Ирена Трајковска, Скопје

ЗА ПРОБЛЕМОТ НА МИНИМАКС

Нека $x_1, x_2 \in (0,1)$ се такви што $0 < x_1 < x_2 < 1$. Да ја разгледаме функцијата

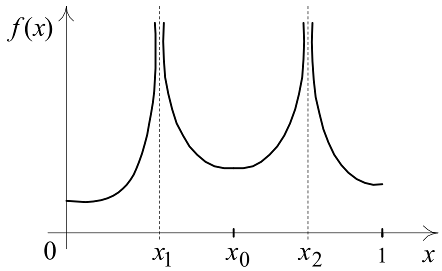
$$f(x) = \frac{1}{|x - x_1|} + \frac{1}{|x - x_2|}, \quad x \in [0,1] \setminus \{x_1, x_2\}.$$

Од $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = \lim\limits_{x \to x_2} f(x) = +\infty$ следува дека правите $x = x_1$ и $x = x_2$ се вертикални асимптоти за функцијата $f(x)$. Јасно, функцијата $f(x)$ е непрекината на интервалите $[0, x_1)$, (x_1, x_2) и $(x_2, 1]$, што заедно со претходно изнесеното значи дека таа има три локални минимуми и тоа во точките 0,1 и во $x_0 \in (x_1, x_2)$, каде $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ (проверете!). Притоа $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, (зошто?).

Нека m е минимумот на функцијата $f(x)$, т.е.

$$m = \min\{f(0), f(1), f(x_0)\}.$$

Јасно, m ќе зависи од изборот на точките x_1 и x_2, $0 < x_1 < x_2 < 1$, т.е. $m = m(x_1, x_2)$.



Цр̄ш. 1

Се поставува прашањето за кои вредности на x_1 и x_2, $0 < x_1 < x_2 < 1$ минимумот m е максимален и колкава е таа максимална вредност на минимумот $m = m(x_1, x_2)$?

Максималната вредност на минимумот $m = m(x_1, x_2)$ ќе ја наречеме MAXIMUM MINIMORUM за функцијата $f(x)$. Одговорот на претходното прашање ќе го најдеме со помош на таканаречениот асимптотски метод.

Нека $f(0) \neq f(1)$. Да ги придвижиме асимптотите $x = x_1$ и $x = x_2$ доволно малку кон помалата од вредностите $f(0)$ и $f(1)$, без да го менуваме растојанието $x_2 - x_1$ меѓу асимптотите. При ова поместување ние всушност го транслираме делот од графикот на $f(x)$ кој се наоѓа меѓу асимптотите, па затоа $\min f(x)$ меѓу асимптотите не се менува. Меѓутоа $\min\{f(0), f(1)\}$ се зголемува, па затоа $m = m(x_1, x_2)$ не се намалува. Според тоа, ако $f(0) \neq f(1)$, тогаш $m = m(x_1, x_2)$ не ја достигнува својата максимална вредност. Значи мора да е $f(0) = f(1)$, од што следува

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{1 - x_1} + \frac{1}{1 - x_2}.$$

Последното равенство е еквивалентно на равенството

$$[1 - (x_1 + x_2)]\,[2x_1 x_2 - (x_1 + x_2)] = 0,$$

од што следува $x_1 + x_2 = 1$, (зошто?). Според тоа асимптотите на функцијата $f(x)$ се симетрични во однос на средината на интервалот $[0,1]$, од што следува дека $x_0 = \frac{1}{2}$. Понатаму, ако

$$f(\tfrac{1}{2}) < f(0) = f(1)$$

и ако ги придвижиме асимптотите кон средината на интервалот, при што ја запазуваме симетричноста за да $f(0) = f(1)$, добиваме дека $m(x_1, x_2) = f(\frac{1}{2})$ се зголемува.

Ако пак

$$f(0) = f(1) < f(\tfrac{1}{2})$$

и ако ги придвижиме асимптотите кон краевите на интервалот, при што ја запазуваме симетричноста за да $f(0) = f(1)$, добиваме дека $m(x_1, x_2) = f(0) = f(1)$ се зголемува.

Од досега изнесеното следува дека максималната вредност на минимумот $m(x_1, x_2)$ се достигнува кога $f(0) = f(1) = f(\frac{1}{2})$. Од $f(0) = f(1)$ следува $x_1 + x_2 = 1$ т.е. $\frac{1}{2} - x_1 = x_2 - \frac{1}{2}$. Ако ставиме $x = \frac{1}{2} - x_1$, тогаш $x_1 = \frac{1}{2} - x$ и $x_2 = \frac{1}{2} + x$, па со смена во $f(0) = f(\frac{1}{2})$ ја добиваме равенката

$$\frac{1}{\frac{1}{2}-x} + \frac{1}{\frac{1}{2}+x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x},$$

од каде ја добиваме квадратната равенка $4x^2 + 2x - 1 = 0$ чии решенија се

$$x' = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ и } x'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Но, $x_1 < \frac{1}{2}$, што значи $x = \frac{1}{2} - x_1 > 0$, па затоа $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Според тоа за,

$$x_1 = \frac{1}{2} - x = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \text{ и } x_2 = \frac{1}{2} + x = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

минимумот $m = m(x_1, x_2)$ ја достигнува својата максимална вредност која е

$$m = f(\tfrac{1}{2}) = \frac{2}{x} = \frac{2}{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}} = 2(1+\sqrt{5}).$$

1. Проблемот на MAXIMUM MINIMORUM и полиномите на Чебишев

Во овој дел ќе го разгледаме проблемот на MAXIMUM MINIMORUM за функцијата

$$L(x) = \ln\frac{1}{|x-x_1|} + \ldots + \ln\frac{1}{|x-x_n|} \tag{1}$$

каде $-1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ и $x \in [-1, 1] \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. При тоа, за решавање на овој проблем ќе ги користиме полиномите на Чебишев, за кои ќе докажеме неколку својства.

Лема 1. За секој $n = 0, 1, 2, \ldots$ функцијата

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{2}$$

е полином со целобројни коефициенти.

Доказ. За $n = 0$ имаме $T_0(x) = \cos 0 = 1$, а за $n = 1$ важи

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x.$$

Од тригонометрискиот идентитет

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

следува

$$\cos(n-1)\alpha + \cos(n+1)\alpha = 2\cos n\alpha \cos\alpha,$$

па затоа

$$T_{n-1}(x)+T_{n+1}(x)=\cos[(n-1)\arccos x]+\cos[(n+1)\arccos x]$$
$$=2\cos(n\arccos x)\,\cos(\arccos x)\;=2x\,T_n(x)$$

што значи

$$T_{n+1}(x)=2x\,T_n(x)-T_{n-1}(x)\,. \tag{3}$$

Сега тврдењето следува од $T_0(x)=1, T_1(x)=x$, релацијата (3) и принципот на математичка индукција. ♦

Забелешка. Од релацијата (10) добиваме

$$T_2(x)=2x^2-1\,,\; T_3(x)=4x^3-3x\,,\; T_4(x)=8x^4-8x^2+1 \text{ итн.}$$

Да забележиме дека од релацијата (3), принципот на математичка индукција и од $T_0(x)=1, T_1(x)=x$ следува дека $T_n(x)$ е полином од n-ти степен. Да ги определиме нулите и екстремите на полиномот $T_n(x)$ на интервалот $[-1,1]$.

Од $T_n(x)=0$ следува $\cos(n\arccos x)=0$, па затоа

$$n\arccos x=\tfrac{\pi}{2}+k\pi,\quad k=0,1,2,...,n-1$$

односно

$$x=\cos\tfrac{\pi+2k\pi}{2n},\quad k=0,1,2,...,n-1$$

се n-те нули на $T_n(x)$ на интервалот $[-1,1]$.

Бидејќи $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ добиваме дека екстремите на $T_n(x)$ на $[-1,1]$ ги добиваме во точки за кои $T_n(x)=\pm1$. Според тоа

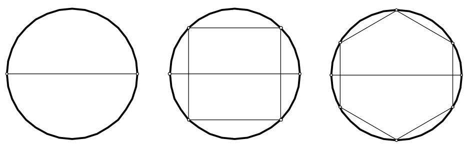
$$n\arccos x=k\pi,\quad k=0,1,2,...,n$$

односно

$$x=\cos\tfrac{k\pi}{n},\quad k=0,1,2,...,n$$

се точките во кои $T_n(x)$ на интервалот $[-1,1]$ прима екстремни вредности.

Задача 1. Во кружница со дијаметар $-1\le x\le 1$ впишете правилен $2n$-аголник поставен како на цртеж 2. Докажете дека нулите на полиномот $T_n(x)$ се совпаѓаат со проекциите на темињата на $2n$-аголникот врз дијаметарот, $n\ge1$.



$n=1$ $\quad$ $n=2$ $\quad$ $n=3$

Црт. 2

Решение. Темињата на правилниот $2n$- аголник впишан во кружница со радиус 1 во комплексна рамнина се дадени со формулата

$$z_k=\cos\tfrac{2k\pi}{2n}+i\sin\tfrac{2k\pi}{2n},\quad k=0,1,2,...,2n-1\,,$$

при што едно теме на $2n$-аголникот се наоѓа во точката $z_0=1$. Секој од правилните $2n$-аголници прикажан на цртеж 2 се добива од веќе разгледаниот $2n$-аголник со ротација за агол $\frac{\pi}{2n}$, па затоа на неговите темиња соодветствуваат комплексните броеви

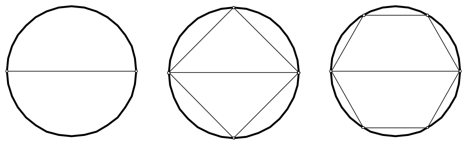
$$u_k=z_k\,e^{i\frac{\pi}{2n}}=\cos\tfrac{\pi+2k\pi}{2n}+i\sin\tfrac{\pi+2k\pi}{2n},\quad k=0,1,...,2n-1\,.$$

Нивните проекции врз дијаметарот (x - оската) се точките

$$\cos\tfrac{\pi+2k\pi}{2n},\quad k=0,...,2n-1,$$

а тоа се нулите на полиномот $T_n(x)$, при што секоја нула е броена двапати (зошто?).♦

Задача 2. Во кружница со дијаметар $-1\le x\le 1$ впишете правилен $2n$-аголник поставен како на цртеж 3. Докажете дека точките во кои полиномот $T_n(x)$ има екстреми се совпаѓаат со проекциите на темињата на $2n$ - аголникот врз дијаметарот, $n\ge 1$.



$n=1$ $n=2$ $n=3$

Црт. 3

Решение. Темињата на секој од правилните $2n$ - аголници ($n\ge 1$) прикажани на цртеж 3 се дадени со формулата

$$z_k=\cos\tfrac{2k\pi}{2n}+i\sin\tfrac{2k\pi}{2n},\quad k=0,1,2,...,2n-1$$

т.е. со формулата

$$z_k=\cos\tfrac{k\pi}{n}+i\sin\tfrac{k\pi}{n},\quad k=0,1,2,...,2n-1.$$

Нивните проекции врз дијаметарот (x - оската) се точките

$$\cos\tfrac{k\pi}{n},\quad k=0,1,...,2n-1,$$

а тоа се точките во кои полиномот $T_n(x)$ има екстреми, при што $n-1$- те точки се броени двапати (зошто?). ♦

Лема 2. Нека $T_n(x)$ е n - тиот полином на Чебишев. Ако

$$t_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x),$$

тогаш водечкиот коефициент на $t_n(x)$ е 1 и $\max\limits_{x\in[-1,1]}|t_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}$, $n\ge 1$.

Доказ. За $T_1(x)=x$ и $T_2(x)=2x^2-1$ водечките коефициенти се 2^0 и $2^1=2^{2-1}$, соодветно. Нека претпоставиме дека за $T_{n-2}(x)$ и $T_{n-1}(x)$ водечките коефициенти се 2^{n-3} и 2^{n-2}. Тогаш од (3) добиваме

$$T_n(x)=2x\,T_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$$

и како $T_n(x)$ е полином од n - ти степен, од претходната релација и од претпоставката следува дека коефициентот пред x^n во $T_n(x)$ е $2\cdot 2^{n-2}=2^{n-1}$.

Сега од принципот на математичка индукција следува дека водечкиот коефициент во $T_n(x)$ е 2^{n-1}. Од дефиницијата на $t_n(x)$ следува дека водечкиот коефициент за овој полином е $\frac{1}{2^{n-1}}\cdot 2^{n-1}=1$, што требаше да се докаже.

Понатаму,

$$\max_{x\in[-1,1]}|t_n(x)|=\max_{x\in[-1,1]}\left|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right|=\frac{1}{2^{n-1}}\max_{x\in[-1,1]}|T_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}.\ ♦$$

Лема 3. За секој полином $P(x)$ од n -ти степен и главен коефициент 1 важи

а) $\max\limits_{x\in[-1,1]}|P(x)|\ge\frac{1}{2^{n-1}}$, и б) ако $\max\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$, тогаш $P(x) \equiv t_n(x)$.

Доказ. а) Нека претпоставиме дека постои полином $P(x)$ од n - ти степен и водечки коефициент 1 таков што

$$\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Да ја разгледаме разликата $R(x) = t_n(x) - P(x)$. Полиномот $R(x)$ е со степен помал или еднаков на $n-1$. Ќе докажеме дека $R(x)$ има најмалку n нули, од каде ќе следува дека $R(x) \equiv 0$ т.е. $P(x) \equiv t_n(x)$.

Графикот на функцијата $y = t_n(x), x \in [-1, 1]$ се наоѓа меѓу правите $y = \pm\frac{1}{2^{n-1}}$ и наизменично ги допира овие прави во точките на максимум и минимум кои се во интервалот $(-1, 1)$, при што се формирани n лаци $d_1, d_2, ..., d_n$. Понатаму, графикот на функцијата $y = P(x), x \in [-1, 1]$ се наоѓа меѓу истите прави, но не ги допира, па затоа истиот ги сече лаците $d_1, d_2, ..., d_n$. Според тоа графиците на функциите $y = t_n(x)$ и $y = P(x)$ имаат најмалку n заеднички точки, од што следува дека функцијата $y = R(x)$ има најмалку n нули од што следува дека $P(x) \equiv t_n(x)$, што е противречност со

$$\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Од добиената противречност следува

$$\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| \le \frac{1}{2^{n-1}}.$$

б) Постапете аналогно како под а), само што сега не треба да се разгледува бројот на корените, туку збирот на нивните кратности. ♦

Лема 4. Минимумот на функцијата (1) на множеството

$$x \in [-1, 1] \setminus \{x_1, ..., x_n\}$$

достигнува максимална вредност кога $x_1, ..., x_n$ се совпаѓаат со нулите на полиномот $T_n(x)$ и таа вредност е $(n-1)\ln 2$.

Доказ. Нека $x_1, ..., x_n$ се нулите на $T_n(x)$. Според тоа, $x_1, ..., x_n$ се нули и на $t_n(x)$ и како водечкиот коефициент на $t_n(x)$ е еднаков на 1 добиваме

$$t_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n).$$

Од последното равенство добиваме

$$L(x) = \ln\frac{1}{|x-x_1|} + ... + \ln\frac{1}{|x-x_n|} = \ln\frac{1}{|x-x_1|...|x-x_n|} = \ln\frac{1}{|t_n(x)|}.$$

Од лема 3 следува дека минимумот на $L(x)$ има максимална вредност кога $x_1, ..., x_n$ се совпаѓаат со нулите на $t_n(x)$ и само во тој случај.

Понатаму, бидејќи $\ln x$ е монотоно растечка и непрекината функција од $\max\limits_{x\in[-1,1]} |t_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$ следува $\min\limits_{x\in[-1,1]} \frac{1}{|t_n(x)|} = 2^{n-1}$ односно

$$\min_{x\in[-1,1]} \ln\frac{1}{|t_n(x)|} = \ln 2^{n-1} = (n-1)\ln 2.$$

Значи, MAXIMUM MINIMORUM на $L(x)$ е $(n-1)\ln 2$. ♦