба да постави Никола за да го открие замисленото поле?

Решение. Ќе докажеме дека две прашања не се доволни. Нека претпоставиме дека Петар на првото прашање одговорил со "Еден". Тогаш (независно кое е првото избрано поле) меѓу допуштените положби на замисленото поле има три полиња a,b и c кои формираат “агол” (a и c имаат заедничко теме, а секое од нив има заедничка страна со b). Лесно се проверува, дека било кое поле да го избере Никола за да го постави второт прашање, Петар секогаш може да одговори така што или a и b, или b и c, или c и a се на еден потез од замисленото поле и Никола не може еднозначно да ја определи положбата на замисленото поле.

За да го открие замисленото поле, Никола едноставно може да посочи триа од аголните полиња на таблата. Множеството полиња, еднакво оддалечени од аголното поле за шаховската фигура крал формираат $\Gamma-$фигура составена од рабните полиња на две соседни страни на квадрат кои се спротивни на аголното поле. Пресекот на две вакви фигури, соодветни на две спротивни аголни полиња на таблата, се состои од најмногу две полиња. Притоа двете полиња секогаш се на различно растојание и затоа после третото прашање местоположбата на замисленото поле е еднозначно определена.

6. Дадено е множество од 2013 прости броеви. Иван избира пар (p,q) од различни броеви од даденото множество. Петар сака да ги определи броевите p и q, при што за едно прашање на Иван му соопштува пар природни броеви (a,b), а Иван соопштува дали бројот $ap-bq$ е позитивен, негативен или е еднаков на нула. Определи го најмалиот број прашања кои му се потребни на Петар за да со сигурност знае кои броеви ги избрал Иван?

Решение. На секој пар (p,q) од различни прости броеви од даденото множество му ја придружуваме дропката $\frac{p}{q}$. Да ги подредиме така добиените дропки во растечки редослед. Одговорот на Иван покажува кој од следните услови е исполенет $\frac{b}{a}<\frac{p}{q}$, $\frac{b}{a}=\frac{p}{q}$ или $\frac{b}{a}>\frac{p}{q}$.

Нека претпоставиме дека во даден момент можните парови на Иван се t. Да ја разгледаме следнава стратегија на Петар. Ако t е парен број, тогаш тој задава прашање (a,b), каде $\frac{b}{a}$ е поголем точно од половината од можните броеви на Иван (бидејќи множеството рационални броеви е густо, тоа е секогаш можно), а ако t непарен дропката $\frac{b}{a}$ треба да е еднаква на средната дропка. При ваква стратегија со секој одговор на Иван можните парови на Иван стануваат $\frac{t}{2}$ ако t е парен и $\frac{t-1}{2}$ ако t е непарен број.

Од друга страна, јасно е дека за секое прашање на Петар постои одговор за кој можните парови на Иван се намалуваат најмногу за $\frac{t}{2}$ ако t е парен и $\frac{t+1}{2}$ ако t е непарен број.

При опишаната стратегија на Петар, ако бројот на можните парови на Иван е t и $t=2^{\alpha_1}+2^{\alpha_2}+...+2^{\alpha_k}$, каде $\alpha_1>\alpha_2>...>\alpha_k$ е претставувањето на t во броен систем со основа 2, тогаш после секое прашање на Петар највисокиот степен на бројот 2 се намалува за 1. Според тоа, за да остане еден број потребни се точно α_1 прашања.

Бидејќи бројот на дропките е $2013 \cdot 2012$ и $2^{21} < 2013 \cdot 2012 < 2^{22}$, одговорот е 21.

7. Дадени се три купчиња со a,b и c бонбони, соодветно. Иван и Петар ја играат следнава игра: играчите влечат потези наизменично и играчот кој е на потег отстранува едно од купчињата и, а бобоните од другите две купчиња ги дели на три купчиња, секое од кои содржи најмалку по една бонбона. Играчот кој не може да направи три купчиња или ќе направи три купчиња со по една бонбона ја губи играта. Ако и грата ја почнува Иван, определи ги сите тројки (a,b,c) за кои Петар има добитна стратегија.

Решение. Со A да го означиме играчот кој е на потег, а со B другиот играч. Нека n е бројот на бонбоните кои играчот A треба да ги подели. Со индукција по n ќе докажеме дека играчот A ја губи играта ако n е непарен број, а победува ако $n > 2$ е парен број. За 3 и 4 бонбони тврдењето е очигледно. Нека тоа е точно за $n \le k$. Ако $k+1$ е парен број, тогаш A може да ја направи поделбата $1.1.k-1$ и B треба да направи купчиња кои заедно имаат k бонбони. Бидејќи k е непарен број, играчот B ја губи играта. Ако $k+1$ е непарен број, тогаш играчот A бонбоните моеже да ги раздели на три купчиња така што секое содржи непарен број бонбони или две купчиња да содржат парен и едно непарен број бонбони. Јасно, и во двата случаи постојат две купчиња кои заедно имаат непарен број бонбони поголем од 2. Од индуктивната претпоставка следува дека играта ја добива играчот B.

Ќе докажеме, дека Петар има победничкла стратегија само кога два од броевите a,b и c се еднакви на 1, а третиод број е парен (на пример $a=b=1$ и c е парен). Тогаш Иван треба да раздели вкупно $c+1$ бонбона и бидејќи $c+1$ е непарен број, тој ја губи играта. Во сите останати случаи во трите купчиња ќе има или два парни броја (и тогаш Иван ќе го отстрани купчето со непарен број бонбони и на три купчиња ќе раздели парен број бонбони) или две непарни купчиња, едното од кои содржи повеќе од една бонбона (и тогаш Иван ќе го отстрани купчето со парен број бонбони и на три купчиња ќе раздели парен број бонбони). Притоа, и во двата случаи бројот на бонбоните е поголем од 2.

8. Александар ги пополнува со природни броеви некој од коефициентите на равенка од четврти степен, а потоа Елена пополнува исто така со природен број друг од коефициентите итн. додека не бидат пополнети сите пет коефициенти. Александар победува ако добиената равенка има целоброен корен, а во спротивен случај победува Елена. Кој од двајцата играчи има добитна стратегија?

Решение. Елена има добитна стратегија. Ако равенката е

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

и во првиот чекор Александар го пополни a_0, a_1, a_2 или a_3, тогаш Елена пополнува $a_1 = a_0, a_0 = a_1, a_4 = a_3$ или $a_3 = a_4$, соодветно, а во спротивно пополнува $a_1 = 1$ (или $a_3 = 1$). Со слична стратегија во вториот чекор таа може да добие $a_1 \le a_0$ и $a_3 \le a_2$. Нека претпоставиме дека добиената равенка има целоброен корен y. Јасно, $y \ge 1$ и тогаш $a_4 = y^3(a_1 - a_0y) + y(a_3 - a_2y) \le 0$, што е противречност.

9. Четворица играчи A_1, A_2, A_3 и A_4 со седум коцки за не лути се човече ја играат следнава игра: A_1 ги фрла седумте коцки и потоа на секој од останатите тројца играчи му исплаќа $k-$ти дел од сумата која тој играч ја има во моментот, каде k е збирот на паднатите броеви на седумте коцки, потоа истото го прават играчите A_2, A_3 и A_4. На почетокот сите мале еднакви суми пари, а откако сите ги фрлиле коцките по еднаш, се покажало дека сумите кои ги имаат играчите се однесуваат како $3:3:2:2$ (сумата на A_1 спрема сумата на A_2 спрема сумата на A_3 спрема сумата на A_4). Определи го збирот на паднатите броеви на секој играч.

Решение. Нека $S_k^{(m)}$ се парите на $k-$тиот играч, $k=1,2,3,4$, после фрлањето и плаќањето на $m-$тиот играч. Нека збирот на паднатите броеви на A_i е еднаков на a_i, $i=1,2,3,4$. Од правилата на играта следува, дека

$$S_k^{(m)} = S_k^{(m-1)} + \tfrac{1}{a_m} S_k^{(m-1)} = S_k^{(m-1)} \tfrac{1+a_m}{a_m}, \qquad (1)$$

за $k \neq m$ (т.е. кога A_k добива пари) и

$$S_k^{(k)} = S_k^{(k-1)} - \tfrac{1}{a_k} \sum_{i \neq k} S_i^{(k-1)} = S_k^{(k-1)} - \tfrac{1}{a_k}(4S - S_k^{(k-1)}) = S_k^{(k-1)} \tfrac{1+a_k}{a_k} - \tfrac{4S}{a_k}, \qquad (2)$$

кога A_k дава пари.

Со помош на (1) и (2) ги определуваме сумите кои четирите играчи ги имаат на крајот на играта. Имаме

$$\tfrac{6S}{5} = S_1^{(4)} = PS - \tfrac{4S(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)}{a_1a_2a_3a_4}$$

$$\tfrac{6S}{5} = S_2^{(4)} = PS - \tfrac{4S(1+a_3)(1+a_4)}{a_2a_3a_4}$$

$$\tfrac{4S}{5} = S_3^{(4)} = PS - \tfrac{4S(1+a_4)}{a_3a_4}$$

$$\tfrac{4S}{5} = S_4^{(4)} = PS - \tfrac{4S}{a_4}$$

каде $P = \tfrac{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)}{a_1a_2a_3a_4}$. Од првата и втората равенка добиваме $a_2 = a_1 - 1$, а од третата и четвртата равенка добиваме $a_4 = a_3 - 1$. Сега од втората и третата равенка следува

$$\tfrac{2}{5} = \tfrac{4}{a_4} - \tfrac{4(1+a_3)}{a_2a_4}, \text{ т.е. } a_2a_4 = 10(a_2 - a_4 - 2).$$

Од последната равенка следува дека $a_4 < 10$ (во спротивно левата страна е поголема од десната). Освен тоа, $a_4 \geq 7$ (имаме седум коцки, па збирот на паднатите броеви е најмалку 7) и останува да ги провериме случаите $a_4 = 7,8,9$. Решение се добива единствено за $a_4 = 7$ (бидејќи максималниот збир е 42), при што добиваме $a_3 = 8, a_2 = 30, a_1 = 31$.

10. Даден е природен број n. Јана запишува n различни природни броеви, а потоа Иван брише неколку од броевите (може ниту еден, но не може сите броеви) и пред секој од преостанатите броеви става еден од знаците $+$ или $-$. Иван победува ако добиениот резултат е делив со 2003, а во спротивен случај победува Јана.

Кој од играчите има победничка стратегија?

Решение. Јана има победничка стратегија ако $n \le 10$. Имено, ако таа ги запише броевите $1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1}$, тогаш како и да игра Иван, добиениот резултат не може да се дели со 2003, бидејќи истиот е меѓу -1023 и 1023 и не е еднаков на 0. Навистина, бидејќи има знак пред најголемиот неизбришан број имаме $2^k > 2^k - 1 = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i$.

Ако $n \ge 11$, тогаш множеството C од броевите кои ги избрала Јана има $2^n - 1 > 2003$ различни непразни подмножества. Според тоа збировите на броевите во две од нив, на пример A и B, даваат еднакви остатоци при делење со 2003. Ако Иван стави знач $+$ пред броевите од $A \setminus B$, $-$ пред броевите од $B \setminus A$ и ги избрише останатите броеви од C, тогаш тој победува, бидејќи добиениот збир се дели со 2003.

11. Нека t, a и b се природни броеви. Двајца играчи ја играат следнава (t, a, b) игра: првиот играч го заменува бројот t со еден од броевите $t - a$ или $t - b$, потоа вториот играч го заменува добиениот број ако од него одземе a или b, потоа одново првиот играч одзема a или b од бројот добиен од вториот играч итн. Докажи, дека постојат бесконечно многу броеви t такви што првиот играч има добитна стратегија за (t, a, b) игра за секои a и b такви што $a + b = 2005$.

Решение. Прво ќе докажеме дека ако негој играч има добитна стратегија на играта (t, a, b), тогаш тој има добтина стратегија и за играта $(t + a + b, a, b)$. Да го означиме првиот играч со A, а вториот со B. Нека B има добитна стратегија за играта (t, a, b). Тогаш за играта $(t + a + b, a, b)$ после чекор на играчот A се добива играта $(t + a, a, b)$ или играта $(t + b, a, b)$. И во двата случаи играчот B може да ја добие играта (t, a, b), после што тој повторно е втор на потез, што значи дека има добитна стратегија.

Нека A има добитна стратегија за играта (t, a, b). Бидејќи A може да добие $(t - a, a, b)$ или $(t - b, a, b)$ игра, после која тој е втор, добиваме дека $(t - a, a, b)$ или $(t - b, a, b)$ игра е добитна за играчот кој игра втор. Бе ограничлување на општоста можеме да земеме дека тоа е играта $(t - a, a, b)$. Од претходните разгледувања следува дека играта $(t - a + a + b, a, b) = (t + b, a, b)$ е добитна за играчот кој игра втор. Бидејќи од игра $(t + a + b, a, b)$ играчот A може да добие игра $(t + b, a, b)$ во која тој е втор, заклучуваме дека играта $(t + a + b, a, b)$ е добитна за A.

Ќе докажеме дека за $t = 2004$ и $a + b = 2005$ првиотиграч има добитна стратегија. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a \le b$. Бидејќи $a > 0$, важи $2004 \ge b$. За да ја добие играта играчот A треба од $t - 2004$ да го одземе бројот b. Тогаш за играчот B останува играта $(2004 - b, a, b)$ и како $2004 - b < 2005 - b = a$ тој ја губи играта. Конечно, од претходните разгледувања деказа секој $s \in \mathbb{N}$ има добитна стратегија за играта $(2004+2005s, a, b)$ за секои a и b такви што $a+b=2005$.

12. Даден е природен број n. Даниел и Марија играат игра. Даниел има k листови, каде k е природен број. На горната страна на секој лист тој запишува некои од броевите од 1 до n (може да запише произволно многу броеви, вклучително ниту еден или сите броеви). На спротивната страна тој ги запишува останатите броеви. Марија може да превртти дел од листовите (може да превртти произволно многу листови, вклучително нула или сите листови). Ако Марија може да постигне сите броеви од 1 до n да се гледаат, тогаш таа победува.

Определи го најмалиот број k, за кој Марија секогаш може да победи, независно од тоа кои броеви ги запишал Даниел.

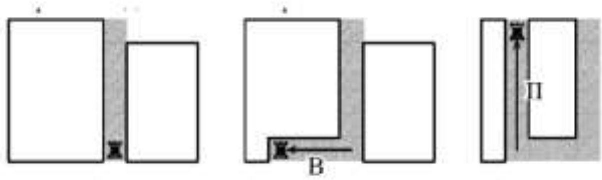
Решение. Ќе докажеме дека бараниот број k е најмалиот k за кој $2^k > n$. Да ги нумерираме листовите со $1,2,...,k$ и за секој $i=1,2,...,n$ нека $A_i \subseteq \{1,2,...,k\}$ е множеството листови на кои е запишан бројот i. Бидејќи $2^k > n$, постои множество $B \subseteq \{1,2,...,k\}$ кое е различно од A_i за секој i. Нека Марија ги превртти листовите нумерирани со броевите од B. Ако A_i не е подмножество од B, тогаш бројот i ќе се појави на некој од превртените листови. Ако A_i е подмножество од B, тогаш бројот i ќе се појави на превртените листови од $B \setminus A_i$.

Нека $2^k \le n$. За секое подмножество $\{1,2,...,k\}$ Даниел може да избере еден од броевите $1,2,...,n$, бидејќи на секое подмножество соодветствува барем еден број. Потоа тој го запишува секој од броевите $1,2,...,n$ на листовите од соодветното множество на тој број. Ако Марија ги превртти листовите од подмножество $B \subseteq \{1,2,...,k\}$, тогаш бројот (или броевите), кој (кои) соодветствува (соодветствуваат) на тоа множество нема да се гледа (гледаат). Со тоа доказот е завршен.

13. Павел и Васил играат игра на $n \times n, n > 1$ табла. На почетокот една од аголните клетки е црна и на неа се наоѓа шаховски топ, а останатите клетки се бели. Играта ја почнува Павел, а потоа играчите наизменично се менуваат. Во секој потез соодветниот играч го преместува топот хоризонтално или вертикално и во тој момент сите клетки, преку кои поминува топот (вклучувајќи ја клетката на која потезот завршува) стануваат црни. Топот не може да преминува преку црни клетки или да застане на црна клетка. Играта ја губи играчот кој не може да направи потез. Кој од играчите има добитна стратегија?

Решение. Една од добитните стратегии на Павел е следнава: секогаш да прави во моментот најдолг вертикален чекор (во случајов, при првиот потез ќе отиде по вертикала на другиот крај на таблата). Ќе докажеме, дека ова навистина води до победа.

Една бела клетка ќе ја нарекуваме *достижна*, ако од моменталната положба на топот може да се достигне до таа клетка после неколку направени потези. Ќе докажеме, дека во секој момент Павел може да игра, така што после секој негов потез сите достижни клетки формираат не повеќе од два правоаголници и во секој од овие два правоаголници бројот на редиците е поголем од бројот на колоните. Притоа, топот се наоѓа на клетка соседна со аголна по хоризонтала клетка на секој од правоаголниците. Ова е точно за првиот чекор на Павел.



Понатаму, ако претходно кажаното е исполнето после некој потез на Павел, Васил е принуден топот да го помести во еден од добиените правоаголници по хоризонтала. Нека тоа е правоаголник со r редици и c колони и нека хоризонталниот потез на Васил нека е за $v \le c$ клетки. После тој потез клетките на другиот правоаголник (ако воопшто имало друг) веќе нема да бидат достижни.

Бидејќи $r \ge c+1 \ge 2$, Павел има можност да направи вертикален потез. После тој потез достижните клетки ќе формираат правоаголници $r \times (c-v)$ и $(r-1)\times(v-1)$. Во секој од овие правоаголници редиците се повеќе од колоните, бидејќи $r > c > c-v$ и $r-1 > c-1 \ge v-1$. Притоа топот е во клетка, која е соседна по хоризонтала со аголна клетка на секој од правоаголниците.

Во случајов докажавме, дека Павел секогаш може да направи потез. Бидејќи бројот на белите клетки постојано се намалува, играта ќе заврши после конечен број потези, при што последниот потез ќе го направи Павел. Значи, Павел има победничка стратегија.

14. Двајца играчи во декаден брон систем формираат шестцифрен број според следните правила:

- првиот играч ја кажува првата цифра на бројот, потоа вториот играч ја кажува втората цифра, потоа првиот играч ја кажува трета цифра итн. наизменично до шестата цифра на бројот и
- ниту една цифра не смее да иде повторена.

Ако добиениот број е сложен победува првиот играч, а ако е прост број победува вториот играч. Кој играч има победничка стратегија?

Решение. Со A да го означиме првиот, а со B вториот играч. Ќедокаѓеме дека A има победничка стратегија,

Цифрите 1, 3, 7 и 9 да ги наречеме добри,а цифрите 0, 2, 4, 5, 6 и 8 лоши. Како прва цифра A ја избира цифрата 3. Ако B избере добра цифрам тогаш A исто така избира добра цифра. Понатаму, ако B повторно избере добра цифра, бидејќи сите добри цифри се искористени, A избира произволна лоша цифра, па B како шеста цифра мора да избере лоша цифра, со што се добива сложен број (број делив со 2 или со 5). Ако B како четврта цифра избере лоша цифра, тогаш A како петта цифра ја избира преостанатата добра цифра и повторно B како шеста цифра мора да избере лоша цифра, со што ја губи играта.

Нека B за втора цифра избере лоша цифра. Тогаш A како трета цифра ја избира цифрата 9. Ако сега B како четврта цифра избере добра цифра, тогаш како петта цифра ја избира последната добра цифра и повторно победува. Затоа нека B за четврта цифра избере лоша цифра, после што од добрите цифри останаа цифрите 1 и 7. Во овој момет збирот на избраните цифри или е делив со 3, или при делење со 3 дава остаток 1 или при делење со 3 дава остаток 2.

Нека збирот е делив со 3. Бидејќи најмалку една од цифрите 2, 5 и 8 не е искористена играчот A како петта цифра избира една од овие цифри. Сега B како шеста цифра може да избере лоша цифра и губи или една од цифрите 1 или 7, со што повторно ја губи играта бидејќи во овој случај збирот на цифрите ќе биде делив со 3.

Нека остатокот е 1. Во овој случај A како петта цифра ја избира цифрата 1, па затоа B како шеста цифра може да избере лоша цифра и губи или цифрата 7. Јасно, и во двата случаја B ја губи играта бидејќи се добива сложен број (во вториот случај збирот на цифрите е делив со 3).

Нека остатокот е 2. Бидејќи барем една од цифрите 0 и 6 не е искористена (во спротивно остатокот ќе биде 0) играчот A избира една од овие цифри. Како последна цифра B избира лоша цифра и губи или избира една од цифрите 1 или 7 со што збирот на цифрите на бројот е делив со 3, па затоа B повторно губи.

Конечно, од претходно изнесеното следува дека играчот A има победничка стратегија.

15. Ана и Чедомир ја играат следнава игра. На почетокот на таблата е запишан природниот број $n > 1$. Во секој чекор играчот кој е на потег го брише бројот k кој во моментот е запишан на таблата и на негово место запишува еден од следните броеви:

1) Позитивен делител на k, различен од 1 и k.
2) Бројот $k+1$.

На почетокот секој играч има по 1000 жетони. Ако играчот го избере чекорот 1) тој добива жетон, а ако го избере чекорот 2) тој губи жетон. Играта ја губи играчот кој прв ќе ги загуби сите жетони. Ана е прва на потег, т.е. ја почнува играта. За кој природен број n Чедомир има победничка стратегија?

Решение. Ако $n = 2$, тогаш првиот играч победува – еднозначно имаме $2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 3$ и потоа циклусот $3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 3$ (во секој циклус првиот губи и добива жетон, а вториот губи два жетона). Од претходните расудувања следува дека при напишан $k = 3$ или $k = 5$ играчот кој е на потег губи,а при $k = 2,4$ или сложен број делив на 3 или 5 победува. Понатаму, ако $n = 7$ првиот пишува 8, а вториот губи, бидејќи секој од броевите 4, 2 и 9 е победничка позиција за првиот (одново може да сведе до циклусот $3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 3$). Според тоа, броевите $2, 4, 3k, 5k$ и $8k (k > 1)$ се победнички, па затоа простите броеви од видот $3k + 2$ и $5k + 4$, $k \geq 1$ се губитнички (заедно со 3, 5 и 8). Освен тоа $n = 13$ се победнички, бидејќи првиот добива $k = 2,7$ или 15, кои се победнички. Така имаме:

1) Ако p е победнички прост број, тогаш $2p$ е губитнички. Навистина, имаме $p = 3k + 1$ и тогаш $2p + 1$ е делив со 3.
2) 2, 7 и 13 се единствени добирнички прости броеви. Навистина, играчот кој е на потег дава $p + 1$. Овој број е победнички, ако е содржател на губитнилчки број. Инаку, за $p > 13$ или $p | 1$ е степен на бројот 2 (тогаш чекорот 8 е победнички), или $p + 1 = 2qk$, каде q е победнички (што не е можно, бидејќи според 1) $2p$ е победнички).

   Уште повеќе, 49, 169 се губитнички, а $49k, 169k, k > 1$ се победнички. Освен тоа 91 е губитнички, бидејќи играчот кој е на потег дава 92, а противникот може да даде 23.

3) Ако бројот е сложен и не е 8, 14, 26, 49, 91, 169, тогаш е победнички. Навистина, ако тој број има губитнички прост делител, тогаш е во ред. Во спротивно, неговите прости делители се меѓу 2, 7 и 13. Согласно претходните расудувања, разгледаните вредности се победнички.

Значи, Чедомир има победничка стратегија за: 8, 14, 26, 49, 91, 169 и сите прости броеви со исклучок на 2, 7 и 13.

16. Дадени се природни броеви m и n. Дадени се n купчиња од златни монети, при што $i-$тото купче содржи $a_i > 0$ монети. Ја разгледуваме следнава игра:

1) Бојан избира множества $B_1, B_2, ..., B_n$, секое од кои е подмножество на $\{1, 2, ..., m\}$.
2) Ана, знаејќи ги избраните множества на Бојан, избира непразно подмножество S на $\{1, 2, ..., m\}$.
3) Монетите од $i-$тото купче се даваат на Бојан ако $B_i \cap S$ има парен број елементи. Во спротивен случај монетите се даваат на Ана.

Докажи дека за секој избор на множествата $B_1, B_2, ..., B_n$ кој може да го направи на Бојан, Ана може да избере множество S така, што ќе добие повеќе монети од Бојан.

Решение. Ана ќе има повеќе монети ако $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{|B_i \cap S|} a_i < 0$. Нека претпоставиме, дека за секое непразно множество S Бојан не добива помалку монети од Ана. Тоа значи, дека

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{|B_i \cap S|} a_i \geq 0,$$

при што за $S = \varnothing$ имаме $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{|B_i \cap S|} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i > 0$. Ако сумираме по сите множества $S \subseteq \{1, 2, ..., m\}$, добиваме

$$\sum_{S \subseteq \{1,2,...,m\}} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|B_i \cap S|} a_i > 0. \tag{1}$$

За произволно множество B да го разгледаме збирот

$$\sum_{S \subseteq \{1,2,...,m\}} (-1)^{|B \cap S|} > 0.$$

За $S = C \cup D$, каде $C = S \setminus B$, $D = S \cap B$ и $C \cap D = \varnothing$ имаме

$$\sum_{S \subseteq \{1,2,...,m\}} (-1)^{|B \cap S|} = \sum_{C \subseteq \{1,2,...,m\} \setminus B} \sum_{D \subset B} (-1)^{|B \cap (C \cup D)|}$$

$$= \sum_{C \subseteq \{1,2,...,m\} \setminus B} \sum_{D \subset B} (-1)^{|D)|}.$$

Бидејќи $|B| > 0$, важи

$$\sum_{D\subset B}(-1)^{|D)|}=\sum_{r=0}^{|B|}(-1)^r\binom{|B|}{r}=0\,,$$

па затоа

$$\sum_{S\subseteq\{1,2,...,m\}}(-1)^{|B\cap S|}=0\,,$$

за секое непразно подмножество B од $\{1,2,...,m\}$. Добиваме

$$\sum_{S\subseteq\{1,2,...,m\}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|B_i\cap S|}a_i=\sum_{i=1}^{n}(a_i\sum_{S\subseteq\{1,2,...,m\}}(-1)^{|B_i\cap S|})=0\,,$$

што противречи на (1). Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

V НЕРАВЕНСТВА

1. НЕРАВЕНСТВА НА ЈЕНСЕН И ПОПОВИЦИУ

1. Нека $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ се позитивни реални броеви за кои важи $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i+b_i} \geq \frac{a_1+a_2+....+a_n}{2} .$$

Решение. *Прв начин.* Нека $S_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i+b_i}$ и $S_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{a_i+b_i}$. Од условот е јасно дека $S_1 = S_2$. Тогаш имаме

$$4S_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{2(a_i{}^2+b_i{}^2)}{a_i+b_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i+b_i)^2}{a_i+b_i} = \sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i) = 2\sum_{i=1}^{n} a_i ,$$

од каде што следува бараното неравенство.

Втор начин. Од очигледното неравенство $(a_i - \frac{a_i+b_i}{2})^2 \geq 0$ се добива дека $a_i{}^2 \geq a_i(a_i+b_i) - \frac{(a_i+b_i)^2}{4}$ што е еквивалентно со $\frac{a_i^2}{a_i+b_i} \geq a_i - \frac{a_i+b_i}{4}$. Со сумирање на сите вакви неравенства и користејќи го условот за еднаквост на сумите го добиваме бараното неравенство.

Трет начин. Функцијата $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ е конвексна. Од неравенството на Јенсен добиваме

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i, \frac{a_i+b_i}{2}) \geq f(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}{2n}) \text{, т.е } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i^2}{a_i+b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_i)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i+b_i}{2}}$$

што е еквивалелнтно со бараното неравенство (се користи условот за еднаквост на сумите).

2. Ако a,b,c се ненегативни реални броеви такви што $a^2+b^2+c^2=1$, докажи дека

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a}{1+a^4} + \frac{b}{1+b^4} + \frac{c}{1+c^4} \leq \frac{9\sqrt{3}}{10} . \qquad (1)$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Левата страна на неравенството е очигледна. Имено,

$$\frac{a}{1+a^4} + \frac{b}{1+b^4} + \frac{c}{1+c^4} \geq \frac{a+b+c}{2} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2} = \frac{1}{2} .$$

Знак за равенство важи за подредените тројки $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$.

За да го докажеме десното неравенство ја воведуваме замената $x=a^2$, $y=b^2$, $z=c^2$, после која неравенството може да се запише во видот

$$f(x)+f(y)+f(z)\le 3f(\tfrac{x+y+z}{3})=3f(\tfrac{1}{3}),\qquad (2)$$

каде $f(t)=\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$, $t\in[0,1]$. Бидејќи на интервалот $[0,1]$ важи

$$f''(t)=\frac{15t^4-18t^2-1}{4t\sqrt{t}(1+t^2)^3}\le\frac{15t^2-18t^2-1}{4t\sqrt{t}(1+t^2)^3}<0,$$

заклучуваме дека на овој интервал функцијата $f(t)$ е конкавна. Според тоа, на $[0,1]$ функцијата $-f(t)$ е конвексна, па од неравенството на Јенсен следува неравенството

$$-f(\tfrac{1}{3})=-f(\tfrac{x+y+z}{3})\le-\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3},$$

кое е еквивалентно со неравенството (2).

3. Ако s е полупиериметарот и R радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, докажи дека $2s\le 3\sqrt{3}\cdot R$.

Решение. *Прв начин.* Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$. Функцијата $f(x)=\sin x$ е конкавна на интервалот $(0;\pi)$, па од неравенството на Јенсен следува

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\le\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3},\ \text{т.е. } \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Но, бидејќи $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, се добива неравенството

$$4\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \text{т.е. } \cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Притоа $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Од $r=s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ и $r=4R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ се добива дека $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{4R}$. Заменувајќи во претходното неравенство се добива $\frac{s}{4R}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$, т.е. $2s\le 3\sqrt{3}R$.

Втор начин. Функцијата За $f(x)=\ln\cos\frac{x}{2}$ е конкавна на интервалот $(0;\pi)$ па затоа од неравенството на Јенсен следува

$$\frac{\ln\cos\frac{\alpha}{2}+\ln\cos\frac{\beta}{2}+\ln\cos\frac{\gamma}{2}}{3}\le\ln\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

$$\frac{\ln(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2})}{3}\le\ln\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3};$$

$$\cos\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\beta}{2}\cos\tfrac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Сега, продолжувајќи како во првиот начин го добиваме бараното неравенство.

4. Ако s е полупиериметарот и r радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, докажи дека $s\ge 3\sqrt{3}r$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$. Функцијата $f(x)=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ е конвексна на интервалот $(0;\pi)$, па затоа од неравенството на Јенсен следува

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{3} \ge \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}; \qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \ge 3\sqrt{3}.$$

Сега, од $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ и $P=r^2\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, следува $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{P}{r^2}=\frac{sr}{r^2}=\frac{s}{r}$. Заменувајќи во последното неравенство се добива неравенството $s\ge 3\sqrt{3}r$

5. (Неравенство на Ојлер). Ако R и r се радиусите на опишаната и вписаната кружница за $\triangle ABC$, докажи дека $2r\le R$.

Решение. *Прв начин.* Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$. Функцијата $f(x)=\cos x$ е конкавна на интервалот $(0;\frac{\pi}{2})$, па затоа од неравенството на Јенсен следува

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\le\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}, \text{ т.е. } \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}.$$

Понатаму, $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+1$, па со замена во последното неравенство го добиваме неравенството

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}.$$

Од друга страна, $r=4R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, т.е. $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{4R}$, па затоа $\frac{r}{4R}\le\frac{1}{8}$, т.е. $2r\le R$.

Втор начин. Функцијата За $f(x)=\ln\sin\frac{x}{2}$ е конкавна на интервалот $(0;\pi)$, па од неравенството на Јенсен следува дека

$$\frac{\ln\sin\frac{\alpha}{2}+\ln\sin\frac{\beta}{2}+\ln\sin\frac{\gamma}{2}}{3}\le\ln\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}, \text{ т.е. } \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8},$$

Сега, продолжувајќи како во првиот начин го добиваме бараното неравенство.

6. Ако R и P се радиусот на опишаната кружница и плоштината на $\triangle ABC$, докажи дека $P\le\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$. Функцијата $f(x)=\ln\sin x$ е конкавна на интервалот $(0;\pi)$, па од неравенството на Јенсен следува

$$\frac{\ln\sin\alpha+\ln\sin\beta+\ln\sin\gamma}{3}\le\ln\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

$$\frac{1}{3}\ln\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\le\ln\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Од друга страна, $P=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, па ако замениме во последното неравенство го добиваме бараното неравенство.

7. Нека a,b,c се страните, α,β,γ се аглите и R е радисуот на опишаната кружница околу остроаголниот $\triangle ABC$. Докажи, дека

$$abc \geq 24\sqrt{3} \cdot R^3 \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Решение. Функцијата $f(x) = \operatorname{tg} x$ е конвексна на интервалот За $(0;\frac{\pi}{2})$, па затоа од неравенството на Јенсен следува дека

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{3} \geq \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}, \text{ т.е. } \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma \geq 3\sqrt{3}.$$

Понатаму, за остроаголен триаголник ва жи $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$ (докажи!), па затоа

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \geq 3\sqrt{3}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \qquad (1)$$

Од друга страна за $\triangle ABC$ важи $\frac{abc}{4R} = P = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, од каде добиваме $\frac{abc}{8R^3} = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. Конечно, ако од последното равенство замениме во (1) го добиваме саканото неравенство.

8. Нека α,β,γ се аглите во $\triangle ABC$. Докажи, дека

а) $\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}$

б) $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

в) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}$.

Решение. а) Функцијата $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ е конкавна на интервалот $(0;\pi)$, па затоа од неравенството на Јенсен следува

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}{3} \leq \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}, \text{ т.е. } \sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

б) Функцијата $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ е конкавна на интервалот , па затоа од неравенството на Јенсен следува $(0;\pi)$

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}}{3} \leq \cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}, \text{ т.е. } \cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

в) Функцијата $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ е конвексна на интервалот $(0;\pi)$, па затоа од неравенството на Јенсен следува

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{3} \geq \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}, \text{ т.е. } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}.$$

9. Нека α,β,γ се аглите, R е радисуот на опишаната кружница и s е полупериметарот на $\triangle ABC$. Докажи, дека

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{s}{2R}$$

Решение. Ќе го користиме неравенството на Поповициу за конвексни функции, кое гласи:

Ако функцијата $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ е конвексна, тогаш за секој $x,y,z \in [a,b]$ важи

$$f(\tfrac{x+y+z}{3}) + \frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3} \geq \frac{2}{3}[f(\tfrac{x+y}{2}) + f(\tfrac{y+z}{2}) + f(\tfrac{x+z}{2})].$$

За конкавни функции важи знакот $\leq$.

Функцијата $f(x)=\sin x,\ x\in(0;\pi)$ е конкавна, па затоа

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}+\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\le\frac{2}{3}(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}) .$$

Бидејќи

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=4\frac{s}{4R}=\frac{s}{R}$$

и

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2})=\cos\frac{\gamma}{2},\quad \sin\frac{\beta+\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}, \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}=\cos\frac{\beta}{2},$$

добиваме

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{3}\le\frac{2}{3}(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}),$$

т.е.

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{s}{2R} .$$

10. Ако R и r се радиусите на опишаната и впишаната кружница за остро-аголниот $\triangle ABC$, докажи дека

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\ge\frac{5}{4}+\frac{r}{2R}$$

Решение. Функцијата $f(x)=\cos x, x\in(0;\frac{\pi}{2})$ е конкавна, па од неравенството на Поповициу следува

$$\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}+\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\le\frac{2}{3}(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}) . \qquad (1)$$

Од $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}$, $\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha+\gamma}{2}=\sin\frac{\beta}{2}$ и

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-1=4\frac{r}{4R}-1=\frac{r}{R}-1,$$

неравенството (1) добива облик

$$5+8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le4(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}) .$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\ge\frac{5}{4}+\frac{r}{2R} .$$

11. Ако R, r, P и s се радиусот на опишаната кружница, радиусот на впишаната кружница, плоштината и полупериметарот на остроаголниот $\triangle ABC$, докажи дека

$$P\ge2R^2(\frac{2s}{r}-\sqrt{3})\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

Решение. Функцијата $f(x)=\operatorname{tg}x, x\in(0;\frac{\pi}{2})$ е конвексна, па од неравенството на Поповициу следува дека за остроаголен $\triangle ABC$ важи неравенството

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}+\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{3}\ge\frac{2}{3}(\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}) .$$

Бидејќи

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2})=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}, \operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\ \text{ и }\ \operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},$$

се добива

$$\sqrt{3}+\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{3}\ge\frac{2}{3}(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}) .$$

Понатаму, од

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma \text{ и } \operatorname{ctg}\tfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\tfrac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\tfrac{\gamma}{2}=\tfrac{P}{r^2},$$

добиваме

$$3\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\geq 2\tfrac{P}{r^2}=2\tfrac{rs}{r^2}=\tfrac{2s}{r}.$$

Но

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=\tfrac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \text{ и } \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\tfrac{P}{2R^2},$$

па последното неравенство добива облик

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\geq(\tfrac{2s}{r}-\sqrt{3})\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

т.е.

$$P\geq 2R^2(\tfrac{2s}{r}-\sqrt{3})\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

12. Ако r и s се радиусот на впишаната кружница и полупериметарот на остроаголниот $\triangle ABC$, во кој за аглите α,β,γ важи $\alpha,\beta,\gamma\in(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$, докажи дека

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma\geq\tfrac{3\sqrt{3}r^2}{s^2}$$

Решение. Функцијата $f(x)=\ln\operatorname{tg}x, x\in(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$ е конвексна, па од неравенството на Поповициу следува дека ако $\alpha,\beta,\gamma\in(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$, тогаш

$$\ln\operatorname{tg}\tfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}+\tfrac{\ln\operatorname{tg}\alpha+\ln\operatorname{tg}\beta+\ln\operatorname{tg}\gamma}{3}\geq\tfrac{2}{3}(\ln\operatorname{tg}\tfrac{\alpha+\beta}{2}+\ln\operatorname{tg}\tfrac{\beta+\gamma}{2}+\ln\operatorname{tg}\tfrac{\alpha+\gamma}{2})$$

$$\ln\sqrt{3}+\tfrac{\ln\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{3}\geq\tfrac{2}{3}(\ln\operatorname{ctg}\tfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{\gamma}{2})$$

$$\ln(\sqrt{3})^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\geq\ln(\operatorname{ctg}\tfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{\gamma}{2})^2$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\geq\frac{(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2})^2}{3\sqrt{3}}$$

Бидејќи

$$P=r^2\operatorname{ctg}\tfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\tfrac{\gamma}{2} \text{ и } \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=\tfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma},$$

последното неравенство добива облик

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\geq\frac{\frac{P^2}{r^4}}{3\sqrt{3}}=\frac{s^2r^2}{3\sqrt{3}r^4}=\frac{s^2}{3\sqrt{3}r^2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma\geq\frac{3\sqrt{3}r^2}{s^2}.$$

13. Докажи: ако $x,y,z>0,$ тогаш $\frac{x}{x+2y+z}+\frac{y}{x+y+2z}+\frac{z}{2x+y+z}\geq\frac{3}{4}$.

Решение. Функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ е конвексна на интервалот $(0,\infty)$, па од неравенството на Јенсен за $n=3$, $x_1,x_2,x_3\in(0,\infty)$ и $a_1,a_2,a_3\in(0,1)$ такви што $a_1+a_2+a_3=1$ следува

$$\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\frac{a_3}{x_3} \geq \frac{1}{a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3} \qquad (1)$$

Без да изгубиме од општоста можеме да претпоставиме дека $x+y+z=1$, со што даденото неравенство се сведува на неравенството Од овде ги добиваме

$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+z}+\frac{z}{1+x} \geq \frac{3}{4}.$$

Сега од неравенството (1) следува

$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+z}+\frac{z}{1+x} \geq \frac{1}{x(1+y)+y(1+z)+z(1+x)} = \frac{1}{(x+y+z)+xy+yz+zx} = \frac{1}{1+xy+yz+zx}.$$

Конечно, ако го искористиме познатото неравенство

$$xy+yz+zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

добиваме дека

$$\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+z}+\frac{z}{1+x} \geq \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

14. Ако a,b,c,d >**0**, тогаш

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geq 2.$$

Докажи!

Решение. Функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ е конвексна на интервалот $(0,\infty)$, па од неравенството на Јенсен за $n=4$, $x_1,x_2,x_3,x_4 \in (0,\infty)$ и $a_1,a_2,a_3,a_4 \in (0,1)$ такви што $a_1+a_2+a_3+a_4=1$ следува

$$\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\frac{a_3}{x_3}+\frac{a_4}{x_4} \geq \frac{1}{a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4} \qquad (1)$$

Без да изгубиме од општоста можеме да претпоставиме дека $a+b+c+d=1$. Сега, од неравенството (1) добиваме

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geq \frac{1}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)}$$

Значи треба да докажеме дека

$$\frac{1}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)} \geq 2, \text{ т.е. } 2(ab+2ac+bc+cd+2bd+da) \leq 1$$

Заменувајќи $a+b+c+d=1$ последователно добиваме

$$2(ab+2ac+bc+cd+2bd+da) \leq (a+b+c+d)^2$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2db \geq 0,$$

$$(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bd+d^2) \geq 0$$

$$(a-c)^2+(b-d)^2 \geq 0.$$

Конечно, последното неравенство е очигледно точно, што значи дека е точно и почетното неравенство.

15. Нека a, b и c се позитивни реални броеви, такви што $a<b<c$. Докажи дека

$$a^{20}b^{12}+b^{20}c^{12}+c^{20}a^{12} \leq b^{20}a^{12}+c^{20}b^{12}+a^{20}c^{12}.$$

Решение. На почеток ќе докажеме една лема:

Лема. Нека $0<x<y<z$ и $\lambda>1$ се зададени реални броеви. Тогаш

$$\sum_{cyc} x^{\lambda} y < \sum_{cyc} xy^{\lambda} .$$

Доказ. Ќе ја разгледаме функцијата $f(y)=x^{\lambda}y+y^{\lambda}z+z^{\lambda}x-xy^{\lambda}-yz^{\lambda}-zx^{\lambda}$. Таа добива вредност 0 за $y=x$ и $y=z$. Исто така, да забележиме дека

$$f''(y)=\lambda(\lambda-1)y^{\lambda-2}(z-x)>0,$$

па според тоа f е конвексна функција. Значи, $f(y)<0$ за $y\in(x,z)$.

Со тоа е докажана лемата.

Сега е доволно да се примени лемата за $x=a^{12}$, $y=b^{12}$, $z=c^{12}$ и $\lambda=\frac{20}{12}$.

2. НЕРАВЕНСТВА НА БЕРНУЛИ, ХЕЛДЕР И МИНКОВСКИ

1. Нека $m,n\in\mathbf{N}$ се такви што $m\geq 2$ и $n\geq 2$. Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}>1 .$$

Решение. Од условот $m\geq 2$ и $n\geq 2$, имаме $\sqrt[n]{m}=1+u$, $\sqrt[m]{n}=1+v$, при што $u,v>0$. Сега од неравенството на Бернули добиваме

$$m=(1+u)^n\geq 1+nu, n=(1+v)^m\geq 1+mv,$$

па затоа

$$m+n\geq 1+n(u+1),\ \ m+n\geq 1+m(v+1) \quad ,$$

т.е.

$$1+u\leq \frac{m+n-1}{n},\ 1+v\leq \frac{m+n-1}{m}.$$

Од последните неравенства, имаме

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n}}=\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1+v}\geq \frac{m}{m+n-1}+\frac{n}{m+n-1}=\frac{m+n}{m+n-1}>1.$$

2. Нека $n\geq 2$ и $x_i\geq 0, i=1,2,...,n$. Докажи дека

$$\sum_{i=1}^{n} ix_i\leq \binom{n}{2}+\sum_{i=1}^{n} x_i^i .$$

Решение. Од $x_i\geq 0, i=1,2,...,n$ следува $x_i-1\geq -1, i=1,2,...,n$. Сега, од неравенството на Бернули добиваме

$$x_i^i=[1+(x_i-1)]^i\geq 1+i(x_i-1)=ix_i-(i-1), i=1,2,...,n .$$

Ако ги собереме последните неравенства го добиваме неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^i\geq \sum_{i=1}^{n} ix_i-\sum_{i=1}^{n}(i-1)=\sum_{i=1}^{n} ix_i-\sum_{i=1}^{n-1} i=\sum_{i=1}^{n} ix_i-\frac{n(n-1)}{2},$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство.

3. Ако a,b,c и d се позитивни реални броеви такви што $c^2+d^2=(a^2+b^2)^3$, докажи го неравенството $\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d}\geq 1$.

Решение. Ако $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и сите $u_j, v_j>0$, од неравенството на Хелдер имаме

$$(\sum_{j=1}^{n} u_j^r)^{\frac{1}{p}}(\sum_{j=1}^{n}\frac{v_j^{qr}}{u_j^{\frac{qr}{p}}})^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{j=1}^{n} v_j^r, \tag{*}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{u_j}{v_j}=\text{const}$ за сите j. За $n=2$, $u_1=c,\ u_2=d, v_1=a, v_2=b, r=2, p=3,$ (*) преминува во

$$(c^2+d^2)^{\frac{1}{3}}(\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d})^{\frac{2}{3}} \geq a^2+b^2, \tag{**}$$

При што знак за равенство важи ако и само ако и само ако $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$. Ова неравенство е очигледно еквивалентно со почетното.

4. Докажи дека за секои ненегативни реалне броеви a, b и c важи неравенството

$$a\sqrt{(a+b)(a+c)}+b\sqrt{(b+c)(b+a)}+c\sqrt{(c+a)(c+b)} \geq \frac{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca}{2}.$$

Решение. *Прв начин.* Воведуваме смена $b+c=x^2, c+a=y^2$ и $a+b=z^2$. Тогаш $2a=y^2+z^2-x^2$ итн. и

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca &= (a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)\\ &= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2,\end{aligned}$$

па даденото неравенство го добива обликот

$$(x^2+y^2-z^2)xy+(y^2+z^2-x^2)yz+(z^2+x^2-y^2)zx \geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2.$$

Бидејќи $(x^2+y^2)xy \geq 2x^2y^2$ и $z^2xy \leq \frac{1}{2}(x^2z^2+y^2z^2)$, добиваме

$$(x^2+y^2-z^2)xy \geq 2x^2y^2-\frac{1}{2}(x^2z^2+y^2z^2)$$

и аналогни неравенства за другите два собирка. Со собирање на овие неравенства го добиваме бараното неравенство.

Втор начин. Од неравенството на Хелдер следува

$$L^2\cdot M \geq (a+b+c)^3, \tag{1}$$

каде

$$L=a\sqrt{(a+b)(a+c)}+b\sqrt{(b+c)(b+a)}+c\sqrt{(c+a)(c+b)}$$

и

$$M=\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+a)(b+c)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}.$$

Од друга страна, бидејќи

$$\begin{aligned}&9(a+b)(a+c)(b+c)-8(a+b+c)(ab+bc+ca)=\\ &\qquad = a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)-6abc \geq 0\end{aligned}$$

Важи

$$M=\frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(a+c)(b+c)}\le\frac{9}{4(a+b+c)}.$$

Според тоа, (1) го добива обликот

$$L^2\ge\tfrac{4}{9}(a+b+c)^4,$$

т.е.

$$L\ge\tfrac{2}{3}(a+b+c)^2\ge\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca).$$

5. Нека $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}^+$ се такви да

$$\sum_{i=1}^n a_i^3=3 \text{ и } \sum_{i=1}^n a_i^5=5. \tag{1}$$

Докажи дека

$$\sum_{i=1}^n a_i>\tfrac{3}{2}. \tag{2}$$

Решение. Од неравенството на Хелдер и од условите (1) следува

$$3=\sum_{i=1}^n a_i^3=\sum_{i=1}^n a_i^2a_i\le(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}}(\sum_{i=1}^n (a_i^2)^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{5}}=(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}}(\sum_{i=1}^n a_i^5)^{\frac{2}{5}}=5^{\frac{2}{5}}(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}},$$

т.е.

$$\frac{3}{5^{\frac{2}{5}}}\le(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}}. \tag{3}$$

Нека $A=\sum_{i=1}^n a_i$. Од $0<\frac{a_i}{A}<1$ следува $(\frac{a_i}{A})^{\frac{5}{3}}\le\frac{a_i}{A}$, што значи дека

$$\sum_{i=1}^n(\tfrac{a_i}{A})^{\frac{5}{3}}\le\sum_{i=1}^n\tfrac{a_i}{A}=1,$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{5}{3}}\le A^{\frac{5}{3}}=(\sum_{i=1}^n a_i)^{\frac{5}{3}}. \tag{4}$$

Конечно, бидејќи $2>5^{\frac{2}{5}}$, од неравенствата (3) и (4) следува

$$\frac{3}{2}<\frac{3}{5^{\frac{2}{5}}}\le(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{5}{3}})^{\frac{3}{5}}\le[(\sum_{i=1}^n a_i)^{\frac{5}{3}}]^{\frac{3}{5}}=\sum_{i=1}^n a_i,$$

што значи дека точно е неравенството (2).

6. Докажи дека

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}+(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}+(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2},$$

каде $n>1$ е природен број и a,b,c се должини на страни на триаголник со единичен периметар.

Решение. *Прв начин.* Ако a,b,c се должини на страни со единичен периметар, тогаш користејќи ја трансформацијата на Рави добиваме дека постојат броеви

$x, y, z > 0$ такви да $a = y+z, b = z+x,\ c = x+y$. Понатаму, од $a+b+c=1$ следува $x+y+z=\frac{1}{2}$. Сега од неравенството на Минковски добиваме

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}} = [(y+z)^n+(z+x)^n]^{\frac{1}{n}} \le (x^n+y^n)^{\frac{1}{n}} + (2z)^{\frac{1}{n}} < c+\sqrt[n]{2}z .$$

Слично, $(b^n+c^n)^{\frac{1}{n}} < a+\sqrt[n]{2}x$ и $(c^n+a^n)^{\frac{1}{n}} < b+\sqrt[n]{2}y$. Оттука следува

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}} + (b^n+c^n)^{\frac{1}{n}} + (c^n+a^n)^{\frac{1}{n}} < c+a+b+\sqrt[n]{2}(z+x+y) = 1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2} .$$

Втор начин. Нека $a \le b \le c$. Тогаш $c < a+b$ и

$$\frac{\sqrt[n]{2}}{2} = \frac{\sqrt[n]{2}}{2}(a+b+c) > \frac{\sqrt[n]{2}}{2}2c = \sqrt[n]{2c^n} \ge \sqrt[n]{c^n+b^n} .$$

Бидејќи $a \le b$, од Њутновата биномна формула следува

$$(b+\frac{a}{2})^n = b^n + nb^{n-1}\frac{a}{2} + \frac{n(n-1)}{2}b^{n-2}(\frac{a}{2})^2 + ... + (\frac{a}{2})^n > b^n + \frac{n}{2}ab^{n-1} \ge b^n + a^n .$$

Слично, бидејќи $a \le c$, имаме $(c+\frac{a}{2})^n \ge c^n + a^n$, па затоа

$$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}} + (b^n+c^n)^{\frac{1}{n}} + (c^n+a^n)^{\frac{1}{n}} < b+\frac{a}{2}+\frac{\sqrt[n]{2}}{2}+c+\frac{a}{2}$$

$$= a+b+c+\frac{\sqrt[n]{2}}{2} = 1+\frac{\sqrt[n]{2}}{2},$$

што и требаше да се докаже.

7. Нека a, b, c се реални броеви. Докажи дека

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2} + \sqrt{b^2+(1-c)^2} + \sqrt{c^2+(1-a)^2} \ge \frac{3\sqrt{2}}{2} .$$

Решение. Од неравенството на Минковски следува

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2} + \sqrt{b^2+(1-c)^2} + \sqrt{c^2+(1-a)^2} \ge \sqrt{(a+b+c)^2+(3-a-b-c)^2}$$

$$= \sqrt{2(a+b+c-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{2}} \ge \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

што и требаше да се докаже.

8. Нека a, b, c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2}{\sqrt{(b+c)(b^3+c^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(c+a)(c^3+a^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(a+b)(a^3+b^3)}} \ge \frac{3}{2} .$$

Решение. Од неравенството на Хелдер следува

$$\Big(\sum_{\text{cikl}} \frac{a^2}{\sqrt{(b+c)(b^3+c^3)}}\Big)^2 \Big[\sum_{\text{cikl}} a^2(b+c)(b^3+c^3)\Big] \ge (a^2+b^2+c^2)^3 ,$$

па затоа доволно е да го докажеме неравенството

$$4\Big(\sum_{\text{cikl}} a^2\Big)^3 \ge 9\sum_{\text{cikl}} a^2(b+c)(b^3+c^3) ,$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$4\sum_{\text{cikl}} a^6 + 3\sum_{\text{cikl}} a^4(b^2+c^2) + 24a^2b^2c^2 \ge 9abc\sum_{\text{cikl}} a^2(b+c) .$$

Но, од неравенството на Шур следува

$$\sum_{\text{cikl}} a^3 + 3abc \ge \sum_{\text{cikl}} a^2(b+c) ,$$

па од претходното неравенство следува дека доволно е да докажеме дека

$$4\sum_{\text{cikl}} a^6 + 3\sum_{\text{cikl}} a^4(b^2+c^2) + 24a^2b^2c^2 \ge 9abc(\sum_{\text{cikl}} a^3 + 3abc),$$

т.е.

$$4\sum_{\text{cikl}} a^6 + 3\sum_{\text{cikl}} a^4(b^2+c^2) \ge 9\sum_{\text{cikl}} a^4bc + 3a^2b^2c^2 . \qquad (1)$$

Понатаму, од неравенството за преуредување и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$2\sum_{\text{cikl}} a^6 \ge \sum_{\text{cikl}} a^4(b^2+c^2) \ge 2\sum_{\text{cikl}} a^4bc,$$

т.е.

$$\sum_{\text{cikl}} a^4(b^2+c^2) \ge 2\sum_{\text{cikl}} a^4bc, \qquad (2)$$

$$2\sum_{\text{cikl}} a^6 \ge \sum_{\text{cikl}} a^4(b^2+c^2), \qquad (3)$$

$$\sum_{\text{cikl}} a^6 \ge \sum_{\text{cikl}} a^4bc, \qquad (4)$$

$$\sum_{\text{cikl}} a^6 \ge 3a^2b^2c^2 . \qquad (5)$$

Конечно од неравенствата (2), (3), (4) и (5) добиваме

$$\begin{aligned}
4\sum_{\text{cikl}} a^6 + 3\sum_{\text{cikl}} a^4(b^2+c^2) &= 2\sum_{\text{cikl}} a^6 + \sum_{\text{cikl}} a^6 + \sum_{\text{cikl}} a^6 + 3\sum_{\text{cikl}} a^4(b^2+c^2)\\
&\ge \sum_{\text{cikl}} a^4(b^2+c^2) + \sum_{\text{cikl}} a^4bc + 3a^2b^2c^2 + 3\sum_{\text{cikl}} a^4(b^2+c^2)\\
&= \sum_{\text{cikl}} a^4bc + 4\sum_{\text{cikl}} a^4(b^2+c^2) + 3a^2b^2c^2\\
&\ge 9\sum_{\text{cikl}} a^4bc + 3a^2b^2c^2,
\end{aligned}$$

т.е. точно е неравенството (1).

3. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Нека a и b се реални броеви така што $a+b=2$. Докажи дека

$$\min\{|a|,|b|\} < 1 < \max\{|a|,|b|\} \Leftrightarrow ab \in (-3,1).$$

Решение. Нека a и b се реални броеви такви што $a+b=2$. Тогаш:

$$\begin{aligned}
\min\{|a|,|b|\} < 1 < \max\{|a|,|b|\} \quad &\Leftrightarrow \quad |a|<1<|b| \text{ или } |b|<1<|a|\\
&\Leftrightarrow \quad a^2<1<b^2 \text{ или } b^2<1<a^2\\
&\Leftrightarrow \quad (a^2-1)(b^2-1)<0\\
&\Leftrightarrow \quad a^2b^2-(a^2+b^2)+1<0\\
&\Leftrightarrow \quad (ab)^2-(4-2ab)+1<0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad (ab+1)^2 < 4 \\ &\Leftrightarrow \quad |ab+1| < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 < ab+1 < 2 \\ &\Leftrightarrow \quad ab \in (-3,1)\,. \end{aligned}$$

2. Нека ψ е пермутација на множеството $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ каде што $a_1, a_2, ..., a_n$ се дадени позитивни реални броеви. Да се докаже дека

$$\frac{a_1}{\psi(a_1)} + \frac{a_2}{\psi(a_2)} + ... + \frac{a_n}{\psi(a_n)} \ge n$$

Решение. Од тоа што ψ е пермутација на множеството $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ заклучуваме дека

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n = \psi(a_1) \cdot \psi(a_2) \cdot \psi(a_3) \cdot ... \cdot \psi(a_n)\,.$$

Користејќи ја познатата особина дека аритемтичката и геометриската средина на ненегативни реални броеви е поголема или еднаква на нивната геометриска средина, добиваме

$$\frac{1}{n}\left[\frac{a_1}{\psi(a_1)} + \frac{a_2}{\psi(a_2)} + ... + \frac{a_n}{\psi(a_n)}\right] \ge \sqrt[k]{\frac{a_1}{\psi(a_1)} \cdot \frac{a_2}{\psi(a_2)} \cdot .... \cdot \frac{a_n}{\psi(a_n)}} = \sqrt[k]{1} = 1\,.$$

3. Ако n и k се природни броеви и $k \le n$, докажи го неравенството

$$\frac{n^k}{k^k} \le \binom{n}{k} \le \frac{n^k}{k!}\,.$$

Решение. За левото имаме

$$\frac{n^k}{k^k} \le \binom{n}{k} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n^k}{k^k} \le \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k(k-1)...2\cdot 1}\,.$$

Доволно е да докажеме дека $\frac{n}{k} \le \frac{n-l}{k-l}$, за секој природен број l таков што $0 \le l \le k-1$. Последното неравенство важи бидејќи по негово средување се добива еквивалентното неравенство $kl \le nl$, што е точно поради $k \le n$.

За десното неравенство имаме

$$\binom{n}{k} \le \frac{n^k}{k!} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \le \frac{n^k}{k!} \quad \Leftrightarrow \quad n(n-1)...(n-k+1) \le n^k$$

4. Докажи, дека за секој природен број n е исполнето неравенството

$$(2n^2 + 3n + 1)^n \ge 6^n (n!)^2\,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n} \ge \sqrt[n]{(n!)^2}$. Од друга страна, ако го искористиме познатото равенство $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, добиваме дека горното неравенство е еквивалентно на неравенството $\frac{2n^2+3n+1}{6} \ge \sqrt[n]{(n!)^2}$, кое пак е еквивалентно на бараното неравенство.

5. Докажи го неравенството

$$\sqrt{\binom{n}{0}\binom{n}{1}} + \sqrt{\binom{n}{1}\binom{n}{2}} + ... + \sqrt{\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}} < 2^n - 1\,.$$

Решение. Ако искористиме дека $\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}$ и $(\sqrt{\binom{n}{k}}-\sqrt{\binom{n}{k+1}})^2\geq 0$ добиваеме дека $\binom{n+1}{k+1}\geq 2\sqrt{\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}}$. Ако во последното неравенство ставеме $k=0,1,...,n-1$ и ги собереме добиените неравенства ќе добиеме

$$\begin{aligned}\sqrt{\binom{n}{0}\binom{n}{1}}+\sqrt{\binom{n}{1}\binom{n}{2}}+...+\sqrt{\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}} &< \tfrac{1}{2}(\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+...+\binom{n+1}{n})\\ &=\tfrac{1}{2}(\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+...+\binom{n+1}{n}+\binom{n+1}{n+1}-2)\\ &=\tfrac{1}{2}(2^{n+1}-2)=2^n-1.\end{aligned}$$

6. Нека a и b се позитивни реални броеви и n е цел број. Докажи дека важи неравенството

$$(1+\tfrac{a}{b})^n+(1+\tfrac{b}{a})^n\geq 2^{n+1}.$$

Решение. За $n=0$ важи равенство. Да претпоставиме дека $n>0$. Тогаш

$$(1+\tfrac{a}{b})^n+(1+\tfrac{b}{a})^n\geq 2\sqrt{(1+\tfrac{a}{b})^n(1+\tfrac{b}{a})^n}=2\sqrt{(2+\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a})^n}\geq 2\sqrt{4^n}=2^{n+1}.$$

Нека $n<0$. Ставаме $m=-n>0$. Тогаш

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{a}{b})^n+(1+\tfrac{b}{a})^n &=(\tfrac{b}{a+b})^m+(\tfrac{a}{a+b})^m=\tfrac{1}{2^m}((\tfrac{b}{a+b})^m+(\tfrac{a}{a+b})^m)\\ &=\tfrac{1}{2^m}((1+\tfrac{b-a}{a+b})^m+(1+\tfrac{a-b}{a+b})^m)\geq\tfrac{1}{2^m}\cdot 2=2^{1-m}=2^{n+1}\end{aligned}$$

бидејќи $(1+\frac{b-a}{a+b})^m+(1+\frac{a-b}{a+b})^m)\geq 2$, што следува од биномната формула.

7. Дадени се позитивните реални броеви x_1,x_2,x_3 и x_4 за кои важи

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1.$$

Нека s е најголемиот меѓу броевите

$$\tfrac{x_1}{1+x_1},\tfrac{x_2}{1+x_1+x_2},\tfrac{x_3}{1+x_1+x_2+x_3},\tfrac{x_4}{1+x_1+x_2+x_3+x_4}.$$

Која е најмалата вредност што може да ја достигне s?

Решение. Ако s е најголемиот од броевите, тогаш $\frac{1}{s}$ е најмалиот меѓу броевите $\frac{x_1}{1+x_1},\frac{x_2}{1+x_1+x_2},\frac{x_3}{1+x_1+x_2+x_3},\frac{x_4}{1+x_1+x_2+x_3+x_4}$. Натаму $\frac{1}{s}-1=\frac{1-s}{s}$ е најмалиот меѓу броевите

$$\tfrac{1+x_1}{x_1}-1=\tfrac{1}{x_1},\tfrac{1+x_1+x_2}{x_2}-1=\tfrac{1+x_1}{x_2},\tfrac{1+x_1+x_2+x_3}{x_3}-1=\tfrac{1+x_1+x_2}{x_3},\tfrac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{x_4}-1=\tfrac{1+x_1+x_2+x_3}{x_4}$$

а $\frac{s}{1-s}$ е најголемиот меѓу броевите $x_1,\frac{x_2}{1+x_1},\frac{x_3}{1+x_1+x_2},\frac{x_4}{1+x_1+x_2+x_3}$.

Конечно $\frac{s}{1-s}+1=\frac{1}{1-s}$ е најголемиот меѓу броевите

$$x_1+1,\tfrac{1+x_1+x_2}{1+x_1},\tfrac{1+x_1+x_2+x_3}{1+x_1+x_2},\tfrac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{1+x_1+x_2+x_3}.$$

Бидејќи

$$2=1+x_1+x_2+x_3+x_4=(x_1+1)\tfrac{1+x_1+x_2}{1+x_1}\cdot\tfrac{1+x_1+x_2+x_3}{1+x_1+x_2}\cdot\tfrac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{1+x_1+x_2+x_3}\leq(\tfrac{1}{1-s})^4$$

следува дека $\frac{1}{1-s} \geq \sqrt[4]{2}$, па $s \geq 1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Значи најмалата вредност s што може да ја достигне s изнесува $1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ и се достигнува за

$$x_1+1=\sqrt[4]{2},\ \frac{1+x_1+x_2}{1+x_1}=\sqrt[4]{2},\ \frac{1+x_1+x_2+x_3}{1+x_1+x_2}=\sqrt[4]{2},\ \frac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{1+x_1+x_2+x_3}=\sqrt[4]{2}.$$

Од последниве равенства се добива

$$x_1=\sqrt[4]{2}-1,\ x_2=(\sqrt[4]{2}-1)\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{2},$$
$$x_3=(\sqrt[4]{2}-1)\sqrt[4]{2^2}=\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{4},\ x_4=(\sqrt[4]{2}-1)\sqrt[4]{2^3}=2-\sqrt[4]{8}.$$

8. Докажи дека $\frac{n}{2^1(n-1)}+\frac{n}{2^2(n-2)}+\frac{n}{2^3(n-3)}+...+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 1}<4$ за секој природен број n таков што $n \geq 2$.

Решение. *Прв начин.* Тврдењето ќе го докажеме со математичка индукција.

За $n=2$ имаме $\frac{2}{2^{2-1}1}=2<4$, па тврдењето е точно. Ако $n=3$ добиваме

$$\frac{3}{2^1\cdot 2}+\frac{3}{2^2\cdot 1}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}<4,$$

па неравенството важи и за $n=3$. Сега да претпоставиме дека неравенството е точно за природноит број n, $n \geq 3$. За $n+1$ имаме:

$$\frac{n+1}{2^1 n}+\frac{n+1}{2^2(n-1)}+\frac{n+1}{2^3(n-2)}+...+\frac{n+1}{2^{n-1}\cdot 2}+\frac{n+1}{2^n\cdot 1}=$$
$$=\frac{n+1}{n}\left(\frac{n}{2^1 n}+\frac{n}{2^2(n-1)}+\frac{n}{2^3(n-2)}+...+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 2}+\frac{n}{2^n\cdot 1}\right)$$
$$=\frac{n+1}{n}\left[\frac{n}{2^1 n}+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2^1(n-1)}+\frac{n}{2^2(n-2)}+\frac{n}{2^3(n-3)}+...+\frac{n}{2^{n-2}\cdot 2}+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 1}\right)\right.$$
$$\leq \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 4\right)=\frac{5}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\overset{n\geq 3}{\leq}\frac{5}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{20}{6}<4.$$

Според тоа тврдењето важи за секој $n \geq 2$.

Втор начин. Неравенството ќе го докажеме со помош на математичка индукција. Воведуваме ознака $\sigma_n=\frac{n}{2^1(n-1)}+\frac{n}{2^2(n-2)}+\frac{n}{2^3(n-3)}+...+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 1}$. За $n=2$ и $n=3$ неравенството е точно.

Нека претпоставиме дека $\sigma_n=\frac{n}{2^1(n-1)}+\frac{n}{2^2(n-2)}+\frac{n}{2^3(n-3)}+...+\frac{n}{2^{n-1}\cdot 1}<4$. Тогаш

$$\sigma_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{n+1}{2^i(n+1-i)}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n+1}{2^{i+1}(n-i)}=\frac{n+1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n}{2^i(n-i)}$$
$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1+\sigma_n}{2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1+4}{2}<4.$$

Последното неравенство е исполнето за секој природен број $n>3$

Според принципот на математичка индукција $\sigma_n<4$, за секое n.

9. Нека n е природен број и $x_1,x_2,...,x_n$ се реални броеви такви што $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$.

а) Докажи, дека

$$(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2 .$$

б) Докажи, дека знак за равенство важи ако и само ако $x_1, x_2, ..., x_n$ е аритметичка прогресија.

Решение. *Прв начин.* Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц применето на низите $|i-j|$ и $|x_i - x_j|$ следува

$$(\sum_{i,j=1}^{n} (i-j)^2)(\sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2) \ge (\sum_{i,j=1}^{n} |i-j| \cdot |x_i - x_j|)^2 . \qquad (1)$$

Понатаму, во (1) знак за равенство важи ако и само ако постои λ таков што $x_i - x_j = \lambda(i-j)$, што значи ако и само ако $\{x_i\}$ е аритметичка прогресија. Останува да ги средиме двете страни на (1). Лесно се докажува, на пример со индукција, дека

$$\sum_{i,j=1}^{n} (i-j)^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{6} \text{ и } \sum_{i,j=1}^{n} |i-j| \cdot |x_i - x_j| = \frac{n}{2} \sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j| .$$

Според тоа, неравенството (1) е еквивалентно на неравенството

$$\frac{n^2(n^2-1)}{6}(\sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2) \ge \frac{n^2}{4}(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|)^2 ,$$

кое е еквивалентно со даденото неравенство.

Втор начин. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, (секој број можеме да го транслатираме за $\alpha = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$). Сега, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|)^2 &= (2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i)^2 \le (4\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2)(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)\\ &= \frac{4n(n^2-1)}{3}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) = \frac{4(n^2-1)}{3}(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2)\\ &= \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.\end{aligned}$$

10. Броевите $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{5}$ се заменуваат со нивниот збир и нивниот производ. За новите броеви $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{25}$ се применува истата операција итн. Докажи, дека во секој момент добиените броеви се помали од $\frac{1}{2}$.

Решение. Нека $a_1 = b_1 = \frac{1}{5}$, $a_{n+1} = a_n + b_n$ и $b_{n+1} = a_n b_n$, за $n \ge 1$. Со индукција ќе докажеме дека $a_n < \frac{12}{25}$ и $b_n \le \frac{1}{25 \cdot 2^{n-2}}$, за $n \ge 2$.

Јасно, за $n = 2$ тврдењето важи. Нека претпоставиме дека тоа важи за некој $n \ge 2$. Имаме

$$a_{n+1} = a_2 + b_2 + b_3 + ... + b_n \le \frac{2}{5} + \frac{1}{25}(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-2}}) < \frac{2}{5} + \frac{2}{25} = \frac{12}{25} \text{ и}$$

$$b_{n+1} = a_n b_n < \frac{b_n}{2} = \frac{1}{25 \cdot 2^{n-1}},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

11. Нека $n \ge 2$ е природен број.

а) Определи ја најмалата константа C таква што неравенството

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \le C(\sum_{i=1}^{n} x_i)^4 \qquad (1)$$

важи за секои реални броеви $x_1, x_2, ..., x_n \ge 0$.

б) За најдената константа C определи кога важи знак за равенство.

Решение. *Прв начин.* Ако не се сите броеви x_i еднакви на нула (во спротивно неравенството е тривијално), заради хомогеноста можеме да сметаме дека $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Левата страна на неравенството го добива обликот

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = \sum_i x_i^3 \sum_{j\ne i} x_j = \sum_i x_i^3 (1 - x_i) = \sum_i f(x_i),$$

каде $f(x) = x^3 - x^4$.

Бидејќи

$$f(x+y) + f(0) - f(x) - f(y) = 3xy(x+y)(\tfrac{2}{3} - x - y)$$

вредноста на F расте ако два позитивни броја x и y такви што $x + y \le \frac{2}{3}$ се заменат со броевите 0 и $x + y$. Оваа операција секогаш може да се реализира ако меѓу броевите x_i има најмалку три различни од нула. Така со нејзино повеќекратно применување добиваме

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) \le F(a, 1-a, 0, ..., 0) = \tfrac{1}{2}(2a(1-a))(1 - 2a(1-a)) \le \tfrac{1}{8},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a = \frac{1}{2}$. Според тоа, $C = \frac{1}{8}$ за секој n, при што знак за равенство важи ако и само ако два броја x_i се еднакви, а останатите се нули.

Втор начин. Да означиме $M = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$. Користејќи го неравенството

$$ab \le \tfrac{1}{8}(a + 2b)^2$$

добиваме

$$\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \le M \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j \le \tfrac{1}{8}(M + 2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j)^2 = \tfrac{1}{8}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^4,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако

$$M = 2\sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j \text{ и } x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = M x_i x_j,$$

за секои $i < j$.

12. Нека $d, a_1, a_2, ..., a_{2014}$ се реални броеви такви што

$$|a_1 - 1| = |a_2 - 2| = |a_3 - 3| = ... = |a_{2014} - 2014| = d$$

и $b_1 \le b_2 \le ... \le b_{2014}$ се броевите $a_1, a_2, ..., a_{2014}$ подредени по големина.

Докажи, дека $|a_k - b_k| \le 2d$, за $k = 1, 2, ..., 2014$.

Решение. Бидејќи

$$|a_k - b_k| \le |a_k - k| + |b_k - k| = d + |b_k - k|,$$

доволно е да докажеме дека $|b_k - k| \le d$, за $k = 1, 2, ..., 2014$. Навистина, ако на пример $b_k < k - d$, тогаш лесно се добива дека броевите $a_k, a_{k+1}, ..., a_{2014}$ се поголеми од b_k, што е противречност бидејќи во низата има најмногу $2014 - k$ броеви поголеми од b_k. Аналогно, ако $b_k > k + d$, тогаш броевите $a_k, a_{k-1}, ..., a_1$ се помали од b_k, што повторно е противречност. Според тоа, $|a_k - b_k| \le 2d$, за $k = 1, 2, ..., 2014$.

13. Позитивните реални броеви $x_1, x_2, ..., x_n$ го исполнуваат равенството $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = a$. Докажи дека

$$(1 + x_1)(1 + x_2)...(1 + x_n) \ge (1 + \sqrt[n]{a})^n.$$

Решение. Левата страна на неравенството можеме да ја запишеме во облик

$$(1 + x_1)(1 + x_2)...(1 + x_n) \ge 1 + x_1 + x_2 + ... + x_n + x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_1x_n + x_2x_3 + ... +$$
$$+ x_{n-1}x_n + x_1x_2x_3 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n + ... + x_1x_2...x_n = (*)$$

Јасно е дека, според неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина дека

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ge n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n} = C_n^1 \sqrt[n]{a}.$$

Бројот на собироците од облик $x_i x_j$, $i < j$, $i, j = 1, 2, ..., n$ е C_n^2, а во тие собироци бројот x_i, $i = 1, 2, ..., n$ се појавува $n - 1$ пати, па според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} x_i x_j \ge C_n^2 \sqrt[C_n^2]{(x_1x_2...x_n)^{C_{n-1}^1}} = C_n^2 \sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^2} = C_n^2 \sqrt[n]{a^2}.$$

Бројот на собироци од облик $x_i x_j x_k$, $i < j < k$, $i, j, k = 1, 2, ..., n$ е C_n^3, а секој број x_i, $i = 1, 2, ..., n$ се појавува во C_{n-1}^2 собироци од збирот $\sum\limits_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} x_i x_j x_k$. Според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} x_i x_j x_k \ge C_n^3 \sqrt[C_n^3]{(x_1x_2...x_n)^{C_{n-1}^2}} = C_n^3 \sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^3} = C_n^3 \sqrt[n]{a^3}.$$

Општо, бројот на собироци од облик

$$x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k},\ i_1 < i_2 < ... < i_k;\ i_1, i_2, ..., i_k = 1, 2, ..., n$$

е C_n^k а секој број x_i, $i=1,2,...,n$ се појавува во C_{n-1}^{k-1} собироци од збирот $\sum\limits_{\substack{i_1,...,i_k=1 \\ i_1<i_2<...<i_k}}^{n} x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}$. Според неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме:

$$\sum_{\substack{i_1,...,i_k=1 \\ i_1<i_2<...<i_k}}^{n} x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k} \geq C_n^k \sqrt[C_n^k]{(x_1x_2...x_n)^{C_{n-1}^{k-1}}} = C_n^k \sqrt[n]{(x_1x_2...x_n)^k} = C_n^k \sqrt[n]{a^k} \,.$$

за било кој $k=4,...,n$. Според тоа

$$(*) \geq 1 + C_n^1\sqrt[n]{a} + C_n^2\sqrt[n]{a^2} + ... + C_n^k\sqrt[n]{a^k} + ... + C_n^n\sqrt[n]{a^n} = (1+\sqrt[n]{a})^n \,.$$

14. Докажи го неравенството

$$8(a^3+b^3+c^3) \geq 3(a+b)(b+c)(c+a)\,,$$

каде $a,b,c \geq 0$

Решение. Ќе докажеме дека неравенството е точно за $a,b,c \geq 0$.

Во наредниот дел ќе го користиме равенството за симетрични полиноми

$$a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab+bc+ca) + 3abc\,, \tag{1}$$

како и тоа дека производот, т.е. симетричниот полином $(a+b)(b+c)(c+a)$ можеме да го запишеме во облик

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc\,. \tag{2}$$

Со помош на равенствата (1) и (2) даденото неравенство можеме да го запишеме во облик

$$8(a+b+c)^3 - 27(a+b+c)(ab+bc+ca) + 27abc \geq 0\,. \tag{3}$$

Ако тргнеме од очигледното неравенство $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$, добиваме

$$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+a^2-2ca+c^2 \geq 0\,,$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca\,,$$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 3(ab+bc+ca) \geq 0$$

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)\,. \tag{4}$$

Ако во последното неравенство замениме $a=xy$, $b=yz$, $c=zx$, каде x,y,z се позитивни реални броеви, добиваме

$$(xy+yz+zx)^2 \geq 3(xy^2z+yz^2x+zx^2y) = 3xyz(x+y+z)\,.$$

Значи, за било кои позитивни реални броеви a,b,c точно е неравенството

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)\,. \tag{5}$$

Ако ги помножиме неравенствата (4) и (5) добиваме

$$(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2 \geq 9(ab+bc+ca)(a+b+c)abc$$

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc\,. \tag{6}$$

Од неравенството (4), добиваме

$$(a+b+c)^4 \geq (a+b+c)^2(a+b+c)^2 \geq 3(a+b+c)^2(ab+bc+ca)$$

$$(a+b+c)^3 \geq 3(a+b+c)(ab+bc+ca)\,, \tag{7}$$

а со комбинирање на неравенствата (4) и (6) добиваме

$$\begin{aligned}(a+b+c)^4 &\geq (a+b+c)^2(a+b+c)^2\\ &\geq 3(a+b+c)[(a+b+c)(ab+bc+ca)]\,,\\ &\geq 3(a+b+c)9abc\end{aligned}$$

$$(a+b+c)^3 \geq 27abc\,. \tag{7'}$$

Ако го искористиме неравенството (6) и равенството (2) добиваме

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc \geq 8abc\,,$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc\,. \tag{8}$$

Во последното неравенство, ако замениме $a+b=x, b+c=y, c+a=z$, тогаш $a=\frac{x+z-y}{2}$, $b=\frac{x+y-z}{2}$, $c=\frac{y+z-x}{2}$, и

$$xyz \geq 8\frac{x+y-z}{2}\frac{y+z-x}{2}\frac{z+x-y}{2}=(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\,.$$

Значи, за било кои позитивни реални броеви x,y,z точно е неравенството

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\,. \tag{9}$$

Со изразување на симетричниот полином $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ преку елементарните симетрични полиноми $a+b+c, ab+bc+ca, abc$, тоа го добива обликот

$$(a+b+c)^3-4(a+b+c)(ab+bc+ca)+9abc \geq 0\,. \tag{10}$$

Ако неравенството (10) го помножиме со 3 а неравенството (7') го помножиме со 5 и ги собереме, добиваме дека е точно неравенството

$$8(a+b+c)^3-27(a+b+c)(ab+bc+ca)+27abc \geq 0\,,$$

што и требаше да се докаже.

15. Дали постои низа $a_1, a_2, \ldots$ од позитивни реални броеви таква што

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n^2 \text{ и } \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \leq 2008$$

за секој позитивен цел број n?

Решение. Одговорот е не. Доволно е да покажеме дека: Ако $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n^2$ за секој n, тогаш $\sum_{i=2}^{2^n}\frac{1}{a_i} > \frac{n}{4}$.

За ова ќе користиме дека

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}\frac{1}{a_i} \geq 2^{2k} \text{ за секое } k \geq 0\,,$$

кое следува од неравенството меѓу степенски средини. Бидејќи

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i < \sum_{i=1}^{2^{k+1}} a_i \le 2^{2k+2},$$

следува дека

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{a_i} > \frac{1}{4},$$

па затоа:

$$\sum_{i=2}^{2^n} \frac{1}{a_i} > \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{a_i} > \frac{n}{4}.$$

16. Дадена е низата $0 \le x_0 \le x_1 \le x_2 \le \dots$ цели броеви таква што за секој $k \ge 0$ бројот на членовите кои не се поголеми од k е конечен (тој број да го означиме со y_k). Докажи дека за секои природни броеви m и n важи

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \ge (n+1)(m+1).$$

Решение. Да ги обележиме сите точки (i, j), $i, j \ge 0$ на целобројната решетка во рамнината за кои важи $j < x_i$. За дадено i, бројот на обележените точки (i, j) е еднаков на x_i, па така во множеството $S = \{(i, j) \mid 0 \le i \le n, 0 \le j \le m\}$ има $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i$ обележени точки. Од друга страна, за дадено j, необележени точки (i, j) за кои $i \ge 0$ има точно y_j, па така во множеството S има $\sum\limits_{j=0}^{m} y_j$ необележени точки. Но, сите точки од множеството S се обележени или не се обележени, па затоа $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i + \sum\limits_{j=0}^{m} y_j$ не е помал од бројот на точките на множеството S, т.е. од $(n+1)(m+1)$.

17. Нека n е природен број и $T = \{(i, j) \mid 1 \le i < j \le n, i \mid j\}$. Определи ја како функција од n најголемата можна вредност на изразот $\sum\limits_{(i,j)\in T} x_i x_j$, каде $x_1, x_2, \dots, x_n$ се ненегативни реални броеви такви што $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

Решение. Бараниот максимум да го означиме со $M(n)$ и нека $k \in \mathbb{N}$ е таков што $2^k \le n < 2^{k+1}$, т.е. $k = [\log_2 n]$. Ќе докажеме, дека $M(n) = \frac{k}{2(k+1)}$.

За $x_{2^0} = x_{2^1} = \dots = x_{2^k} = \frac{1}{k+1}$ и $x_i = 0$ за останатите индекси важи

$$\sum_{(i,j)\in T} x_i x_j = \binom{k+1}{2} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{k}{2(k+1)},$$

што значи дека $M(n) \ge \frac{k}{2(k+1)}$.

Нека $x_1, x_2, ..., x_n$ се такви што $\sum_{(i,j)\in T} x_i x_j = M(n)$ и бројот на индексите i за кои $x_i = 0$ е максимално можен. Ќе докажеме, дека при ваква претпоставка од $x_a x_b \neq 0$ и $a < b$ следува дека $(a,b) \in T$.

Нека го претпоставиме спротивното и да ги разгледаме броевите $x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_n^{'}$, определени со $x_a^{'} = x_a - \varepsilon, x_b^{'} = x_b + \varepsilon, x_i^{'} = x_i$, за $i \neq a, b$. Бидејќи $(a,b) \notin T$, изразот $\sum_{(i,j)\in T} x_i^{'} x_i^{'}$ е линеарна функција од ε . Според тоа, за $\varepsilon = x_a^{'}$ или за $\varepsilon = -x_b^{'}$ имаме $\sum_{(i,j)\in T} x_i^{'} x_i^{'} \geq \sum_{(i,j)\in T} x_i x_j = M(n)$, што противречи на претпоставката за максималноста на бројот на броевите x_i еднакви на нула.

Нека $C = \{i \mid x_i \neq 0\} = \{i_1, i_2, ..., i_t\}$, при што $i_1 < i_2 < ... < i_t\}$. Од претходно изнесеното следува, дека $(i_p, i_q) \in T$ за секои $p < q$. Тогаш $i_p \geq 2i_{p-1}$ за секој $p \geq 2, p \in C$. Според тоа, $n \geq i_t \geq 2^{t-1} i_1 \geq 2^{t-1}$, т.е. $|C| = t \leq k+1$. Сега последователно добиваме

$$2M(n) = 2\sum_{(i,j)\in T} x_i x_j = (\sum_{i\in T} x_i)^2 - \sum_{i\in T} x_i^2 \leq 1 - \tfrac{1}{|C|}(\sum_{i\in T} x_i)^2 \leq 1 - \tfrac{1}{k+1} = \tfrac{k}{k+1},$$

со што доказот е завршен.

18. Некои од n градови се поврзани со авионски линии (сите линии се двонасочни). Постојат точно m линии. Нека d_i е бројот на линиите кои тргнуваат од градот i , за $i = 1, 2, ..., n$. Ако $1 \leq d_i \leq 2010$, за секој $i = 1, 2, ..., n$, докажи дека важи

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leq 4022m - 2010n .$$

Опредли ги сите вредности на n за кои се достигнува знак за равенство.

Решение. Од условот на задачата следува $0 \leq (d_i - 1)(2010 - d_i)$, за секој i , т.е. $d_i^2 \leq 2011 d_i - 2010$. Ако ги собереме овие неравенства и искористиме дека $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$ добиваме

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leq 2011 \sum_{i=1}^{n} d_i - 2010n = 4022m - 2010n ,$$

а знак за равенство важи ако и само ако $d_i \in \{1, 2010\}$ за секој $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

1) Нека $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Линии меѓу градовите i и j постојат ако и само ако $|j - i| = k$, тогаш важи $d_i = 1$, за секој i .
2) Нека $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}$. Не може да важи $d_i = 1$ за секој i бидејќи тогаш ќе важи $2m = n = 2k - 1$. Затоа мора да важи $d_j = 2010$ за некој j . Оттука следува $n \geq 2011$. Од друга страна, ако воспоставиме авиолинии меѓу

градовите 1 и $i\,(1\le i\le 2010)$ и меѓу градовите $2i$ и $2i+1\,(i=1006,...,k)$ добиваме мрежа во која $d_1=2010$ и $d_i=1,\ 2\le i\le n$.

Според тоа, знак за равенство важи ако $2\,|\,n$, или $2\nmid n$ и $n\ge 2011$.

19. Дадени се реални броеви $a_1,a_2,...,a_n$ за кои важи $|a_j|<M$, $j=1,2,...,n$ и $a_1+a_2+...+a_n=0$. Докажи дека

$$a_1+2a_2+...+na_n\le \tfrac{n^2}{4}M\ .$$

Решение. Нека $S=a_1+2a_2+...+na_n$. Тогаш

$$S=(a_1+a_2+...+a_n)+(a_2+a_3+...+a_n)+...+(a_{n-1}+a_n)+a_n\ .$$

Понатаму, $a_1+a_2+...+a_n=0$, а за $k\in\{1,2,3,...,n-1\}$ добиваме

$$\sum_{j=k+1}^{n}a_j\le\Big|\sum_{j=k+1}^{n}a_j\Big|\le\sum_{j=k+1}^{n}|a_j|\le(n-k)M \text{ и}$$

$$\sum_{j=k+1}^{n}a_j\le\Big|\sum_{j=k+1}^{n}a_j\Big|=\Big|\sum_{j=1}^{k}a_j\Big|\le\sum_{j=1}^{k}|a_j|\le kM\ .$$

Затоа

$$a_{k+1}+a_{k+2}+...+a_n\le\min\{(n-k)M,kM\}=\begin{cases}kM, & k\le\frac{n}{2}\\ (n-k)M, & k>\frac{n}{2}.\end{cases}$$

Да ги разгледаме случаите кога n е парен, односно n е непарен број.

i) Ако $n=2l$, тогаш

$$S\le M+...+(l-1)M+lM+(l-1)M+...+M=2\tfrac{l(l-1)}{2}M+lM=l^2M=\tfrac{n^2}{4}M\ .$$

ii) Ако $n=2l+1$, тогаш

$$S\le 2(M+2M+...+lM)=l(l+1)M=\tfrac{n^2-1}{4}M<\tfrac{n^2}{4}M\ .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Aczél, J., Dhombres, J.: Functional Equations Containing Several Variables. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1985
2. Aczél, J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York, Birkhäuser, 1966
3. Alexanderson, G. L., Klosinski, L. F., Larson, L. C.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1938–1964. Mathematical Association of America,Washington, DC, 1985
4. Alfonsin, J. L. R.: The Diophantine Frobenius Problem, Oxford Lecture Series, 2005
5. Amini, A. R.: Fibonacci Numbers a Long Division Formula, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
6. Anderson, J. A.: Diskretna matematika sa kombinatorikom, CET, Beograd, 2005
7. Andreescu, T., Andrica, D., Feng, Z.: 104 Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser, 2007
8. Andreescu, T., Andrica, D.: Complex Numbers from A to ...Z, Birkhauser, 2006
9. Andreescu, T., Andrica, D.: Number Theory – Structures, Examples and Problems, Birkhauser, 2009
10. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
11. Andreescu, T., Gelea, R.: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000
12. Archibald, R. G.: An Introduction to the Theory of Numbers, Merrill, Publishing and Co., Columbia, OH, 1970.
13. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., Govedarica, V.: Zbirka zadataka sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini 1981-1991, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
14. Arslanagić, Š.: Matematička čitanka 9, Grafičar promet, Sarajevo, 2017
15. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene (drugo izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
16. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije, Beograd, 1986
17. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
18. Batchedder P. M.: An Introduction to linear difference equations, Dover Publications, 1967
19. Becheanu, M., Enescu, B.: Inegalitati elementare. Bucurest: Gil., 2002
20. Beklekamp, E. , Rodgers, T.: Math Puzzles, Springer-Verlag, New York, Inc., 1992
21. Benjamin, A. T., Quinn, J. J.: Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof, MAA, 2003
22. Bilinski, S.: Problem parketiranja, Matematičko-fizičko list, 196, Zagreb, 1999
23. Bottema, O. and oth.: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
24. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
25. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
26. Burton, D. M.: Elementary Number Theory, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1994
27. Cerone, P.; Dragomir, S. S.: Mathematical Inequalities, CRC Press, London – New York, 2011
28. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
29. Cull P., Elahive M., Robson R.: Difference equations: From rabbits to chaos, Springer, 2005
30. Cvetkovski, Z.: Inequalities, Springer, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2012
31. Djukić,. D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium, Springer, 2011
32. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
33. Dye R. H.; Nickakalls R.W. D.: A new algorithm for generating Pythagorean triples, Mathematical Gazette; 1998
34. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
35. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
36. Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1965–1984. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984
37. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, ZUNS, Sarajevo, 2007
38. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnik O.: Concrete Mathematics: A foundation for computer science, Second edition, Addison-Wesley Professional, 1994
39. Green D. H., Knuth D.E.: Homogeneous equations, Mathematics for the analysis of algorithms, Birkhäuser, 1982
40. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N. Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002

41. Grozdev, S.: For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE, 2007
42. Hatch G.: Pythagorean triples and triangular square numbers, Mathematical Gazette; 1995
43. Herman, J.; Kučera, R.; Šimša, J.: Equations and Inequalities, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2000
44. Hung, P. K.: Secrets in Inequalities, GIL Publishing Hause, Zalau, 2007
45. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
46. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
47. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
48. Landau, E.: Elementary number theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1966
49. Lee, H.: Topics in Inequalities - Theorems and Techniques, 2007
50. Lozansky, E. , Rouseau, C.. Winning solutions, Springer-Verlag, Inc., New York, 1996
51. Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V.: Inequalities, Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000
52. Mićić, V., Kadelburg, Z.: Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd, 1989
53. Mitrinović, D. S., Barnes, E. S., Marsh, D. C. B., Radok, J. R. M.: Elementary Inequalities, P. Noordhoff, Groningen, 1964
54. Mitrinović, D. S.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
55. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
56. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
57. Nardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1951
58. Nathanson, M. B.: Elementary Methods in Number Theory, Springer, 1993
59. Nesbitt, A. M.: Problem 15114, Educational Times, 3, 1903
60. Neville, R. Beginning: Number Theory, 2nd ed. Sudbury, Mass.: Jones and Bartlett, 2006.
61. Niven, I., Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
62. Palman, D.: Planimetrija, Element, Zagreb, 1998
63. Pavković, B., Dakić, B., Hajnš, Ž., Mladinić, P.: Male teme iz matematike, Hrvatsko matematičko društvo, Knjiga 2., Element, Zagreb, 1994
64. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
65. Pavković-Veljan, Elementarna Matematika 2, Školska kniga, Zagreb, 1995
66. Pavković-Veljan: Elementarna matematika 1, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
67. Pečarić, J. E.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996
68. Riordan, J.: Combinatorial Identities, John Willey & Sons, 1968
69. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
70. Small, C. G.: Functional Equations and How to Solve Them, Springer, New York, 2007
71. Specht, E.: Geometria-Scientiae Atlantis, Magdeburg, 2001
72. Stark, H. M.: An introduction to Number Theory, Markh. Publis. Comp., Chicago, 1970
73. Stevanović, D., Milošević, M., Baltić, V. Diskretna matematika, DMS, Beograd, 2004
74. Tripathi, A.: The Coin Exchange Problem for Arithmetic Progressions, American Mathematical Monthly,1994
75. Veljan, D.: An Analogue of the Pythagorean Theorem, El. Math. 51 (1996)
76. Vo Quoc B.: On a class of three-variable Inequalities, 2007
77. Volenc, V.: Analitička geometrija u kompleksnim koordinatima I, II, III, Matematičko-fizički list, 186, 187,188, Zagreb, 1996/97
78. Vrećica, S.: Konveksna analiza, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993
79. Wells, D.: Prime numbers. The most mysterious figures in Math, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005
80. Wilf, H. S.: A Circle-of-lights Algorithm for the Money-changing Problem , American Mathematical Monthly, 1978
81. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
82. Алексиев, К., Бангачев, К., Бойваленков, П.: 640 задачи или Теория на числата за олимпиади, УНИМАТ СМБ, София, 2017
83. Аневска, К.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје

84. Арноль, И. В.: Теория чиесл, Учиедгиз, Москва, 1939
85. Арсеновић, М.; Драговић, В.: Функционалне једначине, ДМС, Београд, 1999
86. Арсланагиќ, Ш. За подобрувањето на неравенствата, Сигма, Скопје
87. Арсланагиќ, Ш., Зејнулаху, Ф.: Две условни алгебарски неравенства, Сигма, Скопје
88. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ , А.: Повеќе докази на едно познато геометриско неравенство, Сигма, Скопје
89. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе решенија на една геометриска задача, Сигма, Скопје
90. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
91. Арсланагиќ, Ш.: Едно неравенство во врска со симетралата на внатрешен агол нма триаголник, Сигма, Скопје
92. Арсланагиќ, Ш.: Неравенства со факториели, Сигма, Скопје
93. Арсланагиќ, Ш.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје
94. Арсланагиќ, Ш.: Несбитовото неравенство и едно негово подобрување, Сигма, Скопје
95. Арсланагиќ, Ш.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
96. Арсланагиќ, Ш.: Подобрување на едно алгебарско неравенство, Сигма, Скопје
97. Арсланагиќ,Ш., Муминагиќ, А.: Едно интересно равенство за триаголник и негови последици, Сигма, Скопје
98. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
99. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
100. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
101. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
102. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
103. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
104. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
105. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
106. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
107. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
108. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
109. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
110. Брсаковска, С., Малчески, С.: Некои последици на Питагоровата теорема, Нумерус, Скопје, 2019
111. Василевска, В.: Степен на точка во однос на кружница, Сигма, Скопје
112. Велинов, Д. Полиномни равенки, Сигма, Скопје
113. Велинов, Д.: Некои методи за решавање на Диофантови равенки, Сигма, Скопје, 2018
114. Велинов, Д.: Рекурентни релации, Сигма, Скопје
115. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
116. Гаврилов, М, Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1976
117. Гарднер, М.: Математически развлечения. Том 2. София, Наука и изкуство, 1977
118. Главче, М.: Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
119. Гроздев, С., Лесов, Х.: Квадратни параметарски неравенки, Сигма, Скопје
120. Гроздев, С., Ненков, В.: Магични квадрати, Сигма, Скопје
121. Гроздев, С., Стефанова, Д., Иванов, И.: Планиметрични задачи за триъгълник с тригонометрични функции, Светлина, София, 2016
122. Гроздев, С.: Минимален прост делител, Сигма, Скопје
123. Гроздев, С.: Примена на едно обопштување на теоремата на Птоломеј, Сигма, Скопје
124. Гуревич, Е.: Тайна древнего талисмана. Москва, Наука, 1969
125. Давидов, Љ.: Генераторни функции, Сигма, Скопје

126. Давидов, Љ.: Принципот на Дирихле и некои комбинаторни проблеми, Сигма, Скопје
127. Давидов, Љ.: Функционални уравнения, Народна Просвета, София, 1977
128. Давыдов, У. С.: Задачи и упражниния по теоретической арифметике целых чисел, ГУНИМИ БССР, Минска, 1963
129. Димитров, С., Личев, Л., Чобанов, С.: 555 задачи по геометрия (решения по Геометрия в картинки на А. В. Акопян), УНИМАТ СМБ, 2015
130. Димовски, Д., Малчески, Р., Тренчевски, К., Шуниќ, З.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
131. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
132. Димовски, И.: Врска меѓу биномните коефициенти и пермутациите со повторување, Сигма, Скопје
133. Димовски, И.: Неограниученост на низата совршени и низата прости броеви, Сигма, Скопје
134. Димовски, И.: Теорема на Дезарг, Сигма, Скопје
135. Дирихле, П. Г. Л.: Лекции по теория на числата, Наука и изкуство, София, 1980
136. Докоска, М.: Некои карактеристични неравенства во врска со триаголник, Сигма, Скопје
137. Дуденков, С., Чакърян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
138. Ђукић, Д.: Задаци о скуповима, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
139. Ђукић, Д.: Задаци са распоредима бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
140. Ђукић, Д.: Инваријанте, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
141. Ђукић, Д.: Инверзија, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
142. Ђукић, Д.: Комбинаторна геометрија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
143. Ђукић, Д.: Комбинаторна теорија бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
144. Ђукић, Д.: Математичке игре погађања, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
145. Ђукић, Д.: Микелова тачка и Симсонова права, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
146. Ђукић, Д.: Партиције природног броја, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
147. Ђукић, Д.: Паскалова теорема, пол и полара, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
148. Ђукић, Д.: Полиноми по једној променљивој, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
149. Ђукић, Д.: Полиномске једначине, Београд, 2006 (www.imo.org.yu/sc)
150. Ђукић, Д.: Потенција тачке, Београд, 2012 (www.imo.org.yu/sc)
151. Ђукић, Д.: Холова теорема, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
152. Ђукић, Д.: Хомотетија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
153. Ерусалимский, Я. М.: Дискретная математика, Везувская книга, Москва, 2004
154. Избраные задачи из журнала American Mathematical monthly, Мир, Москва, 1977
155. Јанев, И.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
156. Јанев, И.: Варијации на иста тема, Сигма, Скопје
157. Јанев, И.: Метод на неодредени коефициенти, Сигма, Скопје
158. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П. Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
159. Јегоров, А.: Логаритамски равенки, Сигма, Скопје
160. Каделбург, З.; Ђукић, Д.; Лукић, М.; Матић, И.: Неједнакости, ДМС, Београд, 2003
161. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
162. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
163. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Адициони теореми, Сигма, Скопје
164. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Паскаловиот триаголник и бројот е, Сигма, Скопје
165. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Геометриски решенија на некои задачи поврзани со аркустангенсите, Сигма, Скопје
166. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Геометрски докази на некои тригонометриски равенства, Сигма, Скопје
167. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Суперзлатен четириаголник, Сигма, Скопје
168. Карстенсен, Ј., Муминагиуђ, А.: Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје
169. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
170. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, 2012
171. Кудреватов, Г. А.: Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970

172. Кючуков, М.; Недевски, П.: Функционални и диференциални уравнения, Проф. Марин Дринов, София, 1995
173. Лидский В. Б. и др.: Задачи по элементарной математике, Москва, 1962
174. Лихтарников, Л. М.: Элементарное введение в функциональные уравнения, Лань, Санкт-Петербург, 1997
175. Лукић, М.: Инверзија, Београд, 2005 (www.imo.org.yu/sc)
176. Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.: Збирка задачи по геометрија, Просветно дело, Скопје, 1981
177. Макарова, Н.: Волшебный мир магических квадратов. Саратов, 2009
178. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни I, Сигма, Скопје
179. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни II, Сигма, Скопје
180. Малчески, А. Манова-Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсаковска. С.: Сигмина ризница (конкурсни здачи 1-192), СММ, Скопје, 2012
181. Малчески, А.: Регресивна индукција, Сигма, Скопје
182. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
183. Малчески, А., Малчески, Р.: Разбивање на броеви, Математика$^+$, Софија, 1997
184. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма, Скопје, 2018
185. Малчески, А., Малчески, С.: Теорема на Птоломеј, Сигма, Скопје
186. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсакоска, С.: Сигмина ризница (рубрика подготвителни задачи), СММ, Скопје, 2012
187. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
188. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје, 2012
189. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 1, Сигма, Скопје
190. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 2, Сигма, Скопје
191. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 3, Сигма, Скопје
192. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 4, Сигма, Скопје
193. Малчески, Р., Аневска, К.: Теорема на Стјуарт, Сигма, Скопје, 2018
194. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Атанасов, Р., Манова – Ераковиќ, В., Јанев, И.: Меѓународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000
195. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
196. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
197. Малчески, Р., Докоска, М.: Математика 2, Просветно дело, Скопје, 2002
198. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 1 – алгебарски структури (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
199. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 2 – векторска и линеарна алгебра (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
200. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 3 – калкулус 1 (трето изадние), ФОН универзитет, Скопје, 2011
201. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 4 – калкулус 2 (трето издание), ФОН универзитет, Скопје, 2011
202. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика (второ издание), ФОН универзитет , Скопје, 2011
203. Малчески, Р., Малчески, А. Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1994
204. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
205. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
206. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви I, Сигма, Скопје, 2000
207. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви II, Сигма, Скопје, 2000
208. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви III, Сигма, Скопје, 2001
209. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви IV, Сигма, Скопје, 2001

210. Малчески, Р., Малчески, А.: Теорема на Helly за конвексните множества, Математика, Софија, 1997
211. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки, СММ, Скопје, 2016
212. Малчески, Р., Малчески, А.: Херонови триаголници, Сигма, Скопје, 1994
213. Малчески, Р., Малчески, С.: Белешка за распределбата на простите броеви, Сигма, Скопје, 2018
214. Малчески, Р., Малчески, С.:. Ред на број по модул и примитивни корени, Сигма, Скопје, 2018
215. Малчески, Р., Манова – Ераковиќ, В., Марковски, Ѓ., Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
216. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 1, Сигма, Скопје, 2005
217. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 2, Сигма, Скопје, 2005
218. Малчески, Р.. Паркетирания и приложения, Математика +, София, 2001
219. Малчески, Р.: Метод на инваријанти, Сигма, Скопје, 2014
220. Малчески, Р.: Аневска, К.: Хомотетија, Сигма, Скопје, 2014
221. Малчески, Р.: Ах тие питагорови тројки, Сигма, Скопје, 1995
222. Малчески, Р.: Две важни неравенства и бројот е, Сигма, Скопје, 1996
223. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
224. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, СММ, Скопје, 2016
225. Малчески, Р.: Елементарно испитување на текот и скицирање на графикот на кубната функција, Сигма, Скопје, 1993
226. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
227. Малчески, Р.: За рационалните корени на полином од *n*-ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992
228. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
229. Малчески, Р.: Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
230. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
231. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Сигма, Скопје, 2011
232. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
233. Малчески, Р.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје, 2011
234. Малчески, Р.: Проблем на бои, Сигма, Скопје, 2000
235. Малчески, Р.: Пчелиното саќе – генијална творба во природата, Сигма, Скопје, 2013
236. Малчески, Р.: Семејно решавање на една „едноставна“ задача, Сигма, Скопје
237. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
238. Малчески, Р.: Триаголни броеви, Сигма, Скопје, 1995
239. Малчески, Р.: Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје, 2009
240. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015
241. Малчески, Р.: Хармониска прогресија, Сигма, Скопје, 1999
242. Малчески, Р.:. Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје, 2001
243. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни-тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
244. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Геометриско пресметување на тригонометриски функции од некои агли, Сигма, Скопје
245. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 1, Сигма, Скопје
246. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 2, Сигма, Скопје
247. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни четириаголници, Сигма, Скопје
248. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
249. Маркоска, Ј.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
250. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 1, Сигма, Скопје
251. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 2, Сигма, Скопје
252. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 3, Сигма, Скопје
253. Маркоски, Ѓ. Девет карактеристични точки за триаголник 4, Сигма, Скопје
254. Матић, И.: Инверзија, Београд (www.imo.org.yu/sc)
255. Миличић, П.: Идентични трансформации (збирка нестандардни решени задачи), СММ, Скопје, 2013

256. Миовска, В.: Една задача и дванаесет начини за решавање, Сигма, Скопје
257. Миовска, В.: Теорема на Симпсон, Сигма, Скопје
258. Михелович, Ш. Х.: Теория чисел, Высшая школа, Москва, 1967
259. Младеновић, П.: Комбинаторика (четврто издање), ДМС, 2013
260. Моденов, П. Ц.: Задачи по геометрии, Наука, Москва, 1979
261. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А.: Международные математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
262. Муминагић, А., Карстенсен, Ј.: Една задача, повеќе начини за нејзино решавање, Сигма, Скопје
263. Муминагић, А., Карстенсен, Ј.: Познати задачи со не така познати решенија, Сигма, Скопје
264. Муминагић, А.: Бабилиерова теорема, Сигма, Скопје
265. Муминагић, Никобинг: За една интересна математичка задача со корени, Сигма, Скопје
266. Мушкаров, О., Грозед, С.: Едно математичко чудовиште, Сигма, Скопје
267. Нагел, Т.: Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
268. Начевска-Настоска, Б., Настоски, Љ.: Системи од точки или принцип на Дирихле, Сигма, Скопје
269. Пиперевски, Б., Малчески, Р., Малчески, А., Стојковска, И.: Избрани содржини од елементарна математика II (второ издание), СММ, Скопје, 2014
270. Плотников, А. Д.: Дискретная математика, Новое знание, Москва, 2005
271. Поја, Г.: Математическое откріитие, Москва 1976
272. Поповиќ-Грибовска, Л.: Инверзија, Сигма, Скопје
273. Поповска – Грибовска, Л.: За Виетовата теорема, Сигма, Скопје
274. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, 1988
275. Серпинский, В.: 250 задач по елементарной теории чисел, Просвещение, Москва, 1976
276. Серпинский, В.: Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
277. Сивашинский, И. Х.: Неравенства в задачах, Наука, Москва, 1967
278. Стојменовска, И.: Обопштена равенка на Ојлер, Сигма, Скопје
279. Страшевич, С., Боровкин, Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
280. Тонов, И. К.; Сидеров, П. Н.: Приложение на комплексните числа в геометрията, Наука, София, 1981
281. Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К.: Математика 3, (авторизиран ракопис), 2003
282. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
283. Филеп, Л., Березнай, Г.: История на цифрите. София, Техника, 1988
284. Филиповски, С.: 200 –тероија на броеви (подготвителни задачи), Скопје, 2013
285. Филиповски, С.: Една задача, повеќе начини за ршавање, Сигма, Скопје
286. Хинчин, А. Я.: Три бисера од теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
287. Хинчин, А. Я.: Цепные дроби, Физматгиз, Москва, 1961
288. Хинчин, А. Я.: Элементи теории чиесл, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951
289. Цветковски, З., Малчески, Р.: Алгоритам за генерирање на Питагорини тројки, Сигма, Скопје, 2006
290. Цветковски, З., Малчески, Р.: Докажување на симетрични неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
291. Цветковски, З., Малчески, Р.: Еден метод за докажување неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
292. Цветковски, З., Малчески, Р.: Неравенства на Schur и Muirhead, Сигма, Скопје, 2007
293. Цофман, Ј.: Примена на паркетот при решавање на задачи, Сигма, Скопје, 2000
294. Шаригин, И.: Задачи по геометрија, Наука, Москва, 1986 (на руски)
295. Школярски, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яаглом, И. М.: Избраные задачи и теоремы по елементарной математике, Наука, Москва, 1976
296. Шнилерман, Л. Г.: Простиы числа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1940
297. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 1, Сигма, Скопје
298. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 2, Сигма, Скопје
299. Штерјов, З.: Конвексност на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$ и една примена, Сигма, Скопје
300. Штерјов, З.: Методи за докажување неравенства, Пробиштип, 2008
301. Штерјов, З.: Триаголници чии страни формираат аритметичка прогресија, Сигма, Скопје
302. Штерјов, З.: Функционални равенки во множеството реални броеви, НУ Гоце Делчев, Штип, 2011