FMC 2019
Категорија-СЕНИОРИ

Охрид, 10.10.2019

1. Нека ABC е остроаголен триаголник, за кој $AB < AC < BC$ и нека D е произволна точка на продолжението на BC, после C. Кружницата $\omega(A, AD)$, ги сече полуправите AC, AB, CB во точките E, F, G, соодветно. Опишаната кружница ω_1 околу триаголникот AFG ги сече правите FE, BC, GE, DF, повторно во точките J, H, H', J'. Опишаната кружница ω_2 околу триаголникот ADE ги сече правите FE, BC, GE, DF, повторно во точките I, K, K', I'. Докажи дека четириаголниците $HIJK$ и $H'I'J'K'$ се тетивни и нивните центри на опишаните кружници се совпаѓаат.

2. Нека $n > 2$ е природен број. Скакулец се движи по страните на $n \times n$ квадратна шема, која е поделена на n^2 единелни квадратчиња. Тој се движи така што
а) во секое 1×1 квадратче од шемата поминува низ само една страна
б) кога ќе помине една страна од 1×1 квадратче од шемата, тој скока на теме на друго прозволно 1×1 квадратче од шемата, кое нема страна по која скакулецот се движел.
Скакулецот се движи се додека се исполнети условите на задачата.

Кој е најкраткиот и најдолгиот пат кој може да го помине скакулецот движејќи се според условот на задачата?

3. Определи ги сите функции $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ такви што
$$(x+\tfrac{1}{x})f(y) = f(xy) + f(\tfrac{y}{x})$$
за секои $x, y > 0$.

4. На два листа се запишани повеќе природни броеви. На првиот лист се запишани n броеви, додека на вториот лист се запишани m броеви. Ако еден број е запишан на некој од листовите тогаш е запишан на првиот лист и збирот на тој број со 13 или на вториот лист разликата на тој број со 23. Пресметај го количникот $\frac{m}{n}$.

Language: Macedonian

Време: 4 часа и 30 минути
Секоја точно решена задача се вреднува со 10 поени.

1. Let ABC be an acute triangle, for which $AB < AC < BC$ and let D be an arbitrary point on the line BC, after C. The circle $\omega(A, AD)$, intersects the half-lines AC, AB, CB in the points E, F, G, correspondingly. The circumscribed circle ω_1 of the triangle AFG intersects the lines FE, BC, GE, DF, again in the points J, H, H', J'. The circumscribed circle ω_2 of the triangle ADE intersects the lines FE, BC, GE, DF, again in the points I, K, K', I'. Prove that the quadrilaterals $HIJK$ and $H'I'J'K'$ are cyclic and the centers of their circumscribed circles coincide.

2. Let $n > 2$ be a positive integer. A grasshopper is moving along the sides of an $n \times n$ square net, which is divided on n^2 unit squares. It moves so that
a) in every 1×1 unit square of the net, it passes only through one side
b) when it passes one side of 1×1 unit square of the net, it jumps on a vertex on another arbitrary 1×1 unit square of the net, which does not have a side on which the grasshopper moved along.
The grasshopper moves until the conditions can be fulfilled.

What is the shortest and the longest path that the grasshopper can go through if it moves according to the condition of the problem? Calculate its length and draw it on the net.

3. Determine all functions $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ such that for every $x, y > 0$

$$(x + \tfrac{1}{x}) f(y) = f(xy) + f(\tfrac{y}{x}).$$

4. On two sheets of paper are written more than one positive integers. On the first paper n numbers are written and on the second paper m numbers are written. If one number is written on any of the papers then on the first paper is written also the sum of that number and 13, and on the second paper the difference of that number and 23. Calculate the value of $\frac{m}{n}$.

Language: English

Time: 4 hours and 30 minutes

Each problem is worth 10 points

1. $AB < AC < BC$ olan dar açılı bir ABC üçgeni veriliyor. D noktası BC ışını üzerinde BC doğru parçasının dışında bir nokta olsun. A merkezli AD yarıçaplı $\omega(A, AD)$ çemberi AC, AB, CB yarı-doğrularıyla sırasıyla E, F, G noktalarında kesişiyor. AFG üçgeninin çevrel çemberi ω_1; FE, BC, GE, DF doğrularıyla ikinci kez J, H, H', J' noktalarında kesişiyor. ADE üçgeninin çevrel çemberi ω_2; FE, BC, GE, DF doğrularıyla ikinci kez I, K, K', I' noktalarında kesişiyor. $HIJK$ ve $H'I'J'K'$ dörtgenlerinin çembersel olduğunu ve çevrel çember merkezlerinin çakışık olduuğunu gösteriniz.

2. $n > 2$ pozitif tam sayıdır. Bir çekirge n^2 tane birim kareden oluşan $n \times n$ lik kare şeklindeki bir ağın birim karelerinin kenarları üzerinde hareket ediyor.
a) her bir 1×1 birim karenin sadece bir kenarından geçiyor.
b) 1×1 lik bir birim karenin bir kenarını bitirdikten sonra sonra henüz hiçbir kenarını bitirmediği başka bir 1×1 lik birim karenin bir köşesine sıçrıyor.
Çekirge artık hareket edecek bir birim kare kalmayana kadar hareketine devam ediyor.

Çekirgenin bu şartlara uygun hareket ederek alabileceği en uzun ve en kısa yolu belirleyin. -Bu uzunluğu hesaplayınız, örnek yolu çiziniz-.

3. Her $x, y > 0$ reel sayıları için,

$$(x + \tfrac{1}{x}) f(y) = f(xy) + f(\tfrac{y}{x}).$$

şartını sağlayan tüm $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

4. Her birinde birden çok sayıda pozitif tam sayılar yazılmış iki kağıt veriliyor. Birinci kağıtta n tane pozitif tam sayı, ikinci kağıtta m tane pozitif tam sayı vardır. Herhangi bir kağıtta yazılmış olan bir sayının 13 fazlası birinci kağıtta 23 eksiği ikinci kağıtta bulunuyor. $\dfrac{m}{n}$ oranını hesaplayınız.

Language: Turkish

Sınav süresi 4 saat 30 dakikadır.
Her soru 10 puanlık