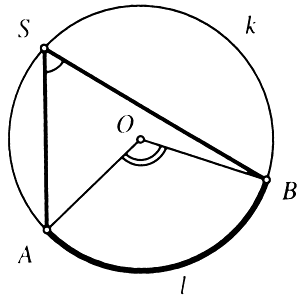
Војислав Петровиќ
Нови Сад

ЕДНА ЕДНОСТАВНА ТЕОРЕМА

Во математиката постојат теореми кои заради својата едноставност и очигледност, како на формулацијата, така и на доказот, не привлекуваат особено внимание. И така тие, најчесто неоправдано, се потиснати на маргините и се препуштени на неумоливото дејство на заборавот. А тогаш ненадејно и сосема неочекувано се наоѓаме во ситуација за која овие запоставени и заборавени тврдења се вистинскиот, а често пати и единствениот лек. На едно такво тврдење е посветен овој напис.



Црт. 1

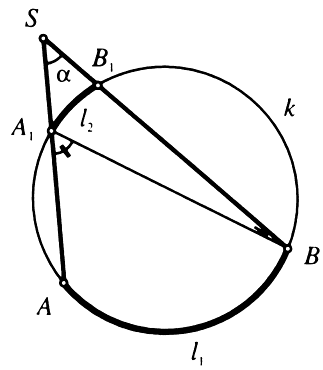
На сите им е позната врската меѓу периферните и централните агли на дадена кружница искажана преку следната теорема: *Периферниот агол на кружницата е два пати помал од соодветниот централен агол, т.е.* $\angle ASB = \frac{1}{2}\angle AOB$. *(црт. 1).*

Ако за мерка на централниот агол се земе должината на кружниот лак кој лежи внатре во аголот, последното равенство го добива обликот

$$\angle ASB = \frac{1}{2}l, \tag{1}$$

каде l е должината на лакот AB. (Да забележиме дека сите лаци со кои се мерат централните агли лежат на една иста кружница. Во спротивно формулата (1) губи смисол. Притоа сите агли еднакви на определен централен агол имаат иста лачна мера како и самиот тој агол.)

Но, што ако темето на аголот не е на кружницата, а неговите краци или нивните продолжетоци ја сечат или ја допираат кружницата? Дали и тогаш постои слична формула која во случај на периферниот агол ќе се сведе на формулата (1)? Сосема природни прашања. А одговорот? Ќе видиме дека тој е многу поедноставен отколку што во првиот момент ни се чини. Одговорот го дава следната теорема.



Црт. 2

Теорема 1. *Ако краците a и b на аголот* $\alpha = \angle aSb$ *ја сечат кружницата k во точките* A, A_1 и B, B_1 *(црт. 2), тогаш*

$$\alpha = \frac{1}{2}(l_1 - l_2) \tag{2}$$

каде l_1 и l_2 *се лаците* AB *и* A_1B_1 *кои лежат внатре во* $\angle aSb$.

Доказ. $\angle AA_1B$ е надворешен агол во ΔSA_1B, па затоа $\angle AA_1B = \alpha + \angle A_1BS$. Оттука $\alpha = \angle AA_1B - \angle A_1BS$. Но, според (1) имаме

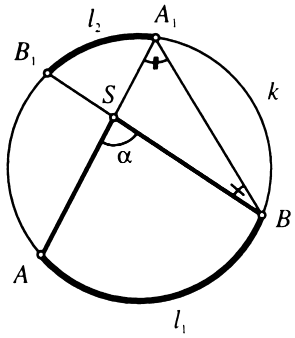
$$\angle AA_1B = \tfrac{1}{2} l_1 \text{ и } \angle A_1BS = \tfrac{1}{2} l_2 ,$$

па затоа $\alpha = \frac{1}{2}(l_1 - l_2)$. ♦

Теорема 2. *Ако темето S на аголот* $\alpha = \angle aSb$ *лежи во внатрешноста на кружницата k, а неговите краци a и b и нивните продолжетоци ја сечат k во точките* A, A_1 и B, B_1 *(црт. 3), тогаш*

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2) \qquad (3)$$

каде l_1 и l_2 *се лациите AB и* A_1B_1 *кои лежат внатре во аголот* α*, односно во неговиот накрсен агол.*

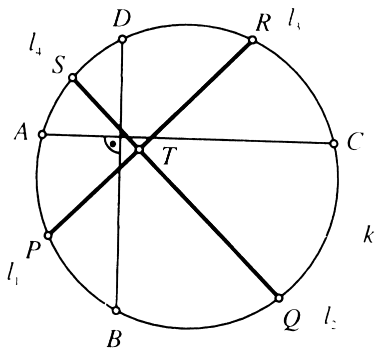


Црт. 3

Доказ. Слично на доказот на претходната теорема, α е надворешен агол за ΔA_1SB, па затоа $\alpha = \angle SA_1B + \angle SBA_1$, односно $\alpha = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$. ♦

Во случај на периферен агол, а тоа значи кога $S \in k$ и $l_2 = 0$, двете формули, и (2) и (3), се сведуваат на $\alpha = \frac{1}{2} l_1$, т.е. на (1). Значи, формулите (2) и (3) навистина се генерализација на (1).

Се на се, ништо импресивно. Особено ако се имаат предвид доказите на теоремите во кои се користи само збир на агли во триаголник. Меѓутоа првите впечатоци по правило можат да залажат. Потврда за тоа се следните примери, а во кои формулите (2) и (3) се главно оружје.



Црт. 4

Пример 1. *Нека се AC и BD две заемно нормални тетиви на кружницата k и нека се P, Q, R и S средини на лациите AB, BC, CD и DA, соодветно, (црт. 4). Докажете дека* $PR \perp QS$.

Решение. Со T да го означиме пресекот на тетивите PR и QS, а со l_1, l_2, l_3, l_4 да ги означиме соодветно лаците AB, BC, CD, DA на кружницата k. Бидејќи $AC \perp BD$, од (3) следува дека

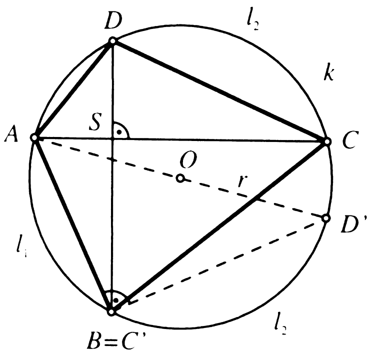
$$\tfrac{1}{2}(l_1 + l_3) = \tfrac{1}{2}(l_2 + l_4) = 90^0 .$$

Според тоа

$$\angle PTQ = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}(l_1 + l_2) + \tfrac{1}{2}(l_3 + l_4)\right) = \tfrac{1}{4}\left(l_1 + l_2 + l_3 + l_4\right) = \tfrac{1}{4} \cdot 360^0 = 90^0 . \ ♦$$

Пример 2. *Нека е ABCD тетивен четириаголник со заемно нормални дијагонали кои се сечат во точката S. Ако r е радиусот на опишаната кружница, докажете дека*

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 + \overline{SD}^2 = 4r^2 .$$



Црт. 5

Решение. Доволно е да се докаже дека $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=4r^2$. За вториот збир доказот е сличен, а третиот следува од првите два и од Питагоровата теорема.

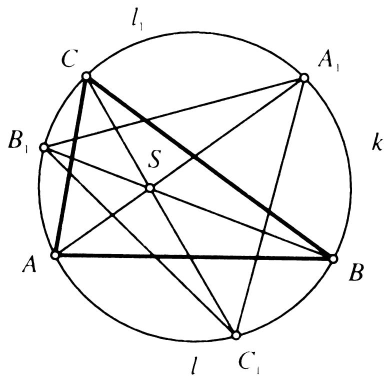
Со l_1 и l_2 да ги означиме лаците *AB* и *CD* на кружницата *k* опишана околу четириаголникот *ABCD* (црт. 5). Според (3) имаме

$$\angle ASB = 90^0 = \tfrac{1}{2}(l_1+l_2),$$

односно $l_1+l_2=180^0$. Ако лакот l_2 се ротира околу центарот на кружницата *k*, се додека не се "настави" на лакот l_1, т.е. да дојде во положба $C'D'$, каде точката *C'* се поклопува со точката *B*, ќе добиеме полукружница со дијаметар *AD'*. Бидејќи $\angle ABD'=90^0$, од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD'}^2=\overline{AD'}^2=4r^2. \ \blacklozenge$$

Пример 3. *Нека S е точка во внатрешноста на остроаголниот триаголник ABC, таква што* $\angle ASB=\gamma+60^0$ *и* $\angle BSC=\alpha+60^0$, *каде* $\alpha=\angle BAC$ *и* $\gamma=\angle ACB$. *Со* A_1,B_1,C_1 *да ги означиме точките во кои правите AS, BS, CS, соодветно, по втор пат ја сечат кружницата k опишана околу* ΔABC. *Докажете дека* $\Delta A_1B_1C_1$ *е рамностран.*



Црт. 6

Решение. Со *l* да го означиме лакот *AB* од кружницата *k* кој ја содржи точката C_1 и со l_1 лакот A_1B_1 кој ја содржи точката *C* (црт. 6). Од (3) следува

$$\angle ASB=\tfrac{1}{2}(l+l_1),$$

од што следува

$$l_1=2\angle ASB-l=2(\gamma+60)-2\gamma=120^0.$$

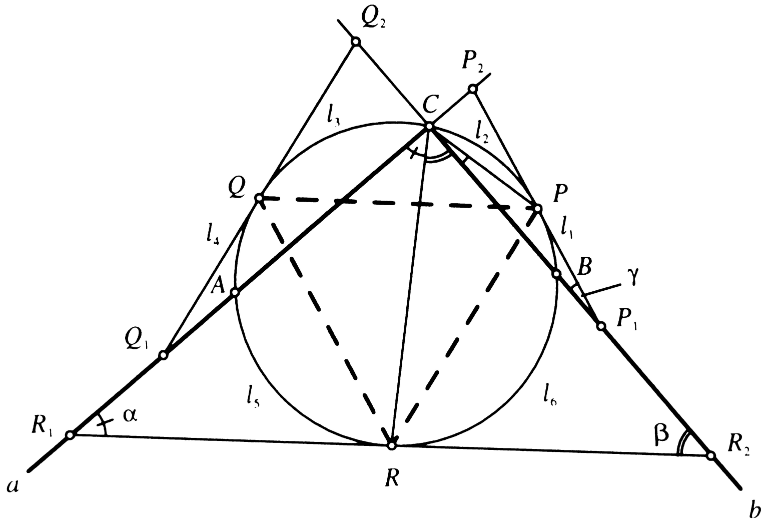
На сличен начин се докажува дека и секој од лаците над B_1C_1 и C_1A_1 изнесува 120^0, од што следува дека $\Delta A_1B_1C_1$ е рамностран. ♦

Еве сега една посложена задача. Додека за претходните три примери постојат и други начини за да истите се решат, за следниот, колку што му е познато на авторот, тоа не е случај.

Пример 4. *Кружницата k минува низ темето C на правиот агол aCb и ги сече крациите a и b уште во точките A и B, соодветно (црт. 7). На лациите AB, BC, CA земени се последователно точки R, P, Q со следните својства. Тангентата во точката R ги сече крациите a и b во точките* R_1 и R_2 *и R е* *средина на отсечката* R_1R_2*; тангентата во точкта P го сече кракот b и продолжението на кракот a во точките* P_1 и P_2 *и P е средина на отсечката* P_1P_2*; тангентата во точкта Q го сече кракот a и продолжението на кракот b во точките* Q_1 и Q_2 *и Q е средина на отсечката* Q_1Q_2.

Докажете дека ΔPQR *е рамностран.*

Решение. Со $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ да ги означиме лаците *BP, PC, CQ, QA, AR, RB,* соодветно и да означиме $\alpha = \angle CR_1R_2$, $\beta = \angle CR_2R_1$, $\gamma = \angle CP_1P_2$.



Црт. 7

Бидејќи *P* е средина на хипотенузата P_1P_2 на правоаголниот ΔP_1P_2C, добиваме дека $\gamma = \angle CP_1P_2 = \angle PCP_1$. Од (2) и (1) следува дека $\gamma = \frac{1}{2}(l_2 - l_1) = \frac{1}{2}l_1$, односно $l_2 = 2l_1$. Слично, $l_3 = 2l_4$. Но, $\angle ACB = 90^0$ па затоа

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = l_5 + l_6 = 180^0,$$

од што следува $l_2 + l_3 = 120^0$, т.е. $\angle PQR = 60^0$.

Од $l_2 + l_3 = 120^0$, $l_2 = 2l_1$ и $l_3 = 2l_4$ следува $l_1 + l_4 = 60^0$. Оттука

$$l_1 + l_4 + l_5 + l_6 = 240^0. \qquad (*)$$

R е средина на хипотенузата R_1R_2 на правоаголниот ΔR_1R_2C, и затоа $\angle R_1CR = \alpha$ и $\angle R_2CR = \beta$.. Од (1) и (2) следува

$$\alpha = \frac{1}{2}((l_1 + l_2 + l_6) - l_5) = \frac{1}{2}l_5 \quad \text{и} \quad \beta = \frac{1}{2}((l_5 + l_4 + l_3) - l_6) = \frac{1}{2}l_6,$$

односно

$$l_1 + l_2 + l_6 = 2l_5 \text{ и } l_5 + l_4 + l_3 = 2l_6.$$

Од последините две равенства, ако се има предвид дека $l_2 = 2l_1$ и $l_3 = 2l_4$ следува $l_1 + l_6 = l_5 + l_4$. Од последното равенство и од равенството (*) следува $l_1 + l_6 = l_5 + l_4 = 120^0$. Сега повторно користејќи ја формулата (3) добиваме

$$\angle PQR = \frac{1}{2}(l_1 + l_6) = 60^0 \text{ и } \angle RPQ = \frac{1}{2}(l_5 + l_4) = 60^0,$$

што значи ΔPQR е рамностран. ♦

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Од точката *S* која лежи надвор од кружницата повлечени се тангента *ST* и секанта *SAB; T, A, B* $\in k$. Симетралата на $\angle TSA$ ги сече тетивите *TA* и *TB* во точките *C* и *D*. Докажете дека $\overline{TC} = \overline{TD}$.
(*Упатство*: Докажете дека $\angle TCD = \angle TDC$)

2. Нека *ABCD* е четириаголник впишан во кружница *k* и нека *S* е средината на лакот *AB* кој не ги содржи точките *C* и *D*. Тетивите *SC* и *SD* ја сечат страната *AB* во точки *E* и *F*. Докажете дека четириаголникот *FECD* е тетивен.
(*Упатство*: Докажете дека $\angle EFD + \angle ECD = 180^0$)

3. Даден е тетивен четираголник *ABCD*. Правите *AB* и *CD* се сечат во точка *E*, а правите *AD* и *BC* во точка *F*. Симетралата на $\angle BEC$ ги сече страните *BC* и *AD* во точките *L* и *M*, а симетралата на $\angle CFD$ ги сече страните *AB* и *CD* во точките *K* и *N*. Докажете дека четириаголникот *KLMN* е ромб.
(*Упатство*: Нацртајте ја опишаната кружница околу четириаголникот *ABCD* и докажете дека споменатите симетрали се заемно нормални. Потоа искористете ги рамнокраките триаголници *KEM* и *NLF*.)

НИЛС ХЕНРИХ АБЕЛ (1802-1829)

Норвежанецот Нилс Хенрих Абел е една од најмаркантните фигури во математиката. Иако живеел само неполни 27 години, тој оставил длабока трага во математичката мисла. До својата петнаесетта година, Абел не покажувал особен талент за математика. Дури во шеснаесеттата година почнал да се интересира за математиката и да проучува некои од делата на Њутн, Ојлер и Лагранж. Неколку години подоцна, запрашан како успеал да се вивне така брзо во првите редови, Абел одговорил: “*Студирајќи ги учителите, а не нивните ученици*”.

Најважно дело на Абел е теоријата на елиптичните функции, но тој докажал и низа важни теореми кои и денес се наведуваат во учебниците по математика. Нему му припаѓа доказот дека општа алгебарска равенка од петти и повисок степен не може да се реши со радикали, како и низа резултати во областа на теоријата на редови, функционалните равенки и интегралното сметање.

Според книгата “Men of Mathematics” од E.T.Bell