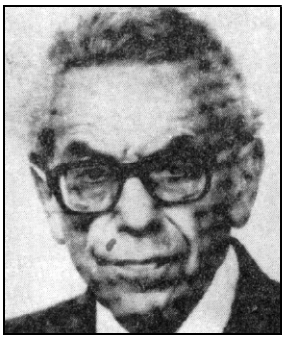
Ратко Тошиќ
Нови Сад

ПАЛ ЕРДЕШ (1913-96)



Кога имал неполни 4 години, Пал Ердеш и рекол на својата мајка: *“Ако од* 100 *одземеш* 250, *ќе добиеш* 150 *под нулата”*. Малиот Пал тогаш веќе знаел на памет да множи трицифрени и четирицифрени броеви, но дотогаш никој не му кажал дека постојат и негативни броеви. Во подоцнежните години тој со радост се сеќавал: *“Тоа беше самостојно откритие.”*

Ердеш беше вечен патник; живеше патувајќи од еден до друг универзитет, од една научна конференција до друга. Меѓутоа, остана цврсто поврзан со Унгарија, каде што беше необично ценет и почитуван, не само од математичарите. Секој научен собир на кој учествуваше го претвораше во математички празник. Умре на 20. септември 1996 година во Варшава, каде што држеше предавања во рамките на двонеделниот минисеместар од комбинаторика.

Во секој поглед колоритна фигура, Пал Ердеш имаше шармантен обичај да нуди парични награди за решавање на математички проблеми. Така, на пример, 1971. година, понуди 10 долари на оној кој ќе најде барем еден непарен ексцентричен број и 25 долари за доказ дека таков број не постои. (Ексцентричен е оној број кој е помал од збирот на своите вистински делители, но не може да се претстави како збир на некои свои различни вистински делители. 70 е најмалиот ексцентричен број.) Овој пример не го наведуваме заради занимливоста на задачата, туку заради префинетета проценка на Ердеш за релативната вредност на контрапримерот и доказот. Паричната вредност на наградата не беше поттик на математичарите да ги решаваат Ердешовите проблеми. Да се реши некој од Ердешовите проблеми претставуваше чест за секој математичар, а банкнотите добиени од него значеа повеќе од званичните дипломи и се чувани како најдраги спомени.

Најславен негов доказ е доказот (заедно со Селберг) на Теоремата за простите броеви која гласи: *Ако е* $\pi(n)$ *бројот на простите броеви кои не се поголеми од n, тогаш*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)\ln n}{n}=1.$$

Тврдењето прво го докажале Адамар и Вале-Пусен со методите на комплексната анализа. Ердеш 1949. година, заедно со Селберг, објавил елементарен доказ, во кој воопшто не се користат комплексни броеви.

Пал Ердеш зборуваше дека Господ на небото има КНИГА која ги содржи доказите на сите математички теореми кои можат да се замислат; уште повеќе, тие докази се најдобри и најелегантни. За доказите за кои сметаше дека се значајни и исклучителни, велеше дека се од КНИГАТА.

Ердеш остави длабока трага во математиката, не само со наброените резултати во математиката, особено во теоријата на броеви и комбинаториката. Имено, тој беше и најголем составувач на математички проблеми на сите времиња, од задачи наменети за средношколците до истржувачки проблеми, меѓу кои некои и до денешен ден не се решени. Многу негови проблеми послужиле како почетна точка за научни истражувања во различни области на математиката. Во голема мерка благодарејќи му на Ердеш, унгарската математика завзема така високо место во светот.

Во продолжение ќе ви презентираме пет проблеми на Пал Ердеш, кои во различни временски периоди се објавувани во списанието “American Mathematical Monthly”.

1. *Докажете дека меѓу било кои n+1 природни броеви помали или еднакви на 2n, постојат два такви што едниот од нив е делител на другиот.*

   Решение. Нека дадените броеви се $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ и нека 2^{b_r} е најголемиот степен на бројот 2 во каноничното разложување на a_r на прости множители. Тогаш, $a_r = 2^{b_r} c$, каде c е непарен број. Бидејќи меѓу природните броеви од 1 до 2n има n непарни, од принципот на Дирихле следува дека меѓу дадените n+1 броеви a_r мора да постојат два кај кои факторите c се поклопуваат. Очигледно едниот од нив е делив со другиот.

2. *Нека* $1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_k \le n$ *е низа од природни броеви, такви што НЗС*$(a_i, a_j) > n$. *Докажете дека* $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \le \frac{3}{2}$.

   Решение. Слично како во претходната задача се докажува дека
   $$k \le \left[\tfrac{n+1}{2}\right]. \tag{1}$$
   Од друга страна, ако број a_i се наоѓа во низата, тогаш ниден природен број b таков што $a_i b \le n$ не може да се наоѓа во низата и сите тие броеви од облик $a_i b$ се различни. Бројот на таквите броеви b е еднаков на $\left[\frac{n}{a_i}\right]$. Значи, $\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{a_i}\right] \le n-1$, од каде што следува $\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{a_i} \le n-1+k$. Од последното неравенство и од неравенството (1) добиваме
   $$\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{a_i} \le n + \left[\tfrac{n}{2}\right] \le \tfrac{3}{2}n,$$
   од што следува
   $$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i} \le \tfrac{3}{2}.$$

3. *Нека* $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < 2n$ *се природни броеви, такви што ниеден од нив не е делив со некој друг број на низата. Докажете дека* $a_1 \ge 2^k$, *каде*

бројот k е определен со неравенствата $3^k < 2n < 3^{k+1}$. *Докажете дека оваа оценка за* a_1 *не може да се подобри.*

Решение. Да ги запишеме членовите на низата во облик $a_\upsilon = 2^{b_\nu} c_\upsilon$, каде c_υ се непарни броеви. Броевите c_υ се различни, бидејќи ако меѓу членовите на низата постојат два со еднакви фактори c_υ, тогаш едниот од нив ќе биде делив со другиот, што противречи на условот на задачата. Според тоа, членовите на низата можат да се претставут во облик $a_\upsilon = 2^{b_\nu} c_\upsilon$, каде множителите c_υ со точност до нивниот поредок се поклопуваат со членовите на низата 1, 3, 5, ..., 2*n*-1. Прво да ја разгледаме поднизата броеви a_υ, за кои $c_\upsilon = 1,3,3^2 \dots ,3^k$. Членовите на оваа подниза можат да се претставут во облик $2^{\beta_i} 3^i$, каде $i = 0,1,2,\dots ,k$, при што $\beta_i > \beta_{i+1}$, бидејќи во спротивно следниот член на поднизата ќе биде делив со претходниот. Според тоа, $\beta_i \ge k - i$ и затоа $2^{\beta_i} 3^i \ge 2^{k-i} 3^i \ge 2^k$. Ако a_1 припаѓа на разгледуваната подниза, тогаш тврдењето на задачата е докажано. Во спротивно $c_1 \ge 5$.

Сега да претпоставиме дека спротивно на тврдењето на задачата,

$$a_1 = c_1 2^{b_1} < 2^k, \text{ каде } c_1 \ge 5.$$

Затоа,

$$c_1 < 2^{k-b_1}, \text{ каде } k - b_1 \ge 3.$$

Според претходно докажаното, множителите c_υ се различни непарни броеви, не поголеми од 2*n*. Според тоа, броевите $c_1 3^{\lambda-1}$, за $\lambda = 1,2,3,\dots ,b_1 + 2$, припаѓаат на множеството множители c_υ, бидејќи најголемиот од нив го задоволува неравенството

$$3^{b_1+1} c_1 < 3^{b_1+1} 2^{k-b_1} < 3^{b_1+1} 3^2 2^{k-b_1-3} < 3^k < 2n. \qquad (2)$$

Овие броеви определуваат подниза на почетната низа $a_\lambda = c_1 3^{\lambda-1} 2^{b_\lambda}$, каде $\lambda = 1,2,3,\dots ,b_1 + 2$. Меѓу членовите на оваа подниза можат да се најдат два члена такви што едниот од нив, спротивно на условите на задачата, е делив со другиот, доколку броевите b_λ не се разликуваат и ни за еден λ не важи неравенството $b_\lambda < b_1$. Меѓутоа, ова неравенство не е можно, бидејќи λ прима $b_1 + 2$ вредности, а постојат најмногу $b_1 + 1$ различни ненегативни цели броеви, кои не се поголеми од b_1.

За да докажеме дека оценката на најмалиот член на низата не може да се подобри, наведуваме пример на низа кај која најмалиот член, за произволно *n*, е еднаков на 2^k. Членовите на таа низа можат да се запишат во облик

$$a_{ij} = 2^{k_i - j} 3^j \omega_i,$$

каде ω_i се сите непарни броеви кои го задоволуваат неравенството $\omega_i < 2n$ и се заемно прости со 3,

$$3^{k_i} < \frac{2n}{\omega_i} < 3^{k_i+1}, \quad j = 0,1,\ldots,k_i.$$

Не е тешко да се види дека броевите a_{ij} се различни, помали од $2n$ и дека ги има точно n. Лесно се докажува дека најмалиот од броевите a_{ij} е еднаков на 2^k. На пример, за n=15, нашата низа ја формираат броевите 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29.

4. *Нека е p прост број поголем од 3 и* $n = \frac{2^{2p}-1}{3}$. *Докажете дека n е делител на* $2^n - 2$.

Решение. Во разложувањето

$$n-1 = \frac{4(2^{p-1}+1)(2^{p-1}-1)}{3},$$

множителот 4 е делив со 2, $2^{p-1}-1$ е делив со p (според малата теорема на Ферма, бидејќи p е прост број) и со 3 (бидејќи p е непарен прост број). Според тоа, ако p>3, тогаш $2^{p-1}-1$ е делив со 3p, а n-1 е делив со 2p. Според условот на задачата, бројот $2^{2p}-1$ е делив со n. Бидејќи n-1 е делив со 2p, добиваме дека $2^{n-1}-1$ е делив со $2^{2p}-1$, па затоа и со n. Конечно, n е делител на $2^n - 2$, што и требаше да се докаже.

5. *Дадени се k природни броеви* $a_1 < a_2 < \ldots < a_k \le n$, *каде* $k > \left[\frac{n+1}{2}\right]$. *Докажете дека барем за еден пар броеви (i,r) важи* $a_1 + a_i = a_r$.

Решение. Да го разгледаме множеството од k-1 природни броеви

$$a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_k - a_1.$$

Заедно со множеството од дадените k различни природни броеви, добиваме 2k-1>n природни броеви, кои се помали или еднакви на n. Од принципот на Дирихле следува дека двете множества имаат барем еден заеднички елемент, т.е. барем еднаш важи $a_i = a_r - a_1$ т.е. важи $a_1 + a_i = a_r$.

За $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ тврдењето не важи, што може да се види од следниот пример:

$$\left[\frac{n}{2}\right]+1, \left[\frac{n}{2}\right]+2, \ldots, n.$$

Како што веќе рековме Ердеш беше познат по многуте поставени проблеми. Долу наведените негови проблеми се уште не се решени.

1. *Нека P е произволна точка во внатрешноста на триаголник. Со* a_1, a_2, a_3 *да ги означиме растојанијата од точката P до темињата на триаголникот, а со x, y и z растојанијата од точката P до страните на триаголникот. Определете ја најмалата вредност на изразот* $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{x + y + z}$.
2. *Дадени се n точки во рамнината такви што меѓу нив не постојат три колинеарни точки. Ги разгледуваме оние парови точки меѓу кои растојанието е еднакво на 1. Кој е најголемиот број на такви парови?*
3. *Докажете дека* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!-1}$ *е ирационален број.*
4. *Докажете дека во конвексен n-аголник* ($n \geq 5$) *не постои теме кое е еднакво оддалечено од други четири темиња.*

Р. Малчески

Скопје

ДАЛИ АХИЛ ЌЕ ЈА СТИГНЕ ЖЕЛКАТА?

Една од апориите (апорија - логичка тешкотија, доказ според кој не е можно никакво движење) на античкиот филозоф Зенон од Елеја (околу 464-401 год. п.н.е.) гласи:

Ахил трча десет пати побрзо од желката. Во моментот кога почнале да трчаат, желката имала 100 *m* предност. Додека Ахил ги претрча тие 100 *m* желката се оддалечува 10 *m*, па затоа Ахил нема да ја стигне. Додека Ахил ги претрча обвие 10 *m* желката се оддалечува 1 *m* и Ахил повторно нема да ја стигне, итн. Значи, Ахил нема да ја стигне желката.

Каде е грешката во ваквото залучување кое очигледно доведува до грешен резултат?

Ако Ахил ги претрча првите 100 *m* за t секунди, тогаш 10 *m* ќе ги претрча за $\frac{t}{10}$ секунди итн. Тврдењето дека Ахил никогаш нема да ја стигне желката ќе биде точно во случајот ако времето

$$t + \frac{t}{10} + \frac{t}{10^2} + \ldots + \frac{t}{10^n}$$

е неограничено. Но, како ова време е еднакво на

$$t \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{t}{9}\left(10 - \frac{1}{10^n}\right) s$$

тоа за произволен природен број n е помало од $\frac{10t}{9}$ секунди, па значи не е бесконечно големо. Според тоа терминот “никогаш“ нема оправдување. Грешката во заклучувањето настанала бидејќи од бесконечноста на процесот се извлекува заклучок за бесконечност на збирот на времетраењата на поодделните етапи.

Дека Ахил ќе ја стигне желката можеме да се увериме и со најосновните поими од физиката. Нека S е должината на патот што Ахол мора да го помине да ја стигне желката и нека V е неговата брзина. Тогаш $\frac{S}{V} = \frac{S-100}{\frac{V}{10}}$ односно $S = \frac{1000}{9}$ метри. Ако Ахил претрчал 100 m за време од t секунди, тогаш желката ќе стигне за $\frac{\frac{1000}{9}m}{\frac{100}{t}m/s} = \frac{10}{9}t\ s$, што е јасно и од претходната дискусија (збир на геометриски ред).

ЕКОНОМИЧЕН РЕЗЕРВОАР

Марко сака да направи резервоар за вода, па затоа се распрашал за цената на цементот и заклучил дека со расположливите пари може да цементира $12m^2$. Но, не знае какви димензии треба да има резервоарот, така што неговиот волумен да биде најголем. Отишол кај ѕидарот Павле да му направи пресметка. Кажувајќи му го проблемот Марко додал дека резервоарот не треба да има поклопец. Со обзир на градежните тешкотии решиле основата на резервоарот да биде квадрат, а ѕидовите правоаголници, па останало да ги одредат димензиите на основата и висината.

Павле бил практичен и не сакал да губи време со детални пресметки, па размислувал на следниот начин: коцката е тело кое содржи најголем волумен од сите квадари со дадена плоштина, па значи коцката е најекономичен облик на резервоарот. Меѓутоа, бидејќи во овој случај нема капак, доволни се пет квадратни плочи. Бидејќи вкупната плоштина е $12m^2$, секоја плоча ќе има по $2,4m^2$. Страната на коцката, тогаш приближно е 1,55 m, а волуменот е $3,72m^3$.

Ова на Марко му изгледало добро, но не му се допаднала брзината со која Павле пресметувал. Можеби Павле сепак згрешил? Што мислите вие?

Навистина, Марко со право се сомневал. На пример, ако за резервоарот земеме основа квадрат со страна 1,8m а висината да е 1,216 m, тогаш плоштината на резервоарот ќе биде $12m^2$, а волуменот $3,94m^3$. Каде згрешил Павле?

Фактите кои Павле ги користел се точни ако станува збор за вкупна плоштина на коцка. Но, овда резервоарот нема капак, па затоа ваквиот **некритичен пренос на фактите доведува до грешка**. Може да се каже дека, во случај кога основата е квадрат димензиите на резервоарот се 2m, 2m и 1m и тој ќе има најголем волумен од $4m^3$.