JBMO 2011

$\boxed{1}$ Let a, b, c be positive real numbers such that $abc = 1$. Prove that:
$\prod(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) \geq 8(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)$

$\boxed{2}$ Find all primes p such that there exist positive integers x, y that satisfy $x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p$

$\boxed{3}$ Let $n > 3$ be a positive integer. Equilateral triangle ABC is divided into n^2 smaller congruent equilateral triangles (with sides parallel to its sides). Let m be the number of rhombuses that contain two small equilateral triangles and d the number of rhombuses that contain eight small equilateral triangles. Find the difference $m - d$ in terms of n.

$\boxed{4}$ Let $ABCD$ be a convex quadrilateral and points E and F on sides AB, CD such that

$$\frac{AB}{AE} = \frac{CD}{DF} = n$$

If S is the area of $AEFD$ show that $S \leq \frac{AB \cdot CD + n(n-1)AD^2 + n^2 DA \cdot BC}{2n^2}$

15-та Јуниорска балканска математичка олимпијада
Ларнака-Кипар, 19-24 јуни 2011

1. Нека a, b и c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи го неравенството

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1) \geq$$
$$\geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

Кога е исполнето равенство?

Решение. Ќе го искористиме равенството

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x^3+1)(x^2+x+x),$$

за $x \in \{a, b, c\}$.

Со примена на неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за два позитивни реални броја имаме

$$a^3+1 \geq 2\sqrt{a^3 \cdot 1} = 2\sqrt{a^3}$$
$$b^3+1 \geq 2\sqrt{b^3 \cdot 1} = 2\sqrt{b^3}$$
$$c^3+1 \geq 2\sqrt{c^3 \cdot 1} = 2\sqrt{c^3}$$

Ако последните три неравенства ги помножиме добиваме

$$(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1) \geq 8\sqrt{a^3b^3c^3} = 8\sqrt{(abc)^3} = 8.$$

Сега е јасно дека

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1)=$$
$$=(a^3+1)(a^2+a+1)(b^3+1)(b^2+b+1)(c^3+1)(c^2+c+1)=$$
$$=(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geq$$
$$\geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

Равенство важи ако и само ако $a^3=b^3=c^3=1$, односно $a=b=c=1$.

2. Определи ги сите прости броеви p, за кои равенката

$$x(y^2-p)+y(x^2-p)=5p.$$

има решение во множеството природни броеви.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката $(x+y)(xy-p)=5p$. Можни се повеќе случаи.

Случај 1. Нека $x+y=1$ и $xy=6p$. За прости броеви $p\geq 2$, равенката $x^2-x+6p=0$ нема целобројни решенија.

Случај 2. Нека $x+y=5$ и $xy=2p$. За прости броеви $p\geq 2$ равенката $x^2-5x+2p=0$ има дискриминанта $\Delta=25-8p$. Од неравенството $25-8p\geq 0$ добиваме $p\in\{2,3\}$. За $p=2$ ги добиваме решенијата $(1,4)$ и $(4,1)$. За $p=3$ ги добиваме решенијата $(2,3)$ и $(3,2)$.

Случај 3. Нека $x+y=p$ и $xy=p+5$. За прости броеви $p\geq 2$, равенката $x^2-px+p+5=0$ има дискриминанта $\Delta=p^2-4p-20$. Од неравенството $p^2-4p-20\geq 0$ добиваме $p\geq 7$.

Нека $p^2-4p-20=q^2$, каде $1\leq q<p$. Ја добиваме равенката $(p-2)^2-q^2=24$ која е еквивалентна со $(p+q-2)(p-q-2)=24$. Јасно е дека броевите $p+q-2$ и $p-q-2$ се парни. Притоа имаме два подслучаи:

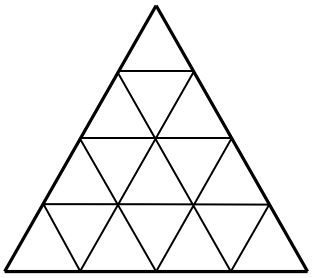
а) $p+q-2=12$ и $p-q-2=2$. Непосредно се добива $p=9$ кој не е прост број.

б) $p+q-2=6$ и $p-q-2=4$. Непосредно се добива $p=7$ и $q=1$. Равенката има решенија $(3,4)$ и $(4,3)$.

Случај 4. Нека $x+y=5p$ и $xy=p+1$. Во овој случај не постои $p\in\mathbb{N}$ такво што за x,y се добиваат решенија што се природни броеви.

Конечно, равенката има решенија во множеството природни броеви само за $p\in\{2,3,7\}$.

3. Нека $n > 3$ е природен број. Рамностраниот триаголник ABC е поделен на n^2 идентични рамнострани триаголници со прави паралелни на неговите страни. Таква поделба е илустрирана на цртежот за $n = 4$. Нека m е бројот на ромбови составени од 2 мали триаголници, а d е бројот на ромбови составени од 8 мали триаголници. Изрази ја разликата $m-d$ преку n.



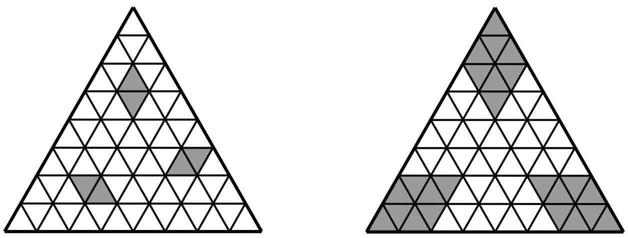
Решение. Со M ќе го означиме множеството ромбови составено од два делбени триаголници, а со D ќе го означиме множеството ромбови кои се составени од осум делбени триаголници. Делбените триаголници може да се добијат ако се повлечат прави паралелни со страните на триаголникот.

Секоја делбена отсечка (страна на делбен триаголник, која не е дел од страна на почетниот триаголник) е дијагонала на еден и само еден ромб од множеството M. Такви делбени отсечки, паралелни со една страна на триаголникот има

$$1+2+3+...+(n-2)+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

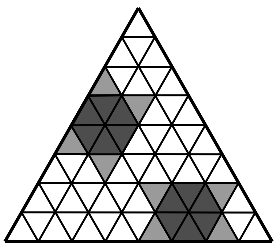
Според тоа, вкупниот број на елементи од множестото M е

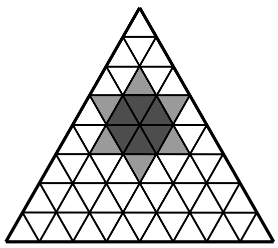
$$m = 3\frac{n(n-1)}{2}.$$



За да ги преброиме елементите од множеството D, точките кои се темиња на делбени триаголници ќе ги поделиме во три групи.

Во првата група се точките кои се центри (пресек на дијагоналите) на точно еден ромб од типот D. Такви точки има точно три, за секој природен број n (види цртеж).





Во втората група се точките кои се центари на точно два ромба од множеството ромбови D. Таквите точки припаѓаат на делбена отсечка која е дел од делбена права и е на најмало растојатние од страните на триаголникот. Такви отсечки има три, а на секоја од нив има по $n-4$ точки (на цртежот е даден пример на такви точки во случајот $n = 8$).

Во третата категорија се точки кои се центри на три ромбови од множеството D (на цртежто е даден пример на таква точка во случајот $n = 8$). Вкупниот број на такви делбени точки е

$$1+2+3+...+(n-5) = \frac{(n-5)(n-4)}{2}.$$

Според тоа, вкупниот број на елементи на множеството D е

$$d = 3+6(n-4)+3\frac{(n-5)(n-4)}{2} = \frac{3}{2}[2+(n-1)(n-4)].$$

Сега не е тешко да се пресмета дека $m-d = 3(2n-3)$.

4. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник. Точките E и F припаѓаат на страните AB и CD соодветно, така што

$$\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{CD}:\overline{DF}=n.$$

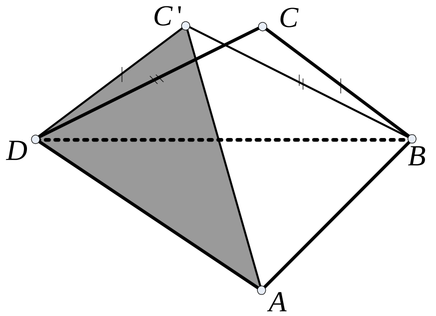
Ако S е плоштина на четириаголникот $AEFD$, докажи дека

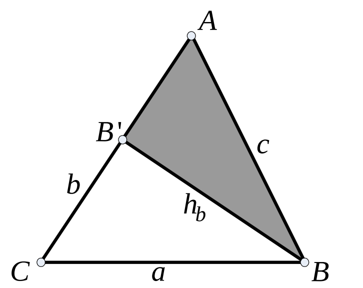
$$S\le\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+n(n-1)\overline{DA}^2+n\overline{DA}\cdot\overline{BC}}{2n^2}.$$

Решение. На почеток ќе докажеме една лема.

Лема. Нека $ABCD$ е четириаголник и S е неговата површина. Тогаш

$$S\le\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{DA}}{2}.$$





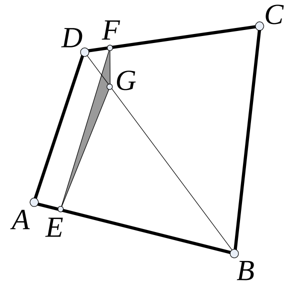
Доказ. Ќе конструираме точка C' така што $\overline{BC'}=\overline{CD}$ и $\overline{DC'}=\overline{BC}$. Јасно е дека триаголниците ΔBCD и $\Delta BC'D$ се складни, и плоштините на четираголниците $ABCD$ и $ABC'D$ се еднакви. Плоштината на даден триаголник е помала или еднаква од половината од производот на негови две страни. Според тоа

$$S=S_{\Delta ADC'}+S_{\Delta ABC'}\le\frac{\overline{AD}\cdot\overline{DC'}}{2}+\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC'}}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{DA}}{2}.$$

Применувајќи ја лемата на четириаголникот $AEFD$ имаме:

$$S\le\frac{\overline{AE}\cdot\overline{DF}+\overline{DA}\cdot\overline{EF}}{2}=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{CD}+n^2\overline{DA}\cdot\overline{EF}}{2n^2}.$$

Нека G е точка од дијагоналата BD така што $\overline{DB}:\overline{DG}=n$. Од талесовата теорема имаме $\overline{GE}=\frac{n-1}{n}\overline{AD}$ и $\overline{GF}=\frac{1}{n}\overline{BC}$. Применувајќи го неравенството за триаголникот ΔEGF, добиваме



$$\overline{EF}\le\overline{EG}+\overline{GF}=\frac{(n-1)\overline{AD}+\overline{BC}}{n}.$$

Конечно, имаме

$$S\le\frac{\overline{AE}\cdot\overline{CD}+n^2\overline{DA}\cdot\overline{EF}}{2n^2}\le\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+n(n-1)\overline{DA}+n\overline{DA}\cdot\overline{BC}}{2n^2}.$$