Шефкет Арсланагиќ
Сараево, Босна и Херцеговина

ПОВЕЌЕ ДОКАЗИ НА ЕДНО АЛГЕБАРСКО НЕРАВЕНСТВО

Самостојното решавање на мал број тешки проблеми е, без сомнение, од поголема корист за читателот, отколку решавањето на голем број лесни проблеми. Доколку читателите имаат пристап до нечии други решенија, препорачливо е да ги погледнат само откако сами ќе најдат свои решенија. Ако, пак, не успеале да го решат проблемот, тогаш барем треба да постигнат длабок увид во него. Ова е многу пожелно, зашто во тој случај се постигнува подлабоко разбирање на суштината и содржината на проблемот.

Сега ќе наведеме едно алгебарско неравенство, а ќе дадеме и образложиме различни докази на тоа неравенство. Се работи за следното неравенство:

Нека a и b се ненегативни броеви за кои важи $a^2+b^2=4$***. Докажи дека важи неравенството***

$$\frac{ab}{a+b+2} \le \sqrt{2}-1 \ . \tag{1}$$

Доказ 1. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина на два позитивни броја (натаму ќе го означуваме со $A \ge G$), имаме дека $\frac{a^2+b^2}{2} \ge \sqrt{a^2b^2}$, т.е. $a^2+b^2 \ge 2ab$. Оттука и од условот $a^2+b^2=4$, следува дека $ab \le 2$, т.е. $\sqrt{ab} \le \sqrt{2}$, односно

$$\frac{1}{ab} \ge \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{ab}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}} . \tag{2}$$

Од исти причини, т.е. од неравенството $A \ge G$, имаме дека

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \tag{3}$$

Тогаш од (2) и (3) добиваме:

$$\frac{a+b+2}{ab} \ge \frac{2\sqrt{ab}+2}{ab} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{ab}\right) \ge 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}+1$$

Се разбира, овде земаме дека $ab \ne 0$, зашто за $a=0$ или $b=0$ даденото неравенство (1) е очигледно точно ($0<\sqrt{2}-1$).

Од последното неравенство $\frac{a+b+2}{ab} \geq \sqrt{2}+1$ следува дека $\frac{ab}{a+b+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ а заради $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$, го добиваме она што требаше да се покаже, т.е. неравенството (1). Во (1) важи равенство ако и само ако $a = b = \sqrt{2}$.

Доказ 2. Од неравенството (3) следува дека $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}$. Од ова неравенство добиваме: $\frac{ab}{a+b+2} \leq \frac{ab}{2\sqrt{ab}+2}$. Ставајќи смена $\sqrt{ab} = t$, имаме: $\frac{ab}{a+b+2} \leq \frac{t^2}{2t+2}$. Притоа, заради неравенството $a^2+b^2 \geq 2ab$ имаме дека важи $0 \leq \sqrt{ab} \leq \sqrt{2}$, односно $0 \leq t \leq \sqrt{2}$. Сега, доволно е да се покаже дека важи неравенството $\frac{t^2}{2t+2} \leq \sqrt{2}-1$. Средувајќи го последното неравенство добиваме: $t^2 \leq \left(\sqrt{2}-1\right)\left(2t+2\right)$, а од него пак, $t^2 - 2\left(\sqrt{2}-1\right)t - 2\left(\sqrt{2}-1\right) \leq 0$, т.е. $\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t-\sqrt{2}+2\right) \leq 0$. Нерaвеството $\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t-\sqrt{2}+2\right) \leq 0$ е очигледно точно заради условот $0 \leq t \leq \sqrt{2}$. Следствено, важи неравенството (1). Во (1) важи равенство ако и само ако $t = \sqrt{2}$, т.е. $ab = 2$. Заради условот $a^2+b^2 = 4$, т.е. $(a-b)^2 + 2ab = 4$, следува дека $a = b = \sqrt{2}$.

Доказ 3. Заради условот $4 = a^2+b^2 \geq 2ab$, т.е. $\sqrt{ab} \leq \sqrt{2}$ добиваме дека

$$\begin{aligned} \frac{ab}{a+b+2} &= \sqrt{ab} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b+2} = \sqrt{ab}\left(\frac{a+b+2}{\sqrt{ab}}\right)^{-1} \\ &= \sqrt{ab}\left(\frac{a}{\sqrt{ab}} + \frac{b}{\sqrt{ab}} + \frac{2}{\sqrt{ab}}\right)^{-1} \qquad (4) \\ &= \sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{2}{\sqrt{ab}}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

(Притоа претпоставуваме дека $ab>0$, зашто за $a=0$ или $b=0$ даденото неравенство (1) е очигледно точно). Врз основа на неравенството $A \geq G$ имаме:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}, \text{ т.е. } \sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}} \geq 2.$$

Од последното неравенство и неравенството $\sqrt{ab} \leq \sqrt{2}$ следува дека

$$\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{2}{\sqrt{ab}} \geq 2+\frac{2}{\sqrt{2}}, \text{ т.е. } \left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{2}{\sqrt{ab}}\right)^{-1} \leq \left(2+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{-1}.$$

Одовде, од (4) и од неравенството $\sqrt{ab} \leq \sqrt{2}$ добиваме дека $\frac{ab}{a+b+2} \leq \sqrt{2}\left(2+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{-1} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}-1$, т.е. $\frac{ab}{a+b+2} \leq \sqrt{2}-1$.

Равенство важи ако и само ако $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=2$ и $\sqrt{ab}=\sqrt{2}$, т.е. $a=b=\sqrt{2}$.

Доказ 4. Претходно кажавме дека за $a=0$ или $b=0$ даденото неравенство (1) е очигледно точно, па ќе сметаме дека $a,b>0$, т.е. $ab>0$.

Да го разгледаме реципрочното неравенство $\frac{a+b+2}{ab} \geq \frac{1}{\sqrt{2}-1}$, т.е. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{ab} \geq \sqrt{2}+1$. Од условот $a^2+b^2=4$, следува дека можеме да ставиме тригонометриска смена

$$a=2\sin x, b=2\cos x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Притоа, неравенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{ab} \geq \sqrt{2}+1$ преоѓа во неравенството

$$\frac{1}{2\sin x}+\frac{1}{2\cos x}+\frac{2}{4\sin x\cos x} \geq \sqrt{2}+1$$

односно

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{2}{\sin 2x} \geq 2\sqrt{2}+2$$

Нека

$$f(x)=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{2}{\sin 2x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Имаме

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{4\cos 2x}{\sin^2 2x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

т.е.

$$f'(x) = (\sin x - \cos x) \cdot \frac{1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

За изводот на функцијата $f(x)$ важи следното:

$$f'(x) = \begin{cases} < 0, \quad \sin x < \cos x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) & \text{, \textbf{т.е.} } f \searrow, \\ = 0, \quad \sin x = \cos x, \quad x = \frac{\pi}{4} & \text{, \textbf{т.е.} } \min, \\ > 0, \quad \sin x > \cos x, \quad x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) & \text{, \textbf{т.е.} } f \nearrow, \end{cases}$$

па

$$f_{\min} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{2}{\sin\frac{\pi}{2}} \text{ т.е. } f_{\min} = \sqrt{2} + \sqrt{2} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

Според тоа, $f(x) \geq f_{\min} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} + 2$, т.е. неравенството

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{2}{\sin 2x} \geq 2\sqrt{2} + 2$$

е точно, па според тоа и неравенството $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{ab} \geq \sqrt{2} + 1$, а оттука и неравенството (1). Во $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{2}{\sin 2x} \geq 2\sqrt{2} + 2$ важи равенство ако $x = \frac{\pi}{4}$, што е еквивалентно со $a = b = \sqrt{2}$

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1] **Arslanagić, Š.**, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
[2] **Engel, A.**, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York /Berlin/ Heidelberg, 1998.
[3] **Kuczma, M.E., Windischbacher, E.,** *Polish and Austrian Mathematical Olympiads 1981-1995*, The Australian Mathematics Trust, Enrichment Series, University of Canberra, 1998.