

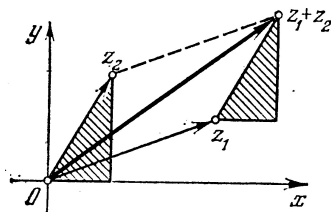
## ПРЕСЛИКУВАЊА ВО РАМНИНА ПРЕКУ КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ I

### 0. ВОВЕД

Во оваа статија, користејќи ги комплексните броеви ќе ги разгледаме сличностите во евклидската рамнина. Исто така со помош на апаратот на комплексните броеви ќе ја разработиме и инверзијата, пресликување кое и покрај неговото огромно значење не се изучува во нашиот образовен систем.

#### а) Геометриска интерпретација на комплексен број

**0.1.** Со  $\mathbf{R}^2$  ја означуваме евклидската рамнина со декартови координати. Секој комплексен број  $z = x + iy$  е подреден пар реални броеви  $(x, y)$ . Бидејќи множеството подредени парови реални броеви  $(x, y)$  е во обратно еднозначно соодветствие со  $\mathbf{R}^2$ , добиваме дека на секоја точка  $A \in \mathbf{R}^2$  можеме да и придружиме комплексен број  $z = x + iy$ , и обратно. За комплексниот број  $z$  кој соодветствува на точката  $A$  ќе велиме дека е нејзин **афикс**. Ова соодветствие меѓу комплексните броеви и точките од евклидската рамнина е биекција. При тоа, реалните броеви се пресликуваат на точките од апсисната оска, а имагинарните на точки од ординатата. Затоа апсисната оска ја нарекуваме **реална**, а ординатната оска ја нарекуваме **имагинарна оска**. При вакво толкување  $\mathbf{R}^2$ , природно ја нарекуваме **комплексна рам-**



Црт. 1

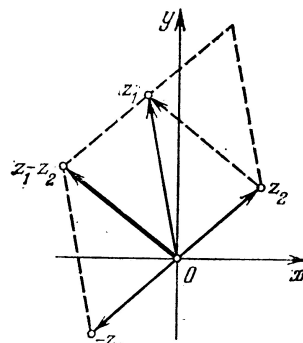
нина, а комплексните броеви **точки** од оваа рамнина.

Јасно, точките  $z$  и  $-z$  се симетрични во однос на координатниот почеток, а  $\bar{z}$  и  $z$  се симетрични во однос на реалната оска. Имено, ако  $z = x + iy$  тогаш

$$-z = (-x) + i(-y) \text{ и } \bar{z} = x + (-y)i.$$

Очигледно, комплексниот број  $z$  соодветствува на векторот со почетна точка  $O$  и крај во точката  $z$ . Јасно, ова соодветствие меѓу комплексните броеви и векторите на комплексната рамнина со почеток во  $O$  исто така е биекција. Затоа векторот, кој го одредува комплексниот број  $z$ , ќе го означуваме со истата буква  $z$ .

Со помош на векторската интерпретација нагледно можеме да ги илустри-



Црт. 2

раме собирањето и одземањето на комплексни броеви. Според 1.2 добиваме дека бројот  $z_1 + z_2$  соодветствува на векторот, добиен со собирање на векторите  $z_1$  и  $z_2$  (црт. 1). Векторот  $z_1 - z_2$  се конструира како збир на векторите  $z_1$  и  $-z_2$  (црт. 2).

Од досега изнесеното и од црт. 2 следува дека растојанието меѓу точките  $z_1$  и  $z_2$  е еднакво на должината на векторот  $z_1 - z_2$ , т.е. еднакво е на  $|z_1 - z_2|$ . Јасно модулот  $|z|$  е еднаков на должината на радиус векторот на точката  $z$ . Ако ги разгледаме триаголниците со темиња во точките  $O, z_1, z_1 + z_2$  и  $O, z_1, z_1 - z_2$ , тогаш е очигледна геометриската смисла на познатите неравенства

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  и  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$   
за модулот на комплексен број.

**0.2. Делење на отсечка во даден однос.** Нека се дадени точките  $A$  и  $B$  чии афикси се  $z_1$  и  $z_2$ , соодветно, и нека  $C$  е точка од отсечката  $AB$  која ја дели  $AB$  во однос  $\lambda : \mu$ , т.е.  $\overrightarrow{\mu AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$ . Од  $\overrightarrow{AC} = z - z_1$  и  $\overrightarrow{CB} = z_2 - z$  добиваме  $\mu(z - z_1) = \lambda(z_2 - z)$ . Според тоа, за афиксот на точката  $C$  имаме  $z = \frac{\lambda z_2 + \mu z_1}{\lambda + \mu}$ .

Така, на пример средната точка  $C$  на отсечката  $AB$  чии крајни точки имаат афикси  $a = 1 + i$  и  $b = 3 + 5i$ , има афикс

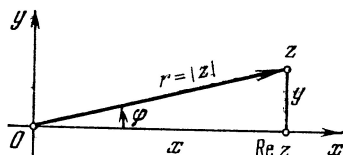
$$c = \frac{1 \cdot a + 1 \cdot b}{1 + 1} = \frac{(1+i) + (3+5i)}{2} = 1 + 3i.$$

**0.3. Пример.** Множеството точки  $z$ , кои ја задоволуваат равенката  $|z - z_0| = R$ , е кружница со радиус  $R$  и центар во точката  $z_0$ . Имено,  $|z - z_0|$  е растојание помеѓу точките  $A$  и  $B$  чии афикси се  $z$  и  $z_0$ , соодветно. ♦

### б) Тригонометриски запис на комплексен број

#### 0.4. Аргумент на комплексен број.

Аголот  $\varphi$ , кој го зафаќа радиус-векторот на точката  $z$  со позитивната насока на реалната оска, го нарекуваме **аргумент** на комплексниот број  $z$ , и за



Црт. 3

него ја прифаќаме ознаката  $\varphi = \text{Arg } z$ , (црт. 3). Аргументот го сметаме за позитивен или негативен во зависност од тоа, дали истиот е ориентиран од позитивната насока на реалната оска кон позитивната или кон негативната насока на имагинарната оска, соодветно.

За бројот  $z = 0$  аргументот не е определен, па затоа во сите натамошни

разгледувања поврзани со аргументот, претпоставуваме, дека  $z \neq 0$ .

Положбата на точката  $z$  во комплексната рамнина е еднозначно определена како со нејзините декартови координати  $x, y$  така и со поларните координати  $r = |z|$  и  $\varphi = \text{Arg } z$ . Овие координати меѓу себе се поврзани со формулите

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (1)$$

За дадена точка  $z$  нејзиниот модул е еднозначно определен, а аргументот со точност до собирок  $2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Вредноста на аргументот, која го задоволува условот  $0 < \text{Arg } z \leq 2\pi$  ја нарекуваме **главна вредност на аргументот** и ја означуваме со  $\arg z$ . Во натамошните разгледувања најчесто работиме со главната вредност на аргументот.

**0.5. Тригонометриски запис на комплексен број.** Од формулите (1), кои ги сврзуваат декартовите и поларните координати на точката  $z$ , го добиваме таканаречениот тригонометриски запис на комплексен број

$$z = |z| (\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)). \quad (2)$$

Користејќи го записот (2) за производот на комплексните броеви:

$$z_1 = |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad \text{и}$$

$$z_2 = |z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

добиваме

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (3)$$

Од својствата на множењето на комплексни броеви, дефиницијата на  $\arg$  и од  $z_1 z_2 = |z_1 z_2| (\cos(\arg(z_1 z_2)) + i \sin(\arg(z_1 z_2)))$  следува, дека

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi, \quad (4)$$

за  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Аналогно, од равенството  $z_1 = z_2 z_3$ , при  $z_2 \neq 0$ , од својствата на операцијата делење на комплексни броеви добиваме

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**0.6. Моаврова формула.** Формулите (3) и (4), за производ на два комплексни броеви, со помош математичка индукција, лесно се обопштуваат за конечно многу множители  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Имено,

$$\arg(z_1 z_2 \dots z_n) = \arg z_1 + \dots + \arg z_n + 2k\pi, \quad (5)$$

за  $k = 0, \pm 1, \dots$ . Специјално, за  $z_1 = \dots = z_n$ , добиваме  $|z^n| = |z|^n$ ,  $\arg z^n = n \arg z + 2k\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$  односно

$$z^n = |z|^n (\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z)). \quad (6)$$

Формулата (6) е позната како **Моаврова формула**.

**0.7. Пример.** Пресметајте ја разликата  $(-1+i\sqrt{3})^9 - (1+i\sqrt{3})^9$ .

**Решение.** Од

$$|-1+i\sqrt{3}| = 2 \text{ и } \arg(-1+i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

за  $k = 0, \pm 1, \dots$  добиваме

$$-1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right).$$

Согласно Моавровата формула имаме:

$$(-1+i\sqrt{3})^9 = 2^9 \left(\cos \frac{2\pi}{3} \cdot 9 + i \sin \frac{2\pi}{3} \cdot 9\right) = 2^9$$

Аналогно добиваме

$$(1+i\sqrt{3})^9 = 2^9 \left(\cos \frac{9\pi}{3} + i \sin \frac{9\pi}{3}\right) = -2^9.$$

Според тоа,

$$(-1+i\sqrt{3})^9 - (1+i\sqrt{3})^9 = 2^9 - (-2^9) = 2^{10}. \quad \blacklozenge$$

### в) Коренување на комплексни броеви

**0.8. Дефиниција.** Нека е даден комплексен број  $z \neq 0$  и природен број  $n$ .  $n$ -ти корен од  $z$  дефинираме како комплексен број  $w$  за кој важи

$$w^n = z. \quad (7)$$

Притоа ја прифаќаме ознаката  $w = \sqrt[n]{z}$ . Користејќи ја Моавровата формула (6) и тригонометриските записи

$$z = |z| (\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) \text{ и}$$

$$w = |w| (\cos(\arg w) + i \sin(\arg w))$$

добиваме

$$\begin{aligned} |w|^n (\cos n(\arg w) + i \sin n(\arg w)) &= \\ = |z| (\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) \end{aligned}$$

односно

$$|w|^n = |z| \text{ и } n(\arg w) = \arg z + 2k\pi, \quad (8)$$

за  $k = 0, \pm 1, \dots$ . Од (4) и (8) добиваме

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}, \arg w = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

т.е.

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right) \quad (9)$$

Ако во формулата (9) ставиме  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  за  $w$  добиваме  $n$  различни вредности  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ . Ставајќи  $k = n$ , заради периодичноста на тригонометриските функции повторно го добиваме бројот  $w_0$  итн. Според тоа,  $n$ -от корен од комплексниот број  $z$ , има точно  $n$  различни вредности, кои се добиваат од формулата (9) за  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

**0.9. Пример.** Најдете  $\sqrt[3]{27i^5}$ .

**Решение.** Од

$$i^5 = i^4 \cdot i = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

добиваме

$$\sqrt[3]{27i^5} = \sqrt[3]{27i} = \sqrt[3]{27 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)}$$

$$= 3 \left( \cos \frac{2k\pi + \pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \pi}{3} \right)$$

$$= 3 \left( \cos \frac{(4k+1)\pi}{6} + i \sin \frac{(4k+1)\pi}{6} \right)$$

за  $k = 0, 1, 2$ .  $\blacklozenge$

**0.10.  $n$ -ти корени на единицата.** Ако  $z = 1$ , тогаш  $\arg z = 0$  и според (9)  $n$ -те различни корени на бројот 1 се зададени со

$$u_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (10)$$

Ако ставиме  $u = u_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ , тогаш од Моавровата формула добиваме  $u_k = u^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Да забележиме дека, во геометриската смисла, при  $n \geq 3$ , точките во комплексната рамнина чии афиски се  $n$ -те корени на единицата образуваат правилен  $n$ -аголник, впишан во единечната кружница и едно теме на  $n$ -аголниот се совпаѓа со точката чиј афиск е  $z = 1$ .

**0.10. Пример.** Нека  $S_p = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^p$  е збирот на  $p$ -тите степени на  $n$ -те корени на единицата,  $n \in \mathbf{N}$ . Докажете дека

$$S_p = \begin{cases} n, & \text{ако } n \mid p \\ 0, & \text{ако } n \nmid p. \end{cases}$$

**Решение.** Од  $u_k = u^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  и  $u = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ , добиваме

$$S_p = 1 + u^p + u^{2p} + \dots + u^{(n-1)p}. \quad (11)$$

Ако  $n \mid p$  и  $\frac{p}{n} = m$ , тогаш  $u^p = (u^n)^m = 1$  и од (11) следува  $S_p = n$ .

Нека  $n \nmid p$ . Притоа важи  $u^{np} = 1$ . Од  $n \nmid p$  следува  $u^p - 1 \neq 0$ , па затоа

$$S_p = 1 + u^p + u^{2p} + \dots + u^{(n-1)p} = \frac{u^{np} - 1}{u^p - 1} = 0. \quad \blacklozenge$$

**0.11. Дефиниција.** Комплексниот број  $u$  го нарекуваме **примитивен  $n$ -ти корен** на единицата, ако  $u^n = 1$  и ни еден понизок степен на  $u$  не е еднаков на 1.

**0.12. Пример.** Ако  $u_k = u^k$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  се  $n$ -те корени на единицата, тогаш  $u_k$  е примитивен  $n$ -ти корен на единицата ако и само ако  $n$  и  $k$  се заемно прости броеви.

**Решение.** Нека  $n$  и  $k$  се заемно прости броеви и да допуштиме дека за некој  $r < n$  важи  $u_k^r = 1$ . Од Моавровата формула имаме  $1 = u_k^r = \cos \frac{2kr\pi}{n} + i \sin \frac{2kr\pi}{n}$ .

Од последното равенство имаме

$$\cos \frac{2kr\pi}{n} = 1, \quad \sin \frac{2kr\pi}{n} = 0.$$

Според тоа,  $\frac{kr}{n} \in \mathbf{Z}$  и како  $n$  и  $k$  се заемно прости добиваме  $n \mid r$ , што не е можно бидејќи  $r < n$ . Значи,  $u_k$  е примитивен  $n$ -ти корен на единицата.

Обратно, нека  $u_k$  е примитивен  $n$ -ти корен на единицата. Да претпоставиме дека најголемиот заеднички делител на  $n$  и  $k$  е  $d$ ,  $d > 1$ . Нека  $k = k_1 d$ ,  $n = n_1 d$ .

Тогаш

$$u_k^{n_1} = (u_1^k)^{n_1} = u_1^{n_1 k} = u_1^{k_1 d n_1} = u_1^{k_1 n} = (u_1^n)^{k_1} = 1$$

што противречи на примитивноста на  $u_k$ , бидејќи  $n_1 < n$ .  $\blacklozenge$

### г) Експоненцијален запис на комплексен број

**0.13.** Во досегашните разгледувања го презентиравме тригонометрискиот

запис на комплексните броеви. Во овој дел ќе се задржиме на таканаречениот експоненцијален запис на комплексните броеви.

**Теорема.** Нека функцијата  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  е дефинирана со

$$f(\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad \text{за секој } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Тогаш,

а)  $f(\alpha) \neq 0, \forall \alpha \in \mathbf{R}$ .

б)  $f(\alpha + \beta) = f(\alpha)f(\beta), \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ .

в)  $f(-\alpha) = \frac{1}{f(\alpha)}, \forall \alpha \in \mathbf{R}$

**Доказ.** а) Нека постои  $\alpha \in \mathbf{R}$ , таков што  $f(\alpha) = 0$ . Според тоа, постои  $\alpha \in \mathbf{R}$ , таков што  $\cos \alpha + i \sin \alpha = 0$ , односно  $f(\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$ , што противречи на основниот тригонометриски идентитет  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ .

б) За секои  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  важи

$$f(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \\ = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = f(\alpha)f(\beta).$$

в) За секој  $\alpha \in \mathbf{R}$  имаме

$$f(-\alpha) = \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha) = \cos \alpha - i \sin \alpha \\ = \frac{(\cos \alpha - i \sin \alpha)(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{\cos \alpha + i \sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha + i \sin \alpha} = \frac{1}{f(\alpha)}$$

**0.14.** Во претходната теорема докажавме дека функцијата  $f$  ги задоволува вообичаените својства на експоненцијалната функција, па затоа природно е да ја воведеме ознаката  $f(\alpha) = e^{i\alpha}$ , за секој  $\alpha \in \mathbf{R}$ . При вакво означување својствата б) и в) од претходната теорема можеме да ги запишеме во обликот

$$e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha + \beta)} \quad (12)$$

$$e^{-i\alpha} = \frac{1}{e^{i\alpha}}. \quad (13)$$

Ако ги искористиме релациите (12) и (13) и принципот на математичка индукција, тогаш добиваме

$$(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}, \quad \text{за } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (14)$$

**0.15. Ојлерови формули.** Од досега изнесеното следува дека секој комплексен број  $z$ , таков што  $|z| = 1$  и  $\varphi = \arg z$  може да се запише во обликот

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}. \quad (15)$$

Притоа,

$$e^{2\pi} = 1, e^{\pi} = -1, e^{\frac{\pi}{2}} = i, e^{\frac{3\pi}{2}} = -i.$$

Ако  $\varphi$  го замениме со  $-\varphi$  добиваме

$$\cos \varphi - i \sin \varphi = e^{-i\varphi}. \quad (16)$$

Од релациите (15) и (16) ги добиваме познатите **Ојлерови формули**:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}, \quad (17)$$

со чија помош тригонометриските функции  $\cos$  и  $\sin$  се изразуваат преку експоненцијалната функција.

**0.16.** Од формулите (16) и (22) следува дека секој комплексен број  $z \neq 0$  можеме да го запишеме во обликот

$$z = re^{i\varphi}, \quad (18)$$

каде  $r = |z|$  и  $\varphi = \arg z$ . Записот (36) на комплексниот број  $z \neq 0$  го нарекуваме **експоненцијален запис** на  $z$ .

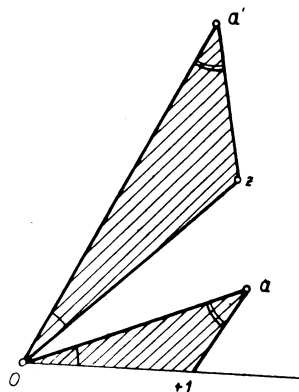
Ако ги искористиме формулите (12) и (13), тогаш за операциите множење и делење на комплексни броеви, запишани во експоненцијален запис, добиваме

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (19)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (20)$$

Нека  $z = re^{i\varphi}$ . Според (15) и (16) добиваме  $\bar{z} = re^{-i\varphi}$ . Значи, ако  $\varphi = \arg z$ , тогаш  $-\varphi = \arg \bar{z}$ .

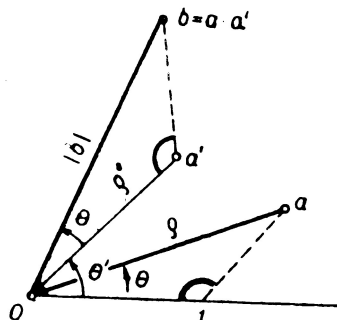
**0.19.** Нека со  $E$  ја означиме точката чиј афикс е 1. Да ги разгледаме точките  $A$  и  $A'$  чии афикси се  $a = \rho e^{i\theta}$  и



Црт. 4

$a' = \rho' e^{i\theta'}$ , соодветно. На производот  $b = aa'$  соодветствува точка  $B$ , која ја добиваме како трето теме на триаголникот  $OA'B$ , ако овој триаголник го конструираме така што да биде сличен со триаголникот  $OEA$ .

Навистина, од сличноста на овие триаголници следува дека  $\angle EOA = \angle A'OB$ , односно  $\arg b = \theta + \theta'$ . Од исти причини точно е равенството  $\rho : 1 = |b| : \rho'$ , т.е. важи  $b = \rho\rho'$ , па затоа  $b = aa'$ .



Црт. 5

Точката  $Z$  чиј афикс е комплексниот број  $z = \frac{a}{a'}$  се добива со конструкција на триаголник  $OZA'$  кој е сличен на триаголникот  $OEA$ . Навистина, од сличноста на овие триаголници следува дека  $az = a'$ , па затоа  $z = \frac{a'}{a}$ , (црт. 4).

Ако ја искористиме релацијата  $a^n = a^{n-1}a$  и ги примениме постапките за конструкција на афиксите за производ и количник на два комплексни броја последователно можеме да ги конструираме точките  $\dots, A_{-2}, A_{-1}, E, A_1, A_2, \dots$  чии афикси се комплексните броеви  $\dots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \dots$ , соодветно.

Нека  $r > 1$  и  $0 < \alpha < \pi$ . Точките  $A_2, A_3, \dots$  (црт. 6), чии афикси се комплексните броеви  $a^2, a^3, \dots$  се добиваат со последователно конструирање на сличните триаголници  $OEA_1, OA_1A_2, OA_2A_3, \dots$ .

Ако со оваа постапка, но во обратна насока ги конструираме сличните триа-

голници  $OE_1, OA_1E, OA_2A_1, OA_3A_2, \dots$  ги добиваме точките  $A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, \dots$  чии афиси се броевите  $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, \dots$ . Ако ставиме  $\rho = r^n, \theta = n\alpha$  и од овие равенки го елиминираме  $n$  добиваме дека  $\rho = r^{\frac{\theta}{\alpha}}$ . Според тоа, сите степени  $a^n$  лежат на кривата која во поларни координати е дадена со претходната релација. Оваа крива во литературата е позната како логаритамска (Bernoulli-ева) спирала

Јасно, во претходните разгледувања модулите на степените растат или опаѓаат по геометриска, а аргументите по аритметичка прогресија.

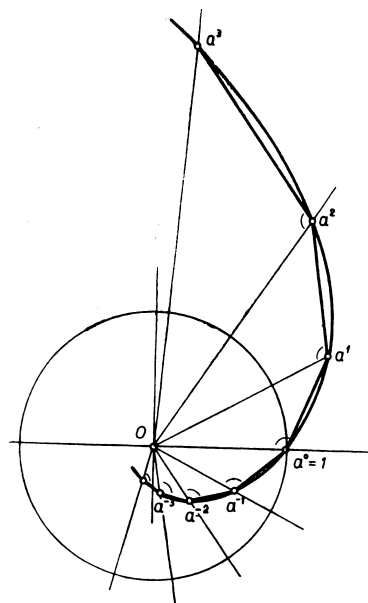
Да забележиме дека, ако  $r < 1$  и  $0 < \alpha < \pi$ , или  $r > 1$  и  $-\pi < \alpha < 0$ , тогаш логаритамската спирала е во спротивна насока од спиралата дадена на црт. 8, и се обвиткува околу координатниот почеток додека  $\theta$  расте. Меѓутоа, ако  $r < 1$  и  $-\pi < \alpha < 0$ , тогаш логаритамската спирала го има истиот облик како на црт. 6.

## 1. РАВЕНКА НА ПРАВА

**1.1.** Нека правата ( $p$ ) не поминува низ координатниот почеток и нека точката  $A$ , со афис  $a$ , е симетрична на координатниот почеток  $O$  во однос на правата ( $p$ ). Тогаш, точката  $B$ , со афис  $z$ , припаѓа на правата ( $p$ ) ако и само ако  $\overline{OB} = \overline{OA}$ , т.е.  $|z| = |z - a|$ , односно  $z\bar{z} = (z - a)(\bar{z} - \bar{a})$ . Последното равенство можеме да го запишеме во обликот

$$\bar{a}z + a\bar{z} = a\bar{a}. \quad (1)$$

Ако правата ( $p$ ) минува низ координатниот почеток и точките  $A$  и  $A'$ , со афиси  $a$  и  $a'$ , соодветно, се заемно симетрични во однос на координатниот почеток и во однос на ( $p$ ), тогаш за произволна точка, со афис  $z$ , од правата ( $p$ ) важи  $\overline{AB} = \overline{A'B}$ , т.е.  $|z + a| = |z - a|$ , односно  $(z + a)(\bar{z} + \bar{a}) = (z - a)(\bar{z} - \bar{a})$ . Последното равенство можеме да го запишеме во обликот



Црт. 6

$$\bar{a}z + a\bar{z} = 0. \quad (2)$$

Ако  $a = re^{i\varphi}$ , тогаш  $\bar{a} = re^{-i\varphi}$ , па ако равенките (1) и (2) ги поделиме со  $\bar{a}$  ги добиваме равенките

$$z = \eta\bar{z} + a \quad (3)$$

и

$$z = \eta\bar{z}, \quad (4)$$

каде  $\eta = -\frac{a}{\bar{a}} = -e^{2i\varphi}$ . Бројот  $\eta$  го нарекуваме **комплексен аглов коефициент** за правата ( $p$ ), а точка  $A$  ја нарекуваме **огледална точка** на правата ( $p$ ). Очигледно секоја права ( $p$ ), која не минува низ координатниот почеток е определена со огледалната точка  $A$ , со афис  $a = re^{i\varphi}$ , и комплексниот аглов коефициент  $\eta = -e^{2i\varphi}$ , а секоја права ( $p$ ) која минува низ координатниот почеток еднозначно е определена со својот комплексен аглов коефициент. Лесно се докажува дека и во двата случаи аголот меѓу правата ( $p$ ) и позитивниот дел на реалната оска е  $\alpha = \varphi - \frac{\pi}{2}$ .

Според тоа, важи теоремата.

**Теорема.** Ако  $A$ , со афикс  $a$ , е симетричната точка на координатниот почеток во однос на дадена права  $(p)$  која не минува низ координатниот почеток и ако  $\varphi$  е ориентираниот агол меѓу реалната оска и нормалата спуштена од координатниот почеток кон  $(p)$ , тогаш  $(p)$  има равенка (3), каде  $\eta = -e^{2i\varphi}$ . Ако  $(p)$  минува низ координатниот почеток, тогаш нејзината равенка е дадена со (4). ♦

**1.2. Теорема.** Правата  $(p)$  која минува низ две различни точки  $A$  и  $B$  со афикси  $z_0$  и  $z_1$ , соодветно, има равенка

$$z - z_0 = \frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_0} (\overline{z} - \overline{z_0}) \quad (5)$$

и комплексен аглов коефициент

$$\eta = \frac{z_1 - z_0}{\overline{z_1 - z_0}}. \quad (6)$$

**Доказ.** Афиксите  $z_0$  и  $z_1$  на точките  $A$  и  $B$  ги заменуваме во равенката (3) и добиваме  $z_0 = \eta z_0 + a$  и  $z_1 = \eta z_1 + a$ . Ако ги одземеме последните две равенки за комплексниот аглов коефициент наоѓаме  $\eta = \frac{z_1 - z_0}{\overline{z_1 - z_0}}$ , т.е. вбажи равенството (6). Со замена во  $z_0 = \eta z_0 + a$  добиваме  $a = z_0 - \frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_0} \overline{z_0}$ , па ако добиените вредности за  $\eta$  и  $a$  ги замениме во равенката (3) ја добиваме равенката (5). ♦

**1.3 Последица.** Точките  $z_0, z_1$  и  $z_2$  се колинеарни ако и само ако

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \frac{\overline{z_2 - z_0}}{\overline{z_1 - z_0}}. \quad (7)$$

**Доказ.** Според теорема 1.2 равенката на правата  $(p)$  која минува низ точките  $z_0$  и  $z_1$  е дадена со (5). Точките  $z_0, z_1$  и  $z_2$  се колинеарни ако и само ако  $z_2$  ја задоволува равенката (5), што значи ако и само ако е исполнето равенството  $z_2 - z_0 = \frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_0} (\overline{z_2} - \overline{z_0})$ , кое е еквивалентно на равенството (7). ♦

**1.4. Последица.** Точките  $z_0, z_1$  и  $z_2$  се колинеарни ако и само ако  $\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \in \mathbf{R}$ .

**Доказ.** Непосредно следува од последица 1.3 и својствата на комплексните броеви. ♦

**1.5. Забелешка.** Бидејќи  $|\eta| = \left| \frac{z_1 - z_0}{\overline{z_1 - z_0}} \right|$

равенката (5) можеме да ја запишеме во обликот

$$z - z_0 = \eta (\overline{z} - \overline{z_0}), \quad |\eta| = 1 \quad (8)$$

Обратно, секоја равенка од обликот (8) е равенка на права.

Навистина, од  $|\eta| = 1$  следува дека  $\eta = e^{2i\varphi}$ , за некој  $\varphi \in [0, \pi)$ . Ако сега ја составиме равенката на права која минува низ точките  $z_0$  и  $z_1 = z_0 + e^{i\varphi}$ , ја добиваме равенката (8).

**1.6. Забелешка.** Според теорема 1.1 правата која минува низ точката  $z_0 \neq 0$  и координатниот почеток има равенка

$$z = \eta \overline{z}, \quad \eta = \frac{z_0}{\overline{z_0}} = e^{2i\varphi} \quad (9)$$

и истата ги содржи точките чии афикси се квадратните корени на комплексниот аглов коефициент  $\eta$ .

Навистина, ако во равенката (9) замениме една од двете вредности на квадратниот корен на  $\eta$ , добиваме

$$\eta \sqrt{\eta} = \sqrt{\eta}^2 \sqrt{\eta} = \sqrt{\eta} |\sqrt{\eta}|^2 = \sqrt{\eta} \cdot 1 = \sqrt{\eta}$$

т.е. точките чии афикси се  $\sqrt{\eta}$  ја задоволуваат равенката (9).

**1.7. Теорема.** Ориентираниот агол  $\varphi$  меѓу правите  $(p)$  и  $(q)$  со комплексни аглови коефициенти  $\eta_1 = -e^{2i\varphi_1}$  и  $\eta_2 = -e^{2i\varphi_2}$ , соодветно, е даден со формулата  $e^{2i\varphi} = \frac{\eta_1}{\eta_2}$ .

**Доказ.** Според теорема 1.1 правите  $(p')$  и  $(q')$ , нормални на  $(p)$  и  $(q)$ , со позитивниот дел на реалната оска зафаќаат ориентираны агли  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , соодветно. Значи, ориентираниот агол меѓу овие прави е  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  и тој е еднаков на аголот меѓу правите  $(p)$  и  $(q)$ , како агли со нормални краци. Сега тврдењето на теоремата следува од релацијата

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{-e^{2i\varphi_1}}{-e^{2i\varphi_2}} = e^{2i(\varphi_2 - \varphi_1)} = e^{2i\varphi}. \blacklozenge$$

**1.8.** Равенството  $\varphi = 0$  е еквивалентно со тавенството  $\eta_1 = \eta_2$ , а равенството  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  е еквивалентно со равенството  $\eta_1 = -\eta_2$ , па затоа е точна следната последица.

**Последица. а)** Две прави се паралелни ако и само ако имаат еднакви комплексни аглови коефициенти.

**б)** Две прави се заемно нормални ако и само ако имаат спротивни комплексни аглови коефициенти.  $\blacklozenge$

**1.9. Пример.** Во рамнината се дадени две различни точки  $A$  и  $B$  чии афиски се  $z_1$  и  $z_2$ , соодветно. Одредете го афискот  $p'$  на точката  $P'$ , симетрична на точката  $P$  со афиск  $p$ , во однос на правата  $AB$ .

**Решение.** Низ точката  $P$  повлекуваме права  $l$ , нормална на правата  $AB$  и го наоѓаме пресекот  $P_1$  на оваа права со правата  $AB$ . Сега  $P_1(p_1)$  е средина на отсечката  $PP'$ , т.е.  $p_1 = \frac{p+p'}{2}$ , односно  $p' = 2p_1 - p$ .

Правата низ точките  $A$  и  $B$  има равенка

$$z - z_1 = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1} (\bar{z} - \bar{z}_1). \quad (10)$$

Комплексниот аглов коефициент на правата  $l$  е  $\eta_1 = -\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1}$ , па затоа нејзината равенка е

$$z - p = -\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1} (\bar{z} - \bar{p}). \quad (11)$$

Ако ги собереме равенките (10) и (11) го добиваме афискот  $p_1$  на точката  $P_1$ :

$$p_1 = \frac{(\bar{p} - \bar{z}_1)(z_2 - z_1) + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(p + z_1)}{2(z_2 - z_1)} \quad (12)$$

Со замена од (12) во равенката  $p' = 2p_1 - p$  за афискот  $p'$  на  $P'$  наоѓаме:

$$p' = \frac{\bar{p}(z_2 - z_1) + z_2 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_1}{z_2 - z_1}. \blacklozenge$$

**1.10. Пример.** Најдете го геометриското место на точки кои се еднакво оддалечени од две дадени точки  $A$  и  $B$ .

**Решение.** Нека афиските на точките  $A$  и  $B$  се  $a$  и  $b$  соодветно, и нека точката  $M$  со афиск  $z$  припаѓа на бараното геометриско место. Тогаш од  $\overline{MA} = \overline{MB}$  следува  $|z - a|^2 = |z - b|^2$ . Последната равенка е еквивалентна на равенката  $z - \frac{a+b}{2} = -\frac{b-a}{b-a} (\bar{z} - \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2})$ . Според тоа, бараното геометриско место е права која минува низ средината на отсечката  $AB$  и е нормална на правата  $AB$ .  $\blacklozenge$

## 2. РАСТОЈАНИЕ ОД ТОЧКА ДО ПРАВА

**2.1. Лема.** Равенката на права

$$z - z_0 = \frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_0} (\bar{z} - \bar{z}_0)$$

може да се запише во обликот

$$Az + B\bar{z} + C = 0, \quad C \in \mathbf{R} \text{ и } B = \bar{A} \neq 0. \quad (1)$$

Обратно, секоја равенка од обликот (1) е равенка на права.

**Доказ.** Нека е дадена равенката

$$z - z_0 = \frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_0} (\bar{z} - \bar{z}_0).$$

Имаме

$$z(\bar{z}_1 - \bar{z}_0) - \bar{z}(z_1 - z_0) + z_0 \bar{z}_1 - z_0 \bar{z}_1 = 0.$$

Ако последната равенка ја помножиме со  $i$  добиваме

$$i(\bar{z}_1 - \bar{z}_0)z - i(z_1 - z_0)\bar{z} + i(z_0 \bar{z}_1 - z_0 \bar{z}_1) = 0.$$

Земаме

$$A = i(\bar{z}_1 - \bar{z}_0), \quad B = -i(z_1 - z_0), \quad C = i(z_0 \bar{z}_1 - z_0 \bar{z}_1)$$

и за равенката на правата низ точките  $A$  и  $B$  со афиски  $z_0$  и  $z_1$  добиваме равенка од облик (1).

Обратно, нека е дадена равенката (1). Ако поделиме со  $A$  и ставиме  $\eta = -\frac{B}{A}$ ,  $a = -\frac{C}{A}$ , тогаш добиваме равенка од облик  $z = \eta \bar{z} + a$ ,  $|\eta| = 1$  и според теорема 1.1 е равенка на права.  $\blacklozenge$

**2.2. Дефиниција.** Равенката (1) ја нарекуваме **автокоњугирана** равенка на права.

(Продолжува!)