Методи Главче, Скопје
Самоил Малчески, Скопје

РЕШАВАЊЕ НА АРИТМЕТИЧКИ ЗАДАЧИ СО ДОВЕДУВАЊЕ ДО ПРОТИВРЕЧНОСТ

При решавањето на задачи во кои треба да се одговори на прашањето дали нешто постои, или наоѓаме пример со кој покажуваме дека бараниот објект постои или покажуваме дека таков објект не постои. Во вториот случај тоа најчесто се постигнува со доведување до противречност. Во нашите следни разгледувања ќе се осврнеме на неколку примери во кои доведувањето до противречност е ефикасен начин за решавање на овие задачи.

1. Определи го најголемиот број броеви кои може да бидат запишани еден по друг така што збирот на секои три последователно запишани броеви да е позитивен, а збирот на секои два последователно запишани броеви да е негативен.
   Решение. Нека претпоставиме дека може да се запишат повеќе од три броја на саканиот начин и нека a,b,c,d се првите четири од запишаните броеви. Тогаш треба да се точни неравенствата
   1) $a+b<0$,
   2) $b+c<0$,
   3) $c+d<0$,
   4) $a+b+c>0$,
   5) $b+c+d>0$.
   Ако ги собереме неравенствата 1), 2) и 3) добиваме $a+2b+2c+d<0$, а ако ги собереме неравенствата 4) и 5) добиваме $a+2b+2c+d>0$, што е противречност бидејќи не може истовремено еден ист збир да е и позитивен и негативен. Според тоа, може да се запишат не повеќе од три броја со саканото својство. Броевите $2,-3,2$ се со саканото својство и нивниот број е 3. ■

2. Дали постојат природни броеви x и y такви што
   $$\mathrm{NZD}(x,y)+\mathrm{NZD}(x+1,y+1)=x-y\ ?$$
   Решение. Нека претпоставиме дека такви природни броеви постојат и нека $d=\mathrm{NZD}(x,y)$. Бидејќи d е делител на $x-y$, заклучуваме дека d е делител на $\mathrm{NZD}(x+1.y+1)$, па затоа $d\,|\,x+1$ и $d\,|\,y+1$. Сега од $d\,|\,x+1$ и $d\,|\,x$ следува $d\,|\,x+1-x=1$, т.е. $d=\mathrm{NZD}(x,y)=1$, што значи дека x и y се заемно прости. Нека сега $d'=\mathrm{NZD}(x+1,y+1)$. Според тоа, $1+d'=x-y$, т.е. $1+d'=(x+1)-(y+1)$. Десната страна на последното равенство е делива со d', па затоа и левата страна е делива со d', што значи дека $d'|1$, односно $d'=1$. Според тоа, $x-y=2$, па затоа x и y се со иста парност. Но, тоа значи дека ако тие се парни добиваме противречност со $d=1$, а ако се непарни добиваме противречност со $d'=1$. Конечно, од добиената противречност заклучуваме дека не постојат природни броеви x и y за кои е исполнето даденото равенство. ■

3. Дали постојат три различни природни броја такви што збирот на секои два од нив да е степен на природен број:
а) 3 б) 2.
Решение. Нека бараните броеви се a, b, c.
а) Ако одговорот на пршањето е позитивен, тогаш $a+b=3^k$, $b+c=3^m$ и $c+a=3^n$, за некои природни броеви k, m, n. Ако ги собреме горните равенства добиваме $2(a+b+c)=3^k+3^m+3^n$, што не е можно бидејќи левата страна на последното равенство е парен, а десната страна е непарен број.
б) Нека $a<b<c$, Нека претпоставиме дека $a+b=2^k$, $b+c=2^m$ и $c+a=2^n$, за некои природни броеви k, m, n. Од $a<b<c$ следува дека $a+b<a+c<b+c$, па затоа $2^k<2^n<2^m$. Но,
$$2^k+2^n=(a+b)+(c+a)=2a+(b+c)>b+c=2^m,$$
т.е. $2^m<2^k+2^n$. Од друга страна $2^k+2^n<2^{m-1}+2^{m-1}=2^m$, што е противречност. ■

4. За секој природен број n со $S(n)$ да го означиме зирот на неговите цифри. Дали постои природен број k таков што
а) $S(k)+S(k^2)=2008$, б) $S(k)+S(k^2)=2009$.
Решение. а) Нека k е делив со 3. Тогаш k^2, $S(k)$ и $S(k^2)$ се деливи со 3, додека 2008 не е делив со 3. Ако k не е делив со 3, тогаш и $S(k)$ не е делив со 3. Но, тогаш броевите k^2 и $S(k^2)$ при делење со 3 ќе даваат остаток 1. Ако допуштиме дека постои k со саканото својство, тогаш k не е делив со 3, па затоа и $S(k)$ не е делив со 3. Од друга страна $S(k)=2008-S(k^2)$ и бидејќи броевите 2008 и $S(k^2)$ даваат остаток 1 при делење со 3, добиваме дека $S(k)$ е делив со 3, што е противречност.
б) Да го разгледаме бројот $k=\underbrace{33...3}_{n}4$. Имаме
$$k=\underbrace{33...3}_{n+1}+1=\tfrac{1}{3}\cdot\underbrace{99...9}_{n+1}+1=\tfrac{1}{3}\cdot(10^{n+1}-1)+1=\tfrac{10^{n+1}+2}{3},$$
па затоа
$$\begin{aligned}k^2&=\tfrac{10^{2n+2}+4\cdot10^{n+1}+4}{9}=\tfrac{10^{2n+2}-1+1+4\cdot10^{n+1}-4+4+4}{9}\\&=\tfrac{10^{2n+2}-1}{9}+\tfrac{4\cdot(10^{n+1}-1)}{9}+1=\tfrac{1}{9}\cdot\underbrace{99..9}_{2n+2}+\tfrac{4}{9}\cdot\underbrace{99..9}_{n+1}+1\\&=\underbrace{11..11}_{2n+2}+\underbrace{44..4}_{n+1}+1=\underbrace{11..11}_{n+1}\underbrace{55..5}_{n+1}6.\end{aligned}$$
Значи,
$$S(k)=3n+4 \text{ и } S(k^2)=6n+7,$$

па затоа $3n+4+6n+7=2009$, т.е. $n=222$. Конечно, бројот $k=\underbrace{33...3}_{222}4$ го задоволува условот на задачата. ■

5. Дали може на кружница да се запишат 2019 различни природни броја такви што за секои два соседни броја количникот на поголемиот и помалиот број да е прост број?

Решение. Нека претпоставиме дека е можно да се постават броевите a_i, $i=1,2,...,2019$ на саканиот начин. Ако $a_i > a_{i+1}$, тогаш $\frac{a_i}{a_{i+1}} = p_j$, каде p_j е некој прост број. Ако $a_i < a_{i+1}$, тогаш $\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{1}{q_j}$, каде q_j е некој прост број. Според условот на задачата $a_i \neq a_{i+1}$ за секој i. Тогаш

$$1=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_4}\cdot...\cdot\frac{a_{2004}}{a_{2005}}\cdot\frac{a_{2005}}{a_1}=\frac{p_1p_2\cdot...\cdot p_{k-1}p_k}{q_1\cdot q_2\cdot...\cdot q_{2019-k}}.$$

Но, за да се добие 1, треба во броителот и именителот да имаме еднаков број броеви, т.е. треба $k=2019-k$,односно $2k=2019$, што е противречност. ■

6. На левиот брег на една река има чамец, неколку рибари и 20 деца, а на десниор брег има само рибари без чамец. Во чамецот може да се превезат или еден рибар и едно дете или четири деца и не смее да се возат ниту помалку ниту повеќе луѓе. Дали може децата да се префрлат на десниор брег?

Решение. Да забележиме дека ако при првото префрлање од левиот на десниот брег одат 1 рибар и 1 дете, тогаш при обратното возење единствено може да се префрлат 1 рибар и 1 дете, што значи дека ситуацијата е како почетната. Затоа единствен чекор кој при првото префрлање има смисол е да се префрлат 4 деца. Сега да заележиме дека за да се избегне повторување на претходната ситуација следниот чекор мора да е спротивен на тукушто направениот чекор. Тоа занчи дека секој чекор на префрлање, кој не води до претхдоно видена ситуација, е еднозначно определен. Така ја имаме следнава табела.

Лев брег (рибари и деца)	Десен брег (рибари и деца)
$a,20$	$b,0$
$a.16$	$b,4$
$a+1,17$	$b-1,3$
$a+1,13$	$b-1,7$
$a+2,14$	$b-2,6$
$a+2,10$	$b-2,10$
$a+3,11$	$b-3,9$
...	...

Забележуваме дека во секој момент бројот на децата на десниот брег на реката е или делив со 3, или при делење со 3 дава остаток 1. Но, бројот 20 при делење со 3 дава остаток 2, па затоа бројот на децата на десниот брег на реката никогаш не може да биде еднаков на20. ■

7. Дали може множеството природни броеви да се подели на три непразни заемно дисјунктни подмножества така што ако x припаѓа на првото подмножество и y припаѓа на второто подмножество, тогаш $x+y+xy$ да припаѓа на третото подмножество.

Решение. Нека A е множеството во кое е бројот 1. Со x да го означиме најмалиот природен број кој не е во A. Нека $x \in B$ и да претпоставиме дека $x > 3$. Тогаш $3 \in A$. Третото множество го означиме со C. Од $1 \in A$ и $x \in B$ следува $1+x+x \cdot 1 = 2x+1 \in C$. Понааму, од $1 \in A$ и $2x+1 \in C$ следува $1+2x+1+(2x+1)\cdot 1 = 4x+3 \in B$. Од $3 \in A$ и $x \in B$ следува $3+x+3x = 4x+3$ $\in C$. Според тоа, добивме дека бројот $4x+3$ е и во B и во C, што не е можно. Значи, $x \leq 3$. Можни се два случаја: $x = 2$ или $x = 3$.

Прв случај. $x = 2$, т.е. $2 \in B$. Од $1 \in A, 2 \in B$ следува дека $1+2+1\cdot 2 \ = 5 \in C$. Од $1 \in A, 5 \in C$ следуа дека $11 \in B$. Ако претпоставиме дека $3 \notin B$, тогаш ќе добиеме дека бројот $2+3+2\cdot 3 = 11$ е или во A или во C (во зависност од тоа дали $3 \in C$ или $3 \in A$), што противречи на $11 \in B$. Змачи, $3 \in B$ и тогаш $1+3+1\cdot 3 = 7 \in C$, па од $1 \in A, 7 \in C$ следува $1+7+1\cdot 7 = 15 \in C$. Сека од $1 \in A$, $15 \in B$ следува $1+15+1\cdot 15 \ = 31 \in C$, а од $3 \in B, 7 \in C$ следува $3+7+3\cdot 7 =$ $31 \in A$, што е противречност.

Втор случај. $x = 3$, што значи $2 \in A, 3 \in B$. Од $1 \in A, 3 \in B$ следува $7 \in C$, а од $2 \in A, 3 \in B$ следува $11 \in C$. Сега од $1 \in A, 7 \in C$ добиваме $15 \in B$. Но, тогаш од $1 \in A, 15 \in B$ следува $31 \in C$, а од $3 \in B, 7 \in C$ следува $31 \in A$, што е противречност.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека бараната поделба на множеството природни броеви не е можна. ■

8. Дали постои природен број со следново својство: Ако на бројот му ја избришеме првата одлево-надесно цифра, тогаш бројот се намалува:
а) 58 пати, б) 57 пати.

Решение. а) Нека претпоставиме дека постои таков број и нека тој има $k \geq 2$ цифри, при што прва од лево е цифрата x. Нека по пречкртувањето на x се добива бројот y кој има $k-1$ цифра. Тогаш точно е равенството $10^{k-1}x + y$ $= 58y$, т.е. равенството $10^{k-1}x = 3\cdot 19y$. Последното равенство не е можно, бидејќи x е цифра и 19 е прост број кој не е делител на $10^{k-1} = 2^{k-1}5^{k-1}$ за ниту еден број k.

б) Аналогно како во а) го добиваме равенството $10^{k-1}x + y = 57y$, кое е е еквивалентно со равенството $10^{k-1}x = 2^3 \cdot 7y$. Бидејќи x цифра и $7 \nmid 10^{k-1}$, од последното равенство добиваме $x = 7$, што значи $10^{k-1} = 2^3 y$, односно $y = 2^{k-4}5^{k-1}$. Сега за $k = 4$ добиваме $y = 125$, што значи дека бројот 7125 е со саканото својство и тоа не е единствен таков број. ■