Славица Грковска, Скопје

ЗАДАЧИ ОД МИНИМУМ ОД МАКСИМУМ (МАКСИМУМ ОД МИНИМУМ)

Во еден од претходните броеви на СИГМА беше разработуван проблемот на minimax. Во оваа работа ќе се осврнеме на примери кои се однесуваат на овој проблем, но притоа ќе се користиме со поелементарни методи за решавањето на поодделните задачи.

Нека X е непразно подмножество од множеството реални броеви. Ако по некое правило на секој елемент од множеството

$$X^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in X, i = 1,2,...,n\}$$

на единствен начин му се придружува реален број, тогаш велиме дека е зададена реална функција од n-променливи со дефинициона област X^n.

Нека сега $f_i(x_1, x_2, ..., x_n), i = 1,2,..,k$ се реални функции, и нека променливите $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ задоволуваат еден или повеќе услови, при што под услов ќе подразбираме одредено равенство или неравенство. За секој фиксиран избор на променливите $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ со A да го означиме најголемиот од броевите

$$f_1(x_1, x_2, ...x_n), ..., f_k(x_1, x_2, ...x_n) \text{ т.е.}$$

$$A = \max\{f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_k(x_1, ..., x_n)\}.$$

Ако од сите вредности што може да ги прими A, зависно од условите што ги задоволуваат променливите $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, ја избереме најмалата тогаш сме го определиле $\min A$,и тоа всушност претставува определување минимум од максимум, т.е.

$$\min_{x} \max_{f_i(x)} \{f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_k(x_1, ...x_n)\}.$$

Ако $B = \min\{f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_k(x_1, ..., x_n)\}$ и ако од сите вредности што може да ги прими B, зависно од условите што ги задоволуваат променливите $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ ја избереме најголемата, тогаш сме го определиле $\max B$, што всушност претставува определување максимум од минимум, т.е.

$$\max_{x} \min_{f_i(x)} \{f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_k(x_1, ...x_n)\}.$$

Ќе разгледаме некои идеи и методски пристапи кои можат да бидат корисни при решавањето на оваа класа проблеми.

Пример1. Да се најде $\max\limits_{0 \le t \le 1} \min\left\{\frac{2-t}{2}, \frac{t}{2-t}\right\}$.

Решение. Нека $B = \min\left\{\frac{2-t}{2}, \frac{t}{2-t}\right\}$. Од $t \in [0,1]$ следува $B \ge 0$. Понатаму, од дефиницијата за минимум се добива дека $B \le \frac{2-t}{2}$ и $B \le \frac{t}{2-t}$. Од првото неравенство имаме $\frac{1}{B} \ge \frac{2}{2-t}$, па затоа $B \le \frac{t}{2-t} = \frac{t-2+2}{2-t} = \frac{2}{2-t} - 1 \le \frac{1}{B} - 1$. Случајот $t = 0, B = 0$ не го разгледуваме бидејќи притоа B не достигнува максимум. Значи, $B \le \frac{1}{B} - 1$ од каде се добива квадратната неравенка $B^2 + B - 1 \le 0$ која може да се напише во облик $(B-\frac{\sqrt{5}-1}{2})(B+\frac{\sqrt{5}-1}{2})\leq 0$. Од последното неравенство и од условот $B>0$ следува дека $B\leq\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, при што равенство се достигнува за $B=\frac{2-t}{2}$ т.е. за $t=3-\sqrt{5}$ и за $B=\frac{t}{2-t}$ т.е. за $t=-2$. Но, $t\in[0,1]$ па затоа единствената вредност на t за која се достигнува максимумот е $t=3-\sqrt{5}$. Значи,

$$\max_{0\leq t\leq 1}\min\left\{\frac{2-t}{2},\frac{t}{2-t}\right\}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \ ♦$$

Пример 2. Нека S е најголем од броевите $a+b+c, b+c+d, c+d+e, d+e+f, e+f+g$ каде a,b,c,d,e,f,g се ненегативни броеви за кои важи

$$a+b+c+d+e+f+g=1. \qquad (*)$$

Најдете ја најмалата вредност која што може да ја достигне S.

Решение. Бидејќи $S=\max\{a+b+c, b+c+d, c+d+e, d+e+f, e+f+g\}$ добиваме

$$a+b+c\leq S \qquad (1)$$
$$b+c+d\leq S \qquad (2)$$
$$c+d+e\leq S \qquad (3)$$
$$d+e+f\leq S \qquad (4)$$
$$e+f+g\leq S \qquad (5)$$

Од (1) и (5) имаме $a+b+c+e+f+g\leq 2S$, од каде заради (*) се добива $1-d\leq 2S$ т.е. $d\geq 1-2S$. Слично, од (2) и (5) се добива $a\geq 1-2S$. Потоа, од (1) и (2) се добива $2S\geq a+d+2(b+c)\geq a+d\geq 2-4S$ од каде следува дека $S\geq\frac{1}{3}$. Равенство се достигнува за

$$a=\frac{1}{3}, b=0, c=0, d=\frac{1}{3}, e=0, f=0, g=\frac{1}{3}. \ ♦$$

Во претходните два примера може да констатираме дека разгледуваната величина е помала или еднаква или поголема или еднаква од извесна константа, а потоа утврдуваме за која вредност на променливите разгледуваната величина е еднаква на таа константа. Изложениот метод за решавање на задачи од овој тип ќе го користиме во повеќето од следните примери.

Пример 3. Нека x,y,z се реални броеви од интервалот [0,1]. Да ги означиме со u и v најмалиот и најголемиот од броевите

$$x+\sqrt{1-y^2}, y+\sqrt{1-z^2}, z+\sqrt{1-x^2},$$

соодветно.

(i) Колкава е најмалата вредност што може да ја достигне v?

(ii) Колкава е најголемата вредност што може да ја достигне u?

(iii) Каков ќе биде одговорот на претходните две прашања ако x,y,z го задоволуваат условот

$$x+y+z=1? \qquad (*)$$

Решение. Пред да преминеме на решавање на примерот да воочиме дека ако $x\in[0,1]$, тогаш постои $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$ таков што $x=\sin\alpha$. Тогаш

$$x+\sqrt{1-x^2}=\sin\alpha+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\sqrt{1+\sin 2\alpha}.$$

За секој $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ е исполнето $1 \le \sqrt{1+\sin 2\alpha} \le \sqrt{2}$,   од каде следува дека

$$1 \le x + \sqrt{1-x^2} \le \sqrt{2} .$$

Бидејќи $y \in [0,1]$ и $z \in [0,1]$, аналогно на претходното, важат неравенствата

$$1 \le y + \sqrt{1-y^2} \le \sqrt{2} \text{ и } 1 \le z + \sqrt{1-z^2} \le \sqrt{2} .$$

(i) Од неравенствата $x + \sqrt{1-x^2} \ge 1$, $y + \sqrt{1-y^2} \ge 1$, $z + \sqrt{1-z^2} \ge 1$ и $v \ge x + \sqrt{1-y^2}$, $v \ge y + \sqrt{1-z^2}$, $v \ge z + \sqrt{1-x^2}$ следува

$$3v \ge x+\sqrt{1-y^2} + y+\sqrt{1-z^2} + z+\sqrt{1-x^2} = (x+\sqrt{1-x^2}) + (y+\sqrt{1-y^2}) + (z+\sqrt{1-z^2}) \ge 3$$

од каде се добива дека $v \ge 1$. Значи, најмалата вредност што може да ја достигне v е 1 и тоа кога $x = y = z = 0$ или $x = y = z = 1$.

(ii) Од неравенствата

$$x + \sqrt{1-x^2} \le \sqrt{2} ,\ y + \sqrt{1-y^2} \le \sqrt{2} ,\ z + \sqrt{1-z^2} \le \sqrt{2} \text{ и}$$

$$u \le x + \sqrt{1-y^2} ,\ u \le y + \sqrt{1-z^2} ,\ u \le z + \sqrt{1-x^2}$$

следува дека

$$3u \le x+\sqrt{1-y^2} + y+\sqrt{1-z^2} + z+\sqrt{1-x^2} = (x+\sqrt{1-x^2}) + (y+\sqrt{1-y^2}) + (z+\sqrt{1-z^2}) \le 3\sqrt{2}$$

од каде се добива дека $u \le \sqrt{2}$. Значи, најголемата вредност што може да ја достигне u е $\sqrt{2}$ и тоа кога $x = y = z = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(iii) Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $x = \max\{x, y, z\}$.Тогаш се можни два суштински различни распореди и тоа:

a) Ако $x \ge z \ge y$, тогаш од $x \ge \frac{1}{3}, y \le \frac{1}{3}$ следува

$$x + \sqrt{1-y^2} \ge \frac{1}{3} + \sqrt{1-(\frac{1}{3})^2} = \frac{1+2\sqrt{2}}{3} .$$

Од друга страна, $v \ge x + \sqrt{1-y^2}$, па затоа $v \ge \frac{1+2\sqrt{2}}{3}$.

b) Ако $x \ge y \ge z, y \ge \frac{1}{3}$, тогаш $z \le \frac{1}{3}$ и

$$v \ge y + \sqrt{1-z^2} \ge \frac{1}{3} + \sqrt{1-(\frac{1}{3})^2} = \frac{1+2\sqrt{2}}{3} ;$$

Ако $x \ge y \ge z, y \le \frac{1}{3}$, тогаш $v \ge x + \sqrt{1-y^2} \ge \frac{1}{3} + \sqrt{1-(\frac{1}{3})^2} = \frac{1+2\sqrt{2}}{3}$.

Значи, во секој случај $v \ge \frac{1+2\sqrt{2}}{3}$, а равенство се достигнува за $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Од неравенството

$$\frac{x+y+z}{3} \le \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \tag{1}$$

меѓу аритметичката и квадратната средина на броевите x, y, z и заради $x \ge \frac{1}{3}, y \le \frac{1}{3}$ следува $x^2 + y^2 + z^2 \ge [\frac{\sqrt{3}}{3}(x+y+z)]^2 = (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{1}{3}$ т.е.

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3} \qquad (2)$$

Ако неравенството (1) го примениме за броевите $\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-z^2}$ добиваме

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-z^2} \leq \frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2+1-y^2+1-z^2} = \sqrt{3}\sqrt{3-(x^2+y^2+z^2)} \qquad (3)$$

Од неравенствата во (ii) и од (2) и (3) следува

$$3u \leq x+y+z+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-z^2} \leq 1+\sqrt{3}\sqrt{3-(x^2+y^2+z^2)} \leq 1+\sqrt{3}\sqrt{3-\frac{1}{3}} = 1+2\sqrt{2}$$

од каде што се добива дека $u \leq \frac{1+2\sqrt{2}}{3}$, при што равенство важи за $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Пример 4. За реалните броеви $a_i, i=1,2,...,5$ важи $\sum_{i=1}^{5} a_i^2 = 1$. Нека m е најмалиот од броевите $|a_i - a_j|$ каде $i, j \in \{1,2,...,5\}, i \neq j$.

(i) Колкава е максималната вредност која може да ја достигне m?

(ii) Каков ќе биде одговорот на прашањето под (i) ако $a_i, i=1,2,...,5$ се реални ненегативни броеви?

Решение. Нека $m = \min_{1 \leq j < i \leq 5} |a_i - a_j|$.

(i) Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека

$$a_5 \geq a_4 \geq a_3 \geq a_2 \geq a_1.$$

Тогаш $4m \leq (a_5-a_4)+(a_4-a_3)+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)$ т.е. $4m \leq a_5 - a_1$. Исто така $2m \leq (a_4-a_3)+(a_3-a_2)$ т.е. $2m \leq a_4 - a_2$. Ако е исполнето барем едно од неравенствата $a_5 - a_1 \leq \frac{4}{\sqrt{10}}, a_4 - a_1 \leq \frac{2}{\sqrt{10}}$ тогаш и $m \leq \frac{1}{\sqrt{10}}$. Во спротивно имаме

$$1 = \sum_{i=1}^{5} a_i^2 \geq (a_1^2 + a_5^2) + (a_2^2 + a_4^2) \geq \frac{(|a_1|+|a_5|)^2}{2} + \frac{(|a_2|+|a_4|)^2}{2} \geq \frac{(a_5-a_1)^2}{2} + \frac{(a_4-a_2)^2}{2} > \frac{1}{2}\frac{16}{10} + \frac{1}{2}\frac{4}{10} = 1$$

што е противречност.

Значи, максималната вредност што може да ја има m е $\frac{1}{\sqrt{10}}$ и таа се достигнува за

$$a_1 = -\frac{2}{\sqrt{10}}, a_2 = -\frac{1}{\sqrt{10}}, a_3 = 0, a_4 = \frac{1}{\sqrt{10}}, a_5 = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

(ii) Ако $a_5 \geq a_4 \geq a_3 \geq a_2 \geq a_1$ тогаш $4m \leq a_5 - a_1$, $3m \leq a_4 - a_1$, $2m \leq a_3 - a_1$ и $m \leq a_2 - a_1$. Ако важи барем едно од неравенствата $a_5 - a_1 \leq \frac{4}{\sqrt{30}}$, $a_4 - a_1 \leq \frac{3}{\sqrt{30}}$, $a_3 - a_1 \leq \frac{2}{\sqrt{30}}$ и $a_2 - a_1 \leq \frac{1}{\sqrt{30}}$ тогаш $m \leq \frac{1}{\sqrt{30}}$. $a_2 - a_1 \leq \frac{1}{\sqrt{30}}$. Во спротивно имаме $a_5 > \frac{4}{\sqrt{30}} + a_1 \geq \frac{4}{\sqrt{30}}$ и слично $a_4 > \frac{3}{\sqrt{30}}$, $a_3 > \frac{2}{\sqrt{30}}$, $a_2 > \frac{1}{\sqrt{30}}$ па $1 \geq 1 - a_1^2 = a_5^2 + a_4^2 + a_3^2 + a_2^2 > \frac{16}{30} + \frac{9}{30} + \frac{4}{30} + \frac{1}{30} = 1$ што претставува контрадикција.

За $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}, a_3 = \frac{2}{\sqrt{30}}, a_4 = \frac{3}{\sqrt{30}}, a_5 = \frac{4}{\sqrt{30}}$ се достигнува минималната вредност за m.

Пример 5. Дадени се позитивните броеви x_1, x_2, x_3, x_4 за кои важи $\sum_{i=1}^{4} x_i = 1$. Нека s е најголемиот меѓу броевите $\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \frac{x_3}{1+x_1+x_2+x_3}, \frac{x_4}{1+x_1+x_2+x_3+x_4}$. Која е најмалата вредност која ја достига s?

Решение. Ако s е најголемиот од дадените броеви тогаш $\frac{1}{s}$ е најмал меѓу броевите $\frac{1+x_1}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_2}, \frac{1+x_1+x_2+x_3}{x_3}, \frac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{x_4}$. Потоа $\frac{1}{s}-1=\frac{1-s}{s}$ е најмал меѓу броевите $\frac{1+x_1}{x_1}-1=\frac{1}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_2}-1=\frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_1+x_2+x_3}{x_3}-1=\frac{1+x_1+x_2}{x_3}, \frac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{x_4}-1=\frac{1+x_1+x_2+x_3}{x_4}$; а $\frac{s}{1-s}$ е најголем меѓу броевите $x_1, \frac{x_2}{1+x_1}, \frac{x_3}{1+x_1+x_2}, \frac{x_4}{1+x_1+x_2+x_3}$. Конечно, $\frac{s}{1-s}+1=\frac{1}{1-s}$ е најголем меѓу броевите $x_1+1, \frac{1+x_1+x_2}{1+x_1}, \frac{1+x_1+x_2+x_3}{1+x_1+x_2}, \frac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{1+x_1+x_2+x_3}$. Бидејќи

$$(x_1+1)\frac{1+x_1+x_2}{1+x_1}\cdot\frac{1+x_1+x_2+x_3}{1+x_1+x_2}\cdot\frac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{1+x_1+x_2+x_3}=1+x_1+x_2+x_3+x_4=2\le\left(\frac{1}{1-s}\right)^4,$$

следува $\frac{1}{1-s}\ge\sqrt[4]{2}$ од каде се добива дека $s\ge 1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Значи, $s=1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ако

$$x_1+1=\sqrt[4]{2}, \frac{1+x_1+x_2}{1+x_1}=\sqrt[4]{2}, \frac{1+x_1+x_2+x_3}{1+x_1+x_2}=\sqrt[4]{2}, \frac{1+x_1+x_2+x_3+x_4}{1+x_1+x_2x_3}=\sqrt[4]{2},$$

т.е. ако $x_1=1-\sqrt[4]{2}, x_2=\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{2}, x_3=\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{4}, x_4=2-\sqrt[4]{8}$. ♦

Пример 6. Броевите $x_1, x_2, ..., x_{10}$ припаѓаат на сегментот $[0,1]$ и меѓу нив постои еден кој е еднаков на 0 и еден кој е еднаков на 1. Ги разгледуваме броевите: $s_1=x_1, s_2=\frac{x_1+x_2}{2}, s_3=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, ..., s_{10}=\frac{x_1+x_2+...+x_{10}}{10}$.

(i) Најдете $\max_{x_i}\{\max_{i,j}|s_i-s_j|\}$; ($ii$) Најдете $\min_{x_i}\{\max_{i,j}|s_i-s_j|\}$.

Решение. (i) Нека $i>3$. Тогаш

$$s_i-s_j=\frac{x_1+x_2+...+x_i}{i}-\frac{x_1+x_2+...+x_j}{j}=\frac{j(x_1+x_2+...+x_j+x_{j+1}+...+x_i)-i(x_1+x_2+...+x_j)}{i\cdot j}$$
$$=\frac{j(x_{j+1}+x_{j+2}+...+x_i)-(i-j)(x_1+x_2+...+x_j)}{i\cdot j}\le\frac{j(1+1+...+1)-(i-j)(0+0+...+0)}{i\cdot j}=\frac{j(i-j)}{i\cdot j}=\frac{i-j}{i}=1-\frac{j}{i}$$

Исто така,

$$s_j-s_i=\frac{(i-j)(x_1+x_2+...+x_j)-j(x_{j+1}+...+x_i)}{i\cdot j}\le\frac{(i-j)(1+...+1)-j(0+...+0)}{i\cdot j}=\frac{j(i-j)}{i\cdot j}=\frac{i-j}{i}=1-\frac{j}{i}.$$

Значи, $\left|s_i-s_j\right|\le 1-\frac{j}{i}$. Меѓутоа, од сите дропки од облик $\frac{j}{i}, i, j\in\{1,2,...,10\}$, најмала е $\frac{1}{10}$ т.е. за $j=1, i=10$, па $\max_{i,j}\left|s_i-s_j\right|\le 1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$. Максимумот се достигнува за $x_1=0, x_2=x_3=...=x_{10}=1$ кога $s_1=0, s_{10}=\frac{9}{10}$.

(ii) Нека $x_i=0$ и $x_j=1$. Ставаме $s_0=0$, и добиваме $is_i-(i-1)s_{i-1}=x_i=0$ и $js_j-(j-1)s_{j-1}=x_j=1$ од каде следува дека

$$\left|js_j-(j-1)s_{j-1}-is_i-(i-1)s_{i-1}\right|=1 \qquad (*)$$

Ако го означиме со $A=\max_{i,j}\left|s_i-s_j\right|$, тогаш можни се следните случаи:

$a)$ $j=10, i=9; (j=9, i=10)$ и тогаш (*) се сведува на:

$$1=|10(s_{10}-s_9)-8(s_9-s_8)|\le 10|s_{10}-s_9|+8|s_9-s_8|\le 10A+8A=18A$$

од каде добиваме $A\ge \frac{1}{18}$.

$b)$ $j=10, i=8; (j=8, i=10)$ и тогаш (*) се сведува на:

$$1=|10(s_{10}-s_9)+(s_9-s_8)-7(s_8-s_7)|\le 10|s_{10}-s_9|+|s_9-s_8|+7|s_8-s_7|$$
$$\le 10A+A+7A=18A$$

од каде $A\ge \frac{1}{18}$.

$c)$ Ако $i+j\le 17; i>1, j>1$ тогаш (*) се сведува на :

$$1=\left|j(s_j-s_{j-1})-i(s_i-s_{i-1})+(s_{j-1}-s_{i-1})\right|$$
$$\le j\left|s_j-s_{j-1}\right|+i\left|s_i-s_{i-1}\right|+\left|s_{j-1}-s_{i-1}\right|\le jA+iA+A\le 18A$$

од каде $A\ge \frac{1}{18}$.

$d)$ Ако $i=1; (j=1)$ тогаш (*) се сведува на :

$$1=\left|j(s_j-s_{j-1})+(s_{j-1}-s_1)\right|\le j\left|s_j-s_{j-1}\right|+\left|s_{j-1}-s_1\right|\le jA+A=(j+1)A\le 11A,$$

од каде $A\ge \frac{1}{11}>\frac{1}{18}$.

Значи,во секој случај $A\ge \frac{1}{18}$, при што равенството се достигнува за на пример $x_1=x_2=...=x_8=\frac{1}{2}; x_9=0; x_{10}=1$. Тогаш,

$$s_1=s_2=...=s_8=\frac{1}{2}; s_9=\frac{4}{9}; s_{10}=\frac{1}{2}. \ \blacklozenge$$

Пример 7. Да се определи:

$(i)\ \min\limits_{a,b,c}\max\limits_{x\in[-1,1]}\left|x^2+ax+b\right|$ $\qquad$ $(ii)\ \min\limits_{a,b,c}\max\limits_{x\in[-1,1]}\left|x^3+ax^2+bx+c\right|$

Решение: (i) Нека $f(x)=x^2+ax+b$.Бидејќи

$$2=|1+a+b+1-a+b-2b|\le|1+a+b|+|1-a+b|+2|b|=|f(1)|+|f(-1)|+2|f(0)|$$

тогаш важи барем едно од неравенствата: $|f(1)|\ge\frac{1}{2}$; $|f(-1)|\ge\frac{1}{2}$; $|f(0)|\ge\frac{1}{2}$. Значи, секогаш $\max\limits_{x\in[-1,1]}\left|x^2+ax+b\right|\ge\frac{1}{2}$, а за полиномот $f(x)=x^2-\frac{1}{2}$ важи знак за равенство т.е. за $a=-\frac{1}{2}, b=0$.

(ii) Нека $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ и нека $M=\max\limits_{x\in[-1,1]}\left|x^3+ax^2+bx+c\right|$. Сега

$$\frac{3}{2}=\left|2+2b-2(\tfrac{1}{4}+b)\right|\le|2+2b|+2\left|\tfrac{1}{4}+b\right|$$
$$=\left|(1+a+b+c)+(1-a+b-c)\right|+2\left|(\tfrac{1}{8}+\tfrac{a}{4}+\tfrac{b}{2}+c)-(-\tfrac{1}{8}+\tfrac{a}{4}-\tfrac{b}{2}+c)\right|$$
$$\le|1+a+b+c|+|1-a+b-c|+2\left|\tfrac{1}{8}+\tfrac{a}{4}+\tfrac{b}{2}+c\right|+2\left|-\tfrac{1}{8}+\tfrac{a}{4}-\tfrac{b}{2}+c\right|$$
$$=|f(1)|+|f(-1)|+2\left|f(\tfrac{1}{2})\right|+2\left|f(-\tfrac{1}{2})\right|\le M+M+2M+2M=6M$$

Значи, $M\ge\frac{1}{4}$ и за $a=0, b=-\frac{3}{4}, c=0$ важи знак за равенство. $\blacklozenge$

Пример 8. Ако $0<\beta-\alpha<\pi$ тогаш

$$\min_{a,b}\max_{x\in[\alpha,\beta]}|1+a\cos x+b\sin x|=\operatorname{tg}\frac{2\alpha-\beta}{4}.$$

Докажете!

Решение. Од условот на задачата следува дека $\frac{|\alpha-\beta|}{4}<\frac{\pi}{4}$, па е $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\beta}{4}<1$. Ако е $a=b=0$ тогаш е $1+a\cos x+b\sin x=1>tg^2\frac{\alpha-\beta}{4}$.

Претпоставуваме дека $a^2+b^2>0$. Најнапред е

$$1+a\cos x+b\sin x=1+\sqrt{a^2+b^2}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\sqrt{a^2+b^2}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x.$$

Ставаме $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, и добиваме

$$1+a\cos x+b\sin x=1+\sqrt{a^2+b^2}(\cos x\cos\varphi+\sin x\sin\varphi)=1+\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi).$$

Нека $M=\max_{x\in[\alpha,\beta]}\left|1+\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)\right|$. Ако $\sqrt{a^2+b^2}\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}-\varphi)\le\frac{-2}{1+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$ тогаш $1+\sqrt{a^2+b^2}\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}-\varphi)\le 1+\frac{-2}{1+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{-1+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{1+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$ или

$$\left|1+\sqrt{a^2+b^2}\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}-\varphi)\right|\ge\frac{1-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{1+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\beta}{4}.$$

Нека сега $\sqrt{a^2+b^2}\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}-\varphi)>\frac{-2}{1+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$. Од една страна

$$\left|1+\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha-\varphi)+1+\sqrt{a^2+b^2}\cos(\beta-\varphi)\right|\le$$

$$\le\left|1+\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha-\varphi)\right|+\left|1+\sqrt{a^2+b^2}\cos(\beta-\varphi)\right|\le 2M$$

додека од друга страна:

$$2+\sqrt{a^2+b^2}(\cos(\alpha-\varphi)+\cos(\beta-\varphi))=2+2\sqrt{a^2+b^2}\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}-\varphi)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}>$$

$$>2+2\sqrt{a^2+b^2}\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}-\varphi)>2-\frac{4\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{1+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{2(1-\cos\frac{\alpha-\beta}{2})}{1+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\beta}{4}$$

Значи, $2M\ge 2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha-\beta}{4}$ т.е. $M\ge tg^2\frac{\alpha-\beta}{4}$.

Конечно, ако $\alpha=\pi-\theta,\beta=\pi+\theta$ каде $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, тогаш $\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi,\frac{\beta-\alpha}{2}=\theta$ и за $a=\frac{2}{1+\cos\theta},b=0$ имаме

$$\max_{x\in[\alpha,\beta]}|1+a\cos x+b\sin x|=\max_{x\in[\alpha,\beta]}\left|1+\frac{2\cos x}{1+\cos\theta}\right|=tg^2\frac{\theta}{2}=tg^2\frac{\beta-\alpha}{4}.$$

Максимумот се достигнува за $x=\alpha,x=\pi,x=\beta$. ♦

Пример 9. Да се најде $\min_{z\in\mathbf{C}}\max\{|1+z|,|1+z^2|\}$, каде што $\mathbf{C}$ е множеството комплексни броеви.

Решение. Да воочиме дека $\max\{|1+z|^2, |1+z^2|^2\} = (\max\{|1+z|, |1+z^2|\})^2$. Ако $z = a + bi$ тогаш $A = |1+z|^2 = |1+a+bi|^2 = a^2 + b^2 + 2a + 1 = c + d + 2$ и

$$B = |1+z^2|^2 = |1+a^2 - b^2 + 2abi|^2 = (1+a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 = (a^2+b^2-1)^2 + 4a^2 = c^2 + d^2$$

каде $c = a^2 + b^2 - 1, d = 2a$. Ако $C = \max\{A, B\}$ тогаш за $\lambda \ge 0$ важи

$$(1+\lambda)C \ge B + \lambda A = c^2 + d^2 + \lambda c + \lambda d + 2\lambda = (c + \tfrac{\lambda}{2})^2 (d + \tfrac{\lambda}{2})^2 + 2\lambda - \tfrac{\lambda^2}{2} \ge 2\lambda - \tfrac{\lambda^2}{2}$$

од каде $C \ge \frac{4\lambda - \lambda^2}{2(1+\lambda)}$, и знак за равенство важи за $c = d = -\frac{\lambda}{2}$ и $A = B = \frac{4\lambda-\lambda^2}{2(1+\lambda)}$. Последните равенства се задоволени само за $\lambda = \sqrt{5} - 1$, и притоа имаме

$$\tfrac{4\lambda-\lambda^2}{2(1+\lambda)} = 3 - \sqrt{5}, a = \tfrac{1-\sqrt{5}}{4}, b = \pm \tfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}.$$

Значи, $\min\limits_{z \in \mathbf{C}} \max\{|1+z|, |1+z^2|\} \ge \sqrt{3 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$, и знак за равенство важи за $z = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(\cos 120° \pm i \sin 120°)$. ♦

* * *

Во натамошните разгледувања ќе се задржиме на две комбинаторни задачи.

Пример 10. Нека $(a_1, a_2, ..., a_{1985})$ е пермутација на множеството $\{1,2,...,1985\}$. Секој број a_k го множиме со k, а потоа меѓу тие 1985 производи е избран најголемиот. Докажете дека тој не е помал од 993^2.

Решение. Ги разгледуваме броевите ka_k, за $k = 993, 994, ..., 1985$. Такви броеви има 993, при што за барем едно $k, (k \ge 993), a_k \ge 993$. За таков k важи $ka_k \ge 993^2$. Ако $a_1 = 1985, a_2 = 1984, ..., a_{1985} = 1$, или $a_k = 1986 - k$, тогаш $ka_k = k(1986-k) \le \left(\frac{k+1986-k}{2}\right)^2 = 993^2$, што и требаше да се докаже. ♦

Пример 11. Двајца мудреци ја играат следната игра: напишани се броевите од $0,1,2,...,1024$. Првиот мудрец прецртува 512 броеви по свој избор, другиот прецртува 256 броеви од преостанатите, потоа првиот прецртува 128 броеви од преостанатите итн. По десетиот круг прецртувања, вториот мудрец прецртува еден број и остануваат два броја. Вториот мудрец треба да му плати на првиот онолку денари колку што изнесува разликата на преостанатите два броја. Колку ќе му плати вториот мудрец на првиот ако двата играат на најдобар начин?

Решение. Ако двата мудреци играат на најдобар начин, тогаш вториот мудрец треба да му плати на првиот 32 денари. Најнапред ќе покажеме дека првиот мудрец може да игра така што ќе добие 32 денари.

Првиот мудрец ги прецртува прво сите непарни броеви, а вториот пат ги остава непрецртани броевите кај кои последните две цифри во бинарниот запис се исти. После петтиот пат, првиот мудрец треба да остави три броја чии последни пет цифри во бинарниот запис се исти, па без оглед на тоа како ќе игра вториот мудрец двата броја ќе се разликуваат барем за $2^5 = 32$.

Обратно, вториот мудрец со својата игра може да постигне последните два броја да не се разликуваат за повеќе од 32. Сите броеви од множеството $\{0,1,2,...,1023,1024\}$ освен 1024 претставени бинарно имаат десет цифри. (Ако бројот има помалку од десет цифри тогаш пред првата цифра допишуваме потребен број на нули, на пр. $18 = 10010_2 = 0000010010_2$).

Тактиката на вториот мудрец е аналогна со тактиката на првиот мудрец. Ако после првиот потег на првиот мудрец останале помалку од 256 броеви чија прва цифра во бинарниот запис е 1, тогаш вториот мудрец во својот прв потег ги прецртува сите броеви чија прва цифра е 1 и евентуално бројот 1024 (ако не е прецртан). Ако после првиот потег на првиот мудрец останале помалку од 256 броеви чија прва цифра во бинарниот запис е 0, тогаш вториот мудрец во својот прв потег ги прецртува сите броеви чија прва цифра е 0 и евентуално бројот 1024 (ако не е прецртан).

Ако после првиот потег на првиот мудрец му останале 256 броеви чии први цифри во бинарниот запис се 0 и 1 (тогаш останал и 1024), тогаш вториот мудрец во својот прв потег ги прецртува сите броеви чија прва цифра е 0. Следните потези на вториот мудрец се слични. На тој начин после пет потега вториот мудрец може да обезбеди да останат два броја чии први пет цифри во бинарниот запис на бројот се исти или да остане бројот 1024 и уште еден број чии први пет цифри во неговиот бинарен запис се единици. И во двата случаја разликата на преостанатите два броја не е поголема од 32. ♦

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

Зад. 1. Да се реши пример 1 скицирајќи ги графиците на функциите

$$f(t) = \frac{2-t}{2} \text{ и } g(t) = \frac{t}{2-t} \text{ за } t \in [0,1].$$

Зад. 2. Во пример 2 да се најде

$$\max_{a,b,c,d,e,f,g} \min\{a+b+c, b+c+d, c+d+e, d+e+f, e+f+g\}.$$

Зад. 3. Пример 4 да се генерализира за n броеви.

Зад. 4. Најдете $\min_{x,y,z\in\mathbf{R}} \max\{x^2+y+z, x+y^2+z, x+y+z^2\}$. Каков е резултатот ако дополнително се бара да е $x+y+z=1$?

Зад. 5. Најдете го најголемиот цел број A, таков што, за која било пермутација на множеството $\{1,2,...,99,100\}$, сумата на некои десет последователни броеви од тоа множество е поголема или еднаква на A.

Зад. 6. Напишани се броевите: $1,2,...,20$. Двајца играчи наизменично запишуваат пред тие броеви знаци + или - (знакот се запишува пред кој и да е слободен број). Првиот играч настојува да, после поставување на сите дваесет знака, сумата на добиените броеви по апсолутна вредност биде колку е можно помала. Која најголема, по апсолутна вредност, сума може да ја обезбеди вториот играч?