Медитеранска математичка олимпијада

12.06.2020 година

Задача 1. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=4$. Докажи дека

$$\frac{ab}{\sqrt[4]{3c^2+16}}+\frac{bc}{\sqrt[4]{3a^2+16}}+\frac{ca}{\sqrt[4]{3b^2+16}}\le\frac{4\sqrt[4]{12}}{3}.$$

Задача 2. Нека S е множество од $n \geq 2$ природни броеви. Докажи дека постојат најмалку n^2 природни броеви кои можат да се запишат во облик $x + yz$ каде $x, y, z \in S$.

Задача 3. Определи ги сите природни броеви $m \geq 2$ за кои постои природен број $n \geq 1$ таков што

$$\mathrm{NZD}(m,n)=1 \text{ и } \mathrm{NZD}(m,4n+1)=1.$$

Задача 4. Нека P, Q, R се точки од кружницата k_1 такви што $\overline{PQ}=\overline{PR}$ и $\overline{PQ}>\overline{QR}$. Нека k_2 е кружница со центар во P која ги содржи точките Q и R. Нека претпоставиме дека кружницата со центар во Q која минува низ R по вторпат ја сече кружницата k_1 во точката X и по втор пат ја сече k_2 во точката Y.

Точките X и R лежат на различни страни на правата PQ.

Докажи дека точките P, X и Y се колинеарни.

Секоја задача се вреднува по 7 поени.
Време за работа 4:30
Користењето на калкулатор не е дозволено.